Trovare le Tabelle dei caratteri

Definizioni

- (**Rappresentazione**) Una rappresentazione di un gruppo G è un omomorfismo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale sul campo K (da noi solitamente $K = \mathbb{C}$ e G sarà un gruppo finito)
- (**Carattere**) Si dice carattere di una rappresentazione ρ la funzione indotta prendendo la traccia, ovvero $\chi_\rho : G \to K$ definita da $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}\,(\rho(g))$

Lemmi e Teoremi Standard

Siano $\rho_1, \ldots, \rho_r$ le rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito G (che sappiamo essere in numero finito). Sia n la cardinalità di G. Siano $d_i = \dim \rho_i$ le dimensioni delle rappresentazioni.
Indichiamo con cl_g la classe di coniugio di $g \in G$ e con c_g il numero di elementi che contiene. Irr (G) è un insieme di rappresentanti modulo isomorfismo dei caratteri irriducibili di G.

- (**Caratteri di un gruppo abeliano**) Un gruppo G è abeliano se e solo se tutte le sue rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1.
- (**Carattere di una rappresentazione irriducibile**) Una rappresentazione ρ di un gruppo G è irriducibile se e solo se $\langle \chi_\rho \mid \chi_\rho \rangle = 1$ (prodotto scalare interno)
- $d_1^2 + \ldots + d_r^2 = n$
- r è il numero di classi di coniugio diverse di G
- $\langle \chi_i \mid \chi_j \rangle = \delta_{ij}$
- $d_i = \chi_i(\mathrm{id})$, la dimensione della rappresentazione è la traccia dell'identità
- $\frac{c_g}{n} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}\,(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \delta_{cl_g cl_h}$
- I caratteri in dimensione 1 sono tutti e soli gli omomorfismi da G in $\mathbb{C}^*$. In particolare essi sono univocamente determinati sulle classi dei generatori. In più se g e g^a sono coniugati si ha $\chi(g) = \chi(g^a) = \chi(g)^a \implies \chi(g)$ è una radice $a-1$-esima dell'unità oppure è zero.

Osservazioni Stupide

- La rappresentazione banale $\chi_{\mathrm{id}}(g) = 1 \quad \forall g \in G$ c'è sempre
- Non tutte le stringhe di numeri sono caratteri Ci si chiede se esistano criteri sensati per poter dire che una stringa di numeri è un carattere di qualche rappresentazione. Risposte, anche parziali? (balbo)
- Può essere comodo inventarsi delle azioni di G su un qualche insieme, passare alla rappresentazione sullo spazio vettoriale libero e provare a scomporre questa sperando che saltino fuori dei nuovi caratteri.

Usiamo ora le tecniche sopra descritte per arrivare alle tabelle dei caratteri dei gruppi ciclici e di alcuni gruppi piccoli (S3, D4, Q8) per poi vedere alcuni trucchi più particolari

GRUPPI CICLICI

Essendo abeliani avranno solo caratteri di dimensione 1 e quindi per C_n avremo esattamente n caratteri. Siccome sono tutti di dimensione 1 basta fissarli su un generatore di $C_n = \langle g \rangle$. In particolare dovendo essere $1 = \chi(e) = \chi(g^n) = \chi(g)^n$ è necessario che $\chi(g)$ sia una radice n-esima dell'unità. Ciò è anche sufficiente in quanto stiamo cercando esattamente n caratteri.
Quindi, detta ζ una radice n-esima primitiva dell'unità si ha $\chi_i(g^j) = \zeta^{ij}$ con $i = 0, \ldots, n-1$, $j = 0, \ldots, n-1$ è tutta la tabella dei caratteri.

GRUPPI ABELIANI

Anche questi avranno solo caratteri di dimensione 1. Inoltre usando il teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti, sappiamo che essi sono prodotto diretto di gruppi ciclici. Dovendo lavorare solo con gli omomorfismi da G in $\mathbb{C}^*$ e sapendo che questi sono univocamente determinati dai loro valori sui generatori del gruppo, diciamo che i caratteri di G sono tutti e soli quelli che si ottengono scegliendo le immagini dei generatori dei gruppi ciclici che lo compongono (e un'immagine di un generatore può essere scelta in k modi, dove k è l'ordine del gruppo ciclico che genera).
Ovviamente dobbiamo trovare $\mid G \mid$ omomorfismi, ciascuno dei quali è univocamente determinato dalle immagini dei generatori. Ogni generatore inoltre può andare solo in un radice k-esima dell'unità, dove k è l'ordine del ciclico che genera. Quindi, per un rapido conto di cardinalità, si scopre che quelli così ottenuti sono omomorfismi (ne dobbiamo avere esattamente $\mid G \mid$) e che sono tutti e soli i caratteri di G.

S3, D4, Q8

TABELLA DEI CARATTERI DI S3

Partiamo con le cose di routine. Ordine di S3: 6 elementi. Generato da 2 elementi: (12) e (123). Ha tre classi di coniugio: $\{e\}, \{(12), (23), (13)\}, \{(123), (132)\}$. Siccome è non abeliano ha almeno una rappresentazione di grado ≥ 2. Ma rappresentazioni di grado 3 o più non può averne perché $3^2 \geq 6$ e quindi ha necessariamente almeno una rappresentazione di grado 2. Inoltre, siccome $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$ è l'unico modo di scrivere 6 come somma di quadrati con almeno un 2, ne segue che le rappresentazioni di S3 irriducibili saranno una di grado 2 e due di grado 1.
Per trovarle sappiamo che χ_{id}, la rappresentazione banale, esiste sempre. L'altra rappresentazione di grado 1 è l'omomorfismo di segno (cosa che ci appuntiamo perché questa c'è ovviamente in tutti i gruppi simmetrici). Ci resta da trovare una rappresentazione di grado 2. Abbiamo vari modi di trovarla:

- Calcolarla per ortogonalità delle righe o delle colonne (cosa che si può sempre fare quando manca un solo carattere)
- Scomporre la rappresentazione regolare di S3 sottraendo le proiezioni sui primi due caratteri

Ad ogni modo la tabella dei caratteri finale risulta:

numero elementi	1	3	2
classi di conj.	$\{e\}$	$\{(12), (23), (13)\}$	$\{(123), (132)\}$
χ_{id}	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1
χ_{std}	2	0	-1

TABELLA DEI CARATTERI DI D4

Ordine di D4: 8 elementi. Generato da 2 elementi: ρ, σ (rispettivamente rotazione e simmetria, con relazioni $\rho^4 = \sigma^2 = e$ e $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$). Ha 5 classi di coniugio: $\{e\}, \{\rho^2\}, \{\rho, \rho^3\}, \{\sigma, \sigma\rho^2\}, \{\sigma\rho, \sigma\rho^3\}$. Non è abeliano e ha almeno la rappresentazione banale, quindi si ha $8 = 2^2 + 4 \cdot 1^2$ è l'unico modo di scrivere 8. Dobbiamo quindi trovare 4 omomorfismi di D4 in $\mathbb{C}^*$ per poi ricavare per ortogonalità la rappresentazione

di dimensione 2.
Notiamo che, siccome σ ha ordine 2, esso può essere mandato solo in ± 1 (radici 2-esime dell'unità) e siccome ρ e ρ^-1 stanno nella stessa classe di coniugio si ha $x = \chi(\rho)$ deve essere una radice quarta dell'unità che rispetti $x = x^3$ e quindi deve essere solo o 1 o -1. Abbiamo quindi solo quattro possibili scelte per un possibile omomorfismo da D4 in $\mathbb{C}^*$, che sono quindi obbligate perché sappiamo che esistono 4 caratteri di dimensione 1 per D4 (ovvero omomorfismi). Quindi scrivendo questi nella tabella e completandola per ortonormalità si ha:

numero elementi	1	1	2	2	2
classi di conj.	e	ρ^2	ρ, ρ^3	$\sigma, \sigma\rho^2$	$\sigma\rho, \sigma\rho^3$
χ_{id}	1	1	1	1	1
χ_{a}	1	1	1	-1	-1
χ_{b}	1	1	-1	1	-1
χ_{ab}	1	1	-1	-1	1
χ_{g}	2	-2	0	0	0

Tabella dei caratteri di Q8

Gruppo dei quaternioni: $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Numero di elementi: 8. Generato da 2 elementi: i, j con relazione $ij = (-1)ji$. Classi di coniugio: $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$. Non abeliano ed ha almeno la rappresentazione banale quindi, come prima si ha $8 = 2^2 + 4 \cdot 1^2$. Cerchiamo i 4 omomorfismi e poi completiamo la tabella per ortogonalità.
Notiamo che -1 è un elemento che al quadrato fa l'identità, quindi può venir mandato solo in $\pm 1 \in \mathbb{C}$. Ma se lo mandassimo in -1 non si manterrebbe la relazione $\rho(i)\rho(j) = \rho(-1)\rho(j)\rho(i)$, siccome ora $\rho(i)\rho(j) = \rho(j)\rho(i)$. Quindi $\rho(-1) = 1$ necessariamente. Ora siccome si ha $i^2 = j^2 = -1$, i e j possono venir mandati solo in $\pm 1 \in \mathbb{C}$. Queste sono solo quattro possibilità per i caratteri (che sono completamente determinati dalle immagini di i e j) quindi li abbiamo trovati tutti. Completando si ottiene:

numero elementi	1	1	2	2	2
classi di conj.	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
χ_{id}	1	1	1	1	1
χ_{i}	1	1	1	-1	-1
χ_{j}	1	1	-1	1	-1
χ_{k}	1	1	-1	-1	1
χ_{g}	2	-2	0	0	0

Trucchi Generici

Questa sezione espone e dimostra piccoli ma utili trucchi che non abbiamo visto in classe (e quindi diventano ancora più utili)

- (**Possibili autovalori di un elemento**) Notiamo che se $g^k = e$ allora $\rho(g)^k = \rho(g^k) = \rho(e) = \text{id}$ quindi $\rho(g)$ si annulla sul polinomio $x^k - 1$, ovvero il polinomio minimo di $\rho(g)$ divide $x^k - 1$, che non ha radici doppie, quindi $\rho(g)$ è diagonalizzabile $\forall g$.
  Inoltre tra gli autovalori di $\rho(g)$ possono comparire soltanto radici n-esime dell'unità. Se diagonalizzato, ci si rende facilmente conto che $\text{tr}\,\rho(g) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \zeta^i$ dove ζ è una radice n-esima primitiva dell'unità e gli m_i sono interi positivi o nulli tali che $\sum_i m_i = \dim \rho = \text{tr}\,\rho(e)$. Ovvero $\text{tr}\,\rho(g) \in \mathbb{N}[\zeta]$ ovvero nei polinomi a coefficienti numeri naturali valutati in ζ.

- (**Prodotto con rappresentazioni di grado** 1) Siano ρ, σ due rappresentazioni irriducibili di G e $\dim \rho = 1$. Allora $\rho \otimes \sigma$ è ancora una rappresentazione irriducibile di G.
  Infatti $\mid \chi_\rho(g) \mid^2 = 1 \quad \forall g \in G$ per quanto detto sopra (essendo in dimensione 1, $\chi_\rho(g)$ è una radice n-esima dell'unità ed ha quindi norma unitaria) e quindi $\langle \chi_{\rho\otimes\sigma} \mid \chi_{\rho\otimes\sigma} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \mid \chi_\sigma(g) \mid^2 \cdot \mid \chi_\rho(g) \mid^2 = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \mid \chi_\sigma(g) \mid^2 = 1$ perché σ è irriducibile.

Questo è molto comodo per trovare altre rappresentazioni di gradi alti se si conoscono quelle di grado 1. Ci si potrebbe chiedere se valga il viceversa, ovvero è vero che l'azione di tensorizzare per una rappresentazione di grado 1 è transitiva sulle rappresentazioni irriducibili di grado d ? (Se ne ho una e faccio così le ottengo tutte?) Purtroppo no, un controesempio alla portata è la tavola dei caratteri di A5. Esso ha un solo carattere di dimensione 1 e due caratteri di dimensione 3.

- (**Rappresentazioni indotte da Sottogruppi**) Se $\rho : G \to GL(V)$ è una rappresentazione di G e $H \sqsubseteq G$, allora si può comporre ρ con l'inclusione per avere $\rho \mid_H : H \to GL(V)$ come rappresentazione di H.
  In particolare, se dim $V = 1$ si ha che le rappresentazioni di grado 1 di G ristrette ad un sottogruppo H devono necessariamente coincidere con una rappresentazione di grado 1 di H (non possono scomporsi). Se si analizzano diversi sottogruppi ciò può dare molta informazione su G.

- (g **e** g^{-1} **coniugati**) Se g e g^{-1} appartengono alla stessa classe di coniugio allora $\chi(g)$ è reale. (Mostriamo infatti che in generale $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ ottenendo la tesi)
  Se scriviamo la traccia come sopra, ovvero tr $\rho(g) = \sum_i m_i \zeta^i$, si nota bene che nella base in cui g è diagonale, lo è anche g^{-1} e gli autovalori di g^{-1} sono esattamente gli inversi di quelli di g, ma sulle radici dell'unità l'inverso è uguale al coniugato e quindi tr $\rho(g^{-1}) = \sum_i m_i \zeta^{-i} = \sum_i m_i \overline{\zeta^i} = \overline{\sum_i m_i \zeta^i} = \overline{\text{tr } \rho(g)}$ perché $m_i \in \mathbb{N}$

- (**Sollevamento di rappresentazioni di gruppi quoziente**) Supponiamo di avere $N \triangleleft G$ sottogruppo normale e avere una rappresentazione ρ del gruppo quoziente $H := \frac{G}{N}$. Allora questa induce una rappresentazione $\hat{\rho}$ di G e si ha $\langle \chi_{\hat{\rho}} \mid \chi_{\hat{\rho}} \rangle = \langle \chi_\rho \mid \chi_\rho \rangle$
  Definiamo $\hat{\rho}(g) := \rho(gN)$ e verifichiamo la buona definizione (ovvero se è costante sulle classi di coniugio) ma ovviamente se $g = xhx^{-1}$ allora $gN = (xN)(hN)(xN)^{-1}$. Abbiamo quindi una rappresentazione per G. Verifichiamo l'irriducibilità con i caratteri

$$\frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} \chi_{\hat{\rho}}(g) \overline{\chi_{\hat{\rho}}(g)} = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{gN \in \frac{G}{N}} \mid N \mid \cdot \chi_\rho(gN) \overline{\chi_\rho(gN)} = \langle \chi_\rho \mid \chi_\rho \rangle$$

  Quindi $\hat{\rho}$ è irriducibile se e solo se ρ lo è.

- (**Azioni Naturali**) Può capitare che ci si blocchi nella ricerca di caratteri irriducibili di un gruppo. Al che può essere conveniente (se si hanno già alcuni caratteri) scomporre alcune rappresentazioni. Se si ha fortuna può capitare che scomponendo una rappresentazione (ovvero togliendo al carattere i caratteri irriducibili presenti già trovati) di trovare un carattere irriducibile non ancora scoperto (ovvero ha norma 1).
  Per trovare queste rappresentazioni può essere utile tenere a mente che da ogni azione di gruppo su un insieme X si può ricavare una rappresentazione di G considerando lo spazio vettoriale libero su X. In questo modo le matrici che rappresentano un elemento di G nella base standard di X sono matrici di permutazione, ovvero tutte le tracce sono numeri naturali positivi o nulli.
  In particolare si possono considerare le seguenti azioni:
  - di traslazione su G stesso, che induce la rappresentazione regolare
  - di traslazione sulle classi laterali di G rispetto ad un suo sottogruppo H (che ad esempio fornisce la rappresentazione di segno in Sn, prendendo H il sottogruppo An)
  - di coniugio su elementi di G
  - Se identifichiamo G con un sottogruppo di Sn (utile se n è piccolo rispetto all'ordine del gruppo, per non dover morire di conti) possiamo sfruttare l'azione delle permutazioni di Sn su $\{1\}, \ldots, \{n\}$ oppure anche su $\{i, j\}$ al variare di i, j tra le possibili coppie, oppure sulle triple, e così via. (In particolare se ad esempio le triple sono poche può saltar fuori una rappresentazione piccola)

- (**Numero di rappresentazioni di grado** 1) Il numero di rappresentazioni di grado 1 di G è uguale all'indice del derivato di G, ovvero all'ordine di $\frac{G}{G'}$.
  Infatti, una rappresentazione di grado 1, come più volte ricordato, è un omomorfismo da G in $\mathbb{C}^*$. Per la teoria dei gruppi elementare si ha che, siccome $\mathbb{C}^*$ è abeliano, ogni omomorfismo da G in $\mathbb{C}^*$ si fattorizza sull'abelianizzato di G. Quindi un carattere di G di dimensione 1 è necessariamente anche

un carattere di dimensione 1 di $\frac{G}{G'}$. Inoltre, come visto sopra, un carattere irriducibile da un gruppo quoziente si solleva ad un carattere irriducibile di G. Si verifica inoltre sciogliendo le definizioni che le due operazioni di sollevamento e di fattorizzazione sono una l'inversa dell'altra. Abbiamo così stabilito una biggezione tra i caratteri di dimensione 1 di G e quelli di Abel (G). Si conclude ora notando che Abel (G) è abeliano, da cui la tesi.

Rappresentazioni dei Gruppi Diedrali

Gruppi diedrali di ordine $2n$ con n pari

Consideriamo il gruppo D_{2n} con n pari. $D_{2n} := \langle a, x \mid a^n = x^2 = e, xax = a^-1\rangle$. Questo gruppo ha $\frac{n+6}{2}$ classi di coniugio: l'identità, l'elemento $a^{\frac{n}{2}}$, $\frac{n-2}{2}$ classi di coniugio in $\langle a\rangle$ e due classi al di fuori di $\langle a\rangle$, con rappresentanti x e ax.
Il sottogruppo dei commutatori è $\langle a^2\rangle$ che ha indice 4 ed il gruppo quoziente (l'abelianizzato) è $C_2 \times C_2$. Abbiamo quindi solo 4 caratteri uno dimensionali:

- La rappresentazione banale
- La rappresentazione che manda $\langle a\rangle$ in 1 e tutti gli elementi al di fuori di $\langle a\rangle$ in -1
- La rappresentazione che manda tutti gli elementi in $\langle a^2, x\rangle$ in 1 e a in -1 (e si estende come omomorfismo)
- La rappresentazione che manda tutti gli elementi in $\langle a^2, ax\rangle$ in 1 e a in -1

Inoltre si nota che, al variare di k, le rappresentazioni di dimensione 2 così definite:

$$a \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ik}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi ik}{n}} \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\frac{n-2}{2}$ (le rappresentazioni per k e per $n-k$ sono le stesse) e sommando i quadrati di questi numeri si vede che abbiamo così trovato tutte le rappresentazioni di D_{2n}

Gruppi diedrali di ordine $2n$ con n dispari

Consideriamo il gruppo diedrale D_{2n} con n dispari. $D_{2n} := \langle a, x \mid a^n = x^2 = e, xax = a^{-1}\rangle$. Il gruppo ha un totale di $\frac{n+3}{2}$ classi di coniugio: l'identità, $\frac{n-1}{2}$ classi di coniugio in $\langle a\rangle$ e la classe di coniugio di x.
Il sottogruppo derivato è $\langle a\rangle$ quindi l'abelianizzato ha solo due elementi. Le due rappresentazioni uno dimensionali quindi sono:

- La rappresentazione banale
- La rappresentazione che manda $\langle a\rangle$ a 1 e tutti gli elementi fuori di $\langle a\rangle$ a -1

Inoltre si nota che, al variare di k, le rappresentazioni di dimensione 2 così definite:

$$a \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ik}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi ik}{n}} \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\frac{n-1}{2}$ (le rappresentazioni per k e per $n-k$ sono le stesse) e sommando i quadrati di questi numeri si vede che abbiamo così trovato tutte le rappresentazioni di D_{2n}

Rappresentazioni dei Gruppi Simmetrici

Rappresentazioni dei Gruppi Alterni

Prodotti diretti e semidiretti

Trattiamo qui il problema delle rappresentazioni di G quando $G = H \times K$ con H, K generici oppure quando $G = H \rtimes_\phi K$ con H, K abeliani.

Rappresentazioni del prodotto diretto

Se $G = H \times K$ allora tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di G si ottengono come $\rho \otimes \sigma$ ovvero come prodotto tensore di una rappresentazione irriducibile di H e una irriducibile di K.
Infatti notiamo che le classi di coniugio di $H \times K$ sono prodotto cartesiano di classi di coniugio di H e di quelle di K. Definiamo allora il sollevamento: siano date due rappresentazioni irriducibili di H e di K ($\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ e $\sigma : K \to \mathrm{GL}(W)$ rispettivamente). Definiamo allora la rappresentazione $\tau = \rho \otimes \sigma$ nel modo seguente: $\tau(h,k) := \rho(h) \times \sigma(k)$ dove $(\rho(h) \times \sigma(k))(v,w) := (\rho(h)(v), \sigma(k)(w))$. Verifichiamo che $\tau(h,k)$ è bilineare e quindi induce un'applicazione lineare su $V \otimes W$ per la proprietà universale del prodotto tensore. Si verifica inoltre che τ è un omomorfismo di gruppi e quindi è una rappresentazione di G.

$$\langle \chi_\tau \mid \chi_\tau \rangle = \langle \tilde{\chi}_\rho \cdot \tilde{\chi}_\sigma \mid \tilde{\chi}_\rho \cdot \tilde{\chi}_\sigma \rangle = \langle \tilde{\chi}_\rho \mid \tilde{\chi}_\rho \rangle \cdot \langle \tilde{\chi}_\sigma \mid \tilde{\chi}_\sigma \rangle = 1$$

dove con $\tilde{\chi}_\rho$ e $\tilde{\chi}_\sigma$ si intendono le due funzioni di classe che estendono naturalmente χ_ρ e χ_σ. $\tilde{\chi}_\rho(h,k) := \chi_\rho(h)$. Quindi τ è irriducibile
Ora vediamo come da una rappresentazione irriducibile di $H \times K$ se ne ottengano una irriducibile di H e una irriducibile di K: dalle immersioni canoniche di H e K in G si ricavano due rappresentazioni di H e di K rispettivamente e notiamo che questa operazione di restrizione ed il sollevamento dato sopra sono una l'inversa dell'altra (H e K commutano e $\tau(h,k) = \tau(h,e) \cdot \tau(e,k)$). Quindi si ottiene che, siccome $\langle \chi \mid \chi \rangle \in \mathbb{N}$ allora anche le rappresentazioni ristrette sono irriducibili e quindi abbiamo stabilito la biggezione cercata.
è scritto molto male ma non riesco a scriverlo decentemente (balbo)

Rappresentazioni del prodotto semidiretto

Rappresentazioni di grado due

Altri Trucchi

- **(Sottogruppi normali dalla tavola dei caratteri)**