МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная техника»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная техника»
«29» января 2019г., протокол №6

Заведующий кафедрой
___________________________А.Н. Ивутин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению курсовой работы
по дисциплине (модулю)
«Численные методы»

на тему «Методы решения дифференциальных уравнений»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

с профилем
«Электронно-вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

Формы обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 090301-02-19

Тула 2019 год

Разработчик(и) методических указаний

Разработчик(и):

_____Трошина А.Г., доцент, к.т.н.________________ ________________

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

1. **Цель и задачи работы**

Получить навык

- анализа различных численных методов решения дифференциальных уравнений;
- разработки программных средств для решения численными методами дифференциальных уравнений.

2. Теоретические положения

Дифференциальными называются уравнения, в которых неизвестными являются функции, которые входят в уравнения вместе со своими производными.

$$F\left(x, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Если в уравнение входит неизвестная функция только одной переменной, уравнение называется обыкновенным. Если нескольких – уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называют наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Решить дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию $y = y(x)$ подстановка которой в уравнение обращала бы его в тождество.

Метод последовательных приближений (метод Пикара)

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

правая часть, которого в прямоугольнике $\{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y. Требуется найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию

$$x = x_0, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Интегрируя обе части уравнения от x_0 до x получим

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx,$$

или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.1) заменяется интегральным уравнением (2.3), в котором неизвестная функция y находится под знаком интеграла. Интегральное уравнение (2.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) и начальному условию (2.2). Действительно,

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx = y_0.$$

Заменяя в равенстве (2.3) функцию y значением y_0, получим первое приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx.$$

Затем в уравнении (2.3) заменив y найденным значением y_1, получаем второе приближение:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx.$$

Продолжая процесс далее, последовательно находим

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)dx,$$

…

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx.$$

Таким образом, составляем последовательность функций

$y_1(x), y_2(x), y_3(x), ..., y_n(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть в окрестности точки* (x_0, y_0) *функция f(x,y) непрерывна и имеет ограниченную частную производную* $f'(x,y)$. *Тогда в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *последовательность* $\{y_i(x_i)\}$ *сходится к функции y(x), служащей решением дифференциального уравнения y = f(x,y) и удовлетворяющей условию*

y(x₀) = y₀.

Оценка погрешности метода Пикара определяется, но формуле

$$|y - y_n| \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $M = \max|f(x,y)|$ при $(x,y) \in R_{[a,b]}$; $N = \max|f'_y(x,y)|$ - постоянная Липшица для области $R_{[a,b]}$; $h = \min(a, b/M)$ - величина определения окрестности $[x_0 - h \le x \le x_0 + h]$; a и b – границы области R.

Пример 1. Найти решение задачи Коши методом Пикара:

$$\begin{cases} y' = (x - x^2)\cdot y(x), \ \mathrm{x} \in [0,1] \\ \mathrm{y}(0) = 1. \end{cases}$$

Найдём несколько приближений по методу Пикара. Пусть $y^{(0)}(x) \equiv 1$, тогда:

$$y^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x (x\text{-}x^2) y^{(0)}(x)dx = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right),$$

$$y^{(2)}(x) = 1 + \int_0^x (x\text{-}x^2) y^{(1)}(x)dx = 1 + \int_0^x (x\text{-}x^2)\left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right)dx =$$

$$1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^2,$$

$$y^{(3)}(x) = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^3,$$

$$y^{(m)}(x)=1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)^3+$$

$$+\ldots+\frac{1}{\mathrm{m!}}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)^m.$$

Как легко видеть

$$y^{(m)}(x)=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^m}{\mathrm{m!}},\ \text{где}\ \ t=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3},$$

то есть при $m\to\infty$ получим разложение в ряд функции $y(t)=e^t$ или $y(x)=e^{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}$, что является аналитическим решением задачи.

Метод последовательного дифференцирования.

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right) \tag{2.4}$$

с начальными условиями

$$x = x_0, y(x_0) = y_0. \tag{2.5}$$

Представим решение $y = y(x)$ уравнения (2.4) в окрестностях точки x_0 в виде ряда Тейлора:

$$y = y_0 + y'_0\,(x-x_0)+\frac{y''_0}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y'^{(n)}_0}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \tag{2.6}$$

где $|x-x_0|<h$, а h – достаточно малая величина.

Для нахождения коэффициентов ряда (2.6) уравнение (2.4) дифференцируют по x нужное число раз, используя условия (2.5):

$$y'(x_0)= f(x_0, y_0),$$

$$y''(x_0)= f'_x(x_0, y_0)+ f'_y(x_0, y_0)\cdot f(x_0, y_0),$$

$$y'''(x_0)= f''_{xx}(x_0, y_0)+2f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot f(x_0, y_0)+ f''_{yy}(x_0, y_0)\cdot f^2(x_0, y_0)+$$
$$+ f'_y(x_0, y_0)\left(f'_x(x_0, y_0)+ f'_y(x_0, y_0)\cdot f(x_0, y_0)\right),$$

Если $x_0 = 0$, то получается ряд Тейлора по степеням x:

$$y = y_0 + y'_0\, x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!} x^n + \ldots \qquad (2.7)$$

Этот метод редко применяется на практике, поскольку при достаточно большом n он слишком громоздок, а кроме того, при достаточном удалении x от x_0 остаточный член может не стремиться к нулю.

Пример 2. Найти решение задачи Коши методом последовательного дифференцирования:

$$\begin{cases} y' = \left(x - x^2\right) \cdot y(x), \ \ \mathrm{x} \in [0,1] \\ \mathrm{y}(0) = 1. \end{cases}$$

Решение

$y'(0) = 0,$

$$y''(x)|_{x=0} = \left(\left(1 - 2\mathrm{x}\right)y + \left(x\text{-}x^2\right)y'\right)\Big|_{x=0} = 1.$$

$$y'''(x)|_{x=0} = \left(-2y + 2(1\text{-}2x)y' + \left(x\text{-}x^2\right)y''\right)\Big|_{x=0} = -2.$$

Тогда, подставив полученные значения в (2.7), получим ответ:

$$y = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{-2}{3!}x^3 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \ .$$

Метод неопределенных коэффициентов.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \qquad (2.8)$$

с начальным условием $y\left(x_0\right) = y_0$.

Метод неопределенных коэффициентов состоит в том, что решение уравнения (2.8) отыскивают в виде ряда с неизвестными коэффициентами

$$y = a_0 + a_1\left(x - x_0\right) + a_2\left(x - x_0\right)^2 + a_3\left(x - x_0\right)^3 + \ldots, \qquad (2.9)$$

которые находят с помощью подстановки ряда (2.9) в уравнение (2.8), зачем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x и используют начальное условие. Найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ подставляют в ряд (2.8).

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + xy = 0$ такое, что $y = 0$ и $y' = 1$ при $x = 0$. Из теории дифференциальных уравнений следует, что такое решение существует и имеет вид степенного ряда

$$y = x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \ldots.$$

Подставляя это выражение вместо y в правую часть уравнения, а вместо y'' — выражение

$$2c_2 + 3\cdot 2c_3x + 4\cdot 3c_4x^2 + 5\cdot 4c_5x^3 + \ldots,$$

затем, умножая на x и соединяя члены с одинаковыми степенями x, получим:

$$2c_2 + 3\cdot 2c_3x + (1 + 4\cdot 3c_4)\, x^2 + (c_2 + 5\cdot 4c_5)\, x^3 + \ldots = 0,$$

откуда при определении неизвестных коэффициентов получается бесконечная система уравнений: $2c_2 = 0$; $3\cdot 2c_3 = 0$; $1 + 4\cdot 3c_4 = 0$; $c_2 + 5\cdot 4c_5 = 0$;...

Решая последовательно эти уравнения,

$$c_2 = 0,\quad c_3 = 0,\quad c_4 = -\frac{1}{3\cdot 4},\quad c_5 = 0,\quad c_6 = 0,\quad c_7 = +\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7},\quad c_8 = 0, \ldots,$$

т. е.

$$y = x - \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 - \ldots .$$

Метод Эйлера

Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ численным методом - это значит для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и числа y_0, не определяя функцию $y = F(x)$, найти такие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ что $y_i = F(x_i)$ ($i = 1,2,\ldots,n$) и $F(x_0) = y_0$.

Таким образом, численные методы позволяют вместо нахождения функции $y = F(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов. Величина $h = x_k - x_{k-1}$ называется *шагом интегрирования*. Рассмотрим некоторые из численных методов.

Метод Эйлера является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{2.10}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.11}$$

Требуется найти решение уравнения (2.10) на отрезке [a, b].

Разобьем отрезок [a,b] на n равных частей и получим последовательность $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, где $x_i = x_0 + ih$ (i = *1, 2,...,* n), а $h = \frac{b-a}{n}$ - шаг интегрирования.

Выберем k-й участок $[x_k, x_{k+1}]$ и проинтегрируем уравнение (2.10):

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx = f(x_k, y_k) \cdot x \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_{k,} y_k)(x_{k+1} - x_k) = y'_k\, h. \tag{2.12}$$

Тогда формула (2.12) примет вид

$$y_{k+1} = y_k + y'h. \tag{2.13}$$

Обозначив, $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$ т.е. $y'h = \Delta y_k$, получим

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \tag{2.14}$$

Продолжая этот процесс и каждый раз принимая подынтегральную функцию на соответствующем участке постоянной и равной ее значению в начале участка, получим таблицу решений дифференциального уравнения на заданном отрезке [a, b].

Если функция $f(x,y)$ в некотором прямоугольнике

$$R\{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$$

удовлетворяет условию

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \le N|y_1 - y_2| \qquad (N = const) \tag{2.15}$$

и, кроме того.

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M \qquad (M = const) \tag{2.16}$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \le \frac{hM}{2N}\left[(1 + hN)^n - 1\right], \tag{2.17}$$

где $y(x_n)$ - значение точного решения уравнения (5.61) при $x = x_n$, а y_n - приближенное значение, полученное на n-м шаге.

Формула (2.17) имеет в основном теоретическое применение. На практике, как правило, применяют "двойной просчет". Сначала расчет ведется с шагом h, затем шаг дробят и повторный расчет ведется с шагом $h/2$. Погрешность более точного значения y^*_n оценивается формулой

$$|y*_n - y(x_n)| \approx |y*_n - y_n| \qquad (2.18)$$

Пример:

$$\begin{cases} y' = \left(x - x^2\right) \cdot y(x), \ \ x \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение:

Разобьём отрезок на n частей (n=4): $x_i = i \cdot h = i \cdot \frac{x_0 - x_n}{n}$, *i=1,…,n-1*

h=0,25

	x0	x1	x2	x3	x4
x	0	0,25	0,5	0,75	1

Далее по формуле (2.15) получим текущие значения y_i:

x	0	0,25	0,5	0,75	1
y	1	1	67/64 (1,05)	1139/1024 (1,11)	76313/ 65536 (1,16)
f(x,y)	0	3/16 (0,19)	67/256 (0,26)	3417/16386 (0,21)	

X	Y(x)	Ряд	Эйлера
0	**1**	**1**	**1**
0,25	**1,026384**	**1,026042**	**1**
0,5	**1,086904**	**1,083333**	**1,046875**
0,75	**1,150993**	**1,140625**	**1,112305**
1	**1,18136**	**1,166667**	**1,164444**

Метод Эйлера может быть применен к решению систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высших порядков. Однако в последнем случае дифференциальные уравнения должны быть приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть задана система двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z); \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \tag{2.19}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \qquad z(x_0) = z_0 \tag{2.20}$$

Приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ и $z(x_i) \approx z_i$ находятся по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \tag{2.21}$$

где $\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i)$, $\Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. (2.22)

Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта является одним из методов повышенной точности. Он имеет много общего с методом Эйлера.

Пусть на отрезке [a, b] требуется найти численное решение уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{2.23}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.24}$$

Разобьем отрезок [a, b] на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ (i = $1,2,..., n$, а $h = \frac{b-a}{n}$ - шаг интегрирования). В методе Рунге-Кутта, так же, как и в методе Эйлера, последовательные значения у, искомой функции у определяются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \,. \tag{2.25}$$

Если разложить функцию y в ряд Тейлора и ограничиться членами до h^4 включительно, то приращение функции Δy можно представить в виде

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{IV}(x), \tag{2.26}$$

где производные $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{IV}(x)$ находят последовательным дифференцированием из уравнения (2.25).

Вместо непосредственных вычислений по формуле (2.25) методом Рунге-Кутта определяют четыре числа:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y); \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right); \\ k_4 &= hf(x + h, y + k_3). \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

Можно доказать, что если числам k_1, k_2, k_3, k_4 придать соответственно веса 1/6; 1/3; 1/3; 1/6, то средневзвешенное этих чисел, т.е.

$$\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \tag{2.28}$$

с точностью до четвертых степеней равно значению Δy, вычисленному по формуле (2.26):

$$\Delta y = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right). \qquad (2.29)$$

Таким образом, для каждой пары текущих значений x_i и y_i определяют значения

$$\left.\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf\left(x_i, y_i\right); \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right); \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right); \\ k_4^{(i)} &= hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.30)$$

Метод Рунге-Кутта имеет порядок точности h^4 на всем отрезке [a,b]. Оценка точности этого метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью "двойного просчета" по формуле

$$\left|y*_i - y(x_i)\right| \approx \frac{y*_i - y_i}{15}, \qquad (2.31)$$

где $y(x_i)$ - значение точного решения уравнения (2.23) в точке x_i а $y*_i$ и y_i - приближенные значения, полученные с шагом *h/2* и *h*.

Если ε - заданная точность решения, то число n (число делений) для определения шага интегрирования $h = \frac{b-a}{n}$ выбирается таким образом, чтобы

$$h^4 < \varepsilon. \qquad (2.32)$$

Однако шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой.

Для оценки правильности выбора шага h используют равенство

$$q = \left| \frac{k_2^{(i)} - k_3^{(i)}}{k_1^{(i)} - k_2^{(i)}} \right|, \qquad (2.33)$$

где q должно быть равно нескольким сотым, в противном случае шаг h уменьшают.

Метод Рунге-Кутта может быть применен и к решению систем дифференциальных уравнений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z); \\ z' = g(x, y, z) \end{cases} \qquad (2.34)$$

с начальными условиями

$$x = x_0, \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \qquad (2.35)$$

В этом случае параллельно определяются числа Δy_i и Δz_i:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_i &= \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right); \\ \Delta z_i &= \frac{1}{6}\left(l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.36)$$

где $k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i, z_i)$;

$$l_1^{(i)} = hg(x_i, y_i, z_i);$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$l_2^{(i)} = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(\ )}}{2} \right);$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2} \right);$$

$$l_3^{(i)} = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)} \right);$$

$$l_4^{(i)} = hg\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)} \right).$$

Тогда получим решение системы

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i. \tag{2.37}$$

Экстраполяционный метод Адамса

При решении дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта необходимо производить много вычислений для нахождения каждого y_i. В том случае, когда правая часть уравнения сложное аналитическое выражение, решение такого уравнения методом Рунге-Кутта вызывает большие трудности. Поэтому на практике применяется метод Адамса, который не требует многократного подсчета правой части уравнения.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{2.38}$$

с начальным условием

$$x = x_0, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{2.39}$$

Требуемся найти решение этого уравнения на отрезке [a.b].

Разобьем отрезок [a,b] на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ (i = 1, 2,..., n), а $h = \dfrac{b-a}{n}$ – проинтегрируем дифференциальное уравнение). Выберем участок $[x_i, x_{i+1}]$ и проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.38); тогда получим

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx,$$

или

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx. \qquad (2.40)$$

Для нахождения производной воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона (ограничиваясь при этом разностями третьего порядка):

$$y' = y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y'_{i-3}. \qquad (2.41)$$

или

$$y' = y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t^2+t}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3+3t^2+2t}{3}\Delta^3 y'_{i-3}. \qquad (2.42)$$

Подставляя выражение для y' из формулы (2.42) в соотношение (2.40) и учитывая, что $dx = h \cdot dt$, имеем

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= h\int_0^1 \left(y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t^2+t}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3+3t^2+2t}{6}\Delta^3 y'_{i-3}\right)dt = \\ &= hy'_i + \frac{1}{2}\Delta(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_{i-3})\end{aligned} \qquad (2.43)$$

Обозначим в дальнейшем $q_i = y'_i h = f(x_i, y_i) \cdot h$ $(i = 0,1,2,...,n)$.

Тогда для любой разности имеем $\Delta^m q_i = \Delta^m (y'_i h)$ и

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}. \qquad (2.44)$$

По формуле $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ получаем решение уравнения. Формула (2.44) носит название *экстраполяционной формулы Адамса*.

Для начала процесса нужны четыре начальных значения y_0, y_1, y_2, y_3 - так называемый *начальный отрезок*, который может быть найден, исходя из начального условия (2.39) с использованием одного из известных методов. Обычно начальный отрезок решения находится методом Рунге-Кутта.

Зная y_0, y_1, y_2, y_3 можно определить

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0); \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1);$$
$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2); \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3). \qquad (2.45)$$

Далее составляется таблица разностей величины q (табл. 7).

Таблица 7. Таблица разностей величины q

I	x_i	y_i	Δy_i	y'_i	$q = hy'_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	x_0	y_0	-	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1	-	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	-
2	x_2	y_2	-	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	-	-
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	-	-	-
4	x_4	y_4	-	-	-	-	-	-
5	x_5	-	-	-	-	-	-	-

6	x_6	-	-	-	-	-	-	-

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы (2.44). Используя числа $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1, \Delta^3 q_0$, которые располагаются в таблице по диагонали, полагая в формуле (2.44) $n = 3$ (известное последнее значение y есть y_3), получаем:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 .$$

Полученное значение Δy_3 вносят и таблицу и находят $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Затем используя значения x_4 и y_4 находят $f(x_4, y_4), q_4, \Delta q_3, \Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$, т.е. получается новая диагональ. По этим данным вычисляют

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_1; \qquad y_5 = y_4 + \Delta y_4 .$$

Таким образом, продолжают таблицу решения, вычисляя правую часть дифференциального уравнения (2.38) на каждом этапе только один раз.

Для грубой оценки погрешности применяют **принцип Рунге**, который состоит в следующем:

1. Находят решение дифференциального уравнения при шаге h.
2. Значение шага удваивают и находят решение при шаге $H = 2h$.
3. Вычисляют погрешность метода по формуле

$$\varepsilon = \frac{\left|\overline{y_n} - \overline{y_{2n}}\right|}{2^n - 1}, \qquad (2.46)$$

где $\overline{y_n}$ - значение приближенного вычисления при двойном шаге $H=2h$; $\overline{y_{2n}}$ - значение приближенного вычисления при шаге h.

Метод Адамса применяется также и для решения систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений n-го порядка.

Пусть задана система двух уравнений

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \tag{2.47}$$

Тогда экстраполяционные формулы Адамса для этой системы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_1 &= p_i + \frac{1}{2}\Delta p_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 p_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 p_{i-3}; \\ \Delta z_i &= g_i + \frac{1}{2}\Delta g_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 g_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 g_{i-3}, \end{aligned}\right\} \tag{2.48}$$

где $p_i = hy'_i = hf_1(x_i, y_i, z_i)$, $g_i = hz'_i = hf_2(x_i, y_i, z_i)$, и $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$,

$z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$.

3. **Объекты исследования, оборудование, материалы и наглядные пособия**

Объектом исследования данной работы является метод численного решения дифференциальных уравнений.

Для выполнения работы необходимы ПК и соответствующее программное обеспечение:

- MS WINDOWS;
- Visual Studio (любая другая оболочка языка высокого уровня);
- MS Office (для оформления отчета).

4. **Задание на работу (рабочее задание)**

1. Изучить методы решения дифференциальных уравнений в соответствии с вариантом.
2. Разработать ПО для решения дифференциальных уравнений заданными методами.
3. Провести сравнение указанных методов.

5. Ход работы (порядок выполнения работы)

Для выполнения практической работы необходимо:

1) Ознакомиться с теоретической справкой;

2) Выполнить анализ поставленной задачи, выявить входную и выходную информацию и определить ее формат;

3) Разработать алгоритм решения задачи;

4) Разработать программное обеспечение;

5) Представить ПО преподавателю и получить допуск к защите работы;

6) Оформить отчет по практической работе;

7) Защитить работу преподавателю, ответив на вопросы по ее содержанию и выполнению.

6. **Содержание отчета**

В отчете должны присутствовать следующие пункты:

1) задание;

2) математическое описание методов;

3) описание входных – выходных данных;

4) алгоритмы решения дифференциальных уравнений;

5) текст программы (подпрограммы) расчета;

6) распечатка результатов работы программы;

7) проверка корректности работы программы.

8) сравнительный анализ методов решения дифференциальных уравнений по критериям точности, вычислительной сложности.

Задания по вариантам

Решить дифференциальное уравнение заданными методами:

1. Метод Эйлера
2. Метод Адамса
3. Метод Рунге-Кутта

Задание по вариантам

1. Методы 1,2 $y' = 5x + y^3,$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
2. Методы 2,3 $y' = y - 4e^x$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
3. Методы 1,3 $2y' = 2y + x\,e^{-x}$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
4. Методы 1,2 $y' = 2\,x^2 + x\,y + 3\,y^2$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
5. Методы 2,3 $y' = 5\,\mathrm{x} + 3\cos(\mathrm{y} + 2{,}6)$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
6. Методы 1,3 $y' = 5 - 2\sin(\mathrm{x} + 2\,\mathrm{y})^2$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
7. Методы 1,2 $y' = \mathrm{y}^2 - \mathrm{x}$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
8. Методы 2,3$y' = 2\,x^2 + 5x\,y + y$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
9. Методы 1,3 $y' = 2xy + x\,e^{-2x}$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
10. Методы 1,2 $y' = y - 4e^x$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
11. Методы 2,3 $y' = 5x + y^3,$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
12. Методы 1,3 $y' = 5xy + 2y - x,$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
13. Методы 1,2 $y' = 5\,\mathrm{x} + 3\cos(2\mathrm{y} + 1)$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
14. Методы 2,3 $y' = 4y - 2e^x$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
15. Методы 1,3 $y' = 10 - 2\sin(3\mathrm{x} + \mathrm{y})$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
16. Методы 1,2 $y' = 4x^2 + 3x - 5y$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
17. Методы 2,3 $y' = 20x + 7xy - y^2$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
18. Методы 1,3 $y' = 2\sin(4x) - 4\cos(x + y)$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
19. Методы 1,2 $y' = 7x + \cos(xy)$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
20. Методы 2,3 $y' = 3x^3 - 4x + \sin(y^2)$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h
21. Методы 1,3 $y' =$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

22.Методы 1,2 $y' = 3\text{x} + 5\cos(\text{y})$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

23.Методы 2,3 $y' = \sin(y - 2x) + 2y$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

24.Методы 1,3 $y' = x + ycos(x)$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

25.Методы 1,2 $y' = 2\,xy + 5x - y + y^2$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

26.Методы 2,3 $y' = 2\,x^2 + 4y$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

27.Методы 1,3 $y' = 2\,x^2 + 7y - 4y^2$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

28.Методы 1,2 $y' = 2\,x^2 + 5x\sin(y)$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

29.Методы 2,3 $y' = 2\,x^2 + e^y + y$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

30.Методы 1,3$y' = 2x + 5x^y + 3y$ на отрезке [a,b], $y_0 = c$ с шагом h

7. Список использованных источников

1. Пирумов, У.Г. Численные методы / У.Г. Перумов. – М.: Дрофа, 2007. – 222 с.

2. Математика : практикум по численным методам / Белорус. нац. техн. ун-т, Каф. "Высшая математика №1"; сост. :А.В.Грекова [и др.] .— Минск, 2006 .— 127с. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 985-479-453-9