第二周周记！！！

小组作业思考题：

1.对于有向图，有权图，公式哪些参数需要改变？

答：公式的参数改变如下：

有向图：

aij=1表示第i个智能体指向第j个智能体的边

(求和符号)（k=1)(N)aik为第i个智能体的出边

有权图：

aij=1表示第i个智能体与第j个智能体连接的权重

(求和符号)（k=1)(N)aik为第i个智能体的所有出边的权重之和

有向有权图：

a_{ij}=1表示第i个智能体指向第j个智能体连接的权重

(求和符号)（k=1)(N)aik为第i个智能体的所有出边的权重之和

2.尝试推导公式的矩阵形式:

答：已知其wij(第i个智能体对于第j个智能体的加权系数)参数公式为：

$$w_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} a_{ik}}$$

已知xi(t+1)的状态值，在多智能体一致性算法的使用公式为：

$$x_i^{(t+1)} = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j^{(t)}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T$$

那我们可以将这个几个公式转化为

1.状态值在多智能体一致性算法的公式

$$\text{权重矩阵：} W = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & \cdots & w_{NN} \end{bmatrix} \text{状态更新方程：} \mathbf{x}^{(t+1)} = W\mathbf{x}^{(t)}, \quad \mathbf{x}^{(t)} = \begin{bmatrix} x_1^{(t)} \\ \vdots \\ x_N^{(t)} \end{bmatrix}$$

2.参数公式为：

$$\text{邻接矩阵} A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

$$D = \mathrm{diag}(A\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^N a_{2k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=1}^N a_{Nk} \end{bmatrix} \text{（粗体}\mathbf{1}\text{是指全是}\mathbf{1}\text{的列向量）}$$

$$W = D^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_{k=1}^N a_{1k}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum_{k=1}^N a_{2k}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sum_{k=1}^N a_{Nk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

3.所有智能体状态最终趋于一致，一致值为多少？在各种因素影响下，智能体状态还会趋于一致吗？

1. 理想情况下的收敛值

所有智能体状态收敛到初始状态的均值：

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}^{(t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i^{(0)} \cdot \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

示例：
初始状态 (\mathbf{x}^{(0)} = [1, 2, 3]^T)，则一致值为：

$$x^* = \frac{1+2+3}{3} = 2 \implies \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}^{(t)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. 外部因素影响分析

(1) 噪声干扰

$$x_i^{(t+1)} = \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j^{(t)} + \eta_i^{(t)}, \quad \eta_i^{(t)} \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$$

- 状态会在 (x^*) 附近波动。

(2) 动态拓扑

若连接关系随时间变化：

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = W^{(t)} \mathbf{x}^{(t)}$$

- 若某些时刻图不连通，一致性可能无法达成。

(3) 外部控制输入

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = W\mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

- 收敛值可能变为 ((I - W)^{-1} \mathbf{u})。

4.理解离散时间和连续时间下算法的异同

3. -
   - ```
     ## 离散时间 vs 连续时间一致性算法

     ### 1. 数学形式对比
     | **特性**           | **离散时间算法**                          | **连续时间算法**                          |
     |-------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
     | **更新规则**       | $$ \mathbf{x}^{(t+1)} = W \mathbf{x}^{(t)} $$ | $$ \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -L \mathbf{x}(t) $$ |
     | **矩阵核心**       | 行随机的 $$ W $$                          | 拉普拉斯矩阵 $$ L = D - A $$              |

     ### 2. 收敛条件
     - **共同要求**：图必须连通。
     - **离散时间**：$$ W $$ 的行和均为 1。
     - **连续时间**：$$ L $$ 的特征值决定收敛速度。

     ### 3. 异同总结
     **相同点**：
     - 收敛到初始状态的算术平均值。

     **不同点**：
     1. 离散时间适合数字计算，连续时间适合物理建模。
     2. 离散时间迭代步长固定，连续时间状态连续变化。
     ```

离散时间 vs 连续时间算法

相同点：

- 目标：收敛到初始状态均值 (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{(0)})。
- 要求：图必须连通。

不同点：

1. **更新规则**：
   - 离散时间：(\mathbf{x}^{(t+1)} = W \mathbf{x}^{(t)})
   - 连续时间：(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -L \mathbf{x}(t))
2. **矩阵核心**：
   - 离散时间：权重矩阵 (W)（行随机）
   - 连续时间：拉普拉斯矩阵 (L = D - A)

- 离散时间更新：x_next = W * x_current
  （W 是权重矩阵，行和为 1）
- 连续时间更新：dx/dt = -L * x(t)
  （L 是拉普拉斯矩阵，L = D - A）
     ```