Brevissime note a corredo di Isham

Bruno Bucciotti

12 agosto 2018

Sommario

Il libro di Isham di geometria differenziale è molto chiaro ma lascia qualche esercizio al lettore (per fortuna piuttosto agile) e ho pensato di svolgerne alcuni. Per le pagine si fa riferimento alla seconda edizione. Ogni tanto vengono fatte anticipazioni (ad esempio alcuni commenti sulle derivazioni): sono saltabili ad una prima lettura.

1 Spazio tangente

Una funzione $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ è C^∞ controllando una sola carta (p.70) Supponiamo x, x_2 carte per $U \in \mathcal{M}$ e analogamente y per $\mathcal{N}$. Allora supponiamo di sapere che $y \circ f \circ x^{-1}$ è liscia (ho controllato fissando una carta per ciascun spazio). Ho che

$$y_2 \circ f \circ x_2^{-1} = (y_2 \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x_2^{-1}) \circ (x_2 \circ x^{-1})$$

e queste 3 sono tutte liscie (2 sono cambi carta, lisci per Hp); notare che non hanno varietà nè come dominio nè come codominio.

Due curve tangenti sono tali in ogni carta (p.73) $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$. So che in una carta $(x \circ \sigma_1)'(0) = (x \circ \sigma_2)'(0)$. Se y è un'altra carta che copre p ho che $(x \circ \sigma_1)'(0) = (x \circ y^{-1} \circ y \circ \sigma_1)'(0)$. Ora ha senso applicare la regola della catena (su R^n) e ho $(x \circ y^{-1})'[(y \circ \sigma_1)(0)] * (y \circ \sigma_1)'(0)$. Procedendo analogamente per $(x \circ \sigma_2)'(0)$ ho che (usando la seconda ipotesi per l'uguale)

$$(x \circ y^{-1})'[(y \circ \sigma_1)(0)] * (y \circ \sigma_1)'(0) = (x \circ y^{-1})'[(y \circ \sigma_2)(0)] * (y \circ \sigma_2)'(0)$$

Il primo fattore ad ambo i lati è uguale per la prima Hp, inoltre è la matrice jacobiana di un cambio carta in un punto, dunque è invertibile per ipotesi (cambi carta sono diffeomorfismi), dunque i due vettori tangenti sono uguali.

Cambio curva per la derivata direzionale (p.75) $v = [\sigma]$, $\sigma_2 \in [\sigma]$. f funzione da derivare lungo v.

$$v(f) = (f \circ \sigma)'(0) = (f \circ x^{-1} \circ x \circ \sigma)'(0) = (f \circ x^{-1})'[(x \circ \sigma)(0)] * (x \circ \sigma)'(0)$$

Ora per l'ipotesi di equivalenza fra le curve è uguale scambiare σ con σ_2 e, ripercorrendo i passaggi al contrario, ottengo di nuovo $v(f)$ che quindi è ben definito.

Remark: Curve come spazio vettoriale Un punto non ovvio (e tedioso) della costruzione del tangente con le classi di curve è la questione del come definire prodotto per scalare e soprattutto somma di due curve. Il trucco è portare le curve su R^n con una carta, sommarle in modo maiale usando la struttura di spazio vettoriale di R^n e poi tornare indietro sulla varietà.

Remark: push-forward Il push-forward è una mappa lineare che, date due varietà $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ con $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, "spinge" un vettore v tangente in $p \in \mathcal{M}$ in un vettore w tangente in $\psi(p)$. Voglio definire $w(f)$. Vedendo i vettori tangenti come curve basta dire che applico ψ alle curve, vedendoli come derivazioni basta comporre la funzione $f : \mathcal{N} \to \mathbf{R}$ con ψ e ho una funzione $(f \circ \psi) : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ a cui è lecito applicare la derivazione v, $w(f) := v(f \circ \psi)$.

Il push-forward è lineare (p.78) Nota: la dimostrazione è banale per le derivazioni. Faccio solo la somma di due curve senza i coefficienti generici e considero due curve rappresentanti di altrettanti vettori tangenti. L'indipendenza dalla scelta del rappresentante è garantita dal punto 1 p.78. Le due curve si intersecano in p per $t = 0$ e $h(p) = q$; p e q sono l'origine in carta. Sommo i push-forward:

$$y^{-1}[y(h_*(\sigma_1)) + y(h_*(\sigma_2))] = y^{-1}[(y \circ h \circ \sigma_1) + (y \circ h \circ \sigma_2)]$$

Push-forward della somma:

$$h_*[x^{-1}(x \circ \sigma_1 + x \circ \sigma_2)] = (h \circ x^{-1})(x \circ \sigma_1 + x \circ \sigma_2)$$

Le due curve sono in generale diverse, ma sono tangenti. Dimostrazione: entrambe valgono q per $t = 0$. Inoltre devo verificare che, componendo y a sinistra e derivando in t, il vettore ottenuto in $t = 0$ sia lo stesso. Dalla prima espressione ho

$$(y \circ h \circ \sigma_1 + y \circ h \circ \sigma_2)'(0) = (y \circ h \circ x^{-1} \circ x \circ \sigma_1)'(0) + (y \circ h \circ x^{-1} \circ x \circ \sigma_2)'(0) =$$

$$(y \circ h \circ x^{-1})'(0)(x \circ \sigma_1)'(0) + (y \circ h \circ x^{-1})'(0)(x \circ \sigma_2)'(0)$$

Dove si è usata la regola per la derivata della sommma e la regola della catena. Ora la linearità del differenziale porta a

$$(y \circ h \circ x^{-1})'(0)(x \circ \sigma_1 + x \circ \sigma_2)'(0)$$

Che è ciò che volevamo.

Remark: derivazioni A pagina 84 si usa un lemma, che esprime il valore di f in q come il valore in p + correzioni date dalle derivate, per affrontare il problema del calcolare $v(f)$ in p nota l'azione di v sulle coordinate di base. La formula che si ottiene è analoga alla regola della catena usuale: $\partial_v f = \sum \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \partial_v x^\mu$ scriveremmo in R^n. Inoltre la formula evidenzia che qualunque derivazione si può scrivere come combinazione lineare di derivazioni di base, dove i coefficienti sono ciò che usualmente si indica come "componenti del vettore" ξ^μ.
Un altro problema è il come passare dall'approccio "curve" all'approccio "derivazioni". Data una curva la derivazione si ottiene banalmente; il viceversa merita un conto esplicito (p.86). Parto con v derivazione, $v = \sum v(x^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p$. Costruisco $\sigma = x^{-1}(v(x^1)t, .., v(x^n)t)$. In 0 fa correttamente p. Provo a derivarci f.

$$(f \circ \sigma)'(0) = [(f \circ x^{-1})(v(x^1)t, ..)]'(0) = \sum \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^\mu} \frac{d(v(x^\mu)t)}{dt} = \sum v(x^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p f$$

che è $v(f)$ come atteso.

Campi vettoriali e 1-forme in coordinate

Campi vettoriali (p.84) In ogni punto p della varietà vi è una base di derivazioni $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ che agiscono così: $\dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) := \dfrac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^\mu}(x(p))$ con x carta e il simbolo di derivata a destra è la derivata in $\mathbf{R}^n$. $X_p(x^\mu) = \sum X^\nu \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} x^\mu = X^\mu$ dove X^μ sono le coordinate del campo vettoriale X nella base data da x. Allora $X_p(f) = \sum X^\nu \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} f = \sum X^\nu f_{,\nu}$

1 forme (p.125) Stessa cosa, ma per convenzione gli indici sono scambiati alto-basso (così funziona meglio la convenzione di Einstein). $\omega(X) = \sum \omega_\nu dx^\nu X^\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum \omega_\nu X^\nu$ con $\omega_\mu = \omega(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu})$

2 Derivata di Lie

Tutto è definito limitandosi ai nostri scopi, ma sono possibili generalizzazioni.

Pull-back

di funzioni Data una funzione $f : \mathcal{N} \to \mathbf{R}$ e $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ voglio "tirare indietro" f e ottenere una funzione definita su $\mathcal{M}$. Questo è facile: definiamo pull-back di f lungo h, $(h^* f)(p) = (f \circ h)(p)$, $p \in \mathcal{M}$.

di campo vettoriale Dato un campo vettoriale Y definito su $\mathcal{N}$ e $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ vorrei definire pull-back di Y un campo vettoriale X su $\mathcal{M}$ h-related a Y, cioè tale che $h_*(X(p)) = Y(h(p))$, $p \in \mathcal{M}$. Purtroppo non è detto che esista, quindi facciamo l'ipotesi (non ottimale) che h sia diffeomorfismo. Allora $(h^{-1} \circ h)_*(X(p)) = X(p) = h_*^{-1}(h_*(X(p))) = h_*^{-1}(Y(h(p)))$. Dunque abbiamo una definizione per X come push-forward di Y mediante h^{-1}: $(h^*Y)(p) = h_*^{-1}(Y(h(p)))$.

General remark Ora applicheremo questi due concetti per definire la derivata di Lie di funzioni e campi vettoriali. Useremo $\phi(t,p)$ che, fissato p, è la curva integrale di X con $\phi(0,p) = p$. $\phi_t(p)$ e $\phi_p(t)$ sono ϕ considerando fissata una variabile. In particolare ϕ_p è un diffeomorfismo per t piccoli e verrà usato per comparare quantità in punti diversi. La derivata di Lie in p lungo X di un oggetto Y compara l'oggetto in $\phi(t,p)$ tirato indietro in p con l'oggetto in p.

Derivata di Lie di funzioni $\mathcal{L}_X(f)(p) := \lim_{t\to 0} \dfrac{\phi_t^* f - f}{t}(p) = \lim_{t\to 0} \dfrac{(f\circ\phi_t)(p) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{(f\circ\phi_p)(t) - (f\circ\phi_p)(0)}{t} = \dfrac{d}{dt}(f\circ\phi_p)|_0 = (X(p))(f) = (Xf)(p)$ dove in fondo si utilizza che ϕ_p è curva integrale di X, passando dalle curve alle derivazioni.

Derivata di Lie di campi vettoriali $[\mathcal{L}_X(Y)(f)](p) := \lim_{t\to 0} \dfrac{(\phi_t^* Y)f - Yf}{t}(p) =$
$\lim_{t\to 0} \dfrac{(\phi_t^{-1})_*(Y(\phi_t p))f - (Yf)(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{Y(\phi_t p)(f\circ\phi_{-t}) - Y(p)f}{t} =$
$\lim_{t\to 0} Y_{\phi_t p}\left(\dfrac{(f\circ\phi_{-t}) - f}{t}\right) + \left(\dfrac{Y_{\phi_t p} - Y_p}{t}\right) f =$
$Y_{\phi_0 p}(-Xf) + \lim_{t\to 0} \dfrac{(Yf)(\phi_p(t)) - (Yf)(\phi_p(0))}{t} = -Y(Xf)(p) + X(Yf)(p) =$
$[X,Y](f)(p)$
dove uso la definizione di pull-back, che $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$, definizione di push-forward, sommare zero, definizione di derivata, ..

3 Forme

Vivono nel fibrato cotangente. La fibra di cui è fatto il cotangente è lo spazio vettoriale duale al tangente. La base duale a $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ è dx^μ. Il pullback è un funtore controvariante, cioè $(f\circ g)^* = g^* \circ f^*$. $\omega(X)$ si indica anche $< \omega, X >$

Pullback di 1-forme $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ e ω 1-forma su $\mathcal{N}$, allora il pullback di ω, indicato $h^*\omega$, è tale che per ogni X campo su $\mathcal{M}$ $(h^*\omega)(X)_p = \omega(h_* X)_{h(p)}$. Mentre per il push-forward serve l'iniettività di h, qui al massimo si deve richiedere h suriettiva se si vuole che il pullback sia definito su tutto $\mathcal{TN}^*$

Pullback di k-forme $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ e ω k-forma su $\mathcal{N}$, allora $h^*\omega$ è tale che per ogni X_1, .., X_k su $\mathcal{M}$ si abbia $(h^*\omega)(X_1, .., X_k)_p = \omega(h_*X_1, .., h_*X_k)_{h(p)}$.

Derivata esterna d mappa linearmente k forme in k+1 forme. E' completamente caratterizzata da:

- Sulle funzioni df è il differenziale: $df = f_{,\mu} dx^\mu$
- Vale Leibnitz con α forma e f funzione: $d(fa) = df \wedge a + f da$
- d commuta con il pullback: $\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$

Valgono inoltre che $d^2 = 0$, e se α k-forma allora $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^k(\alpha\wedge d\beta)$. Concretamente data una k-forma $\omega = g dx^I$ ho $d\omega = \dfrac{\partial g}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^I$.

Formula per la derivata esterna

Formula generale Sia ω k forma. $(.., \hat{V}_i, .., \hat{V}_j, ..)$ significa tutti i vettori in ordine tranne quei 2.

$$(d\omega)(V_0, .., V_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i V_i \omega(.., \hat{V}_i, ..) + \sum_{i<j}^{k} (-1)^{i+j} \omega([V_i, V_j], V_0, .., \hat{V}_i, .., \hat{V}_j, ..)$$

Casi particolari

- 0-forma: $(df)(X) = X(f)$
- 1-forma: $(d\alpha)(V_0, V_1) = V_0\alpha(V_1) - V_1\alpha(V_0) - \alpha([V_0, V_1])$
- 2-forma: $(d\sigma)(V_0, V_1, V_2) = V_0\sigma(V_1, V_2) - V_1\sigma(V_0, V_2) + V_2\sigma(V_0, V_1) - \sigma([V_0, V_1], V_2) + \sigma([V_0, V_2], V_1) - \sigma([V_1, V_2], V_0)$

Interior product Data una k forma ω e un campo vettoriale X ho la (k-1) forma $(i_X\omega)(X_2, .., X_k) = \omega(X, X_2, .., X_k)$. Si indica anche $X \lrcorner \omega$. Vale la formula di Cartan: $\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$

Fatti utili su $\mathcal{L}_X(\omega)$, ω 1 forma (p.131)

- $\dfrac{d}{dt}\phi_t^{X*}\omega|_{t=s} = \phi_s^{X*}(\mathcal{L}_X\omega)$
- $\mathcal{L}_X < \omega, Y > = < \mathcal{L}_X\omega, Y > + < \omega, \mathcal{L}_X Y >$
- $(\mathcal{L}_X\omega)_\mu = \sum \omega_{\mu,\nu} X^\nu + \omega_\nu X^\nu_{,\mu}$