QFT conti

Bruno Bucciotti[*]

7 febbraio 2020

Abstract

Contazzi di QFT. Pochi concetti, molti conti, setup di tutto da zero. Dove ovvio, uguale vuol dire uguale al primo ordine. Si seguono le convenzioni dello Schwartz aggiustando tutti gli indici. Si migliora ogni giorno V.2

1 Lorentz

1.1 Introduzione

Le matrici Λ sono il male, usare $v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu}$, $v'_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} v_{\nu}$.

Esempio: da

$$(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \omega_{\alpha\beta} U_{\Lambda^{-1}} M^{\alpha\beta} U_{\Lambda} \quad \forall \omega_{\alpha\beta}$$

dimostrare che $U_{\Lambda^{-1}} M^{\alpha\beta} U_{\Lambda} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} M^{\mu\nu}$. *Dimostrazione*:

$$\eta_{\mu\tau} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}} \eta^{\sigma\alpha} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} M^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} M^{\mu\nu} = \omega_{\alpha\beta} U_{\Lambda^{-1}} M^{\alpha\beta} U_{\Lambda} \quad \forall \omega_{\alpha\beta}$$

usando che $v'_{\tau} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\tau}} v_{\nu}$ e che moltiplicandolo per $\eta^{\mu\tau}$ si ha

$$v'^{\mu} = \eta^{\mu\tau} v'_{\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\tau}} \eta^{\tau\nu} v_{\nu} = \eta^{\mu\tau} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\tau}} v_{\nu}$$

da cui

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\tau}} \eta^{\tau\nu} = \eta^{\mu\tau} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\tau}} \to \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \eta_{\mu\sigma} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\tau}} \eta^{\tau\alpha}$$

[*]bruno.bucciotti@sns.it

1.2 Algebra e esponenziale

Metrica: (+, -, -, -). Boost infinitesimo $\Lambda^\mu{}_\nu = (exp(i\theta_{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}))^\mu{}_\nu \simeq \delta^\mu_\nu + i\theta_{\alpha\beta}(V^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$.

La convenzione per ora sarà che all'esponente va sempre la i, poi la toglieremo dai boost.

$$V^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_i = V^{0i}, \qquad J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}V^{jk}$$

$$\beta_i = \theta_{oi}, \qquad \theta_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\theta_{jk}$$

Boost infinitesimo anche $\Lambda^\mu{}_\nu = exp(i\theta_i J_i + i\beta_i K_i)^\mu{}_\nu$.

Il commutatore fra le V è (ricordarsi primo-quarto, secondo-terzo)

$$[V^{\mu\nu}, V^{\rho\sigma}] = i[(\eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \mu \leftrightarrow \nu) - \rho \leftrightarrow \sigma]$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$$

2 Spinori

2.1 Rappresentazioni

$$J_\pm = \frac{1}{2}(J \pm iK)$$

Chiamo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ spinori sinistri ψ_R, che hanno solo J_+. $J = \frac{\sigma}{2}$, $K = -i\frac{\sigma}{2}$

Chiamo $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ spinori destri ψ_L, che hanno solo J_-. $J = \frac{\sigma}{2}$, $K = i\frac{\sigma}{2}$

Noto ciò è immediato che

$$\Psi_R \to exp\left(i\frac{\theta\cdot\sigma}{2} + \frac{\beta\cdot\sigma}{2}\right)$$

$$\Psi_L \to exp\left(i\frac{\theta\cdot\sigma}{2} - \frac{\beta\cdot\sigma}{2}\right)$$

2.2 Lagrangiana di Dirac senza fotoni

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 = (\phi^\dagger \; -\chi^\dagger)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

2.3 Matrici gamma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_{4\times 4} \qquad S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Le matrici S soddisfano l'algebra di Lorentz.

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = 4i[(\eta^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} - \mu \leftrightarrow \nu) - \rho \leftrightarrow \sigma]$$

$$S^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & \\ & \sigma_k \end{pmatrix} \quad S^{0i} = i \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = (\gamma^\mu)^\dagger, \qquad (\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j$$

γ^5

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \qquad [\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$$

2.4 Proprietà di trasformazione

$\bar{\psi}\psi$	scalare
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	vettore
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	pseudo-scalare
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	pseudo-vettore

2.5 Parità

TODO!

2.6 Coniugazione di carica

Per i campi spinoriali $\psi \to -i\gamma^2\psi^*$. Si dimostra che $\bar{\psi}\psi$ e $\bar{\psi}\not{\partial}\psi$ sono invarianti. Poichè $A_\mu \to -A_\mu$ però, il nuovo campo ψ soddisfa l'equazione di Dirac con $e \to -e$, cioè è un campo con carica opposta (da cui il nome coniugazione di carica per questa simmetria).

3 Fare i conti

Prodotto di ϵ

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^\rho_\gamma\delta^\sigma_\delta \pm ..)$$

dove gli altri termini (24 in tutto) sono sempre 4 delte con indici in alto uguali e indici in basso permutati in tutti i modi possibili. Il segno di ciascun termine è dato dalla parità della permutazione degli indici in basso. Il meno davanti a tutto è dovuto al fatto che $\epsilon_{0123} = +1$ ma $\epsilon^{0123} = -1$. Contraendo si ha

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^\rho_\gamma \pm ..)$$
$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -(2\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - 2\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha)$$
$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} = -6\delta^\mu_\alpha$$
$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

Autostati di σ

$$(\hat{n}\cdot\sigma)v_\pm = \pm v_\pm$$

dove $\hat{n}$ fa angoli θ e ϕ con gli assi. Allora

$$v_+ = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$v_- = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\phi}\cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

3.1 Campo scalare e vettoriale

Il campo scalare reale è

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_p}}(a^s_p e^{-ipx} + a^\dagger_p e^{ipx})$$

Quello complesso è

$$\Phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} (a_p^s e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{ipx})$$

e ha come corrente conservata

$$J^\mu = -i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) - 2eA^\mu \phi^* \phi$$

3.2 Campo spinoriale

$u^s(p)$ sono i due spinori per l'elettrone (s è la polarizzazione), $v^s(p)$ è analogo per positrone. b annichilano elettroni, d annichilano positroni.

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} (b_p^s u_p^s e^{-ipx} + d_p^{s\dagger} v_p^s e^{ipx})$$
$$\bar{\psi}(x) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} (b_p^{s\dagger} \bar{u}_p^s e^{ipx} + d_p^s \bar{v}_p^s e^{-ipx})$$

ψ quindi annichila un e^- e crea un e^+, $\bar{\psi}$ annichila un e^+ e crea un e^-.

Corrente conservata $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ è conservata (anche nel caso di interazione elettromagnetica). Mediante le relazioni di ortogonalità si dimostra che Q è la differenza fra numero di elettroni e di positroni. Viene dalla simmetria $\psi \to e^{-i\alpha}\psi$, $\bar{\psi} = e^{i\alpha}\bar{\psi}$.

Nel caso di langrangiana di Dirac massless esiste anche la simmetria $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$, $\bar{\psi} \to e^{i\alpha\gamma^5}\bar{\psi}$ che genera la corrente $j_{ax} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$, con $\partial_\mu j^\mu_{ax} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi = 0$.

Base chirale $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^j = \begin{pmatrix} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \end{pmatrix}$, $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\sigma^\mu = (1, \sigma^j), \qquad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^j)$$

Dall'equazione di Dirac si ha nella base chirale

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma}\xi_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\xi_s \end{pmatrix} \qquad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma}\eta_s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\eta_s \end{pmatrix}$$

ξ_s, η_s sono vettori a due componenti, ad esempio $\xi = \binom{1}{0}$ (spin up), $\xi = \binom{0}{1}$ (spin down). Per η spin up e down sono scambiati, $\eta = \binom{1}{0}$ (spin down), $\eta = \binom{0}{1}$ (spin up).

Nella base standard di Guadagnini ($\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) invece si ha

$$u_r(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\phi_r \\ \dfrac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{\sqrt{E+m}}\phi_r \end{pmatrix} \qquad v_r(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{\sqrt{E+m}}\xi_r \\ \sqrt{E+m}\xi_r \end{pmatrix}$$

$\phi_1 = (1,0)$ è spin up lungo $\hat{z}$, $\phi_2 = (0,1)$ è spin down lungo $\hat{z}$. Per le antiparticelle è il contrario, $\xi_2 = (1,0)$ è spin down lungo $\hat{z}$, $\xi_1 = (0,1)$ è spin up lungo $\hat{z}$.

***Motivo dell'inversione dello spin** Passando da particelle ad antiparticelle lo spin è l'opposto di quanto ti aspetti. Questo perchè $i\partial_t e^{ipx}$ dà energia formalmente negativa, dunque si stipula che per antiparticelle l'energia vada interpretata cambiata di segno. Per lorentz anche l'impulso va cambiato di segno (difatti $(\not{p}+m)v = 0$ mentre $(\not{p}-m)u = 0$), $\mathbf{L} = \mathbf{r}\wedge\mathbf{p}$, dunque anche $\mathbf{L}$ cambia segno e infine $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ si conserva, dunque anche $\mathbf{S}$ cambia segno.

Elicità L'operatore elicità è definito come $h = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\hat{p}^i S^{jk}$ ($\hat{p} = \frac{p}{|p|}$, S^{jk} è la matrice che genera le rotazioni e si ottiene dal commutatore delle matrici γ). Poichè in S compaiono solo indici spaziali e poichè le matrici γ^i sono uguali nella base chirale e in quella standard, si ha che in entrambe le basi h è

$$h = \frac{1}{2}\hat{p}^i \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$$

Si può verificare facilmente (in entrambe le basi) che, per particelle con impulso lungo $+\hat{z}$, u_{up} ha elicità $+1/2$ e u_{down} ha elicità $-1/2$. Viceversa v_{up} ha elicità $-1/2$ e v_{down} ha elicità $+1/2$.

3.3 Limite nonrelativistico

Nel limite nonrelativistico in u, v domina la massa m su p e $E \simeq m$. Consideriamo solo gli elettroni (solo u). Separiamo ψ (base standard!) in $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$. Per ispezione da u oppure con l'equazione di Dirac in trasformata si ricava che

$$\chi = \frac{\sigma\cdot\pi}{2m}\phi, \qquad \pi = p - eA$$

Dalle prime due delle quattro equazioni di Dirac si ricava

$$i\partial_t\phi = m\phi + \pi_j\sigma^j\chi$$

da cui sostituendo e trascurando m si ricava l'hamiltoniana di Pauli

$$H = \frac{1}{2m}\pi_i\pi_j\sigma^i\sigma^j$$

che si scrive anche come

$$\frac{\pi^2}{2m} + (eV) - \mu \cdot \mathbf{B}$$

con $\mu = 2\mu_B\mathbf{s}$.

3.4 Relazioni di ortogonalità e completezza

Spinori

$$\bar{u}_p^r u_p^s = 2m\delta_{rs} = -\bar{v}_p^r v_p^s$$
$$u_p^{\dagger r} u_p^s = 2E_p\delta_{rs} = v_p^{\dagger r} v_p^s$$
$$\bar{v}_p^r u_p^s = \bar{u}_p^r v_p^s = 0$$
$$v_p^{\dagger r} u_{-p}^s = u_p^{\dagger s} v_{-p}^r = 0$$

$$\sum_{r=1}^{2} u_p^r \bar{u}_p^r = \not{p} + m$$
$$\sum_{r=1}^{2} v_p^r \bar{v}_p^r = \not{p} - m$$

Fotoni $P_{\mu\nu}(p)$ è definito come il proiettore sul piano puramente spaziale ortogonale a $\mathbf{p}$.

$$\sum_{r,s} \epsilon_\mu^r(p)\epsilon_\nu^{*s}(p) = P_{\mu\nu}(p)$$

Nota che per via dell'identità di Ward è possibile rimpiazzare $P_{\mu\nu}(p)$ con $-\eta_{\mu\nu}$.

Gli spin possibili per un fotone sono solo ± 1. Supposto $\mathbf{p}$ diretto lungo $+\hat{z}$, lo spin lungo $\hat{z}$ si scrive in termini di $\epsilon_\mu(p)$ rispettivamente come $(0, 1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$. Negli altri casi fare a mano: ad esempio (sempre moto lungo $+\hat{z}$) spin $+1$ lungo $\hat{x}$ è la somma di spin $+1$ e -1 lungo $\hat{z}$ (si pensi agli autovettori delle matrici σ), dunque il vettore polarizzazione è $(0, 1, 0, 0)$.

Vettori massivi Discuto solo il caso in cui la particella è ferma. $\tilde{P}$ è l'identità sullo spazio, cioè proietta via la polarizzazione tempo.

$$\sum_{r,s} \epsilon^r_\mu(p)\epsilon^{*s}_\nu(p) = \tilde{P}$$

Il legame fra spin (lungo $\hat{z}$) $+1, 0, -1$ e vettori polarizzazione è come prima solo che a $\epsilon_\pm$ si aggiunge $\epsilon_0 = (0, 0, 0, 1)$.

3.5 Propagatori

Propagatore scalare $\dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.

Propagatore dei fotoni $\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$.

Propagatore dei vettori massivi $i\dfrac{\dfrac{p_\mu p_\nu}{m^2} - \eta_{\mu\nu}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.

Propagatore dei fermioni $\dfrac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$. L'impulso per linee interne è diretto come il fermione (gli elettroni vanno nel futuro).

Le linne esterne fermioniche vogliono un fattore u o $\bar{v}$ se sono pozzi (di elettroni o positroni risp.), $\bar{u}$ o v per le sorgenti. Per spinori esterni valgono le equazioni del moto secondo cui

$$(\not{p} - m)u_s(p) = \bar{u}_s(p)(\not{p} - m) = 0$$

$$(\not{p} + m)v_s(p) = \bar{v}_s(p)(\not{p} + m) = 0$$

3.6 Relazioni algebriche fra le matrici gamma

Introduzione

$$(\bar{v}^s_p \Gamma u^r_k)^* = \bar{u}^r_k \bar{\Gamma} v^s_p$$

$$\not{p}\not{q} = p \cdot q - iS^{\mu\nu} p_\mu q_\nu$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$$

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p}$$

$$\gamma_\mu \not{p}\not{q} \gamma^\mu = 4p \cdot q$$

$$\gamma_\mu \not{p}\not{q}\not{k} \gamma^\mu = -2\not{k}\not{q}\not{p}$$

Tracciologia La traccia di un numero dispari di matrici gamma (esclusa γ^5 che conta come 4 matrici gamma) è zero (ciclicità della traccia).

$$Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$$

$$Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - 4\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + 4\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}$$

$$Tr[\gamma^{\nu_1}\gamma^{\nu_2}..\gamma^{\nu_n}] = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\eta^{\nu_1\nu_k}Tr[\gamma^{\nu_2}..\hat{\gamma}^{\nu_k}..\gamma^{\nu_n}]$$

dove $\hat{\gamma}^{\nu_k}$ significa che la matrice γ^{ν_k} va omessa.

$$Tr[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu] = 0$$

$$Tr[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

attenzione: $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = -1$.

Medie

$$\bar{\Gamma} := \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$$

$$\sum_s (u_p^s)_\alpha(\bar{u}_p^s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_s (v_p^s)_\alpha(\bar{v}_p^s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta}$$

usando queste 3 si ricavano queste:

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_p^s\Gamma u_k^r|^2 = Tr[(\not{p} + m)\Gamma(\not{k} + m)\bar{\Gamma}]$$

$$\sum_{r,s} |\bar{v}_p^s\Gamma v_k^r|^2 = Tr[(\not{p} - m)\Gamma(\not{k} - m)\bar{\Gamma}]$$

$$\sum_{r,s} |\bar{v}_p^s\Gamma u_k^r|^2 = Tr[(\not{p} - m)\Gamma(\not{k} + m)\bar{\Gamma}]$$

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_p^s\Gamma v_k^r|^2 = Tr[(\not{p} + m)\Gamma(\not{k} - m)\bar{\Gamma}]$$

Inoltre valgono regole analoghe se invece di una matrice Γ abbiamo γ^μ:

$$"\sum_{r,s} |\bar{v}_p^s\gamma^\mu u_k^r|^2" = \sum_{r,s}(\bar{v}_p^s\gamma^\mu u_k^r)(\bar{u}_k^r\gamma^\nu v_p^s) = Tr[(\not{p} - m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu]$$

4 *D.o.f. degli spinori

Abbiamo detto che $(\not{p}-m)u = 0$ è l'equazione del moto (per v si ha $(\not{p}+m)v = 0$). Dobbiamo trovare il kernel di $(\not{p} \pm m)$. Facendo agire tali operatori su $\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$ si osserva che fissato ψ esiste ϕ e viceversa in modo che operando venga 0. Viceversa se fisso $\psi = 0$ ho che operando viene 0 sse $\phi = 0$. Notiamo inoltre che $(\not{p}+m)(\not{p}-m) = 0$. Dunque scrivendo $u_s(p) = \frac{\not{p}+m}{\sqrt{E+m}}\begin{pmatrix} \phi_s \\ 0 \end{pmatrix}$ stiamo generando due vettori indipendenti annichilati da $(\not{p}-m)$, cioè tutte e sole le soluzioni.

In conclusione ci sono 4 gradi di libertà fisici in uno spinore di Dirac, 2 con chiralità left e 2 right, ciascuno con 2 gradi di libertà di spin.

5 Mondo reale

Per Guadagnini

$$S = 1 + (2\pi)^4\delta^4(\cdot)\mathcal{M}$$

si ha che per decadimenti

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{2E_i}|\mathcal{M}|^2 \mathrm{d}\Pi_{LIPS}$$

mentre per scattering a due corpi

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2E_{1i}2E_{i2}|v_1 - v_2|}|\mathcal{M}|^2 \mathrm{d}\Pi_{LIPS}$$

con

$$\mathrm{d}\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4\delta^4(\cdot) \prod_{j\in\{final\ states\}} \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2\omega_j}$$

5.1 Caveat

Operatori uguali in $\mathcal{L}_I$ Se in $\mathcal{L}_I$ il campo ϕ (qualunque) compare n volte (es: ϕ^n, $\phi^{n-1}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$), ..) serve un fattore $n!$ nell'ampiezza (in un vertice, quale degli n ϕ crea/distrugge la particella di un certo impulso fissato? $n!$ possibilità equivalenti).

Particelle uguali nello stato finale Se nello stato finale compaiono m particelle identiche, quando si tratta di integrare nello spazio delle fasi serve un fattore $\frac{1}{m!}$.

5.2 Dimostrazione

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

dunque, ricordando che $(2\pi)^3\delta^3(0) = V$, si ha $\langle p|p\rangle = V$. Inoltre questa normalizzazione non è relativisticamente invariante, dunque quando si va a calcolare

$$\mathcal{A} = \langle f| S |i\rangle = \langle f| e^{i\int \mathcal{L}_I \mathrm{d}^4x} |i\rangle = \langle 0| aSa^\dagger |0\rangle$$

questa non è l'ampiezza invariante relativistica. Poichè $[\alpha_p, \alpha_q^\dagger] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})2\omega_p$, $\alpha = a\sqrt{2\omega}$. Infine quindi

$$\mathcal{A} = \frac{(2\pi)^4\delta^4(\cdot)}{\sqrt{2\omega_i}}\mathcal{M}$$

dove $\mathcal{M}$ è l'ampiezza relativistica e a denominatore va il prodotto delle energie di tutte le particelle. A questo punto

$$\mathrm{d}P = \frac{|\langle f| S |i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle}\frac{\mathrm{d}^3p_i(V)}{(2\pi)^3}$$

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{\mathrm{d}P}{T} = \frac{(2\pi)^4\delta^4(\cdot)VT|\mathcal{M}|^2}{2\omega_i T}\frac{1}{V^{N+1}}\frac{\mathrm{d}^3p_iV}{(2\pi)^3}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{j}\frac{\mathrm{d}P}{T} = \frac{1}{\frac{|v_1-v_2|}{V}}\frac{(2\pi)^4\delta^4(\cdot)VT|\mathcal{M}|^2}{2\omega_i T}\frac{1}{V^{N+2}}\frac{\mathrm{d}^3p_iV}{(2\pi)^3}$$

5.3 Estensione a potenziali esterni classici

Il punto di riferimento è "Scattering di elettroni in potenziale coulombiano" a pag.41 di Guadagnini, in cui l'interazione è $-e\bar{\psi}\gamma^0\psi A_0(\mathbf{x})$. Il nostro bellissimo e super-oliato macchinario dei diagrammi di Feynman che ci fa scrivere a colpo $\mathcal{M}$ e l'espressione per $\mathrm{d}\sigma$ va aggiustato così:

Quando si scrive $\mathcal{A}$ la delta di conservazione dell'impulso viene dall'integrale degli esponenziali $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$. Ora abbiamo anche $A_0(\mathbf{x})$, quindi la $\mathcal{M}$ (che ora non è più invariante relativistica) si scrive con le solite regole di Feynman eccetto che per quel vertice classico (che supponiamo sia unico). Lì il termine classico nella lagrangiana si manifesta nel vertice come

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}e^{-i(\mathbf{\Delta}\cdot\mathbf{x})}A_0(\mathbf{x})$$

dove $\mathbf{\Delta}$ sono gli altri impulsi (finali meno iniziali) nel vertice. Lo si vede pensando ai conti che si farebbero per scrivere $\mathcal{A}$. A questo punto $\mathcal{A}$ perde il $(2\pi)^3\delta^3(P_f - P_i)$ e lo stesso $\mathrm{d}\sigma$.