Physical Waste
——各种物理灵感或笔记整理

猫の薛定谔

2023 年 4 月 1 日

前言

本文档建立与 2023 年 4 月 1 日，主要用于 LaTeX 的练习与一些物理笔记的整理。

时处于愚人节之际，暨 Laudau 逝世 65 周年。不知为何，内心甚烦，不知去往何处。

注：本文档均使用 Einstein summation notation!

猫の薛定谔

2023 年 4 月 1 日

目录

第一章　NABLA 算子

1.1　用抽象指标记号推导 Nabla 算子相关公式

最基本的梯度、散度和旋度均可采用张量表示为

1.∇f=$\partial_a f$

2.$\nabla \cdot \vec{A}$=$\delta^a_b \partial_a A^b$

3.$\nabla \times \vec{A}$=$\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j$

引理 1.1.1. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$

证明：略

基本内容:

1.

$$\nabla \cdot \left(k\vec{A}\right) = k(\nabla \cdot \vec{A}) + \nabla k \cdot \vec{A}$$

证明：　L.H.S=$\delta^a_b \partial_a k A_b$=k$\partial_a A^a$+$\partial_a k A^a$=R.H.S

2.

$$\nabla \times (k\vec{A}) = k(\nabla \times \vec{A}) + \nabla k \times \vec{A}$$

证明：　L.H.S 的第 k 个分量 =kε_{ijk}

1.2 曲面坐标系下的 Nabla 算子

对于平面直角坐标系中的一个矢量 $\vec{a} = (x, y, z)$, 将其变换至球坐标系时，显然有：

$1.x = rsin\theta cos\varphi$

$2.y = rsin\theta sin\varphi$

$3.z = rcos\theta$

那么对于球坐标系下的单位坐标应该如何用直角坐标来表示呢？有一点是十分显然的，那就是这两种坐标系的变换对应着一种旋转。如图 1.1 所示：

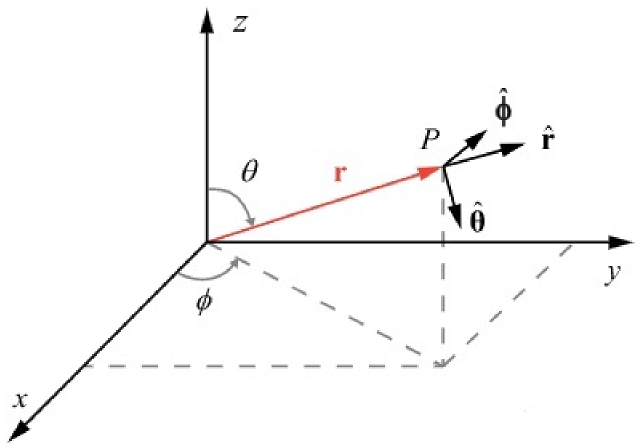

图 1.1: 两种坐标的变换

显然，旋转可分为如下三步：

1. 以 z 轴为旋转轴旋转 φ；

2. 以 y 轴为旋转轴旋转 θ；

3. 最后将（θ,r,φ）转变为（r,θ,φ).

这三步的旋转矩阵分别为：

1.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$$

3.
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= \mathbf{CBA} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sin\theta cos\phi & sin\theta sin\phi & cos\theta \\ cos\theta cos\phi & cos\theta sin\phi & -sin\theta \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这样坐标变换就完成了。（樂）