Brevissime note di geometria simplettica

Bruno Bucciotti

16 agosto 2018

Sommario

Poichè le coordinate qui vengono "a coppie", in uno spazio $2n$ dimensionale indico le prime n coordinate con X^{q^i}, le successive n con X^{p_i}. Si farà ampio uso delle note sull'Isham, in particolare non citerò l'uso della "formula per la derivata esterna" per le 0 forme.

1 Symplectic manifold

Definizione Coppia (M, ω) con M varietà differenziabile, ω forma bilineare antisimmetrica, chiusa ($\omega = d\alpha$) non degenere ($\forall u \in M$, $\omega(u, v) = 0 \implies v = 0$).

Symplectomorphism Data una mappa $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ fra due spazi simplettici, ϕ è simplettomorfismo (trasformazione canonica) quando $\phi^* \omega_N = \omega_M$.

Darboux Esiste sempre un sistema di coordinate, dette canoniche, per cui $\omega = \sum dx^i \wedge dp_i$

Isomorfismo fra campi vettoriali e 1-forme Dato un campo vettoriale Ω_α posso costruire l'1-forma $\alpha = \omega(\Omega_\alpha, *)$. La mappa è lineare e iniettiva (per non degenerazione di ω), dunque per dimensionalità è un isomorfismo.

Symplectic vector field Un campo vettoriale X si dice simplettico se il suo flusso preserva la forma simplettica. Si scrive $\mathcal{L}_X \omega = 0$ o equivalentemente, detto ϕ il flusso associato a X, $\phi_t^* \omega = \omega$.
Proof: la freccia a sinistra segue dalla definizione di $\mathcal{L}_X$, l'altra si fa considerando $f_p(t) = (\phi_t^* \omega)(p)$ (al variare di t sono forme tutte in p, quindi ha senso la differenza); $\frac{df_p}{dt}|_{t=s} = \phi_s^*(\mathcal{L}_X \omega) = 0$, cioè f_p costante.
Un'altra definizione possibile è Ω_α simplettico quando α, associata mediante ω, è chiusa. Il conto usa la formula di Cartan e la chiusura di ω: $\mathcal{L}_{\Omega_\alpha} \omega = d(\omega(\Omega_\alpha, *)) = d\alpha$

Hamiltonian vector field Un campo vettoriale X_H si dice Hamiltoniano di Hamiltoniana $H : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ se dH è associato a X_H mediante ω; esplicitamente $dH = \omega(X_H, *)$. Osserviamo che per la terza definizione data di campo simplettico, poichè dH è una forma chiusa, X_H è simplettico ($d^2 = 0$). Nelle coordinate canoniche ho che $dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$, mentre $\omega(X_H, *) = (\sum dq^i \otimes dp_i - dp_i \otimes dq^i)(X_H, *) = \sum X_H^{q^i} dp_i - X_H^{p_i} dq^i$, e dall'uguaglianza delle due ho $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)$.

Proprietà dei campi Hamiltoniani

- La combinazione lineare di Hamiltoniane genera un campo Hamiltoniano che è la combinazione lineare dei campi.
- In coordinate canoniche le curve integrali del campo Hamiltoniano X_H sono le traiettorie nello spazio delle fasi del sistema soggetto a evoluzione temporale data dall'Hamiltoniana H.
- H costante lungo le curve integrali di X_H (H costante del moto).
- Più in generale se $\{F, H\} = 0$ allora $\mathcal{L}_{X_H} F = X_H(F) = (dF)(X_H) = \omega(X_F, X_H) = \{F, H\} = 0$ dove l'ultimo passaggio si giustifica o in coordinate o assumendolo come definizione di parentesi di Poisson.

Verso l'Identità di Jacobi. Definiamo per f, g funzioni $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$

- $\{a, b\} = X_b(a) = -X_a(b)$ poichè $\{a, b\} = \omega(X_a, X_b) = (da)(X_b) = X_b(a)$ dove ho usato l'Hamiltonianietà di X_a.
- $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$ dove il meno in alcuni testi è assente perchè si cambia la definizione di Lie bracket per un segno.
  Proof: $(d\omega)(X_f, X_g, V) = 0$ per chiusura di ω, V vettore qualsiasi. Sviluppando ho:

$$X_f \omega(X_g, V) - X_g \omega(X_f, V) + V\omega(X_f, X_g) - \omega([X_f, X_g], V) +$$

$$+ \omega([X_f, V], X_g) - \omega([X_g, V], X_f) = 0$$

allora usando l'Hamiltonianietà

$$X_f V g - X_g V f + V\{f, g\} - \omega([X_f, X_g], V) - [X_f, V]g + [X_g, V]f = 0$$

sviluppo gli ultimi 2 commutatori e uso l'identità al punto precedente dell'elenco

$$V\{f,g\} - \omega([X_f, X_g], V) + V X_f g + V X_g f = V\{f,g\} - \omega([X_f, X_g], V) - 2V\{f,g\} = 0$$

infine

$$V\{f,g\} = -\omega([X_f, X_g], V) = (d\{f,g\})(V) = \omega(X_{\{f,g\}}, V)$$

da cui la tesi per non degenerazione di ω e l'assenza di ipotesi su V.

- Identità di Jacobi: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$.
  Proof: $\{f,\{g,h\}\} = X_f X_g h$. Allora ho

  $$\{f,\{g,h\}\}+X_g X_h f+X_h X_f g = \{f,\{g,h\}\}+X_g X_h f-X_h X_g f = \{f,\{g,h\}\}+[X_g, X_h]f =$$

  $$\{f,\{g,h\}\} - X_{\{g,h\}}f = 0$$