学校代码：10270　　分类号：O24　　学号：182000600

上海师范大学

硕 士 学 位 论 文

论 文 题 目　毕业论文的题目

院　　　系　学院

专　　　业　专业

研 究 方 向　研究方向

研究生姓名　某 某 某

指 导 教 师　某 某 某 教授

完 成 日 期　2020 年 6 月 5 日

论文独创性声明

本论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对木研究的启发和所做的贡献均已在论文中做了明确的声明并表示了谢意。

作者签名：____________ 日　　期：____________

论文使用授权声明

本人完全了解上海师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它手段保存论文。保密的论文在解密后遵守此规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：＿＿＿＿＿＿　　导师签名：＿＿＿＿＿＿

日　　期：＿＿＿＿＿＿　　日　　期：＿＿＿＿＿＿

摘 要

在正文中添加空行可以实现换行功能

摘要内容

摘要内容

摘要内容

关键词：关键词 1；关键词 2；关键词 3

Abstract

This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract.

This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract.

This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract. This is abstract.

Key Words: Keyword 1; Keyword 2; Keyword 3

目　录

第一章 引言

1.1 研究背景

这是小四号的正文字体，段间距 1.5 倍

通过空一行实现段落换行，仅仅是回车并不会产生新的段落

这是一个引用的示例 [1] 和 [2,3].

这是一大段文字这是一大段文字中英文混合 Galerkin 这是一大段文字 Methods 这是一大段文字

1.2 公式和列表

在文中引用公式可以这么写：$a^2 + b^2 = c^2$ 这是勾股定理，他还可以表示为 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$，还可以让公式单独一段并且加上编号

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{1.1}$$

还可以通过添加标签在正文中引用公式，如等式 (1.1)或者1.1。

- 第 1 个列表 item；
- 第 2 个列表 item；
- 第 3 个列表 item。

1.3 结构安排

本文接下来的写作安排如下：

第二章, 介绍了什么样的知识概念，理论背景？

第三章, 我们针对具有什么样的微分方程, 提出了一种什么方法, 也给出了具体计算格式, 证明了数值解的存在唯一性, 同样对该方法进行了详细的理论误差分析. 最后, 通过数值算例对理论结果进行了验证.

第三章, 我们针对具有什么样的微分方程, 提出了一种什么方法, 也给出了具体计算格式, 证明了数值解的存在唯一性, 同样对该方法进行了详细的理论误差分析. 最后, 通过数值算例对理论结果进行了验证.

最后, 在第五章我们对全文进行总结, 并对今后可能的研究方向进行展望.

第二章 微分方程的数值方法

本章我们考虑具有以下微分方程:

$$\begin{aligned} &Lu = -\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + qu = f, \quad a < x < b, \\ &u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 q, f 为 $[a, b]$ 上的连续函数，$q \geqslant 0$；α, β 为给定常数。这是最简单的椭圆方程第一边值问题。

另一个公式环境：

$$Lu = -\tfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + qu = f, \quad a < x < b, \tag{2.2}$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \tag{2.3}$$

问题 (2.1)存在唯一解 (参考文献 [3]，也是示例).

2.1 有限差分方法

在偏微分方程的数值解法中，有限差分法数学概念直观，推导自然，是发展较早且比较成熟的数值方法。由于计算机只能存储有限个数据和做有限次运算，所以任何一种用计算机解题的方法，都必须把连续问题（微分方程的边值问题、初值问题等）离散化，最终化成有限形式的线性代数方程组。

2.1.1 数值格式

将区间 $[a, b]$ 分成 N 等分，分点为

$$x_i = a + ih \quad i = 0, 1, \cdots, N,$$

$h = (b - a)/N$。于是我们得到区间 $I = [a, b]$ 的一个网格剖分。x_i 称为网格的节点，h 称为步长。

数值格式：

$$L_h u_i = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} + q_i u_i = f_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant N - 1.$$

其中 $q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$。

以上差分方程对于 $i=1,2,\cdots,N-1$ 都成立，加上边值条件 $u_0=\alpha, u_N=\beta$，就得到关于 u_i 的差分格式：

$$L_h u_i = -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+q_i u_i = f_i, \quad i=1,2,\cdots,N-1,$$
$$u_0=\alpha, \quad u_N=\beta.$$

它的解 u_i 是 $u(x)$ 在 $x=x_i$ 处的差分解。

2.2 矩阵形式

先定义向量 $\boldsymbol{u}$：

$$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_{N-1})^{\mathrm{T}}.$$

差分格式可以写为矩阵形式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}.$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$、向量 $\boldsymbol{f}$ 的定义如下，注意向量 $\boldsymbol{f}$ 的首尾元素已包含了 $x=a$ 和 $x=b$ 处的边界条件。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{2}{h^2}+q_1 & \frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2} & & & \\ -\frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+q_2 & \frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+q_{N-2} & \frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2} \\ & & & -\frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+q_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

注 2.1. 这是一个 *remark*。

第三章 定理表格图片环境

3.1 定理环境

引理 3.1 (Lemma)**.** 这是一个引理。

定理 3.1 (Theorem)**.** 这是一个定理。

证明. 这是证明环境。 □

命题 3.1 (Proposition)**.** 这是一个命题。

这是一个方程：

$$Lu = -\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + qu = f. \tag{3.1}$$

这是一个引理：

引理 3.2. 假设单步法具有 p 阶精度，且增量函数 $\varphi(x_n, u_n, h)$ 关于 u 满足 *Lipschitz* 条件

$$|\varphi(x,u,h) - \varphi(x,\bar{u},h)| \leqslant L_\varphi |u - \bar{u}|. \tag{3.2}$$

定理 3.2. 假设单步法具有 p 阶精度，且增量函数 $\varphi(x_n, u_n, h)$ 关于 u 满足 *Lipschitz* 条件

$$|\varphi(x,u,h) - \varphi(x,\bar{u},h)| \leqslant L_\varphi |u - \bar{u}|. \tag{3.3}$$

证明. 关于方程 (3.1)，证明上面这个定理。 □

定理 3.3. 假设单步法具有 p 阶精度，且增量函数 $\varphi(x_n, u_n, h)$ 关于 u 满足 *Lipschitz* 条件

$$|\varphi(x,u,h) - \varphi(x,\bar{u},h)| \leqslant L_\varphi |u - \bar{u}|. \tag{3.4}$$

推论 3.1. 假设单步法具有 p 阶精度，且增量函数 $\varphi(x_n, u_n, h)$ 关于 u 满足 *Lipschitz* 条件

$$|\varphi(x,u,h) - \varphi(x,\bar{u},h)| \leqslant L_\varphi |u - \bar{u}|. \tag{3.5}$$

证明. 由定理 3.2 和公式 3.2 可以马上推出本定理结论. □

注 3.1. 这里又是一个 *remark*。

例子 3.1. 这是一个例子。

3.2 表格示例

这里是一个表格，

表 3.1: Numerical errors and convergence rates.

degree r	step-size k	L^2-errors	order	H^1-errors	order	L^∞-errors	order
1	1/128	4.57 E-07	2.00	2.27 E-04	1.00	9.45 E-07	1.99
	1/256	1.14 E-07	2.00	1.13 E-04	1.00	2.37 E-07	2.00
	1/512	2.85 E-08	2.00	5.67 E-05	1.00	5.92 E-08	2.00
2	1/128	1.79 E-10	3.00	1.49 E-07	2.00	3.61 E-10	3.00
	1/256	2.24 E-11	3.00	3.71 E-08	2.00	4.52 E-11	3.00
	1/512	2.80 E-12	3.00	9.28 E-09	2.00	5.65 E-12	3.00
3	1/32	2.04 E-11	4.00	6.20 E-09	3.00	4.00 E-11	3.97
	1/64	1.28 E-12	4.00	7.76 E-10	3.00	2.52 E-12	3.99
	1/128	7.98 E-14	4.00	9.69 E-11	3.00	1.59 E-13	4.00

第 2 个表格

表 3.2: Numerical errors and convergence rates.

r	r	order	h	p	r	order
2	9.20E-05	9.90E-05	1.00E-06	8.00E-06	1.50E-05	6.70E-05
4	9.80E-05	8.00E-05	7.00E-06	1.40E-05	1.60E-05	7.30E-05
6	4.00E-06	8.10E-05	8.80E-05	2.00E-05	2.20E-05	5.40E-05
8	8.50E-05	8.70E-05	1.90E-05	2.10E-05	3.00E-06	6.00E-05
10	8.60E-05	9.30E-05	2.50E-05	2.00E-06	9.00E-06	6.10E-05
12	1.70E-05	2.40E-05	7.60E-05	8.30E-05	9.00E-05	4.20E-05
14	2.30E-05	5.00E-06	8.20E-05	8.90E-05	9.10E-05	4.80E-05
16	7.90E-05	6.00E-06	1.30E-05	9.50E-05	9.70E-05	2.90E-05
18	1.00E-05	1.20E-05	9.40E-05	9.60E-05	7.80E-05	3.50E-05
20	1.10E-05	1.80E-05	0.0001	7.70E-05	8.40E-05	3.60E-05

3.3 图片示例

通过数值实验得到以下图片

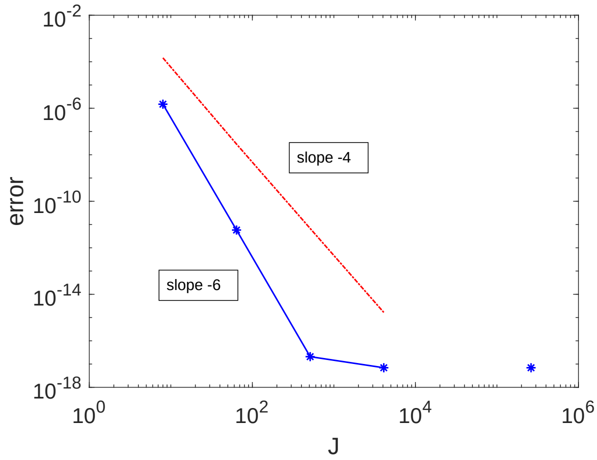

图 3.1: A 方法的 L^∞ 误差.

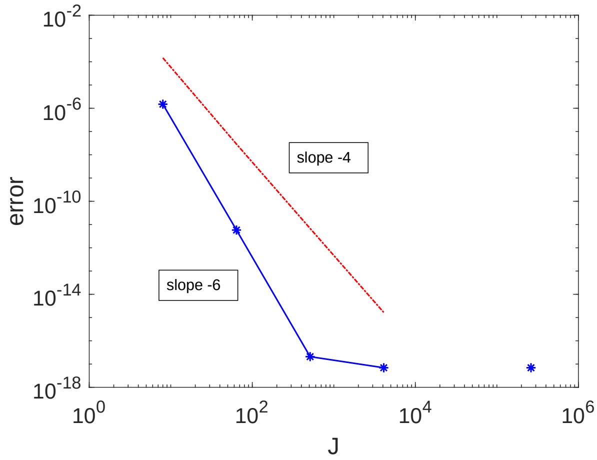

图 3.2: B 方法的 L^∞ 误差.

参考文献

[1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*, volume 65. Springer Berlin Heidelberg, Academic Press, 1975.

[2] J. Shen. Efficient spectral-Galerkin method I. Direct solvers of second- and fourth-order equations using Legendre polynomials. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(6):1489–1505, 1994.

[3] E. Tadmor. A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49(4):507–554, 2012.

[4] L. N. Trefethen and J. A. C. Weideman. The exponentially convergent trapezoidal rule. *SIAM Rev.*, 56(3):385–458, 2014.

攻读硕士学位期间的研究成果

[1] **Author1** and Author2, *The name of the published article 1*, **Name of Journal**, 01 (2020), 1001-1008.

[2] **Author1**, Author2 and Author3, *The name of the published article 2*, submitted to Journal of XXX.

致谢

感谢老师

感谢老师