Rappresentazioni
$s$oluzioni agli esercizi per natale

Second'anno di matematica, SNS

January 5, 2016

Soluzioni agli esercizi

Esercizio 1

Siano k, e n due interi positivi. Per ogni $\sigma \in S_k$ denotate con $\omega(\sigma)$ il numero di orbite di σ su $\{1, \ldots, k\}$. Dimostrate la formula:

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} n^{\omega(\sigma)} = \binom{n+k-1}{k}$$

Soluzione 1.1

Soluzione 1.2

Esercizio 2

Calcolate la scomposizione in fattori irriducibili dei prodotti di tutte le possibili coppie di rappresentazioni irriducibili di S_4.

Soluzione 2.1

Soluzione 2.2

Esercizio 3

(a) Sia $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione irriducibile di un gruppo G. Dimostrate che l'immagine del centro di G è contenuta nel sottogruppo dei multipli dell'identità.

(b) Dimostrate che ogni sottogruppo finito di $\mathbb{C}^*$ è ciclico

(c) Se un gruppo finito ha una rappresentazione fedele irriducibile, allora il suo centro è ciclico. Nota: una rappresentazione ρ di G è fedele se $\rho : G \to \mathrm{GL}(V_\rho)$ è iniettivo.

Soluzione 3.1

Soluzione 3.2

Esercizio 4

Se ρ è una rappresentazione irriducibile di S_5 di grado 5 e $s \in S_5$ è un 5-ciclo, fate vedere che $\rho(s)$ ha come autovalori tutte e sole le radici quinte dell'unità.

Soluzione 4.1 *Sia ζ una radice primitiva quinta dell'unità.*

- *Dal fatto che $\rho(s)^5 = I$, se $\lambda \in \operatorname{Sp}\rho(s)$ allora $\lambda^5 = 1$.*
  Inoltre $s^2 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$ è coniugato a s e $\operatorname{Sp}\rho(s^2) = \{\lambda^2 :\ \lambda \in \operatorname{Sp}\rho(s)\}$.

- *Sia $a_0 \in \mathbb{N}$ la molteplicità di $\zeta^0 = 1$ e $a_i \in \mathbb{N}$ la molteplicità di ζ^{2^i} per $i = 1, \ldots, 4$ relativamente a $\rho(s)$. Allora, visto che $\chi_\rho(s) = \chi_\rho(s^2)$, usando il fatto che la traccia è la somma degli autovalori si ha*

$$a_0 + \sum_{i=1}^{4} a_i \zeta^{2^i} = a_0 + \sum_{i=1}^{4} a_i \zeta^{2^{i+1}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} (a_i - a_{i-1})\zeta^{2^i} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\zeta[(a_1 - a_4)\zeta + (a_2 - a_1)\zeta^3 + (a_3 - a_2)\zeta^2 + (a_4 - a_3)] = 0$$

  Ma $p(x) = (a_4 - a_3) + (a_1 - a_4)x + (a_3 - a_2)x^2 + (a_4 - a_3)x^3$ è un polinomio a coefficienti interi di terzo grado che si annulla in ζ, e quindi $x^4 + \ldots + 1 \mid p(x) \ \Rightarrow p(x) \equiv 0$.
  Quindi $a_1 = \ldots = a_4 =: n$.

- *La somma delle molteplicità è la dimensione dello spazio. L'equazione $a_0 + 4n = 4$ ha solo due soluzioni naturali:*

  1. *$a_0 = 5, n = 0$: in questo caso $\rho(s) = I$, e perciò:*

  $$120 = 120\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum_{g \in S_5} |\chi_\rho(g)|^2 \geq \sum_{i=0}^{4} |tr(\rho(s^k))|^2 = 125 > 120 = |S_5|$$

     Assurdo.

  2. *$a_0 = 1, n = 1$: in questo caso $\operatorname{Sp}\rho(s)$ sono esattamente tutte e sole le radici quinte dell'unità, come volevasi dimostrare.*

Soluzione 4.2

Esercizio 5

Trovare la tavola dei caratteri di A_4.

Soluzione 5.1 *Do per noto che le classi di coniugio di A_4 siano rappresentate da id, $(12)(34)$, (123), (132) (si fa a conti ricordandosi che le classi di coniugio di A_n sono o quelle di S_n oppure quelle di S_n spezzate a metà).*
A_4 ha 12 elementi e 4 classi di coniugio. Inoltre so che non è abeliano (quindi ha almeno una rappresentazione di dimensione ≥ 2) e ammette sicuramente la rappresentazione banale. Facendo i casi si vede che l'unico modo di fare 12 sommando quattro quadrati con questi constraint è $12 = 3^2 + 3 \cdot 1^2$. Andiamo quindi a cercare tre omomorfismi di A_4 in $\mathbb{C}^*$ per poi completare la tabella per ortogonalità.
Notiamo che A_4 è generato dalla classe di coniugio di (123). Infatti se conosco il valore di χ su questa classe so che $\chi(132) = \chi((123))^2$ e poi completo per omomorfismo. Siccome (123) ha ordine tre e stiamo cercando rappresentazioni di grado 1, si ha che $\chi(123)$ è un radice terza dell'unità. Ci sono quindi al più tre possibilità per un tale omomorfismo. Ciò significa che li abbiamo trovati tutti.
Completando per ortogonalità si ricava:

numero di elementi	*1*	*3*	*4*	*4*
classi di conj.	*id*	(12)(34)	(123)	(132)
χ_{id}	*1*	*1*	*1*	*1*
χ_a	*1*	*1*	ζ	ζ^2
χ_b	*1*	*1*	ζ^2	ζ
χ_g	*3*	*-1*	*0*	*0*

Soluzione 5.2

Esercizio 6

Trovare la tavola dei caratteri di D_4, D_5.

Soluzione 6.1

0.1 Tabella dei caratteri di D4

Ordine di D4: 8 elementi. Generato da 2 elementi: ρ, σ (rispettivamente rotazione e simmetria, con relazioni $\rho^4 = \sigma^2 = e$ e $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$). Ha 5 classi di coniugio: $\{e\}, \{\rho^2\}, \{\rho, \rho^3\}, \{\sigma, \sigma\rho^2\}, \{\sigma\rho, \sigma\rho^3\}$. Non è abeliano e ha almeno la rappresentazione banale, quindi si ha $8 = 2^2 + 4 \cdot 1^2$ è l'unico modo di scrivere 8. Dobbiamo quindi trovare 4 omomorfismi di D4 in $\mathbb{C}^*$ per poi ricavare per ortogonalità la rappresentazione di dimensione 2.
Notiamo che, siccome σ ha ordine 2, esso può essere mandato solo in ± 1 (radici 2-esime dell'unità) e siccome ρ e ρ^-1 stanno nella stessa classe di coniugio si ha $x = \chi(\rho)$ deve essere una radice quarta dell'unità che rispetti $x = x^3$ e quindi deve essere solo o 1 o -1. Abbiamo quindi solo quattro possibili scelte per un possibile omomorfismo da D4 in $\mathbb{C}^*$, che sono quindi obbligate perché sappiamo che esistono 4 caratteri di dimensione 1 per D4 (ovvero omomorfismi). Quindi scrivendo questi nella tabella e completandola per ortonormalità si ha:

numero elementi	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*
classi di conj.	e	ρ^2	ρ, ρ^3	$\sigma, \sigma\rho^2$	$\sigma\rho, \sigma\rho^3$
χ_{id}	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
χ_a	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
χ_b	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
χ_{ab}	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
χ_g	*2*	*-2*	*0*	*0*	*0*

Soluzione 6.2

Esercizio 7

Sia T un tetraedro di centro nell'origine, e sia $G \subseteq O_3$ il gruppo delle trasformazioni ortogonali che portano T in se stesso. Numerando in qualche modo i vertici di T da 1 a 4, otteniamo un'azione di G su $\{1, 2, 3, 4\}$.

(a) *Fate vedere che questo dà un'identificazione di G con S_4.*

(b) *Fate vedere che il sottogruppo di G delle matrici con determinante positivo corrisponde ad A_4.*

(c) *Scomponete la rappresentazione per permutazioni corrispondente agli spigoli del tetraedro come rappresentazione di A_4.*

Soluzione 7.1

Soluzione 7.2

Esercizio 8

Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme finito I con almeno due elementi in modo non banale. Diciamo che l'azione è doppiamente transitiva se date due coppie (i, i') e (j, j') di elementi di I con $i \neq i'$ e $j \neq j'$ esiste $s \in G$ con $s \cdot i = j$ e $s \cdot i' = j'$.
Sia ρ_I la corrispondente rappresentazione per permutazioni e scriviamo $\rho_I = \mathbb{1} + \rho$, come al solito. Allora fate vedere che ρ è irriducibile se e solo se l'azione di G su I è doppiamente transitiva.
Concludete che S_n ha una rappresentazione irriducibile di grado $n-1$ per ogni $n \geq 2$
Cenno di soluzione: Fate vedere che ρ è irriducibile se e solo se $\langle \chi_{\rho_I} \mid \chi_{\rho_I} \rangle = 2$. Ma χ_{ρ_I} è reale, per cui $\langle \chi_{\rho_I} \mid \chi_{\rho_I} \rangle = \langle \chi_{\rho_I}^2 \mid 1 \rangle = \langle \chi_{\rho_{I \times I}} \mid 1 \rangle$ e $\langle \chi_{\rho_{I \times I}} \mid 1 \rangle$ è il numero di orbite di G su $I \times I$.

Soluzione 8.1

Soluzione 8.2

Esercizio 9

Sia G un gruppo finito. Dati due elementi $h, g \in G$ appartenenti a classi di coniugio distinte mostrare che

$$\sum_{\rho \in Irr\ (G)} \chi_\rho(g) \overline{\chi_r ho(h)} = 0$$

dove $Irr\ (G)$ denota l'insieme delle rappresentazioni irriducibili di G a meno di isomorfismo. Cosa riuscite a dire sulla precedente somma se invece h e g sono elementi coniugati?
Cenno di soluzione: Considerate il carattere di $\mathbb{C}[G]$ come rappresentazione di $G \times G$

Soluzione 9.1

Soluzione 9.2

Idee utili per gli esercizi