Решение ЗЛП графическим методом

Алешко Альберт АС-21-05

Вариант 1

Найти максимальное и минимальное значения функции при заданных ограничениях

1.

$$f(x_1, x_2) = -x_1 - 4x_2$$
$$x_1 \le 2, \quad x_1 + 2x_2 \ge 2,$$
$$x_2 \le 2. \quad x_1 + x_2 \le 3,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решить задачу линейного программирования из предыдущей работы с использованием

3.1) базовой формы записи;

3.2) табличной формы.

Если имеются оба экстремума, то студенты с четными номерами находят минимальное значение, с нечетными – максимальное.

Решение задачи должно содержать 1-2 цикла метода. Можно воспользоваться результатами предыдущей работы для стартового разбиения переменных (определив координаты соседней с целевой вершины).

Базовая форма:

$f(X) = -X_1 - 4X_2 \to max$

$$\begin{cases} X_1 \le 2 \\ X_2 \le 2 \\ X_1 + 2X_2 \ge 2 \\ X_1 + X_2 \le 3 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \ge 0$

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 2 \\ X_2 + X_4 = 2 \\ +X_1 + 2X_2 - X_5 = 2 \\ X_1 + X_2 + X_6 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 = 2 - X_1 \\ X_4 = 2 - X_2 \\ X_2 = 1 - \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_5 \\ X_6 = 3 - X_1 - X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_3 = 2 - X_1 \\ X_4 = \frac{1}{2}(X_5 - X_1) + 1 \\ X_2 = 1 - \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_5 \\ X_6 = 2 - \frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}X_5 \end{cases}$$

План $X = (0, 1, 2, 1, 0, 2)$ $\quad f(X) = -4$

$\Delta_1 = \left(-4 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) + (0)(+1) - 0\left(+\frac{1}{2}\right) - 0\left(+\frac{3}{2}\right)\right) - (-1) = -2$

$\Delta_5 = \left(-4 \cdot \frac{-1}{2} + 0 + 0 + 0\right) - 0 = +2$

– план не оптимален

т.к $\Delta_1 < 0$, то вводим в базис X_1 т.к

$a_{ik} = a_{i1} = \left(+1; +\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$ $\quad \boxed{f(X) = -4 + X_1 - 2X_6}$

$b_{i*} = (2, 1, 1, 2)$

можем исключить X_3, X_4, X_2 из опорного плана, поэтому возьмем X_2

$$\begin{cases} X_3 = 2X_2 - X_5 \\ X_4 = 2 - X_2 \\ X_1 = 2 - 2X_2 + X_5 \\ X_6 = 1 + X_2 - X_5 \end{cases}$$

$f(X) = -2 - 2X_2 - X_5$

План $X = (2, 0, 0, 2, 0, 1)$

$\Delta_2 = (0 + 0 - 1 \cdot 2 + 0) - (-4) = 2$

$\Delta_5 = (0 + 0 - 1(-1) + 0) - 0 = 1$ $\Rightarrow$ План оптимален

$f(X) = -2$

② Табличная форма:

$f(X) = -X_1 - 4X_2 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 2 \\ X_2 + X_4 = 2 \\ X_1 + 2X_2 - X_5 = 2 \\ X_1 + X_2 + X_6 = 3 \end{cases}$$

$$X_1 P_1 + X_2 P_2 + X_3 P_3 + X_4 P_4 + X_5 P_5 + X_6 P_6 = P_0$$

				-1	-4	0	0	0	0
i	Базис	Сб	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	2	1	0	1	0	0	0
2	P_4	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0
3	P_2	0	+1	$+\frac{1}{2}$	+1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0
4	P_6	0	2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
5		Δ	-4	-2	0	0	0	2	0

Т.к. ~~нет~~ есть отрицательные элементы
=> План неоптимален. ~~не не опорный~~
Направляющие: столбец – $P_{1(k)}$
строка – $P_{2(l)}$
Разрешающий элемент – $a_{31} = \frac{1}{2} (a_{lk})$

i	Базис	$C_б$	P_0	P_1 (-1)	P_2 (-4)	P_3 (0)	P_4 (0)	P_5 (0)	P_6 (0)
1	P_3	0	0	0	-2	1	0	1	0
2	P_4	0	2	0	1	0	1	0	0
3	P_1	-1	2	1	2	0	0	-1	0
4	P_6	0	1	0	-1	0	0	1	1
5		Δ	-2	0	2	0	0	1	0

$$b_i' = \begin{cases} b_i - (b_l / a_{lk}) \cdot a_{ik}, & \text{при } i \neq l \\ b_l / a_{lk}, & \text{при } i = l \end{cases}$$

$$a_{ij}' \begin{cases} a_{ij} - (a_{lj} / a_{lk}) \cdot a_{ik}, & \text{при } i \neq l \\ a_{lj} / a_{lk}, & \text{при } i = l \end{cases}$$

План является опорным т.к все базисные P_i и P_0 имеют элементы ≥ 0

А также план оптимальный т.к все $\Delta_j \geq 0$

План: $X = (2, 0, 0, 2, 0, 1)$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 0$

$f_{max}(X) = -1 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = -2$