常微分方程复习

作者：Minakami Yuki
时间：2023 年 2 月 24 日

目录

解.

Chapter 1

常微分方程基本解法

§1.1 常用微积分和一些提示

【注 1.1】 一些容易忘记的积分如下:

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x dx = \cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$
$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

【注 1.2】 一些容易忘记的导数如下:

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$
$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \tan x \sec x$$
$$(\csc x)' = -\cot x \csc x$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

【注 1.3】 求出通解后还需要注意方程特解形式。

【例题 1.4】 解微分方程方程 $y'^2 + y^2 = 1$.

解.

$$y' = \pm\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \pm \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int dx.$$
$$\Rightarrow \pm \arcsin y = x + C.$$

□

§1.2 涉及分式的微分方程

【命题 1.5】 形如

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$$

的微分方程，可以令

$$\begin{cases}x=X+h\\ y=Y+k\end{cases}\Longrightarrow\frac{dY}{dX}=f(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y})\quad u=\frac{Y}{X}\Rightarrow\frac{du}{dX}=f(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u})$$

将方程化为齐次方程求解。

【例题 1.6】 解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y+3}$$

解. 令

$$\begin{cases}x=X+h\\ y=Y+k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h-k+1=0\\ h+k+3=0\end{cases}$$

于是得到

$$\begin{cases}h=-2\\ k=-1\end{cases}$$

令

$$u=\frac{Y}{X}\Rightarrow X\frac{du}{dX}+u=\frac{1-u}{1+u}$$

于是

$$X\frac{du}{dX}=\frac{-u^2-2u+1}{1+u}\Rightarrow-\int\frac{u+1}{u^2+2u-1}du=\int\frac{1}{x}dx$$

解得

$$-\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1|=\ln|x|+C$$

此外还有特解 $u^2+2u-1=0$. □

【注 1.7】 特别地，上述方法只有在方程满足

$$\begin{cases}a_1h+a_2k+c_1=0\\ a_2h+a_2k+c_2=0\end{cases}\quad\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\ a_2&b_2\end{vmatrix}\neq0$$

时才能生效。

【例题 1.8】 解微分方程 $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$.

解. 本题并非是涉及分式的微分方程，但也用到了换元的思想[1]，在此画蛇添足，作为一道例题编入。题面初看之下，似乎没什么头绪，但只要注意到

$$xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2\iff xy'-y+(y-x)^2=0\xrightarrow{u=y-x}x(u'+1)-y+u^2=0$$

也即

$$xu'-u+u^2=0\Rightarrow\int\frac{du}{u(1-u)}=\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow-\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=\ln|x|+C$$

将 $u=y-x$ 代回上式：

$$\ln\left|\frac{y-x}{y-x-1}\right|=\ln|x|+C\iff\frac{y-x}{y-x-1}=Cx\Rightarrow y=\frac{Cx^2+(C-1)x}{Cx-1}$$

此外还有特解 $y^*=x$. □

[1]实际上该方程是一个黎卡蒂方程，在之后的内容中会再见到它。

§1.3 全微分方程与微分因子法

【命题 1.9】 一个微分方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 是全微分方程当且仅当

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

此时，方程的通解可以写作如下的通积分：

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C$$

(x_0,y_0) 是平面上任选的一点，但注意方程在 (x_0,y_0) 处不能没有定义 (例如取 $x_0 = 0$ 则 $F(\frac{1}{x},y)$ 无定义)。

但考试中一般不会出现真正的全微分方程 (因为那样显得老师出题水平不行)，更常见的是构造积分因子：

【命题 1.10】 考虑微分方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 的如下关系量：

$$F(x,y) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.1}$$

若发现 $F(x,y) = M(x,y) \cdot f(y)$ 或 $F(x,y) = N(x,y) \cdot f(x)$，则可以构造积分因子：

- (1.1)具有因式项 N，且提出 N 后仅与 x 相关：

$$\mu(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

- (1.1)具有因式项 M，且提出 M 后仅与 y 相关：

$$\mu(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

积分因子也即

$$\mu = \begin{cases} e^{\int \mu(x)dx} \\ e^{-\int \mu(y)dy} \end{cases} \tag{1.2}$$

方程 $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ 是全微分方程。

【例题 1.11】 解微分方程 $e^x dx + (e^x \cot y + 2\cos y)dy = 0.$

解.

$$M(x,y) = e^x, \quad N(x,y) = (e^x \cot y + 2\cos y)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0 - e^x \cot y$$
$$\mu(y) = \frac{1}{e^x} \cdot (-e^x \cot y) = -\cot y$$

只与 y 有关。于是，

$$\mu = e^{\int \cot y dy} = e^{\ln|\sin y|} = \sin y$$

全微分方程：

$$e^x \sin y dx + (e^x \cos y + \sin 2y)dy = 0$$

取 $(x_0,y_0) = (0,1)$，通积分为

$$\int_0^x e^x \sin y dx + \int_1^y (\cos y + \sin 2y)dy = C$$

可得

$$e^x \sin y - \frac{1}{2}\cos 2y = C$$

□

【注 1.12】 一般来说，如果题目中的方程是 $(\cdot)dx + (\cdot)dy = 0$ 或 $(\cdot)dx = (\cdot)dy$ 之类的形式，那么大概率考察的是积分因子法的求解。此外，$M(x,y) \to dx \quad N(x,y) \to dy$.

§1.4 可降阶微分方程

1.4.1 第一类

【命题 1.13】 形如

$$F(\mathbf{x}, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$$

这样的高阶方程，令 $p = y^{(k)}$ 可将方程降低 k 阶。

【注 1.14】 在求解这个方程的过程中可能还涉及到隐式微分方程的求解，隐式微分方程的重点在于，利用引入的中间变量 p 分别求出 x 和 y 关于 p 的表达式，这样就得到方程通解的隐式表示。

【例题 1.15】 解微分方程 $y''(2y'+x) = 1$.

解. 令 $p = y' \Rightarrow p'(2p+x) = 1 \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} = x + 2p$

先解齐次方程 $\dfrac{dx}{dp} = x \Rightarrow x = Ce^p$.

常数变易法，设 $x = C(p)e^p$，代入原方程：

$$C'(p)e^p + C(p)e^p = x + 2p$$

$$\Rightarrow C'(p)e^p = 2p \Rightarrow C(p) = \int \frac{2p}{e^p} dp = -\frac{2(p+1)}{e^p} + C$$

于是会有

$$x = Ce^p - 2(p+1) \xrightarrow{\frac{dx}{dy}} \frac{1}{p} = (Ce^p - 2)\frac{dp}{dy}$$

可以得到 y 的表达式

$$y = C(p-1)e^p - p^2 + C_1$$

因此，方程的通解为：

$$\begin{cases} x = Ce^p - 2(p+1) \\ y = C(p-1)e^p - p^2 + C_1 \end{cases}$$

□

【例题 1.16】 解微分方程 $xy'' + (x^2-1)y' = 0$.

解. 令

$$y' = p \Rightarrow xp' + (x^2-1)p = 0 \Rightarrow p = Cxe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + C_1.$$

□

隐式方程求解例题：

【例题 1.17】 解微分方程 $y'(x - \ln y') = 1$.

解. 令 $y' = p \Rightarrow p(x - \ln p) = 1$

于是，得到方程：

$$\begin{cases} p = y' \\ x = \dfrac{1}{p} + \ln p \end{cases}$$

$$dy = y'dx = p(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p})dp \Rightarrow y = -\ln p + p + C$$

方程的隐式解为：

$$\begin{cases} x = \ln p + \dfrac{1}{p} \\ y = p - \ln p + C \end{cases}$$

□

【例题 1.18】 解微分方程 $x^3+(y')^3=4xy'$.

解. 令 $p=y' \Rightarrow x^3+p^3=4xp$

现在不妨令 $p=tx \Rightarrow x^3+t^3x^3=4tx^2 \Rightarrow x=\dfrac{4t}{1+t^3}$

转而求 y:

$$dy=pdx=txdx=t\frac{4t}{1+t^3}\frac{4(1+t^3)-12t^3}{(1+t^3)^2}dt \Rightarrow y=-\frac{8}{(1+t^3)^2}-\frac{32}{3}\frac{1}{(1+t^3)}+C$$

综上，隐式解为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{4t}{1+t^3} \\ y=-\dfrac{8}{(1+t^3)^2}-\dfrac{32}{3}\dfrac{1}{(1+t^3)}+C \end{cases}$$

□

1.4.2 第二类

【命题 1.19】 形如

$$F(\mathbf{y},y',y'',\cdots,y^{(n)})$$

这样的高阶微分方程，令 $p=p(y)=\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow y''=\dfrac{dp}{dy}p$，这样就得到不显含 x 的形式。

【注 1.20】 第二类可降阶方程的主要特征是不显含第二个自变量 x，因此需要引入 $p=p(y)$ 来得到不显含 x 的形式。

【例题 1.21】 解微分方程 $y''=\dfrac{1+y'^2}{2y}$.

解. 令

$$p=p(y)=y' \Rightarrow p\frac{dp}{dy}=\frac{1+p^2}{2y} \Rightarrow \frac{p}{1+p^2}dp=\frac{dy}{2y}$$

$$\Rightarrow \int\frac{p}{1+p^2}dp=\int\frac{dy}{2y} \Rightarrow 1+p^2=Cy \Rightarrow y'=\pm\sqrt{Cy-1}$$

$$\int\frac{dy}{\pm\sqrt{Cy-1}}=\int dx \Rightarrow \pm\frac{2}{C}\sqrt{Cy-1}=x+C_1$$

□

【例题 1.22】 解微分方程 $yy''-(y')^2+(y')^3=0$.

解. 令

$$p=p(y)=y' \Rightarrow yp\frac{dp}{dy}-p^2+p^3=0 \Rightarrow \frac{dp}{p(1-p)}=\frac{dy}{y}$$

$$y=C\frac{p}{p-1} \quad (p,p-1\neq 0) \Rightarrow dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{p(1-p)^2}dp$$

可以解出

$$x=C(\ln\left|\frac{p}{1-p}\right|+\frac{1}{1-p})+C_1$$

于是，方程隐式解：

$$\begin{cases} y=C\dfrac{p}{p-1} \\ x=C(\ln\left|\dfrac{p}{1-p}\right|+\dfrac{1}{1-p})+C_1 \end{cases}$$

此外还有特解 $p=1$ 和 $p=0$，对应 $y=x+C$ 和 $y=C$. □

§1.5 隐式微分方程

【命题 1.23】 形如 $F(x,y,y')=0$ 的微分方程被称为一阶隐式微分方程，共分为 4 种：

1. $y=f(x,y')$;
2. $x=f(y,y')$;
3. $F(x,y')=0$;
4. $F(y,y')=0$.

后两种在前一节中已有介绍，我们重点看前两种。

我们主要通过例题来体会如何求解前两种隐式微分方程。

【例题 1.24】 解微分方程 $(y')^3=3(xy'-y)$.

解. 方程满足形式 $y=f(x,y')$，令

$$p=y'\Rightarrow p^3=3(xp-y)\Rightarrow y=xp-\frac{p^3}{3}$$

式子两边同时进行微分运算，利用 $dy=pdx$ 得到：

$$pdx=pdx+xdp-p^2dp\Rightarrow (x-p^2)dp=0\Rightarrow dp=0$$

容易看出 $p=C$，回代可得 $y=Cx-\dfrac{C^3}{3}$. □

【注 1.25】 从上面的例题入手，第一类方程 $y=f(x,y')$(第二类方程类似) 的解法是通过适当的转化解出关于 y(或 x) 的方程。

【例题 1.26】 解微分方程 $(y')^3+(y'^2-2y')x=3y'-y$.

解. 方程满足形式 $y=f(x,y')$，令

$$p=y'\Rightarrow p^3+(p^2-2p)x=3p-y\Rightarrow y=3p+p(2-p)x-p^3$$

式子两边同时微分，由 $dy=pdx$ 有：

$$pdx=3dp+2(1-p)xdp+p(2-p)dx-3p^2dp\Rightarrow (3p+3+2x)dp+pdx=0$$

得到关于 x 的微分方程：$x'+\dfrac{2x}{p}=-\dfrac{3}{p}-3$，先解齐次方程：

$$x'=-\frac{2x}{p}\Rightarrow x=C\frac{1}{p^2}$$

常数变易法，设 $x=C(p)\dfrac{1}{p^2}$ 回代：

$$C(p)=-3p(p+1)\Rightarrow C(p)=-p^3-\frac{3}{2}p^2+C$$

因此

$$x=-p+\frac{C}{p^2}-\frac{3}{2}$$

方程隐式解：

$$\begin{cases} x=-p+\dfrac{C}{p^2}-\dfrac{3}{2} \\ y=3p+p(2-p)x-p^3 \end{cases}$$

□

§1.6 特殊方程

1.6.1 伯努利方程

【命题 1.27】 形如
$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$
的微分方程被称为伯努利方程，在等式两边同除 y^n 可以得到方程：
$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=P(x)y^{1-n}+Q(x)$$
令 $z=y^{1-n} \quad \frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ 就转化为求解一阶线性非齐次方程：
$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$$
【注 1.28】 一阶线性非齐次方程通解公式如下：
$$y=Ce^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx \tag{1.3}$$
其中 $P(x)$ 是 y 的系数项，$Q(x)$ 是常数项。

【例题 1.29】 解微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$.

解. 方程可化简为：
$$y'=P(x)y+Q(x)\sqrt{y} \quad P(x)=\frac{4}{x},Q(x)=x^2$$
令
$$z=\sqrt{y} \quad \frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\frac{dz}{dx}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z+\frac{1}{2}x^2$$
利用公式(1.3)可得：
$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int\frac{x^2}{2}e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x^2(\frac{x}{2}+C)$$
□

【例题 1.30】 解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}$.

解. 等式两端同乘 $2y$ 可得
$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}+x^2$$
这是一个伯努利方程，$-n=1\rightarrow n=-1$，令
$$z=y^{1-(-1)}=y^2\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}+x^2\Rightarrow z=Cx+\frac{1}{2}x^3$$
□

【例题 1.31】 解微分方程 $2yy'+2xy^2=xe^{-x^2}$.

解. 这是一个伯努利方程，$-n=1\rightarrow n=-1$，令
$$z=y^2 \quad \frac{dz}{dx}=2y\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dz}{dx}+2xz=xe^{-x^2}$$
根据公式(1.3)：
$$z=e^{\int -2xdx}\left[\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx+C\right]\iff z=e^{-x^2}(\frac{x^2}{2}+C)$$
□

1.6.2 黎卡蒂方程

【命题 1.32】 形如

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + f(x)$$

的微分方程被称为黎卡蒂方程，需要猜出方程的一个特解 $y^*(x)$，令

$$y = z + y^*(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = [P(x) + 2y^*(x)Q(x)]z + Q(x)z^2$$

进而变成 $n = 2$ 情况下的伯努利方程。

【注 1.33】 一般题目中会给出黎卡蒂方程的一个特解。

【例题 1.34】 解微分方程 $x^2(y' + y^2) + 4xy + 2 = 0 \quad \left(y^* = -\dfrac{2}{x}\right)$.

解. 令

$$y = z - \frac{2}{x} \Rightarrow x^2\left[z' + \frac{2}{x^2} + (z - \frac{2}{x})^2\right] + 4x\left(z - \frac{2}{x}\right) + 2 = 0$$

也即

$$x^2(z' + z^2) = 0 \Rightarrow z' + z^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = x + C$$

因此通解 $y = \dfrac{1}{x+C} - \dfrac{2}{x}$，特解 $y = -\dfrac{2}{x}$. □

【例题 1.35】 解微分方程 $y' + 2ye^x - y^2 = e^2x + e^x \quad (y^* = e^x)$.

解. 令

$$y = z + e^x \Rightarrow (z' + e^x) + 2(z + e^x)e^x - (z + e^x)^2 = e^{2x} + e^x$$

$$\Rightarrow z' - z^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + C$$

通解 $\dfrac{1}{y - e^x} = C - x$，特解 $y = e^x$. □

【例题 1.36】 解微分方程 $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2 \quad (y^* = x)$.

解. 令

$$y = z + x \Rightarrow xz' - z + z^2 = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z(1-z)} = \frac{dx}{x}$$

于是

$$\int \frac{dz}{z(1-z)} = \int \frac{dx}{x} \iff \ln\left|\frac{z}{z-1}\right| = \ln|x| + C \Rightarrow y = \frac{x^2 - (C-1)x}{x - C}$$

解得通解 $y = \dfrac{x^2 - (C-1)x}{x - C}$，特解 $y = x$. □

1.6.3 欧拉方程

【命题 1.37】 形如

$$E[y] = x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x)$$

的微分方程称为欧拉方程，此时令 $x = e^t, \quad t = \ln x$ 并引入微分算子

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n} \Rightarrow D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)y + a_1 D(D-1)\cdots(D-n+2)y + \cdots + a_{n-1}Dy + a_n y = f(t)$$

可利用公式 $D^n y = \dfrac{d^n y}{dt^n}$ 进行化简。

【注 1.38】 求解这个方程实际上是解一个高阶线性微分方程，例题在下一节给出。

§1.7 高阶线性微分方程

1.7.1 刘维尔公式

【定理 1.39】 设 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 是方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t)$$

的任意 n 个解，$W(t)$ 是方程对应的朗斯基行列式，则对解区间 (a,b) 上任意一点 t_0 都有

$$W(t)=W(t_0)\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds\right]$$

【注 1.40】 利用刘维尔公式，对于二阶线性方程

$$x''+P(x)x'+Q(x)x=0$$

若 $x_1(t)$ 是方程的一个解，则可得到该方程的通解：

$$x(t)=C_2x_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int P(t)dt\right)dt+C_1x_1$$

【例题 1.41】 求方程 $(1-t^2)x''-2tx'+2x=0$ 的通解。

解. 易知 $x_1=t$ 是方程的一个解。由刘维尔公式：

$$x=x_1\left[C_1+C_2\int\frac{1}{t^2}\exp\left(\int\frac{2t}{1-t^2}dt\right)dt\right]=C_1t+C_2\left(\frac{t}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-1\right)$$

□

【例题 1.42】 利用刘维尔公式求解如下微分方程：

1. $x(x-1)y''-xy'+y=0$;
2. $(e^x+1)y''-2y'-e^xy=0;\quad y_1=e^x-1.$

解. 对于第一个方程，易知 $y=x$ 是方程的解，由刘维尔公式：

$$y=x\left[C_1+C_2\int\frac{1}{x^2}\exp\left(\int\frac{1}{x-1}dx\right)dx\right]=x\left[C_1+C_2\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx\right]$$

解得

$$y=C_1x+C_2(x\ln|x|+1)$$

对于第二个方程，同理代入公式：

$$y=(e^x-1)\left[C_1+C_2\int\frac{1}{(e^x-1)^2}\exp\left(\int\frac{2}{e^x+1}dx\right)dx\right]$$

也即

$$y=(e^x-1)\left[C_1+C_2\int\frac{2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)^2}dx\right]$$

解得

$$y=C_1(e^x-1)+C_2\left((e^x-1)\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|-1\right)$$

□

1.7.2 线性齐次方程

【命题 1.43】 对于常系数线性齐次方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

会有特征方程：

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

特征方程的根叫做特征根，分两种情况：

1. 特征根都是单根

$$y = C_1 e^{\lambda_1} + \cdots + C_n e^{\lambda_n}$$

2. 特征根有重根，设 λ_1 是其中的 k 重根，则关于 λ_1 的特解是

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda_1}$$

其他的根对应特解与单根情况相同，通解为所有特解的线性组合。

【注 1.44】 如果特征根 λ 为复根 $\alpha + i\beta$ 或 $\alpha - i\beta$，则特解分别对应 $e^{\alpha} \sin \beta x$ 和 $e^{\alpha} \cos \beta x$，根据代数基本定理，复根一定成对出现，因此不必纠结具体的对应方式，只需要了解到一旦出现形如 $\alpha + i\beta$ 的特征根则一定会有形如 $\alpha - i\beta$ 的特征根出现，因此通解中会同时包含 $\sin \beta x$ 和 $\cos \beta x$.

欧拉方程例题：

【例题 1.45】 解欧拉方程 $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$.

解. 利用微分算子，可得：

$$D(D-1)y - Dy + 2y = 0 \Rightarrow D^2 y - 2Dy + 2y = 0$$

也即

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

对应特征方程：

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

通解

$$y = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \iff y = x[C_1 \cos \ln |x| + C_2 \sin \ln |x|]$$

□

线性齐次方程问题：

【例题 1.46】 解线性方程 $y^{(3)} - y'' - y' + y = 0$.

解. 特征方程为

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) = 0$$

特征根 $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$，它们分别对应解 e^x, xe^x, e^{-x}，方程通解为：

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

□

1.7.3 线性非齐次方程

【命题 1.47】 对于常系数线性非齐次方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

虽然也能使用常数变易法，但待定系数法要简便得多，而非齐次项 $f(x)$ 和对应齐次方程的特征根情况将使待定特解有不同形式：

1. $f(x) = P_m(x)e^{rx}$. 其中 $P_m(x) = b_0 x^m + \cdots + b_{m-1}x + b_m$.

   方程会有形如：

   $$y^* = x^k Q_m(x) e^{rx}$$

   的特解，其中 $Q_m(x) = B_0 x^m + \cdots + B_{m-1}x + B_m$，这些 B_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ 是待定系数，阶数 k 由特征根和 r 的关系确定：

   $$k = \begin{cases} 0 & r \neq \lambda \\ 1 & r = \lambda_i \\ \ell & r = \lambda_{1,\cdots,\ell} \end{cases}$$

2. $f(x) = [A_l(x)\cos\beta x + B_s(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$. 其中 $A_l(x)$ 和 $B_s(x)$ 分别是关于 x 的 l 次和 s 次实多项式。

   方程有形如：

   $$y^* = x^k[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

   的特解。其中 $m = \max\{l, s\}$，阶数 k 由 $r = \alpha + i\beta$ 和特征根确定：

   $$k = \begin{cases} 0 & r \neq \lambda \\ \ell & r = \lambda_{1,\cdots,\ell} \end{cases}$$

【例题 1.48】 解欧拉方程 $x^3 y^{(3)} + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$.

解. 利用微分算子，可得

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t} \Rightarrow (D^3 - D^2 - 3D)y = 3e^{2t}$$

$$\Rightarrow y^{(3)} - 2y'' - 3y' = 3e^{2t}$$

对应特征方程

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$$

$r = 2$ 不是任何一个特征根，所以方程有形如 $y^* = Ax^2 + Bx + C$ 的特解，代入方程：

$$2Ax^2 - 4x(2Ax + B) = 3x^2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

方程通解为

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

□

【注 1.49】 在解欧拉方程时，尤其需要留意 $x = e^t$ 这一步转化，注意在这里特征根对比的系数是关于 t 的而不是 x 的，例如在 $x^\lambda = e^{\lambda t}$ 中 $r = \lambda$ 而不是 $r = 0$；此外，何时使用 t 为参数，何时将 e^t 代替为 x 简化运算，这些问题都值得留意。

接下来，看一个普通的线性非齐次方程的例子。

【例题 1.50】 解线性方程 $y^{(3)} - 5y'' + 4y' = x$.

解. 特征方程为

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$$

$r = 0$ 是特征单根，于是方程有形如

$$y^* = x(Ax + B)$$

的特解，回代会有：

$$-10A + 4(2Ax + B) = x \Rightarrow A = \frac{1}{8}, B = \frac{5}{16} \Rightarrow y^* = \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x$$

方程通解为：

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{4x} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x$$

□

【例题 1.51】 解线性方程 $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$.

解. 对应特征方程如下：

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i \Rightarrow y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$$

因为 $r = \pm 3i$ 是特征单根，特解形式如下：

$$y^* = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

代入原方程会有：

$$6(B\cos 3x - A\sin 3x = 18\cos 3x - 30\sin 3x) \Rightarrow A = 5, B = 3$$

所求通解为：

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$$

□

【例题 1.52】 解欧拉方程 $x^3y^{(3)} - x^2y'' + 2xy' - 2y = \ln x$

解. 利用微分算子，会有：

$$D(D-1)(D-2)y - D(D-1)y + 2Dy - 2y = t \Rightarrow y^{(3)} - 4y'' + 5y' - 2y = t$$

对应特征方程：

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$$

$r = 0$ 不是特征根，特解形式为 $y^* = At + B$，回代：

$$5A - 2(At + B) = t \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{5}{4}$$

于是，通解为

$$y = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{5}{4}$$

□

【例题 1.53】 解线性方程 $y^{(3)} - y'' - y' + y = e^x$.

解. 特征方程：

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$$

对应齐次方程通解 $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x$.
$r = 1$ 是特征二重根，方程有如下形式特解：

$$y^* = Ax^2e^x \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y^* = \frac{1}{4}x^2e^x$$

所以方程通解 $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x + \frac{1}{4}x^2e^x$. □

§1.8 一些杂项

这里再给出一些先前未能涉及到的 (不一定有固定方法) 的微分方程例题。

【例题 1.54】 解微分方程 $x[yy''+(y')^2]+3yy'=2x^3$.

解. 首先注意到

$$(yy')'=yy''+(y')^2 \xrightarrow{u=(yy')} xu'+3u=2x^3 \Rightarrow x^2(xu'+3u)=2x^5 \iff (x^3u)'=2x^5$$

令

$$v=x^3u \iff v'=2x^5 \Rightarrow v=\frac{1}{3}x^6+C \Rightarrow u=\frac{1}{3}x^3+\frac{C}{x^3}$$

也即

$$yy'=\frac{1}{3}x^3+\frac{C}{x^3} \Rightarrow (y^2)'=\frac{2}{3}x^3+\frac{2C}{x^3} \Rightarrow y^2=\frac{1}{6}x^4+\frac{C_1}{x^2}+C_2$$

□

【例题 1.55】 解微分方程 $(2x+1)^2y''-4(2x+1)y'+8y=0$.

解. 这实际上是欧拉方程的一个变体，注意到系数都有 $2x+1$，令

$$u=2x+1 \Rightarrow u^2y''-4uy'+8y=0 \Rightarrow D(D-1)y-4Dy+8y=0$$

化简会有

$$D^2y-5Dy+8y=0 \iff y''-5y'+8y=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+8=0$$

可以解出

$$\lambda=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i \Rightarrow y=C_1e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+C_2e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

这里 $e^t=2x+1$. □

【例题 1.56】 解微分方程 $y^{(3)}-3y''+3y'-y=2x+e^x$.

解. 这里的特殊之处是有两个非齐次项 $f_1(x)=2x,\quad f_2(x)=e^x$，设对应的两个非齐次方程 $L[y_1]$ 和 $L[y_2]$ 通解分别为 y_1 和 y_2，可以猜测方程 $L[y]$ 的通解 $y=y_1+y_2$.

这一结论被称为叠加原理，它的证明十分简单：

$$L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]\equiv f_1(x)+f_2(x)=L[y(x)]$$

该式就说明了 $L[y]$ 的通解 $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$.

于是本题等价于求解两个非齐次方程：

$$y^{(3)}-3y''+3y'-y=2x \tag{1}$$

$$y^{(3)}-3y''+3y'-y=e^x \tag{2}$$

对应特征方程均为：

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-2\lambda+1)-(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

易知 $\lambda_{1,2,3}=1$，对应齐次方程通解：

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$$

对于方程 (1)，特解形式为 $y^*=Ax+B$，代入会有：

$$3A-(Ax+B)=2x \Rightarrow A=-2,\quad B=-6$$

对于方程 (2)，特解形式为 $y^* = Ax^3e^x$，代入会有：

$$6Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

综上，方程通解：

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x - 2x - 6$$

□

【例题 1.57】 解微分方程 $y^{(5)} + 2y^{(3)} + y' = xe^x + \sin x$.

解. 对应特征方程：

$$\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i, \lambda_5 = 0$$

对应齐次方程通解 $y = (C_1x + C_2)\sin x + (C_3x + C_4)\cos x + C_5$.
根据叠加原理，等价于求解两个非齐次方程：

$$y^{(5)} + 2y^{(3)} + y' = xe^x \tag{1}$$
$$y^{(5)} + 2y^{(3)} + y' = \sin x \tag{2}$$

分别得到

$$y_1^* = \frac{1}{4}(x-3)e^x$$
$$y_2^* = \frac{1}{8}x^2\cos x$$

于是方程通解：

$$y = (C_1x + C_2)\sin x + (C_3x + C_4)\cos x + \frac{1}{4}(x-3)e^x + \frac{1}{8}x^2\cos x + C_5$$

□

【例题 1.58】 解微分方程 $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

解. 该方程是一个黎卡蒂方程，猜出方程的一个特解为

$$y^* = x + 2 \Rightarrow y = z + y^* \iff z' + 1 - 2x(z + x + 2) + (z + x + 2)^2 = 5 - x^2$$

化简后有：

$$z' + 4z + z^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+4}{u}\right| = x + C \Rightarrow y = \frac{4}{Ce^{4x} - 1} + x + 2$$

因此通解 $y = \dfrac{4}{Ce^{4x} - 1} + x + 2$，特解 $y^* = x + 2$.
但题目并没有给出需要的特解，本题实际上还有更简单的方法，注意到

$$y' = 5 - (x-y)^2 \xrightarrow{u=x-y} 1 - u' = 5 - u^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| = x + C$$

回代会有：

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-y-2}{x-y+2}\right| = x + C \Rightarrow y = \frac{4}{Ce^{4x} - 1} + x + 2$$

此外还有特解 $u = -2 \Rightarrow y^* = x + 2$.

□

Chapter 2

正交轨线与奇解

§2.1 正交轨线的求解

【命题 2.1】 曲线族 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2+c}=1$ 的正交轨线是

$$F(x,y,-\frac{1}{y'})=0$$

因此，求解正交轨线的标准程序实际上有两步：

1. 先求出曲线满足的微分方程 $F(x,y,y')=0$.
2. 做变换 $y'\to-\dfrac{1}{y'}$ 得到正交轨线方程 $F(x,y,-\dfrac{1}{y'})=0$.

【例题 2.2】 求曲线族 $x^2+y^2=Cx$ 的正交轨线。

解. 对曲线族方程两边求导，可得微分方程：

$$2x+2yy'=C,\quad C=\frac{x^2+y^2}{x}\Rightarrow 2x+2yy'=x+\frac{y+2}{x}$$

整理可得：$y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$，于是正交轨线方程：

$$-\frac{1}{y'}=\frac{y^2-x^2}{2xy}=\frac{y}{2x}-\frac{x}{2y}$$

也即：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}-\frac{y}{2x}$$

令

$$u=\frac{x}{y}\Rightarrow u+y\frac{du}{dy}=\frac{u}{2}-\frac{1}{2u}\Rightarrow -\ln|1+u^2|=\ln|y|+C$$

也即 $x^2+y^2-Cy=0$. □

【例题 2.3】 求曲线族 $xy=C$ 的正交轨线。

解. 曲线族方程两边求导，会有：

$$y+xy'=0\Rightarrow y'=-\frac{y}{x}$$

于是，正交轨线方程：

$$\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = y^2 + C$$

□

【例题 2.4】 求出下列各曲线族的正交轨线：

1. $y = Ce^x$;
2. $Cx^2 + y^2 = 1$.

解. 对于第一个曲线族，两边求导：

$$y' = Ce^x \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -Ce^x \Rightarrow \frac{dx}{-Ce^x} = dy \Rightarrow C_1 e^{-x} = y + C_2$$

对于第二个曲线族，两边求导：

$$2Cx + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{Cx}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{Cx}{y} \Rightarrow x = C_1 y^C$$

□

§2.2 奇解与包络

【命题 2.5】 对于一阶隐式微分方程 $F(x, y, y') = 0$，令 $p = y'$，可以得到如下的 p 判别式：

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p'(x, y, p) = 0 \end{cases}$$

从 p 判别式中求出的解包含了该方程全部的奇解，但也可能包含一部分非奇解，需要使用非退化条件进一步判断：

$$\begin{cases} F_y'(x, y, p) \neq 0 \\ F_{pp}''(x, y, p) \neq 0 \end{cases}$$

【例题 2.6】 求方程 $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$ 的奇解。

解. 先求出方程满足的微分方程，对式子两边求导得到：$y' = x + C$，得到隐式微分方程：

$$F(x, y, p) = p^2 - px + \frac{x^2}{2} - y = 0$$

则 p 判别式可以写作：

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p'(x, y, p) = 2p - x = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

考虑非退化条件：

$$\begin{cases} F_y'(x, y, p) = -1 \neq 0 \\ F_{pp}''(x, y, p) = 2 \neq 0 \end{cases}$$

于是，$y = \dfrac{x^2}{4}$ 是方程的奇解。 □

【注 2.7】 在上面的题目中，可将 $C = y' - x$ 代入到原方程中得到隐式微分方程。在求奇解时，第一步要做的就是求出方程背后的隐式微分方程。

【命题 2.8】 包络的求解与奇点有些类似，对于一个给定的单参数曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$，它的包络包含在如下的 c 判别式中：

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \Phi'_c(x,y,c)=0\end{cases}$$

此外，包络还需要满足非退化条件—对 c 判别式确定的曲线，$x=\phi(c), y=\psi(c)$ 需要满足：

$$(\phi'(c),\psi'(c))\neq(0,0),\quad (\Phi'_x,\Phi'_y)\neq(0,0)$$

【例题 2.9】 计算 $(x-C)^2-y(y-3)^2=0$ 满足的一阶微分方程及包络。

解. 对等式两边分别求导：

$$2(x-C)-y'(y-3^2)-2y(y-3)y'=0$$

得到对应的微分方程：

$$\begin{cases}(x-C)^2-y(y-3)^2=0\\ y'=\dfrac{2}{3}\dfrac{x-C}{(y-1)(y-3)}\end{cases}$$

c 判别式如下：

$$\begin{cases}(x-C)^2-y(y-3)^2=0\\ 2(C-x)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ y=3\end{cases}$$

非退化条件：

$$\begin{cases}(\Phi'_x,\Phi'_y)=(2x-2C,-(y-3)^2-2y(y-3))=(0,-(y-3)^2-2y(y-3))\neq(0,0)\\ (\phi'(C),\psi'(C))=(1,\psi'(C))\neq(0,0)\end{cases}$$

当 $y=3$ 时，$(\Phi'_x,\Phi'_y)=(0,0)$ 不满足条件，所以包络 $y=0$. □

【例题 2.10】 求 $y=2xy'+y'^2$ 的通解；并给出该方程积分曲线族的包络。

解. 令

$$p=y'\Rightarrow y=2xp+p^2\Rightarrow pdx=2pdx+2xdp+2pdp$$

也即

$$pdx+2(x+p)dp=0\Rightarrow 2p^3+3xp^2=C$$

于是隐式通解：

$$\begin{cases}y=2xp+p^2\\ 2p^3+3xp^2=C\end{cases}$$

因此，

$$\Phi(x,y,p)=y-2xp-p^2=0\Rightarrow\Phi'_p(x,y,p)=-2(x+p)=0$$

得到 $x=-p$ 是 c 判别式的解，非退化条件：

$$\begin{cases}(\Phi'_x,\Phi'_y)=(-2p,1)\neq(0,0)\\ (\phi'(p),\psi'(p))=(-1,\psi'(p))\neq(0,0)\end{cases}$$

所以 $x=-p$ 是曲线的包络，也即

$$x=-\frac{dy}{dx}\iff y=-\frac{1}{2}x^2+C$$

□

Chapter 3

常系数微分方程组

§3.1 线性微分方程组

【命题 3.1】

【例题 3.2】 解微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + e^{-t} \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$$

解. 系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$$

于是特征值 $\lambda_{1,2} = 1$，对应特征多项式：

$$\begin{cases} (I-A)\vec{V} = \vec{U} \\ (I-A)^2\vec{V} = \vec{0} \end{cases}$$

其中

$$I - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad (I-A)^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

进而得到

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{U}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{U}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

进而齐次方程组通解：

$$e^t \begin{bmatrix} -2t & 1+2t \\ 1-2t & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

进而考虑特解

$$\begin{bmatrix} D_1 e^{-t} \\ D_2 e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow D_1 = -1, \quad D_2 = -\frac{1}{2}$$

综上，方程通解：

$$e^t \begin{bmatrix} -2t & 1+2t \\ 1-2t & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

【例题 3.3】

解.

□

§3.2 矩阵指数函数

我们来看之前涉及那道涉及重根 (但特征根唯一) 的例题，使用矩阵指数函数会更简便。

【例题 3.4】 解微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + e^{-t} \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$$

解.

□

Chapter 4

极限环与稳定性

§4.1 零解的稳定性

【命题 4.1】 判断方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$ 零解稳定性的一般方法是李雅普诺夫第二方法，简而言之就是构造恰当的 V 函数『$V(\vec{x},t)$ 是表征系统广义能量的一类正定函数』，零解稳定性情况如下：

1. 若全导数 $\dfrac{dV}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{dt}$ 在区域 D 内为定负，则方程组零解渐进稳定。
2. 若全导数 $\dfrac{dV}{dt}$ 在区域 D 内为常负，则方程组零解稳定。
3. 若全导数 $\dfrac{dV}{dt}$ 在区域 D 内不常负，则方程组零解不稳定。

【注 4.2】 全导数实际上可以进一步写作：

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\nabla_x V\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i\equiv\nabla_x V\cdot\vec{f}$$

区域 D 是零解附近的区域，其标准定义是

$$D=\|\vec{x}\|\le\delta\le M$$

定负是指 $\dfrac{dV}{dt}<0$ 在区域 $D-\mathbf{O}$ 内恒成立 ($\mathbf{O}$ 是方程组的零解)；常负是指 $\dfrac{dV}{dt}\le 0$ 在区域 D 内恒成立。

【例题 4.3】 利用李雅普诺夫第二方法，讨论如下方程组零解的稳定性：

1. $\dot{x}=-x+xy^2,\quad \dot{y}=-2x^2y-y^3;$
2. $\dot{x}=-y^3-x^5,\quad \dot{y}=x^3-y^5;$
3. $\dot{x}=-x+2x(x+y)^2,\quad \dot{y}=-y^3+2y^3(x+y)^2;$
4. $\dot{x}=-2y-x^3(x^2+y^2),\quad \dot{y}=x^3-y^3(x^2+y^2).$

解. 对于第一个方程组，令

$$V(x,y)=x^2+y^2\Rightarrow\frac{dV}{dt}=2x(-x+xy^2)+2y(-2x^2y-y^3)=-2x^2-2y^4$$

显然 $V(x,y)$ 是定正的，且 $\dfrac{dV}{dt}=-2(x^2+y^4)<0\quad(x,y)\neq(0,0)$ 是定负的，因此，方程组的零解是渐进稳定的。

对于第二个方程组，令

$$V(x,y)=x^4+y^4\Rightarrow\frac{dV}{dt}=4x^3(-y^3-x^5)+4y^3(x^3-y^5)=-4(x^8+y^8)$$

显然 $V(x,y)$ 定正，$\dfrac{dV}{dt}$ 定负，因此，方程组零解渐进稳定。
对于第三个方程，令

$$V(x,y)=x^4+y^2\Rightarrow\frac{dV}{dt}=(4x^4+y^4)[2(x+y)^2-1]$$

若

$$2(x+y)^2\le 4(x^2+y^2)\le 1\Rightarrow x^2+y^2\le\frac{1}{4}$$

因此，在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le\dfrac{1}{4}\}$ 内 $V(x,y)$ 定正，$\dfrac{dV}{dt}$ 定负，方程组零解渐进稳定。
对于第四个方程，令

$$V(x,y)=\frac{1}{4}x^4+y^2\Rightarrow\frac{dV}{dt}=x^3(-2y-x^3(x^2+y^2))+2y(x^3-y^3(x^2+y^2))=-(x^6+2y^4)(x^2+y^2)$$

显然，方程组零解渐进稳定。 □

【例题 4.4】 利用李雅普诺夫第二方法讨论微分方程组 $\dot{x}=-y-x^3,\quad \dot{y}=2x-y^3$ 零解的稳定性。

解. 令

$$V(x,y)=x^2+\frac{1}{2}y^2\Rightarrow\frac{dV}{dt}=2x(-y-x^3)+y(2x-y^3)=-2x^4-y^4$$

显然 $V(x,y)$ 定正，$\dfrac{dV}{dt}$ 定负，因此微分方程组的零解渐进稳定。 □

【例题 4.5】 设 $x\in\mathbb{R}$，函数 $f(x)$ 连续，且当 $x\ne 0$ 时 $xf(x)>0$. 试证明方程 $\ddot{x}+f(x)=0$ 的零解是稳定的，但不是渐进稳定的。

证明. 令 $y=\dot{x}$，可以得到方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-f(x)\end{cases}$$

取

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(t)dt\Rightarrow\frac{dV}{dt}=f(x)\cdot y+y\cdot -f(x)=0$$

因此，$\dfrac{dV}{dt}$ 常负，注意到当 $x<0$ 时，$xf(x)>0\Rightarrow f(x)<0\Rightarrow\int_0^x f(t)dt=-\int_x^0 f(t)dt>0$;
当 $x>0$ 时，$xf(x)>0\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow\int_0^x f(t)dt>0$.
综上，$V(x,y)$ 定正，方程组的零解稳定。
下证该方程组零解非渐进稳定，反证法：假设方程组零解渐进稳定。
设方程满足初值条件 $(x(t_0),y(t_0))=(x_0,y_0)$ 的解为 $(x(t),y(t))$;
则存在 $\delta>0$ 使得 $x^2+y^2<\delta^2$ 时，有

$$\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t))=(0,0)$$

于是

$$\lim_{t\to+\infty}V(x(t),y(t))=V(0,0)=0$$

由于

$$\frac{dV}{dt}=0\Rightarrow V(x(t),y(t))=C$$

不妨令

$$x=y=\frac{\delta^2}{2}\Rightarrow V(x(t),y(t))=\frac{\delta^2}{8}+\int_0^{\frac{\delta}{2}}f(t)dt>\frac{\delta^2}{8}$$

这与

$$\lim_{t\to+\infty}V(x(t),y(t))=V(0,0)=0$$

矛盾，故该方程组零解非渐进稳定。 □

§4.2 奇点和极限环

【定义 4.6】 对于平面一阶自洽微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

同时满足 $X(x,y)=0$ 和 $Y(x,y)=0$ 的解被称为驻定解，相空间上驻定解的点被称为奇点。

【命题 4.7】 如果通过坐标平移将奇点移动到原点位置，再取(4.1)的线性项，可以得到(4.1)的线性近似方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax+by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx+dy \end{cases} \tag{4.2}$$

(4.2)对应的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

设特征根为 λ_1 和 λ_2，奇点的稳定性分类结果如下：

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Longrightarrow$ 稳定结点。
2. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Longrightarrow$ 不稳定结点。
3. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Longrightarrow$ 鞍点，鞍点不稳定。
4. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$ 或 $c \neq 0 \Longrightarrow$ 单向结点 (当 $\lambda < 0$ 时稳定，$\lambda > 0$ 时不稳定)。
5. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad b = c = 0 \Longrightarrow$ 星形结点 (当 $\lambda < 0$ 时稳定，$\lambda > 0$ 时不稳定)。
6. $\lambda = \alpha \pm i\beta \Longrightarrow$ 焦点 (当 $\alpha < 0$ 时稳定，$\alpha > 0$ 时不稳定)。
7. $\lambda = \pm i\beta \Longrightarrow$ 中心，零解稳定但非渐进稳定。

【注 4.8】 奇点稳定时，方程组零解都渐进稳定；奇点不稳定时，方程组零解不稳定。

【例题 4.9】 确定方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x+y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x-2y \end{cases}$$

的奇点类型，确定奇点的稳定性并画出相图。

解. 方程组奇点 $\mathbf{O}(0,0)$，对应系数矩阵：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

得到特征根 $\lambda = \pm\sqrt{7}$，两异号实根，故奇点为鞍点。

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{3x-2kx}{2x+kx} = \frac{3-2k}{2+k} \Rightarrow k = \pm\sqrt{7}-2$$

可由 k 确定相图中的直线：

$$\begin{cases} y = (\sqrt{7}-2)x \\ y = (-\sqrt{7}-2)x \end{cases}$$

相图在此省略。 □

【定义 4.10】 设 Γ 是系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

的一条闭轨，如果在 Γ 的某个环形邻域内不存在其他闭轨，则称 Γ 是该系统的极限环。

【定理 4.11】(极限环存在性定理) 设 R 是被两条简单闭曲线 D_1, D_2 包围的环域且 D_2 包围在 D_1 内域中。设系统的速度场是 $\vec{F}$，若在 D_1, D_2 上的每一点 (x,y) 上 $\vec{F}(x,y)$ 都指向 R 且 R 中无系统的临界点 (也即方程组的零点)，则系统在 R 中存在一闭合轨迹。

对于极限环的稳定性，我们有如下结论：

【命题 4.12】 对于极限环的稳定性，有如下判断准则：

内域 $\dot{r} > 0$，外域 $\dot{r} < 0 \Longrightarrow$ 稳定极限环；

内域 $\dot{r} < 0$，外域 $\dot{r} > 0 \Longrightarrow$ 不稳定极限环；

其他情况 $\Longrightarrow$ 半稳定极限环。

$\dot{\theta} < 0 \Longrightarrow$ 顺时针；$\dot{\theta} > 0 \Longrightarrow$ 逆时针。

【例题 4.13】 对微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-1) \\ \dot{y} = x - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-1) \end{cases}$$

引入极坐标变换 $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$

1. 写出极坐标下的微分方程；
2. 讨论该微分方程组极限环的稳定性；
3. 画出相图草图。

解. 这是一个很典型的例题，考试题目大概率是相似的类型。

1. $x^2+y^2 = r^2 \Rightarrow x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}, \quad \theta = \arctan\dfrac{y}{x}$，原方程经过变换后成为

$$\begin{cases} \dot{r} = 1 - r^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

2. 易知方程有特解 $r = 1$，对应以原点为中心，半径为 1 的闭轨线。积分变换后的方程组为：

$$\begin{cases} r = \dfrac{Ce^{2t}-1}{1+Ce^{2t}} \\ \theta = t + \theta_0 \end{cases}$$

在 $x^2+y^2 < 1$ 时 $\dot{r} > 0$；$x^2+y^2 > 1$ 时 $\dot{r} < 0$，此时极限环为稳定极限环；$\dot{\theta} > 0$ 沿顺时针转动。

3. 相图略。还可以讨论一下极限环的存在性 (虽然已经知道系统中存在一条闭轨线)，速度场方程：

$$\vec{F} = (-y\vec{i} + x\vec{j}) - (\frac{r^2-1}{r})(x\vec{i} + y\vec{j}), \quad \begin{cases} -y - \dfrac{r^2-1}{r}x = 0 \\ \quad x - \dfrac{r^2-1}{r}y = 0 \end{cases}$$

$$-y\left[\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2 + 1\right] = 0 \Longrightarrow y = 0, \quad x = 0$$

由存在性定理可知，曲线一定存在闭轨。

□

Chapter 5

一阶偏微分方程

§5.1 首次积分

【例题 5.1】

解.

□

【例题 5.2】

解.

□

【例题 5.3】

解.

□

§5.2 线性偏微分方程

【例题 5.4】 求如下方程的通解：$xy\dfrac{\partial u}{\partial z} + xz\dfrac{\partial u}{\partial y} + yz\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

解. 特征方程为：

$$\frac{dz}{xy} = \frac{dy}{xz} = \frac{dx}{yz}$$

由此得到两个独立的首次积分：

$$\varphi_1 = z^2 - y^2, \quad \varphi_2 = y^2 - x^2$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = -2y \cdot 0 - 2z \cdot 2y = -4yz \neq 0$$

通解为

$$u = \Phi(z^2 - y^2, y^2 - x^2)$$

其中 Φ 是任意二元连续可微函数。 □

【例题 5.5】 求方程 $x\dfrac{\partial u}{\partial y} + y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{x=0} = 2y$ 的解。

解. 特征方程为：

$$\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y}$$

由此得到首次积分 $\varphi = y^2 - x^2$.
通解为 $\Phi(x^2 - y^2)$，其中 Φ 是任意一元连续可微函数。
令

$$\bar{\varphi} = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\bar{\varphi}} \Rightarrow u = \pm 2\sqrt{\varphi} = \begin{cases} 2\sqrt{y^2 - x^2} & \text{for } y > 0 \\ -2\sqrt{y^2 - x^2} & \text{for } y \le 0 \end{cases}$$

□

【例题 5.6】

解.

□

§5.3 拟线性偏微分方程

【例题 5.7】

解.

□

【例题 5.8】

解.

□

Chapter 6

证明问题合集

§6.1 解的延拓定理

【例题 6.1】

解.

□

【例题 6.2】

解.

□

§6.2 方程解结构

【例题 6.3】

解.

□

【例题 6.4】

解.

□