Функции многих переменных

Часть 2. Пределы.

Понятие предела распространяется и на функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ произвольного количества аргументов. Причем, многие идеи, методы решения схожи с теорией и практикой вычисления предела функции одной переменной.

Задание. Сформулировать определение предела функции одной переменной.

Зададим трехмерную систему координат $Oxyz$. Над плоскостью Oxy расположим поверхность, заданную функцией $z = f(x, y)$. Перемещение по плоскости Oxy имитирует изменение независимых переменных x и y, при этом, все передвижения осуществляются только под поверхностью $z = f(x, y)$, т.е. в области определения функции двух переменных.

События этого занятия разворачиваются в нашем трёхмерном мире, и поэтому будет просто огромным упущением не принять в них живое участие. Сначала соорудим хорошо известную декартову систему координат в пространстве. Давайте встанем и немного походим по комнате. Пол, по которому вы ходите – это плоскость Oxy. Поставим где-нибудь ось Oz, например, в любом углу, чтобы не мешалась на пути.

Теперь, пожалуйста, посмотрите вверх и представьте, что там зависло расправленное одеяло. Это поверхность, заданная функцией $z = f(x, y)$. Наше перемещение по полу, как нетрудно понять, имитирует изменение независимых переменных x, y, и мы можем передвигаться исключительно под одеялом, т.е. в области определения функции двух переменных. Но самое интересное только начинается. Прямо над кончиком вашего носа по одеялу ползает маленький тараканчик, куда вы – туда и он. Назовём его Фредди. Его перемещение имитирует изменение соответствующих значений z функции (за исключением тех случаев, когда поверхность либо её фрагменты параллельны плоскости Oxy и высота не меняется).

Возьмём в руки шило и проткнём одеяло в произвольной точке, высоту которой обозначим через z_0, после чего строго под отверстием воткнём инструмент в пол – это будет точка $M_0(x_0, y_0)$. Теперь начинаем бесконечно близко приближаться к данной точке $(x \to x_0, y \to y_0)$, причём приближаться мы имеем право ПО ЛЮБОЙ траектории (каждая точка которой, разумеется, входит в область определения). Если ВО ВСЕХ случаях Фредди будет бесконечно близко подползать к проколу на высоту z_0 и ИМЕННО НА ЭТУ ВЫСОТУ, то функция $z = f(x, y)$ имеет предел в точке $M_0(x_0, y_0)$ при $x \to x_0, y \to y_0$: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = z_0$.

Если при указанных условиях проколотая точка расположена на краю одеяла, то предел всё равно будет существовать – важно, чтобы в сколь угодно малой окрестности острия шила были хоть какие-то точки из области определения функции. Кроме того, как и в случае с пределом функции одной переменной, не имеет значения, определена ли функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ или нет. То есть наш прокол можно залепить жвачкой (считать, что функция двух переменных непрерывна) и это не повлияет на ситуацию – вспоминаем, что сама суть предела подразумевает бесконечно близкое приближение, а не «точный заход» в точку.

Однако безоблачная жизнь омрачается тем фактом, что в отличие от своего младшего брата, предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ гораздо более часто не существует. Это связано с тем, что к той или иной точке на плоскости Oxy обычно существует очень много путей, и каждый из них должен приводить Фредди строго к проколу (опционально «залепленному жвачкой») и строго на высоту z_0. А причудливых поверхностей с не менее причудливыми разрывами хоть отбавляй, что приводит к нарушению этого жёсткого условия в некоторых точках.

Организуем простейший пример – возьмём в руки нож и разрежем одеяло таким образом, чтобы проколотая точка лежала на линии разреза. Заметьте, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = z_0$ всё ещё существует, единственное, мы потеряли право ступать в точки под линией разреза, так как этот участок «выпал» из области определения функции. Теперь аккуратно приподнимем левую часть одеяла вдоль оси Oz, а правую его часть, наоборот – сдвинем вниз или даже оставим её на месте. Что изменилось? А принципиально изменилось следующее: если сейчас мы будем подходить к точке $M_0(x_0, y_0)$ слева, то Фредди окажется на бОльшей высоте, чем, если бы мы приближались к данной точке справа. Таким образом, предела $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ не существует.

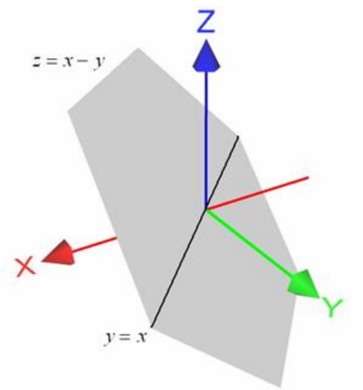
Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in E$ – предельная точка множества E. Тогда,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a\in E}} f(x) = b \iff (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0\colon \forall x \in E\ |x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Это определение по форме не отличается от соответствующего определения предела функции одного переменного. Единственное отличие заключается в том, что символ | | означается норму (длину) вектора именно в том пространстве, которому принадлежит этот вектор.

Предел $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется кратным.

Рассмотрим фрагмент плоскости $z = x - y$.



Найдем предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (x - y)$ в точках $M_1(0;0), M_2(4;2)$. Для этого сделаем подстановку значений x_0, y_0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x - y) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ y\to 2}} (x - y) = 4 - 2 = 2$$

Неопределенностей нет, следовательно пределы вычислены.

Отличительная особенность пределов функций нескольких переменных состоит в том, что за кажущейся неопределенностью часто скрывается несуществование предела.

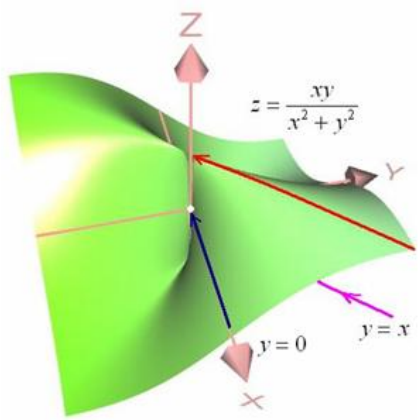
Рассмотрим предел: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x-y)$. При подстановке значений x_0, y_0 мы получаем неопределенность вида $(\infty-\infty)$.

Для доказательства того, что данный предел не существует рассмотрим два ближних к нам октанта $(x\to+\infty, y\to+\infty)$, в которых плоскость $z=x-y$ пересекает координатную плоскость Oxy по прямой $y=x$ и располагается как в верхнем, так и в нижнем полупространстве. Таким образом, если мы будем уходить по обеим переменных на $+\infty$, то соответствующие значения функции могут приближаться как к $+\infty, -\infty$ или 0.

Пример 1. Найти предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Решение. При подстановке значений x_0, y_0 в пределе получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Отметим, что поверхность $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$ терпит разрыв в точке $(0;0)$.



Проведем исследование. Сначала будем приближаться к точке $M_0(0;0)$ по оси абсцисс, т.е. $y=0$ (синяя стрелка). На чертеже видно, что соответствующие значения функции приближаются к нулю.

Подставим функцию $y=0$ в исходный предел и вычислим его по этому пути:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0$$

Теперь будем приближаться к началу координат по прямой $y = x$ (розовая стрелка). Вычислим предел по этому пути:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x}} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

В результате получены разные значения пределов, что противоречит определению предела, согласно которому любой допустимый маршрут к точке $M_0(0; 0)$ должен приводить к одному и тому же значению z_0. (см. стр.19, Зверович, Часть 3).

Таким образом, предела не существует. Вблизи точки разрыва поверхность бесконечно близко приближается к оси Oz на различных высотах.

Стоит отметить, что в общем случае для исследования существования предела целесообразно проверять сразу весь пучок прямых $y = kx$, так как это множество учитывает все прямые пути подхода к началу координат.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = [y = kx] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to kx}} \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to kx}} \frac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}$$

Так как значение предела зависит от коэффициента k, следовательно, данного предела не существует.

Так как мы приближались к точке $(0; 0)$ только по прямым линиям, этого недостаточно для решения.

Согласно определению предела необходимо показать, что такой же результат получится и при любом другом способе подхода к предельной точке.

Для этого выполним переход к полярным координатам $x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi \\ x \to 0, y \to 0 \Longrightarrow r \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{r \to 0} \frac{r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi}{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2)} = \cos\varphi\sin\varphi$$

Следовательно, так как результат зависит от значения угла φ, то предела не существует.

Замечание. С помощью полярных координат можно задать любую функцию, поэтому для доказательства несуществования предела достаточно подстановки лишь полярных координат.

Очень часто в примерах для того, чтобы избавиться от неопределенности можно использовать некоторые оценки для «упрощения» исходной функции.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

Решение. Воспользуемся неравенством:

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-xy+y^2-xy \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2-xy+y^2 \geq xy$$

Тогда:

$$0 \leq \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leq \left|\frac{x+y}{xy}\right| = \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} 0 \leq \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leq \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)$$

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{|y|} \to 0, y \to \infty \\ \frac{1}{|x|} \to 0, x \to \infty \end{bmatrix} = 0$, то

$$0 \leq \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| = 0$$

Ответ. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

Решение. В данном примере имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Воспользуемся неравенством:

$$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{e^{(x+y)}}=\frac{x^2}{e^{(x+y)}}+\frac{y^2}{e^{(x+y)}}<\frac{x^2}{e^x}+\frac{y^2}{e^y}, x>0, y>0$$

Перейдем к пределу при $x\to+\infty, y\to+\infty$:

$$0\le\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\le\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{y^2}{e^y}\right)$$

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{y^2}{e^y}\right)=0, x^2\ll e^x, y^2\ll e^y$ при $x\to+\infty, y\to+\infty$, получаем:

$$0\le\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\le 0\Rightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$$

Ответ. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности следуем оценку. Так как $x^2+y^2\ge 2xy$, то, следовательно,

$$\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{xy}{2xy}=\frac{1}{2}$$

$$0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

Переходя к пределу, получаем:

$$0 \le \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$, то следовательно $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$.

Ответ. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$.

Для раскрытия неопределенностей также можно применять переход к эквивалентным, домножение функции на сопряженное и др.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x}$.

Решение. При $x \to 0$ $xy \to 0$, т.е. является бесконечно малой, а значит, можно перейти к эквивалентной:

$$\sin xy \sim xy$$

Тогда,

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\ y\to a}} \frac{xy}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\ y\to a}} y = a$$

Ответ. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = a$.

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

Решение. При $x \to 0, y \to 0$ имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. Домножим и разделим исходную функцию на сопряженную к числителю:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{\left(\sqrt{x^2y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{x^2y^2+1-1}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)} = \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)}$$

Так как $\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right) \to 2$ при $x \to 0, y \to 0$, то имеем:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)} = \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Для вычисления предела воспользуемся переходом к полярным координатам: $x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$

$$\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi)^2}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{r\to 0} \frac{r^4(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^2}{r^2((\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2)} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0} r^2(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^2 = 0$$

Ответ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} = 0$.

Наряду с кратными пределами можно рассматривать и повторные, т.е. пределы вида:

$$\lim_{x_1\to a_1}\left(\lim_{x_2\to a_2}\left(\dots\left(\lim_{x_n\to a_n} f(x_1,\dots,x_n)\right)\right)\right)$$

Замечание. Из существования равных между собой повторных пределов не следует существование соответствующего кратного предела. С другой стороны, существование кратного предела не гарантирует существование повторных.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. При вычислении повторных пределов сначала вычисляется внутренний предел, т.е. предел $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, при этом переменная x считается константой, затем вычисляется внешний предел, т.е $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$.

Решение. Начнем вычисления с внутреннего предела. Так как $y \to \infty$, то имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки в числителе и знаменателе функцию y в наибольшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{y^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}{y^4\left(\frac{x^2}{y^4}+1\right)}=\left[\begin{matrix}\frac{x^2}{y^2}\to 0, y\to\infty, x=const\\ \frac{x^2}{y^4}\to 0, y\to\infty, x=const\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^2}=\left[\frac{1}{y^2}\to 0, y\to\infty\right]=\lim_{x\to\infty}0=0$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}=0.$

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^y}{1+x^y}$.

Решение. Рассмотрим сначала внутренний предел. При $x\to\infty$ функция $x^y\to\infty$, следовательно, имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{y\to+0}\lim_{x\to\infty}\frac{x^y}{1+x^y}=\lim_{y\to+0}\lim_{x\to\infty}\frac{x^y}{x^y\left(\frac{1}{x^y}+1\right)}=\lim_{y\to+0}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^y}+1}=$$

$$=\left[\frac{1}{x^y}\to 0, x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x^y}+1}\to 1\right]=\lim_{y\to+0}1=1$$

Ответ. $\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^y}{1+x^y}=1.$

Задание. Кудрявцев (том 3), §2, №48 (1, 2, 4, 5, 9, 12), №49 (1, 2, 4), №46 (1,3), №37 (1, 4, 7, 8, 9), №41.