TROVARE LE TABELLE DEI CARATTERI

DEFINIZIONI

- (**Rappresentazione**) Una rappresentazione di un gruppo G è un omomorfismo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale sul campo K (da noi solitamente $K = \mathbb{C}$ e G sarà un gruppo finito)
- (**Carattere**) Si dice carattere di una rappresentazione ρ la funzione indotta prendendo la traccia, ovvero $\chi_\rho : G \to K$ definita da $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}\,(\rho(g))$

LEMMI E TEOREMI STANDARD

Siano $\rho_1, \ldots, \rho_r$ le rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito G (che sappiamo essere in numero finito). Sia n la cardinalità di G. Siano $d_i = \dim \rho_i$ le dimensioni delle rappresentazioni.
Indichiamo con cl_g la classe di coniugio di $g \in G$ e con c_g il numero di elementi che contiene. Irr (G) è un insieme di rappresentanti modulo isomorfismo dei caratteri irriducibili di G.

- (**Caratteri di un gruppo abeliano**) Un gruppo G è abeliano se e solo se tutte le sue rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1.
- (**Carattere di una rappresentazione irriducibile**) Una rappresentazione ρ di un gruppo G è irriducibile se e solo se $\langle \chi_\rho \mid \chi_\rho \rangle = 1$ (prodotto scalare interno)
- $d_1^2 + \ldots + d_r^2 = n$
- r è il numero di classi di coniugio diverse di G
- $\langle \chi_i \mid \chi_j \rangle = \delta_{ij}$
- $d_i = \chi_i(\mathrm{id})$, la dimensione della rappresentazione è la traccia dell'identità
- $\frac{c_g}{n} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}\,(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \delta_{cl_g cl_h}$
- I caratteri in dimensione 1 sono tutti e soli gli omomorfismi da G in $\mathbb{C}^*$. In particolare essi sono univocamente determinati sulle classi dei generatori. In più se g e g^a sono coniugati si ha $\chi(g) = \chi(g^a) = \chi(g)^a \implies \chi(g)$ è una radice $a-1$-esima dell'unità oppure è zero.

OSSERVAZIONI STUPIDE

- La rappresentazione banale $\chi_{\mathrm{id}}(g) = 1 \quad \forall g \in G$ c'è sempre
- Non tutte le stringhe di numeri sono caratteri Ci si chiede se esistano criteri sensati per poter dire che una stringa di numeri è un carattere di qualche rappresentazione. Risposte, anche parziali? (balbo)
- Può essere comodo inventarsi delle azioni di G su un qualche insieme, passare alla rappresentazione sullo spazio vettoriale libero e provare a scomporre questa sperando che saltino fuori dei nuovi caratteri.

Usiamo ora le tecniche sopra descritte per arrivare alle tabelle dei caratteri dei gruppi ciclici e di alcuni gruppi piccoli (S3, D4, Q8, A4). In questo modo si potrà constatare che sia D4 che Q8 hanno la stessa tabella dei caratteri, pur non essendo isomorfi.

Gruppi ciclici

Essendo abeliani avranno solo caratteri di dimensione 1 e quindi per C_n avremo esattamente n caratteri. Siccome sono tutti di dimensione 1 basta fissarli su un generatore di $C_n = \langle g \rangle$. In particolare dovendo essere $1 = \chi(e) = \chi(g^n) = \chi(g)^n$ è necessario che $\chi(g)$ sia una radice n-esima dell'unità. Ciò è anche sufficiente in quanto stiamo cercando esattamente n caratteri.
Quindi, detta ζ una radice n-esima primitiva dell'unità si ha $\chi_i(g^j) = \zeta^{ij}$ con $i = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, n-1$ è tutta la tabella dei caratteri.

Gruppi abeliani

Anche questi avranno solo caratteri di dimensione 1. Inoltre usando il teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti, sappiamo che essi sono prodotto diretto di gruppi ciclici. Dovendo lavorare solo con gli omomorfismi da G in $\mathbb{C}^*$ e sapendo che questi sono univocamente determinati dai loro valori sui generatori del gruppo, diciamo che i caratteri di G sono tutti e soli quelli che si ottengono scegliendo le immagini dei generatori dei gruppi ciclici che lo compongono (e un'immagine di un generatore può essere scelta in k modi, dove k è l'ordine del gruppo ciclico che genera).
Ovviamente dobbiamo trovare $\mid G \mid$ omomorfismi, ciascuno dei quali è univocamente determinato dalle immagini dei generatori. Ogni generatore inoltre può andare solo in un radice k-esima dell'unità, dove k è l'ordine del ciclico che genera. Quindi, per un rapido conto di cardinalità, si scopre che quelli così ottenuti sono omomorfismi (ne dobbiamo avere esattamente $\mid G \mid$) e che sono tutti e soli i caratteri di G.

S3, D4, Q8, A4

Tabella dei caratteri di S3

Partiamo con le cose di routine. Ordine di S3: 6 elementi. Generato da 2 elementi: (12) e (123). Ha tre classi di coniugio: $\{e\}, \{(12), (23), (13)\}, \{(123), (132)\}$. Siccome è non abeliano ha almeno una rappresentazione di grado ≥ 2. Ma rappresentazioni di grado 3 o più non può averne perché $3^2 \geq 6$ e quindi ha necessariamente almeno una rappresentazione di grado 2. Inoltre, siccome $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$ è l'unico modo di scrivere 6 come somma di quadrati con almeno un 2, ne segue che le rappresentazioni di S3 irriducibili saranno una di grado 2 e due di grado 1.
Per trovarle sappiamo che χ_{id}, la rappresentazione banale, esiste sempre. L'altra rappresentazione di grado 1 è l'omomorfismo di segno (cosa che ci appuntiamo perché questa c'è ovviamente in tutti i gruppi simmetrici). Ci resta da trovare una rappresentazione di grado 2. Abbiamo vari modi di trovarla:

- Calcolarla per ortogonalità delle righe o delle colonne (cosa che si può sempre fare quando manca un solo carattere)
- Scomporre la rappresentazione regolare di S3 sottraendo le proiezioni sui primi due caratteri

Ad ogni modo la tabella dei caratteri finale risulta:

numero elementi	1	3	2
classi di conj.	$\{e\}$	$\{(12), (23), (13)\}$	$\{(123), (132)\}$
χ_{id}	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1
χ_{std}	2	0	-1

Tabella dei caratteri di D4

Ordine di D4: 8 elementi. Generato da 2 elementi: ρ, σ (rispettivamente rotazione e simmetria, con relazioni $\rho^4 = \sigma^2 = e$ e $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$). Ha 5 classi di coniugio: $\{e\}, \{\rho^2\}, \{\rho, \rho^3\}, \{\sigma, \sigma\rho^2\}, \{\sigma\rho, \sigma\rho^3\}$. Non è abeliano e ha almeno la rappresentazione banale, quindi si ha $8 = 2^2 + 4 \cdot 1^2$ è l'unico modo di scrivere 8. Dobbiamo quindi trovare 4 omomorfismi di D4 in $\mathbb{C}^*$ per poi ricavare per ortogonalità la rappresentazione

di dimensione 2.
Notiamo che, siccome σ ha ordine 2, esso può essere mandato solo in ± 1 (radici 2-esime dell'unità) e siccome ρ e ρ^{-1} stanno nella stessa classe di coniugio si ha $x = \chi(\rho)$ deve essere una radice quarta dell'unità che rispetti $x = x^3$ e quindi deve essere solo o 1 o -1. Abbiamo quindi solo quattro possibili scelte per un possibile omomorfismo da D4 in $\mathbb{C}^*$, che sono quindi obbligate perché sappiamo che esistono 4 caratteri di dimensione 1 per D4 (ovvero omomorfismi). Quindi scrivendo questi nella tabella e completandola per ortonormalità si ha:

numero elementi	1	1	2	2	2
classi di conj.	e	ρ^2	ρ, ρ^3	$\sigma, \sigma\rho^2$	$\sigma\rho, \sigma\rho^3$
χ_{id}	1	1	1	1	1
χ_{a}	1	1	1	-1	-1
χ_{b}	1	1	-1	1	-1
χ_{ab}	1	1	-1	-1	1
χ_{g}	2	-2	0	0	0

Tabella dei caratteri di Q8

Gruppo dei quaternioni: $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Numero di elementi: 8. Generato da 2 elementi: i, j con relazione $ij = (-1)ji$. Classi di coniugio: $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$. Non abeliano ed ha almeno la rappresentazione banale quindi, come prima si ha $8 = 2^2 + 4 \cdot 1^2$. Cerchiamo i 4 omomorfismi e poi completiamo la tabella per ortogonalità.
Notiamo che -1 è un elemento che al quadrato fa l'identità, quindi può venir mandato solo in $\pm 1 \in \mathbb{C}$. Ma se lo mandassimo in -1 non si manterrebbe la relazione $\rho(i)\rho(j) = \rho(-1)\rho(j)\rho(i)$, siccome ora $\rho(i)\rho(j) = \rho(j)\rho(i)$. Quindi $\rho(-1) = 1$ necessariamente. Ora siccome si ha $i^2 = j^2 = -1$, i e j possono venir mandati solo in $\pm 1 \in \mathbb{C}$. Queste sono solo quattro possibilità per i caratteri (che sono completamente determinati dalle immagini di i e j) quindi li abbiamo trovati tutti. Completando si ottiene:

numero elementi	1	1	2	2	2
classi di conj.	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
χ_{id}	1	1	1	1	1
χ_{i}	1	1	1	-1	-1
χ_{j}	1	1	-1	1	-1
χ_{k}	1	1	-1	-1	1
χ_{g}	2	-2	0	0	0

Tabella dei caratteri di A4

Le classi di coniugio di A_4 sono rappresentate da id, (12)(34), (123), (132) (si fa a conti ricordandosi che le classi di coniugio di A_n sono o quelle di S_n oppure quelle di S_n spezzate a metà).
A_4 ha 12 elementi e 4 classi di coniugio. Inoltre so che non è abeliano (quindi ha almeno una rappresentazione di dimensione ≥ 2) e ammette sicuramente la rappresentazione banale. Facendo i casi si vede che l'unico modo di fare 12 sommando quattro quadrati con questi constraint è $12 = 3^2 + 3 \cdot 1^2$. Andiamo quindi a cercare tre omomorfismi di A_4 in $\mathbb{C}^*$ per poi completare la tabella per ortogonalità.
Notiamo che A_4 è generato dalla classe di coniugio di (123). Infatti se conosco il valore di χ su questa classe so che $\chi(132) = \chi((123))^2$ e poi completo per omomorfismo. Siccome (123) ha ordine tre e stiamo cercando rappresentazioni di grado 1, si ha che $\chi(123)$ è un radice terza dell'unità. Ci sono quindi al più tre possibilità per un tale omomorfismo. Ciò significa che li abbiamo trovati tutti.
Completando per ortogonalità si ricava:

numero di elementi	1	3	4	4
classi di conj.	id	(12)(34)	(123)	(132)
χ_{id}	1	1	1	1
χ_{a}	1	1	ζ	ζ^2
χ_{b}	1	1	ζ^2	ζ
χ_{g}	3	-1	0	0

Questa sezione espone e dimostra piccoli ma utili trucchi che non abbiamo visto in classe (e quindi diventano ancora più utili)

- (**Possibili autovalori di un elemento**) Notiamo che se $g^k = e$ allora $\rho(g)^k = \rho(g^k) = \rho(e) = \text{id}$ quindi $\rho(g)$ si annulla sul polinomio $x^k - 1$, ovvero il polinomio minimo di $\rho(g)$ divide $x^k - 1$, che non ha radici doppie, quindi $\rho(g)$ è diagonalizzabile $\forall g$.
  Inoltre tra gli autovalori di $\rho(g)$ possono comparire soltanto radici n-esime dell'unità. Se diagonalizzato, ci si rende facilmente conto che tr $\rho(g) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \zeta^i$ dove ζ è una radice n-esima primitiva dell'unità e gli m_i sono interi positivi o nulli tali che $\sum_i m_i = \dim \rho = \text{tr}\, \rho(e)$. Ovvero tr $\rho(g) \in \mathbb{N}[\zeta]$ ovvero nei polinomi a coefficienti numeri naturali valutati in ζ.

- (**Prodotto con rappresentazioni di grado** 1) Siano ρ, σ due rappresentazioni irriducibili di G e $\dim \rho = 1$. Allora $\rho \otimes \sigma$ è ancora una rappresentazione irriducibile di G.
  Infatti $\mid \chi_\rho(g) \mid^2 = 1 \quad \forall g \in G$ per quanto detto sopra (essendo in dimensione 1, $\chi_\rho(g)$ è una radice n-esima dell'unità ed ha quindi norma unitaria) e quindi $\langle \chi_{\rho\otimes\sigma} \mid \chi_{\rho\otimes\sigma} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{g\in G} \mid \chi_\sigma(g) \mid^2 \cdot \mid \chi_\rho(g) \mid^2 = \frac{1}{n} \sum_{g\in G} \mid \chi_\sigma(g) \mid^2 = 1$ perché σ è irriducibile.
  Questo è molto comodo per trovare altre rappresentazioni di gradi alti se si conoscono quelle di grado 1. Ci si potrebbe chiedere se valga il viceversa, ovvero è vero che l'azione di "tensorizzare" per una rappresentazione di grado 1 è transitiva sulle rappresentazioni irriducibili di grado d ? (Se ne ho una e faccio così le ottengo tutte?) Purtroppo no, un controesempio alla portata è la tavola dei caratteri di A5. Esso ha un solo carattere di dimensione 1 e due caratteri di dimensione 3.

- (**Restrizione di rappresentazioni a Sottogruppi**) Se $\rho : G \to GL(V)$ è una rappresentazione di G e $H \sqsubseteq G$, allora si può comporre ρ con l'inclusione per avere $\rho \mid_H : H \to GL(V)$ come rappresentazione di H.
  In particolare, se $\dim V = 1$ si ha che le rappresentazioni di grado 1 di G ristrette ad un sottogruppo H devono necessariamente coincidere con una rappresentazione di grado 1 di H (non possono scomporsi). Se si analizzano diversi sottogruppi ciò può dare molta informazione su G.

- (**Rappresentazioni indotte da sottogruppi**) da fare la descrizione di che cos'è e sia ora Ind $_H^G(\sigma)$ la rappresentazione indotta da H. Allora

$$\chi(g) = \frac{1}{\mid H \mid} \sum_{t\in G, t^{-1}gt\in H} \chi_\sigma(t^{-1}gt) = \frac{\mid Z_G(g) \mid}{\mid H \mid} \sum_{x\in H\cap \mathcal{O}_G(g)} \chi_\sigma(x)$$

  è il carattere. (Basta costruire esplicitamente una base $\{f_{i,j}\}$ per la rappresentazione indotta a partire da una base $\{w_i\}$ di W e un insieme di rappresentanti per le classi laterali $G = \cup Hx_j$. Poi calcolare la traccia per l'azione di un elemento di g nello spazio indotto usando questa base)

- (**Prodotti di rappresentazioni**) Per trovare altre rappresentazioni irriducibili si può prendere il prodotto tensore di due rappresentazioni irriducibili che già si hanno e cercare di scomporre quella che si ottiene per ottenerne di nuove. Con ragionamenti euristici sui gradi è uno strumento molto utile.

- (g **e** g^{-1} **coniugati**) Se g e g^{-1} appartengono alla stessa classe di coniugio allora $\chi(g)$ è reale. (Mostriamo infatti che in generale $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ ottenendo la tesi)
  Se scriviamo la traccia come sopra, ovvero tr $\rho(g) = \sum_i m_i \zeta^i$, si nota bene che nella base in cui g è diagonale, lo è anche g^{-1} e gli autovalori di g^{-1} sono esattamente gli inversi di quelli di g, ma sulle radici dell'unità l'inverso è uguale al coniugato e quindi tr $\rho(g^{-1}) = \sum_i m_i \zeta^{-i} = \sum_i m_i \overline{\zeta^i} = \overline{\sum_i m_i \zeta^i} = \overline{\text{tr}\, \rho(g)}$ perché $m_i \in \mathbb{N}$

- (**Sollevamento di rappresentazioni di gruppi quoziente**) Supponiamo di avere $N \lhd G$ sottogruppo normale e avere una rappresentazione ρ del gruppo quoziente $H := \frac{G}{N}$. Allora questa induce una rappresentazione $\hat{\rho}$ di G e si ha $\langle \chi_{\hat{\rho}} \mid \chi_{\hat{\rho}} \rangle = \langle \chi_\rho \mid \chi_\rho \rangle$
  Definiamo $\hat{\rho}(g) := \rho(gN)$ e verifichiamo la buona definizione (ovvero se è costante sulle classi di

coniugio) ma ovviamente se $g = xhx^{-1}$ allora $gN = (xN)(hN)(xN)^{-1}$. Abbiamo quindi una rappresentazione per G. Verifichiamo l'irriducibilità con i caratteri

$$\frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} \chi_{\hat{\rho}}(g)\overline{\chi_{\hat{\rho}}(g)} = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{gN \in \frac{G}{N}} \mid N \mid \cdot \chi_\rho(gN)\overline{\chi_\rho(gN)} = \langle \chi_\rho \mid \chi_\rho \rangle$$

Quindi $\hat{\rho}$ è irriducibile se e solo se ρ lo è.

- (**Azioni Naturali**) Può capitare che ci si blocchi nella ricerca di caratteri irriducibili di un gruppo. Al che può essere conveniente (se si hanno già alcuni caratteri) scomporre alcune rappresentazioni. Se si ha fortuna può capitare che scomponendo una rappresentazione (ovvero togliendo al carattere i caratteri irriducibili presenti già trovati) di trovare un carattere irriducibile non ancora scoperto (ovvero ha norma 1).
  Per trovare queste rappresentazioni può essere utile tenere a mente che da ogni azione di gruppo su un insieme X si può ricavare una rappresentazione di G considerando lo spazio vettoriale libero su X. In questo modo le matrici che rappresentano un elemento di G nella base standard di X sono matrici di permutazione, ovvero tutte le tracce sono numeri naturali positivi o nulli.
  In particolare si possono considerare le seguenti azioni:
  - di traslazione su G stesso, che induce la rappresentazione regolare
  - di traslazione sulle classi laterali di G rispetto ad un suo sottogruppo H (che ad esempio fornisce la rappresentazione di segno in Sn, prendendo H il sottogruppo An). Notare che tutte le azioni transitive (le non transitive danno sempre luogo a rappresentazioni riducibili, perchè?) sono 'isomorfe' a quelle di questo tipo, quindi virtualmente ci sono tutte le possibili azioni che possono rivelarsi utili.
  - di coniugio su elementi di G
  - Se identifichiamo G con un sottogruppo di Sn (utile se n è piccolo rispetto all'ordine del gruppo, per non dover morire di conti) possiamo sfruttare l'azione delle permutazioni di Sn su $\{1\}, \ldots, \{n\}$ oppure anche su $\{i, j\}$ al variare di i, j tra le possibili coppie, oppure sulle triple, e così via. (In particolare se ad esempio le triple sono poche può saltar fuori una rappresentazione piccola)
  - Per i più skillati, giocando con il numero di p-Sylow possiamo considerare l'azione di coniugio sui p-Sylow quando un n_p è > 1 ma abbastanza piccolo (se è 1, possiamo usare il sollevamento dai quozienti). Notare che non tutti gli n_p possono essere grandi, altrimenti contando gli elementi del gruppo divisi per ordine saltan fuori troppi elementi.

- (**Numero di rappresentazioni di grado** 1) Il numero di rappresentazioni di grado 1 di G è uguale all'indice del derivato di G, ovvero all'ordine di $\frac{G}{G'}$.
  Infatti, una rappresentazione di grado 1, come più volte ricordato, è un omomorfismo da G in $\mathbb{C}^*$. Per la teoria dei gruppi elementare si ha che, siccome $\mathbb{C}^*$ è abeliano, ogni omomorfismo da G in $\mathbb{C}^*$ si fattorizza sull'abelianizzato di G. Quindi un carattere di G di dimensione 1 è necessariamente anche un carattere di dimensione 1 di $\frac{G}{G'}$. Inoltre, come visto sopra, un carattere irriducibile da un gruppo quoziente si solleva ad un carattere irriducibile di G. Si verifica inoltre sciogliendo le definizioni che le due operazioni di sollevamento e di fattorizzazione sono una l'inversa dell'altra. Abbiamo così stabilito una biggezione tra i caratteri di dimensione 1 di G e quelli di Abel (G). Si conclude ora notando che Abel (G) è abeliano, da cui la tesi.

- (**Rappresentazioni di grado** 1**, come classificarle tutte**) In virtù del paragrafo precedente, trovare il derivato $G' = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\} \rangle$ diventa equivalente a trovare le rappresentazioni di grado 1. Una volta ttrovato G', basta quozientare e sollevare i caratteri del gruppo abeliano G/G'. Come trovare il derivato:
  - Intanto, si scrivono le classi di coniugio (che uno dovrebbe aver già fatto se sta facendo la tabella);
  - Si trova qualche elemento, considerando che fare $(xyx^{-1})y^{-1}$ significa fissare un y e poi moltiplicare un suo coniugato con il suo inverso.

- Si tiene presente che G' è un sottogruppo (quindi la cardinalità divide la cardinalità del gruppo e se ci sono due tizi c'è anche il prodotto) normale (quindi se c'è un elemento c'è anche tutta la sua classe di coniugio).
- Per limitare invece la dimensione di G', se pensate di essere soddisfatti del vostro G' quozientate: se viene abeliano, avete fatto!
- Un colpo al cerchio e uno alla botte: se trovate un omomorfismo ad un gruppo abeliano $\varphi : G \to H$ (ad esempio una rappresentazione di grado 1 con $H = \mathbb{C}^*$), allora $G' \subseteq \ker \varphi$.
  Per esercizio, è facile trovare esplicitamente il derivato di S_n ($n = 1, \ldots, 4$ a mano, $n \geq 5$ è A_n), di A_n ($n = 1, \ldots 4$ a mano, $n \geq 5$ è A_n) e di D_n (separare caso n pari e dispari).

- (**Operazioni sulle rappresentazioni per vincolare quelle da scoprire**) Generalmente, è meglio trovare prima le rappresentazioni di grado 1 con le tecniche sopra descritte. Poi cercare di trovare quante rappresentazioni ho di ogni grado, usando che il grado di una rappresentazione divide l'ordine del gruppo, che il numero di rappresentazioni è uguale al numero delle classi di coniugio e che i quadrati dei gradi sommano all'ordine del gruppo. Per ogni nuova rappresentazione che scopro, posso tensorizzarla con tutte quelle di grado 1 e 'permutarla' con la tecnica degli automorfismi descritta in 'Altri Trucchi'. Se invece sono alla ricerca di nuove rappresentazioni e me ne rimangono poche, posso limitarle sapendo che posso generarne altre. In particolare, se mi rimane una sola rappresentazione σ di grado d (e sulle altre ho già fatto tensorizzazioni e permutazioni), allora:
  - Se $\chi_\rho(x) \neq 1$ per ρ irriducibile di grado 1, allora $\chi_\sigma(x) = 0$, altrimenti $\rho \otimes \sigma$ sarebbe distinta da σ (e anche da tutte le altre, perchè $\sigma \otimes \rho = \tau \Rightarrow \sigma = \tau \otimes \rho^{-1}$, perciò l'avrei già ottenuta prima).
  - Se $\psi : G \to G$ è un automorfismo che manda x in y allora $\chi_\sigma(x) = \chi_\sigma(y)$, altrimenti $\sigma\psi$ sarebbe distinta da σ (e anche da tutte le altre, perchè $\sigma\psi = \tau \Rightarrow \sigma = \tau\psi^{-1}$, perciò l'avrei già ottenuta prima).

Rappresentazioni dei Gruppi Diedrali

Gruppi diedrali di ordine $2n$ con n pari

Consideriamo il gruppo D_n con n pari. $D_n := \langle a, x \mid a^n = x^2 = e, xax = a^{-1} \rangle$. Questo gruppo ha $\frac{n+6}{2}$ classi di coniugio: l'identità, l'elemento $a^{\frac{n}{2}}$, $\frac{n-2}{2}$ classi di coniugio in $\langle a \rangle$ e due classi al di fuori di $\langle a \rangle$, con rappresentanti x e ax.
Il sottogruppo dei commutatori è $\langle a^2 \rangle$ che ha indice 4 ed il gruppo quoziente (l'abelianizzato) è $C_2 \times C_2$. Abbiamo quindi solo 4 caratteri uno dimensionali:

- La rappresentazione banale
- La rappresentazione che manda $\langle a \rangle$ in 1 e tutti gli elementi al di fuori di $\langle a \rangle$ in -1
- La rappresentazione che manda tutti gli elementi in $\langle a^2, x \rangle$ in 1 e a in -1 (e si estende come omomorfismo)
- La rappresentazione che manda tutti gli elementi in $\langle a^2, ax \rangle$ in 1 e a in -1

Inoltre si nota che, al variare di k, le rappresentazioni di dimensione 2 così definite:

$$a \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i k}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i k}{n}} \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\frac{n-2}{2}$ (le rappresentazioni per k e per $n - k$ sono le stesse) e sommando i quadrati di questi numeri si vede che abbiamo così trovato tutte le rappresentazioni di D_n

Gruppi diedrali di ordine $2n$ con n dispari

Consideriamo il gruppo diedrale D_n con n dispari. $D_n := \langle a, x \mid a^n = x^2 = e, xax = a^{-1} \rangle$. Il gruppo ha un totale di $\frac{n+3}{2}$ classi di coniugio: l'identità, $\frac{n-1}{2}$ classi di coniugio in $\langle a \rangle$ e la classe di coniugio di x.
Il sottogruppo derivato è $\langle a \rangle$ quindi l'abelianizzato ha solo due elementi. Le due rappresentazioni uno dimensionali quindi sono:

- La rappresentazione banale
- La rappresentazione che manda $\langle a \rangle$ a 1 e tutti gli elementi fuori di $\langle a \rangle$ a -1

Inoltre si nota che, al variare di k, le rappresentazioni di dimensione 2 così definite:

$$a \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i k}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i k}{n}} \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\frac{n-1}{2}$ (le rappresentazioni per k e per $n-k$ sono le stesse) e sommando i quadrati di questi numeri si vede che abbiamo così trovato tutte le rappresentazioni di D_{2n}

Rappresentazioni dei Gruppi Simmetrici

Alcune considerazioni generali

Notiamo che σ è coniugato a σ^r per ogni r coprimo con l'ordine di σ. Quindi per un esercizio più sotto (che forse verrà trascritto qui sopra) si ha che i caratteri delle irriducibili di S_n sono tutti interi.
In particolare è molto più semplice mostrare che tutti i caratteri sono reali, perché si ha che σ è coniugato a σ^{-1} in quanto hanno la stessa struttura ciclica, quindi si ha $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ e quindi $\chi_\rho(g) \in \mathbb{R}$.

Tabella dei caratteri di S4

Le classi di coniugio di S_4 sono (scrivo solo i rappresentanti): $\mathrm{id}, (12), (123), (1234), (12)(34)$. Numero di elementi: 24. Inoltre non è abeliano e si trova agilmente il morfismo di segno. Inoltre ci si convince facilmente che l'unico modo di scrivere 24 con queste constraint è $24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$. Inoltre sappiamo che S_n ha una rappresentazione standard data da una componente irriducibile dell'azione su $\{1, \dots, n\}$ di dimensione 3 che si riesce a calcolare bene. L'altra rappresentazione di grado 3 si ottiene facendo il prodotto tensore tra quella standard e quella di segno. Si completa poi la tabella dei caratteri per ortogonalità.

numero di elementi	1	6	8	6	3
classi di conj.	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_{id}	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	-1	1
χ_{std}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{sgn}} \otimes \chi_{\text{std}}$	3	-1	0	1	-1
χ_{altra}	2	0	-1	0	2

Rappresentazioni del prodotto diretto

Se $G = H \times K$ allora tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di G si ottengono come $\rho \otimes \sigma$ ovvero come prodotto tensore di una rappresentazione irriducibile di H e una irriducibile di K.
Prima di tutto notiamo che le classi di coniugio di $H \times K$ sono prodotto cartesiano di classi di coniugio di H e di quelle di K. Quindi il numero di caratteri irriducibili di $H \times K$ sarà esattamente il numero di caratteri irriducibili di H moltiplicato per il numero di quelli di K.
Date due rappresentazioni irriducibili di H e di K ($\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ e $\sigma : K \to \mathrm{GL}(W)$ rispettivamente) definiamo allora la rappresentazione $\tau = \rho \otimes \sigma$ nel modo seguente: $\tau(h, k) := \rho(h) \times \sigma(k)$ dove

$(\rho(h) \times \sigma(k))(v, w) := (\rho(h)(v), \sigma(k)(w))$. Verifichiamo che $\tau(h, k)$ è bilineare e quindi induce un'applicazione lineare su $V \otimes W$ per la proprietà universale del prodotto tensore. Si verifica inoltre che τ è un omomorfismo di gruppi e quindi è una rappresentazione di G.
Inoltre dimostriamo che $\rho^{(\alpha)} \boxtimes \sigma^{(\beta)} \equiv \rho^{(\gamma)} \boxtimes \sigma^{(\delta)} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$ facendo un conteggio con i caratteri e dimostrando (si tratta di un facile conto che non facciamo che

$$\langle \chi_{\rho^{(\alpha)}} \cdot \chi_{\sigma^{(\beta)}} \mid \chi_{\rho^{(\gamma)}} \cdot \chi_{\sigma^{(\delta)}} \rangle = \delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta}$$

e per il piccolo conteggio delle classi di coniugio fatto sopra abbiamo finito per cardinalità (ovvero abbiamo mostrato che la funzione è iniettiva e quindi è anche surgettiva)
Un altro modo di procedere invece è vedere come da una rappresentazione irriducibile di $H \times K$ se ne ottengano una irriducibile di H e una irriducibile di K: dalle immersioni canoniche di H e K in G si ricavano due rappresentazioni di H e di K rispettivamente e notiamo che questa operazione di restrizione ed il sollevamento dato sopra sono una l'inversa dell'altra (H e K commutano e $\tau(h, k) = \tau(h, e) \cdot \tau(e, k)$). Quindi si ottiene che, siccome $\langle \chi \mid \chi \rangle \in \mathbb{N}$ allora anche le rappresentazioni ristrette sono irriducibili e quindi abbiamo stabilito la biggezione cercata.
Per i gruppi compatti la cosa vale comunque, ma è un pelo più difficile mostrare che se γ è una rappresentazione irriducibile di $H \times K$ allora si scrive come prodotto di $\sigma \otimes \rho$ con σ e ρ rappresentazioni irriducibili rispettivamente di H e K. Per fare questa cosa bisogna considerare γ solo come rappresentazione di uno dei due gruppi e scomporla. Con un po' di considerazioni si riesce a calare un isomorfismo di rappresentazioni con un prodotto tensore.

Rappresentazioni di grado due

La proponiamo qui per ora sottoforma di un lungo esercizio (e un po' strano perché consideriamo anche delle rappresentazioni su $\mathbb{R}$). Ovviamente classificando i sottogruppi di ordine finito di $\mathrm{U}(2, \mathbb{C})$ si riescono a dire quali gruppi hanno un rappresentazione di grado 2.
Sia $G = \mathrm{SU}(2)$ (matrici 2×2 unitarie con determinante 1) e $V = \mathbb{C}^2$ la rappresentazione standard di $\mathrm{SU}(2)$. Consideriamo V come rappresentazione reale (quindi ha dimensione 4).

1. Mostra che V è irriducibile come rappresentazione reale
2. Sia $\mathbb{H}$ il sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ che consiste di endomorfismi di V come rappresentazione reale. Mostra che $\mathbb{H}$ ha dimensione 4 e che è chiuso sotto moltiplicazione. Mostra che ogni elemento diverso dallo zero in $\mathbb{H}$ è invertibile, ovvero che H è un'algebra di divisione
3. Trova ora una base $1, i, j, k$ di $\mathbb{H}$ in modo che 1 sia l'unità e valgano le solite relazioni dei quaternioni.
4. Sia G il gruppo dei quaternioni di norma 1. (per $q = a + bi + cj + dk$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ si ha $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ e $|| \ q \ || = q \cdot \overline{q}$ e attenzione che la moltiplicazione non è commutativa). Mostra che questo gruppo è isomorfo a $\mathrm{SU}(2)$ (e quindi geometricamente $\mathrm{SU}(2)$ è la sfera tridimensionale)
5. Considera l'azione di G sullo spazio $V \subseteq \mathbb{H}$ spannato da i, j, k data da $x \mapsto qxq^{-1}, \quad q \in G, x \in V$. Siccome questa azione preserva la norma su V abbiamo un omomorfismo $h : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, dove $\mathrm{SO}(3)$ è il gruppo delle rotazioni dello spazio euclideo tridimensionale. Mostra che questo omomorfismo è surgettivo e che il suo kernel è $\{1, -1\}$

Ora si derivi la classificazione dei sottogruppi di $\mathrm{SO}(3)$ (esplicitata qui sotto per comodità) e usando questa classificazione si classifichino i sottogruppi finiti di $\mathrm{SU}(2)$

- I gruppi ciclici $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ generati da una rotazione di $\frac{2\pi}{n}$ attorno ad un asse
- Il gruppo diedrale D_n di ordine $2n$ con $n \geq 2$ (il gruppo delle simmetrie rotazionali nello spazio 3-dimensionale di un piano contenente un n-agono regolare)
- Il gruppo di rotazioni del tetraedro regolare (A_4)
- Il gruppo di rotazioni del cubo o dell'ottaedro regolare (S_4)
- Il gruppo delle rotazioni di un icosaedro o dodecaedro regolare (A_5)

Per fare ciò sia G un sottogruppo finito di SO (3). Si consideri l'azione di G sulla sfera unitaria. Un punto della sfera preservato da qualche elemento non banale di G viene detto polo. Si mostri che ogni elemento non banale di G fissa un'unica coppia di poli opposti, e che il sottogruppo di G che fissa un particolare polo P è ciclico, di qualche ordine m (detto ordine di P). Quindi l'orbita di P ha $\frac{n}{m}$ elementi, dove $n =| G |$. Siano ora $P_1, \ldots, P_k$ i poli che rappresentano tutte le orbite di G sull'insieme dei poli, e $m_1, \ldots, m_k$ i loro ordini. Contando gli elementi non banali di G mostrare che

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right)=\sum_i\left(1-\frac{1}{m_i}\right)$$

quindi trovare tutti i possibili m_i ed n che possono soddisfare questa equazione e classificare i gruppi corrispondenti.

ALTRI TRUCCHI

- (**Lemma del centro**) Sia ρ irriducibile. Se g ed h sono in classi di coniugio distinte, e $g^{-1}h \in Z(G)$ è nel centro del gruppo, allora si ha che $\rho(g^{-1}h) = \lambda\text{id}$ è un multiplo scalare dell'identità e $\chi(h) = \lambda\chi(g)$, dove λ è una radice dell'unità
  Infatti se $g^{-1}h$ sta nel centro di G allora $\rho(g^{-1}h)$ commuta con tutte le $\rho(k)\forall k \in G$ e per il lemma di Schur si ha $\rho(g^{-1}h) = \lambda\text{id}$.
  Quindi tr $\rho(h) = \text{tr}\ (\rho(g)\rho(g^{-1}h)) = \text{tr}\ (\rho(g)\lambda\text{id}) = \lambda\text{tr}\ (\rho(g))$ come desiderato. λ inoltre è ovviamente una radice dell'unità per quanto notato precedentemente.

- (**Rappresentazione indotta da un automorfismo**) Sia ρ una rappresentazione di G e sia ϕ un automorfismo di G. Allora $\rho \circ \phi$ è una rappresentazione di G. Inoltre $\rho \circ \phi$ è irriducibile se e solo se ρ è irriducibile
  Per vedere che è una rappresentazione bisogna verificare che sia un omomorfismo da G in GL(V), il che è ovvio se ρ lo è. Inoltre per l'irriducibilità basterà verificare la freccia ρ irriducibile implica $\rho \circ \phi$ irriducibile (il contrario è infatti ovvio se componiamo con ϕ^{-1}).
  Calcoliamo l'irriducibilità di $\rho\circ\phi$ con il carattere $\langle \chi_{\rho\circ\phi} \mid \chi_{\rho\circ\phi}\rangle = \langle \chi_\rho \mid \chi_\rho\rangle = 1$ con un semplice cambio di variabili (un automorfismo è biggettivo)

DIMENSION THEORY

In questa sezione mostriamo il risultato fondamentale che il grado di una rappresentazione irriducibile divide l'ordine del gruppo G.
Vedere poi la parte degli esercizi per una traccia della dimostrazione che il grado divide anche l'indice del centro Z (poi forse la completo).
Idea della dimostrazione:

- $\forall g \in G$ si ha che $\rho(g)$ è diagonalizzabile perché $\rho(g)^k = \text{id}$ per un certo $k \in \mathbb{N}$, quindi $\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^n \zeta^{m(i)}$ dove $n = \dim \rho$ e ζ è una radice primitiva dell'unità (in particolare $\zeta^k = 1$ e, detto $r =| G |$ si ha $\zeta^r = 1$). Quindi $\chi_\rho(g) \in \mathbb{Z}[\zeta]$

- Si consideri ora $P = \sum_{g\in G} \overline{\chi_\rho(g)}\rho(g) : V \to V$ allora si ha che P è un omomorfismo di rappresentazioni e quindi per schur si ha $P = \lambda\text{id}$. Considerando tr P e usando il fatto che ρ è irriducibile si trova $\lambda = \frac{|G|}{\dim\ \rho}$

- Mostriamo ora che $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha tr $P^k \in \mathbb{Z}[\zeta]$ e anche che tr $P^k \in \mathbb{Q}$

- A questo punto, ed è il punto più difficile, bisogna mostrare che $\mathbb{Z}[\zeta] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. Per farlo occorre prima mostrare che $\forall a \in \mathbb{Z}[\zeta]$ si ha $\exists p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ monico tale che $p(a) = 0$. Questo si può mostrare piuttosto in fretta mostrando che le radici dell'unità soddisfano la condizione e che se a e b soddisfano la condizione, allora anche $a + b$ la soddisfa (si può usare il risultante per questo)

- Da ciò deriva quindi che tr $P^k \in \mathbb{Z}$, ovvero che $\frac{|G|^k}{(\dim \rho)^{k-1}} \in \mathbb{Z} \quad \forall k$ e ora si può mostrare che ciò implica dim $\rho \mid G$, semplicemente passando ai primi. Si prenda $p^\alpha \mid\mid \dim \rho$ e allora si ha che $p^{\alpha(k-1)} \mid G^k \quad \forall k$. Ora sia β tale che $p^\beta \mid\mid G$. Allora $p^{\alpha(k-1)} \mid p^{\beta k}$, ovvero che $\alpha(k-1) \leq \beta k \implies \alpha \leq \beta \cdot \frac{k}{k-1}$ e facendo il limite per $k \to \infty$ si ha $\alpha \leq \beta$, ovvero per ogni potenza di primo p^α che divide dim ρ si ha anche $p^\alpha \mid G$ quindi dim $\rho \mid G$.

CONSEGUENZE

- (**Un gruppo di ordine p^2, con p primo, è abeliano**) Infatti per divisibilità può avere solo rappresentazioni di grado 1, p o p^2 ma per la formula della somma dei quadrati ha solo rappresentazioni di grado 1 ed è quindi abeliano.
- Le rappresentazioni di gruppi di ordini p^3, p^4 sono solo di grado 1 oppure p.

TEOREMI CHE VALGONO SUI GRUPPI FINITI / COMPATTI

SCONTRO DI CARATTERI

Su campi algebricamente chiusi vale $(\chi_\rho \mid \chi_\sigma) = \dim \text{Hom}_G(\rho, \sigma)$ e quindi in particolare si ha che ρ è irriducibile se e solo se $(\chi_\rho \mid \chi_\rho) = 1$

COEFFICIENTI MATRICIALI

Sia ρ una rappresentazione finito dimensionale di G. Fissata una base di V $\{v_1, \ldots, v_n\}$ definiamo $\rho_{ij}(g) := [\rho(g)]_{ij}$ rispetto alla base di V. Questo ci dà una funzione $\rho_{ij} : G \to \mathbb{C}$ che si chiama coefficiente matriciale e $\rho_{ij} \in \mathcal{C}(G)$
Definiamo $M(\rho) = \text{Span } (p_{ij})_{i,j}$ e notiamo che non dipende dalla base, allora si ha che se ρ è irriducibile $M(\rho) \cong \text{End }(V)$ come $G \times G$-rappresentazione. Si hanno le seguenti cose:

- $\rho \cong \rho' \implies M(\rho) = M(\rho')$
- $M(\rho \oplus \sigma) = M(\rho) + M(\sigma)$, dove la seconda somma è di spazi vettoriali, quindi non tiene conto delle molteplicità

Considerando il prodotto hermitiano di $L^2(G)$ dato da $(f \mid h) = \int_G f(g)\overline{h(g)}\, \mathrm{d}g$ allora si ha $(\rho_{ij}, \sigma_{hk}) = \delta_{ih}\delta_{jk}\delta_{\sigma\rho}\frac{1}{n}$ dove $n = \dim V_\rho$, e vale che $\mathcal{C}(G) = \oplus^{\text{TOP}}_{\rho \in \text{Irr }(G)} M(\rho)$, ovvero i coefficienti matriciali formano un sistema ortogonale completo.

LEMMA SULLA DECOMPOSIZIONE

Supponiamo di avere $V = \oplus_i V_i$, dove le V_i sono rappresentazioni irriducibili di G non isomorfe tra di loro e supponiamo di avere $W \subseteq V$ un sottospazio G-invariante. Allora $W = \oplus_i W_i$ dove si ha $W_i \subseteq V_i$ (eventualmente nullo).
Si dimostra con la proiezione $W_i \to V_i \cong \frac{V}{\oplus_{j \neq i} V_j}$ e per Schur è nulla oppure è isomorfismo.

INTEGRAZIONE DI HAAR

Vogliamo definire una funzione $\int_G : \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ che sia

- Lineare su $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$
- Invariante rispetto all'azione di G sulle funzioni continue (destra e sinistra per i gruppi compatti)
- $f \geq 0, f \neq 0 \implies \int_G f(g)\, \mathrm{d}g > 0$
- $\int_G \mathbb{1} = 1$

Per tutti i gruppi compatti si ha esistenza ed unicità della misura che la definisce

RAPPRESENTAZIONI DI S^1

INTEGRAZIONE DI HAAR

Sia f continua da S^1 a $\mathbb{R}$. Allora abbiamo che l'integrazione di Haar è

$$\int_{S^1} f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI

Essendo un gruppo abeliano, tutte le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1 e sono quindi omomorfismi da S^1 in $\mathbb{C}^*$. Si vede che hanno come immagini solo S^1 e sono continui, quindi abbiamo che sono tutte e sole le mappe del tipo $e^{i\theta} \mapsto e^{im\theta}$ con $m \in \mathbb{Z}$.

RAPPRESENTAZIONI DI $S^3 \cong \mathrm{SU}\,(2)$

Useremo il fatto che $S^3 \cong \mathrm{SU}\,(2)$, che possiamo a sua volta immergere in $\mathbb{H}$

INTEGRAZIONE DI HAAR

L'integrazione invariante viene indotta dall'iniezione $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ ed è invariante perché SU (2) agisce ortogonalmente su $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$. Se prendiamo le coordinate sferiche su $\mathbb{R}^4$ otteniamo $\varphi \in [0, 2\pi], \theta, \psi \in [0, \pi]$ le coordinate

$$x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta\cos\psi, x_3 = r\sin\theta\sin\psi\cos\varphi, x_4 = r\sin\theta\sin\psi\sin\varphi$$

E si ha quindi $\int_{\mathrm{SU}\,(2)} f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi,\psi)\sin^2\theta\sin\psi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi$

RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI

Preso $U \cong \mathbb{C}^2$ abbiamo l'azione ovvia di SU (2) qui sopra. Allora tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di SU (2) sono quelle del tipo $V_m := S^m U^* \cong \mathbb{C}[x, y]_m$
Il carattere di ρ_m si esprime solo in termini di $\cos\theta$ e si ha $\chi_{\rho_m}(A(e^{i\theta})) = \sum_{j=0}^m e^{i(2j-m)\theta} = \frac{e^{i(m+1)\theta} - e^{-i(m+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$

FORMULA DI CLEBSCH-GORDAN

Supponiamo $m \geq n$ allora la decomposizione dei prodotti tensore è $\rho_m \otimes \rho_n = \sum_{j=0}^n \rho_{m+n-2j}$

RAPPRESENTAZIONI COSTRUITE

Data una rappresentazione V si possono costruire nel modo che abbiamo visto $\Lambda^2 V$ e $\mathrm{Sym}\,^2 V$ per le quali si ha:

- $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$
- $\chi_{\mathrm{Sym}\,^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2))$

Dovrebbero inoltre valere (formule di Newton-Girard):

$$\mathrm{tr}\,\Lambda^k(g) = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^k (-1)^{m-1}\mathrm{tr}\,(g^m)\mathrm{tr}\,(\Lambda^{k-m}(g))$$

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{Sym}\,^k(g) = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^k \mathrm{tr}\,(g^m)\mathrm{tr}\,(\mathrm{Sym}\,^{k-m}(g))$$

RAPPRESENTAZIONI REALI

Sia $\rho : G \to \mathrm{GL}(V_\rho)$ una rappresentazione irriducibile. Si hanno allora i seguenti casi:

- $\rho \ncong \rho^* \Leftrightarrow \chi_\rho \notin \mathbb{R}$ ovvero se il carattere ha almeno un valore non reale
- $\rho \cong \rho^*$ e V_ρ ha una forma quadratica invariante non degenere (e ρ è reale $\Leftrightarrow$ si verifica questo caso)
- $\rho \cong \rho^*$ e V_ρ ha una forma alternante invariante non degenere

Per sapere quale dei tre casi si verificano è sufficiente calcolare l'indicatore di Schur: $\frac{1}{|G|}\sum_g \chi_\rho(g^2) = \frac{1}{|G|}\sum_g(\chi_{\mathrm{Sym}\,^2 V}(g) - \chi_{\Lambda^2 V}(g)) = \dim \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Sym}\,^2 V, \mathbb{1}) - \dim \mathrm{Hom}\,(\Lambda^2 V, \mathbb{1})$

REALIFICAZIONE E COMPLESSIFICAZIONE

Sia $f : W \to W$ una funzione $\mathbb{C}$-lineare. $f_\mathbb{R} : W_\mathbb{R} \to W_\mathbb{R}$ è ora $\mathbb{R}$-lineare e vale $\mathrm{tr}\, f_\mathbb{R} = 2\Re(\mathrm{tr}\, f) = \mathrm{tr}\, f + \overline{\mathrm{tr}\, f}$
Se ho ora una rappresentazione complessa $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V_\sigma)$ ne ottengo una rappresentazione reale $\sigma_\mathbb{R} : G \to \mathrm{GL}(V_{\sigma\mathbb{R}})$ componendo con l'inclusione $\mathrm{GL}(V_\sigma) \to \mathrm{GL}(V_{\sigma\mathbb{R}})$ e si ha inoltre $\chi_{\sigma\mathbb{R}} = \chi_\sigma + \overline{\chi_\sigma} = \chi_{\sigma\oplus\sigma^*}$.
Notare che $\dim_\mathbb{R} \sigma_\mathbb{R} = 2\dim_\mathbb{C} \sigma$. (Notare che ciò non significa che $\sigma \cong \sigma^*$ come rappresentazioni reali, i caratteri sui reali non valgono molto)
Dato uno spazio vettoriale reale si può complessificare e si ha $V_\mathbb{C} := V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ (come $\mathbb{R}$-spazi) e $V_\mathbb{C}$ è in modo naturale uno spazio vettoriale complesso con la moltiplicazione a sinistra. La cosa bellina è che scelta $\{e_1, \ldots, e_n\}$ $\mathbb{R}$-base di V si ha che $[f_\mathbb{C}]_{e_i} = [f]_{e_i}$, ovvero le matrici che rappresentano il morfismo hanno le stesse entrate!
Ci si può convincere facilmente che $(\sigma_\mathbb{R})_\mathbb{C} \equiv \sigma \oplus \sigma^*$ (basta fare il conto sui caratteri)
Inoltre abbiamo l'aggiunzione seguente: V spazio vettoriale reale, W spazio vettoriale complesso. Allora vale $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, W_\mathbb{R}) \equiv \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V_\mathbb{C}, W)$, dove l'isomorfismo vale a livello di spazi vettoriali. E in questa corrispondenza gli omomorfismi di rappresentazioni si corrispondono. Sia quindi ρ rappresentazione su $\mathbb{R}$ e σ rappresentazione sui complessi. Allora può essere utile sapere che $\mathrm{Hom}\,(\rho_\mathbb{C}, \sigma) \equiv \mathrm{Hom}\,(\rho, \sigma_\mathbb{R})$.
Infatti in questo modo si ha che $\rho_\mathbb{C} = \sigma \oplus \ldots$ se e solo se $\sigma_\mathbb{R} = \rho \oplus \ldots$.

CASI DI REALIFICAZIONE

Supponiamo di avere V rappresentazione complessa irriducibile. Allora abbiamo i seguenti due casi per $V_\mathbb{R}$:

- $V_\mathbb{R}$ è irriducibile
- $V_\mathbb{R} \cong 2W$, con W irriducibile

Inoltre vale sempre che $V_{\mathbb{R}_\mathbb{C}} \cong V \oplus V^*$ (conto con i caratteri)

CASI DI COMPLESSIFICAZIONE

Supponiamo di avere V rappresentazione reale irriducibile. Allora abbiamo i seguenti due casi per $V_\mathbb{C}$:

- $V_\mathbb{C}$ è irriducibile
- $V_\mathbb{C} \cong W \oplus W^*$, con W irriducibile

Notare che se la dimensione di V è dispari, si verifica sempre che $V_\mathbb{C}$ è irriducibile.
Inoltre vale sempre che $V_{\mathbb{C}_\mathbb{R}} \cong 2V$ (seguire cosa fanno le matrici)

NUMERO DI IRRIDUCIBILI

Se prendo una rappresentazione reale irriducibile V e faccio $V_\mathbb{C}$ e la decompongo in irriducibili complesse ho che se parto da V iniziali diverse ottengo sempre una somma di diverse rappresentazioni complesse in arrivo. In particolare "accoppio" sempre W e W^*.

Tutte le rappresentazioni reali (o meglio i caratteri)

Per trovare quindi tutte le rappresentazioni reali di un dato gruppo (conoscendone la tabella dei caratteri complessi) basterà accoppiare ciascuna rappresentazione complessa con la duale, e realificandole so che ottengo 2 copie di V.
Notate però che i caratteri sulle rappresentazioni reali non sono tanto fighi quanto su quelle complesse.

Sapere se una rappresentazione reale è irriducibile

Considero $\chi_V(g)$, carattere di una rappresentazione reale, come se fosse il carattere di una rappresentazione complessa (complessificando viene quello). Adesso ho che:

- Se è irriducibile come carattere complesso, allora lo è anche la rappresentazione reale
- Se mi viene $\cong \rho \oplus \rho^*$ con ρ irriducibile allora è irriducibile anche la rappresentazione reale
- Altrimenti la rappresentazione reale non è irriducibile

Esercizi

Alcuni esercizi che potranno diventare parte del pdf (in particolare se qualcuno ha voglia di farli e poi scriverne la soluzione e/o aggiungerla nella parte che più si addice è il benvenuto). Non è detto che siano facili ed, in generale, non ne conosco la soluzione.

- Supponiamo di avere un gruppo finito G che agisce transitivamente su un insieme finito X. Mostrare che la rappresentazione banale compare solo una volta nella rappresentazione per permutazioni indotta ρ_X. Sia ora $\rho_X = \mathbb{1} \oplus \sigma_X$. Supponendo che l'azione sia doppiamente transitiva, mostrare che σ_X è irriducibile.
  Sia $n \geq 2$ e si consideri l'azione naturale di S_n su $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mostrare che S_n ha sempre una rappresentazione irriducibile di grado $n - 1$.
  Si consideri l'azione naturale di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ e sia ρ la corrispondente rappresentazione per permutazioni. Si mostri che $\rho = \mathbb{1} \oplus \sigma$ e σ è irriducibile di grado q.
- Sia ρ una rappresentazione irriducibile di un gruppo finito G. Se il grado di ρ è al più 2 mostrare che il suo carattere χ_ρ si annulla su almeno un elemento di G (può essere conveniente fare prima il caso in cui il carattere di G sia a valori interi ed il caso di G gruppo ciclico)
- Mostra che se G è un gruppo che ha un sottogruppo abeliano di indice m, allora ogni rappresentazione irriducibile di G ha grado al più m.
- Sia G un gruppo finito e si denoti con Z il suo centro. Sia ρ una rappresentazione irriducibile di G di grado d_ρ. Si mostri che
  - Si consideri $\rho^{(m)}$ definita come $\rho \otimes \rho \otimes \ldots \otimes \rho$ (m volte). Si osservi che è irriducibile come rappresentazione di $G \times G \times \ldots \times G$.
  - La rappresentazione $\rho^{(m)}$ è banale sul sottogruppo $\{(z_1, \ldots, z_m) \in Z \times Z \times \ldots \times Z \mid z_1 z_2 \ldots z_m = 1\}$ e si concluda quindi che d_ρ^m divide $\frac{|G|^m}{|Z|^{m-1}}$
  - Si concluda quindi che d_ρ divide $\frac{|G|}{|Z|} = [G : Z]$
- Sia σ la rappresentazione standard di S_n. Per $n \geq 4$ si mostri che σ ristretta ad A_n è irriducibile. (Hint: mostrare che l'azione di A_n su $\{1, 2, \ldots, n\}$ è $(n-2)$-transitiva.)
- Sia G un gruppo finito e $g \in G$. Dimostra che g è coniugato a g^{-1} se e solo se $\chi(g)$ è reale per ogni carattere irriducibile χ di G. Diciamo in questo caso che la classe di coniugio di g è auto-inversa. Dimostra inoltre che il numero di caratteri irriducibili di G che assume solo valori reali è uguale al numero di classi di coniugio di G che sono auto-inverse.
- Sia G un gruppo finito. Dimostrare che g è coniugato ad h se e solo se $\chi(g) = \chi(h)$ per tutti i caratteri irriducibili χ di G.

- Sia G un gruppo finito. Allora $\mid G \mid$ è dispari se e solo se G non ha caratteri non-banali a valori solamente reali. (ovvero $\exists \chi$ t.c. $\chi(g) \in \mathbb{R} \quad \forall g \in G$ (e χ non banale) se e solo se G ha ordine pari).
  Sia inoltre G un gruppo di ordine dispari e sia s il numero delle sue classi di coniugio. Allora $s \equiv \mid G \mid \pmod{16}$

- Mostra che il coniugato complesso di un carattere irriducibile è ancora un carattere irriducibile. Indichiamo poi con M la tabella dei caratteri di G pensata come matrice quadrata. Mostrare che $\det M$ è reale oppure immaginario puro e cerca di esprimerlo in termini di dati sul gruppo (non ho idea di cosa voglia dire l'ultima parte)

- Sia χ irriducibile e di grado n, C una classe di coniugio di cardinalità prima con n. Allora se $s \in C$, si ha $\chi(s) = 0$ oppure $\mid \chi(s) \mid = n$.

- Se una classe di coniugio C di un gruppo G contiene un numero di elementi che è una potenza di un primo, allora G non è semplice.

- Diciamo che un elemento g in un gruppo finito G, si dice razionale se, $\forall h \in G$ tale che $\langle h \rangle = \langle g \rangle$, $\exists x \in G$ t.c. $xgx^{-1} = h$. Ovvero se un altro elemento genera lo stesso sottogruppo allora è coniugato. Dimostrare che ogni elemento razionale ha carattere razionale (e quindi intero, ma questo è molto più difficile).
  È vero anche il viceversa? (Cioè, se ho $g \in G$ tale che $\forall \rho \quad \chi_\rho(g) \in \mathbb{Q}$, è vero che g è coniugato agli elementi del tipo g^r, con MCD $(r, \operatorname{ord} g) = 1$?)
  Diciamo ora che un gruppo è razionale se ogni suo elemento è razionale. Mostrare allora che se G è un gruppo razionale e N un suo sottogruppo normale, anche G/N è un gruppo razionale. Mostrare inoltre che se H è un sottogruppo di G, non è detto che H sia razionale.
  Dimostrare che S_n è un gruppo razionale.

- Sia G un gruppo finito e ρ una sua rappresentazione di dimensione finita. Dimostrare allora che ρ è fedele (ovvero $\rho(g) = \mathrm{id} \implies g = e$) $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tale che tutte le rappresentazioni irriducibili di G compaiono nella decomposizione in irriducibili di $\rho^{\otimes m}$, dove si intende il prodotto tensore di ρ con sè stessa m volte.

- Indichiamo con $\operatorname{Dimmax} G$ la massima dimensione di una rappresentazione irriducibile di G. Sia allora H un qualsiasi sottogruppo di G. Allora vale che $\operatorname{Dimmax} G \leq \operatorname{Dimmax} H \cdot [G : H]$, dove $[G : H]$ è l'indice di H in G.

- G gruppo finito. ρ rappresentazione irriducibile e fedele. Allora $Z(G)$ è ciclico.

- $g \in G$ elemento di ordine 2 allora si ha $\chi_\rho(g) \in \mathbb{Z}$ e inoltre $\chi_\rho(g) \equiv \chi_\rho(e)(2)$.
  $g \in G$ elemento di ordine 3 coniugato all'inverso. Allora $\chi_\rho(g) \in \mathbb{Z}$ e inoltre $\chi_\rho(g) \equiv \chi_\rho(e)(3)$.