# Dimostrazioni della irriducibilità della rappresentazione standard di $S_n$

Bruno Bucciotti

2 marzo 2018

**Sommario**

Dimostro l'irriducibilità della rappresentazione standard di $S_n$ e mi esercito con LaTeX.

## Definizione di $\rho_{std}$

Partiamo definendo $\rho_{perm}$ come la rappresentazione per permutazione di $S_n$ agente su $\mathbb{C}^n$, $\rho_{perm}$: $G \to GL(\mathbb{C}^n)$. Chiamo $u = \sum_{f \in S_n} e_f$ e osservo che $\rho_{perm}$(u) = u. Dunque $\rho_{perm}$ agisce come la rappresentazione banale sul sottospazio $< u >$. Definisco $\rho_{std}$ la rappresentazione $\rho_{perm}$ meno la banale; $\rho_{std}$ è definita sul sottospazio di $\mathbb{C}^n$ tale che la somma delle coordinate sia 0. La tesi è che questa rappresentazione è irriducibile.

## 1 Caratteri

### 1.1 Definizioni

Azione transitiva: una azione di G gruppo su X insieme si dice transitiva se $\forall x, y \in X \, \exists g \in G \,|\, gx = y$.
Azione doppiamente transitiva: data una azione $A$ di G gruppo su X insieme ho una azione $B$ di G indotta su $X^2$ in cui agisco con $A$ su ciascuno dei 2 elementi. Dico $A$ transitiva se date qualunque due coppie $(x, y)$, $(x', y') \in X^2$ con $x \neq y$ e $x' \neq y'$ esiste $g \in G$ per cui $gx = x'$ e $gy = y'$. Osservo che $A$ doppiamente transitiva implica $A$ transitiva. Osservo inoltre che $B$ ha 2 orbite: $[(x, x)]$ e $[(x, y)]$ con $x \neq y \in X$.

### 1.2 Lemma

Suppongo $A$ doppiamente transitiva e applico il lemma di Burnside all'azione indotta $B$.

$$2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Stab_B(g)|$$

Se suppongo che gli elementi di X fissati da $A(g)$ siano $\{a, b, c, ..\}$ allora $B(g)$ fissa $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), ..\}$, cioè tutte le possibile coppie ordinate di questi. Dunque se $|Stab_A(g)| = n_g$ allora $|Stab_B(g)| = n_g^2$. Arrivo dunque a

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Stab_A(g)|^2 = 2$$

## 1.3 Proof

Osservo che $\rho_{perm}$ è doppiamente transitiva, poichè fissati 4 elementi $a \neq b$, $c \neq d$ ho che, supposto $a \neq d$, $(ac)(bd)$ manda $(a, b) \to (c, d)$; se invece $a = d$ allora ho che $(acb)$ manda $(a, b) \to (c, a)$. Calcolo allora

$$< \chi_{\rho_{perm}}, \chi_{\rho_{perm}} >=< \chi_{\rho_{triv}}, \chi_{\rho_{triv}} > +2 < \chi_{\rho_{triv}}, \chi_{\rho_{std}} > + < \chi_{\rho_{std}}, \chi_{\rho_{std}} >$$

$$= 1 + 2 < \chi_{\rho_{triv}}, \chi_{\rho_{std}} > + < \chi_{\rho_{std}}, \chi_{\rho_{std}} >$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Stab_{\rho_{perm}}(g)|^2 = 2$$

da cui $\rho_{std}$ irriducibile (e ortogonale alla banale).