TROVARE LE TABELLE DEI CARATTERI

DEFINIZIONI

Rappresentazione Una rappresentazione di un gruppo G è un omomorfismo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale sul campo K (da noi solitamente $K = \mathbb{C}$ e G sarà un gruppo finito)

Carattere Si dice carattere di una rappresentazione ρ la funzione indotta prendendo la traccia, ovvero $\chi_\rho : G \to K$ definita da $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}\,(\rho(g))$

LEMMI E TEOREMI STANDARD

Siano $\rho_1, \ldots, \rho_r$ le rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito G (che sappiamo essere in numero finito). Sia n la cardinalità di G. Siano $d_i = \dim \rho_i$ le dimensioni delle rappresentazioni.
Indichiamo con cl_g la classe di coniugio di $g \in G$ e con c_g il numero di elementi che contiene. Irr (G) è un insieme di rappresentanti modulo isomorfismo dei caratteri irriducibili di G.

- (**Caratteri di un gruppo abeliano**) Un gruppo G è abeliano se e solo se tutte le sue rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1.
- (**Carattere di una rappresentazione irriducibile**) Una rappresentazione ρ di un gruppo G è irriducibile se e solo se $\langle \chi_\rho \mid \chi_\rho \rangle = 1$ (prodotto scalare interno)
- $d_1^2 + \ldots + d_r^2 = n$
- r è il numero di classi di coniugio diverse di G
- $\langle \chi_i \mid \chi_j \rangle = \delta_{ij}$
- $d_i = \chi_i(\mathrm{id})$, la dimensione della rappresentazione è la traccia dell'identità
- $\frac{c_g}{n} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}\,(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \delta_{cl_g cl_h}$
- I caratteri in dimensione 1 sono tutti e soli gli omomorfismi da G in $\mathbb{C}^*$. In particolare essi sono univocamente determinati sulle classi dei generatori. In più se g e g^a sono coniugati si ha $\chi(g) = \chi(g^a) = \chi(g)^a \implies \chi(g)$ è una radice $a-1$-esima dell'unità oppure è zero.

OSSERVAZIONI STUPIDE

- La rappresentazione banale $\chi_{\mathrm{id}}(g) = 1 \quad \forall g \in G$ c'è sempre
- Non tutte le stringhe di numeri sono caratteri Ci si chiede se esistano criteri sensati per poter dire che una stringa di numeri è un carattere di qualche rappresentazione. Risposte, anche parziali? (balbo)
- Può essere comodo inventarsi delle azioni di G su un qualche insieme, passare alla rappresentazione sullo spazio vettoriale libero e provare a scomporre questa sperando che saltino fuori dei nuovi caratteri.

Usiamo ora le tecniche sopra descritte per arrivare alle tabelle dei caratteri dei gruppi ciclici e di alcuni gruppi piccoli (S3, D4, Q8) per poi vedere alcuni trucchi più particolari

GRUPPI CICLICI

Essendo abeliani avranno solo caratteri di dimensione 1 e quindi per C_n avremo esattamente n caratteri. Siccome sono tutti di dimensione 1 basta fissarli su un generatore di $C_n = \langle g \rangle$. In particolare dovendo essere $1 = \chi(e) = \chi(g^n) = \chi(g)^n$ è necessario che $\chi(g)$ sia una radice n-esima dell'unità. Ciò è anche sufficiente in quanto stiamo cercando esattamente n caratteri.
Quindi, detta ζ una radice n-esima primitiva dell'unità si ha $\chi_i(g^j) = \zeta^{ij}$ con $i = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, n-1$ è tutta la tabella dei caratteri.

S3, D4, Q8

TABELLA DEI CARATTERI DI S3

Partiamo con le cose di routine. Ordine di S3: 6 elementi. Generato da 2 elementi: (12) e (123). Ha tre classi di coniugio: $\{e\}, \{(12), (23), (13)\}, \{(123), (132)\}$. Siccome è non abeliano ha almeno una rappresentazione di grado ≥ 2. Ma rappresentazioni di grado 3 o più non può averne perché $3^2 \geq 6$ e quindi ha necessariamente almeno una rappresentazione di grado 2. Inoltre, siccome $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$ è l'unico modo di scrivere 6 come somma di quadrati con almeno un 2, ne segue che le rappresentazioni di S3 irriducibili saranno una di grado 2 e due di grado 1.
Per trovarle sappiamo che χ_{id}, la rappresentazione banale, esiste sempre. L'altra rappresentazione di grado 1 è l'omomorfismo di segno (cosa che ci appuntiamo perché questa c'è ovviamente in tutti i gruppi simmetrici). Ci resta da trovare una rappresentazione di grado 2. Abbiamo vari modi di trovarla:

- Calcolarla per ortogonalità delle righe o delle colonne (cosa che si può sempre fare quando manca un solo carattere)
- Scomporre la rappresentazione regolare di S3 sottraendo le proiezioni sui primi due caratteri

Ad ogni modo la tabella dei caratteri finale risulta:

numero elementi classi di conj.	1 $\{e\}$	3 $\{(12), (23), (13)\}$	2 $\{(123), (132)\}$
χ_{id}	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1
χ_{std}	2	0	-1

TABELLA DEI CARATTERI DI D4

Ordine di D4: 8 elementi. Generato da 2 elementi: ρ, σ (rispettivamente rotazione e simmetria, con relazioni $\rho^4 = \sigma^2 = e$ e $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$). Ha 5 classi di coniugio: $\{e\}, \{\rho^2\}, \{\rho, \rho^3\}, \{\sigma, \sigma\rho^2\}, \{\sigma\rho, \sigma\rho^3\}$. Non è abeliano e ha almeno la rappresentazione banale, quindi si ha $8 = 2^2 + 4 \cdot 1^2$ è l'unico modo di scrivere 8. Dobbiamo quindi trovare 4 omomorfismi di D4 in $\mathbb{C}^*$ per poi ricavare per ortogonalità la rappresentazione di dimensione 2.
Notiamo che, siccome σ ha ordine 2, esso può essere mandato solo in ± 1 (radici 2-esime dell'unità) e siccome ρ e ρ^-1 stanno nella stessa classe di coniugio si ha $x = \chi(\rho)$ deve essere una radice quarta dell'unità che rispetti $x = x^3$ e quindi deve essere solo o 1 o -1. Abbiamo quindi solo quattro possibili scelte per un possibile omomorfismo da D4 in $\mathbb{C}^*$, che sono quindi obbligate perché sappiamo che esistono 4 caratteri di dimensione 1 per D4 (ovvero omomorfismi). Quindi scrivendo questi nella tabella e completandola per ortonormalità si ha:

numero elementi classi di conj.	1 e	1 ρ^2	2 ρ, ρ^3	2 $\sigma, \sigma\rho^2$	2 $\sigma\rho, \sigma\rho^3$
χ_{id}	1	1	1	1	1
χ_{a}	1	1	1	-1	-1
χ_{b}	1	1	-1	1	-1
χ_{ab}	1	1	-1	-1	1
χ_{g}	2	-2	0	0	0

TRUCCHI GENERICI

- (**Possibili autovalori di un elemento**) Notiamo che se $g^k = e$ allora $\rho(g)^k = \rho(g^k) = \rho(e) = \text{id}$ quindi $\rho(g)$ si annulla sul polinomio $x^k - 1$, ovvero il polinomio minimo di $\rho(g)$ divide $x^k - 1$, che non ha radici doppie, quindi $\rho(g)$ è diagonalizzabile $\forall g$.
  Inoltre tra gli autovalori di $\rho(g)$ possono comparire soltanto radici n-esime dell'unità. Se diagonalizzato, ci si rende facilmente conto che tr $\rho(g) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \zeta^i$ dove ζ è una radice n-esima primitiva dell'unità e gli m_i sono interi positivi o nulli tali che $\sum_i m_i = \dim \rho = \text{tr}\, \rho(e)$. Ovvero tr $\rho(g) \in \mathbb{N}[\zeta]$ ovvero nei polinomi a coefficienti numeri naturali valutati in ζ.

- (**Prodotto con rappresentazioni di grado** 1) Siano ρ, σ due rappresentazioni irriducibili di G e dim $\rho = 1$. Allora $\rho \otimes \sigma$ è ancora una rappresentazione irriducibile di G.
  Infatti $\mid \chi_\rho(g) \mid^2 = 1 \quad \forall g \in G$ per quanto detto sopra (essendo in dimensione 1, $\chi_\rho(g)$ è una radice n-esima dell'unità ed ha quindi norma unitaria) e quindi $\langle \chi_{\rho\otimes\sigma} \mid \chi_{\rho\otimes\sigma} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \mid \chi_\sigma(g) \mid^2 \cdot \mid \chi_\rho(g) \mid^2 = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \mid \chi_\sigma(g) \mid^2 = 1$ perché σ è irriducibile.
  Questo è molto comodo per trovare altre rappresentazioni di gradi alti se si conoscono quelle di grado 1. Ci si chiede se valga il viceversa, ovvero è vero che l'azione di tensorizzare per una rappresentazione di grado 1 è transitiva sulle rappresentazioni irriducibili di grado d ? (Se ne ho una e faccio così le ottengo tutte?) Ci stavo pensando ma non riesco a dimostrare nulla (balbo)

- (**Rappresentazioni di Sottogruppi**) Se $\rho : G \to GL(V)$ è una rappresentazione di G e $H \sqsubseteq G$, allora si può comporre ρ con l'inclusione per avere $\rho \mid_H : H \to GL(V)$ come rappresentazione di H.
  In particolare, se dim $V = 1$ si ha che le rappresentazioni di grado 1 di G ristrette ad un sottogruppo H devono necessariamente coincidere con una rappresentazione di grado 1 di H (non possono scomporsi). Se si analizzano diversi sottogruppi ciò può dare molta informazione su G.

- (**g e g^{-1} coniugati**) Se g e g^{-1} appartengono alla stessa classe di coniugio allora $\chi(g)$ è reale. (Mostriamo infatti che in generale $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ ottenendo la tesi)
  Se scriviamo la traccia come sopra, ovvero tr $\rho(g) = \sum_i m_i \zeta^i$, si nota bene che nella base in cui g è diagonale, lo è anche g^{-1} e gli autovalori di g^{-1} sono esattamente gli inversi di quelli di g, ma sulle radici dell'unità l'inverso è uguale al coniugato e quindi tr $\rho(g^{-1}) = \sum_i m_i \zeta^{-i} = \sum_i m_i \overline{\zeta^i} = \overline{\sum_i m_i \zeta^i} = \overline{\text{tr}\, \rho(g)}$ perché $m_i \in \mathbb{N}$

- (**Rappresentazioni del prodotto diretto**) Se $G = H \times K$ allora tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di G si ottengono come $\rho_H \otimes \sigma_K$ ovvero come prodotto tensore di una rappresentazione irriducibile di H e una irriducibile di K

- (**Sollevamento di caratteri irriducibili di gruppi quoziente**) Supponiamo di avere $N \lhd G$ sottogruppo normale e di conoscere i caratteri irriducibili del gruppo quoziente $H := \frac{G}{N}$. Allora ogni carattere irriducibile ρ di H induce un carattere irriducibile $\hat{\rho}$ di G.

GRUPPI ABELIANI

GRUPPI SIMMETRICI

GRUPPI DIEDRALI

PRODOTTI SEMIDIRETTI