Аффинные n-мерные пространства

§1 Понятие афф. пр-ва

Рассмотрим n-мерное вект. пр-во V^n над полем $\mathbb{R}$ (или над $\mathbb{C}$).

<u>Опр. 1</u> Афф. n-мерным пр-вом A^n, ассоциированным с V^n, называется мн-во A^n, состоящее из точек, т. ч. $\forall$ т.т. $M, N \in A^n$ сопоставлен вектор $\overrightarrow{MN} \in V^n$ и выполнены 2 аксиомы

(А0) $\forall$ т. M $\forall \bar{a} \in V^n$ $\exists!$ т. N: $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$;

(А3) $\forall$ т.т. M, N, K справедливо $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MK}$

Свойства: 1) $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$, т.к. $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MK}$

2) $\forall$ т.т. M, N $\quad \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$

<u>Примеры афф. простр-в</u>: 1) 3^x-мерное точечное пр-во E^3;

2) плоскость; 3) прямая.

<u>Предложение 1</u>. n-мерное векторное пр-во V^n является афф. простр-вом.

<u>Д-во</u>: Если $\bar{u}, \bar{v} \in V^n$, то вектор $\overrightarrow{\bar{u}\bar{v}} \in V^n$ определяется как $\bar{v} - \bar{u} \in V^n$. Легко проверяются аксиомы (А0) и (А3).

В частность $\mathbb{R}^n$ есть афф. пр-во:

если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, то $\overrightarrow{xy} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

§2 Векторизация афф. пр-ва A^n.

Если фиксировать т. $O \in A^n$, то радиус-вектором т. $M \in A^n$ называется вектор $r = \overrightarrow{OM} \in V^n$.

Таким образом возникает отображение $\bar{r}_0 : A^n \longrightarrow V^n$ (отображение векторизации), сопост-щее т. M её рад-в-р $\overrightarrow{OM}$, $\bar{r}_0(M) \overset{def}{=} \overrightarrow{OM}$

Предл. 1 $\bar{r}_0$ есть биекция

Док-во: $(A0) \Rightarrow$ для т. O и $\forall \bar{a} \in V^n \ \exists!$ т. $M \in A^n$: $\overrightarrow{OM} = \bar{a}$.

Предл. 2 Если есть еще одна т. $O' \in A^n$, то

$\bar{r}_{O'}(M) = \bar{r}_0(M) + \overrightarrow{O'O}$ (использовать (A3)).

§3 Координатизация афф. пр-ва A^n.

Опред. 1 Афф. системой коорд-т (или афф. репером) в A^n назыв-ся упорядоч. система

$R = \{т. O \in A^n; \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, где $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ - базис V^n.

По-другому: $\{т.т. O; E_1, E_2, \dots, E_n\}$ — упоряд. набор точек есть афф. репер, если $\{\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \dots, \overrightarrow{OE_n}\}$ базис V^n.

Опред. 2 Аффинными коорд-ми т. $M \in A^n$ относ-но афф. репера R назыв. упоряд. набор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ чисел из $\mathbb{R}$ т.ч. $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ есть вектор $x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$.

Запись: $M(x_1, x_2, \dots, x_n)_R \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{e}_i$.

Ясно (почему?), что афф. коорд-ты т. M отн-но R определяются единственным образом.

$R = \{т. O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – афф. репер

Теорема 1 (§2) Если т. $M(x_1, \dots, x_n)_R$, т. $N(y_1, \dots, y_n)_R$, то вектор $\overrightarrow{MN}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ имеет коорд-ты $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$:

Д-во: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ (A3).

$\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ имеют к-ты $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ отн. $\{\bar{e}_i\}$. $\Rightarrow$

$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ имеют требуемые координаты.

§4 Преобразование афф-х координат.

Пусть $R = \{т. O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – "старый" афф. репер

$R' = \{т. O'; \bar{e}_1', \bar{e}_2', \dots, \bar{e}_n'\}$ — "новый" афф. репер

Пусть т. O' имеет коорд-ты $(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)_R$

A – матрица перехода от "старого" базиса $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ к "новому" базису $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \dots, \bar{e}_n'\}$.

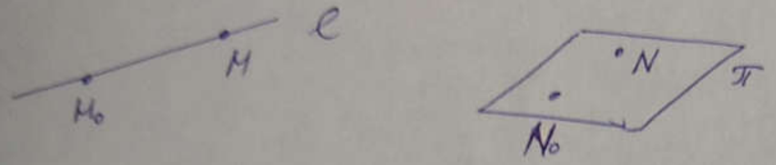
Задача. Выразить "старые" коорд-ты т. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)_R$ через "новые" коорд-ты т. $M(x_1', x_2', \dots, x_n')_{R'}$

Теорема 1
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^\circ \\ x_2^\circ \\ \vdots \\ x_n^\circ \end{pmatrix}$$

Док-во. Аналогично выводу формулы преобразования аффинных координат на плоскости (см. 1 семестр).

§5 Плоскости в A^n.

В евклидовом точечном простр-ве E^3 рассмотрим 2 примера: прямую ℓ с начальной т. $M_0 \in \ell$ и множ-м векторов $V_\ell \parallel \ell$; плоскость π с начальной т. $N_0 \in \pi$ и мн-вом векторов $V_\pi \parallel \pi$.



Ясно, что т. $M \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in V_\ell$; т. $N \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{N_0N} \in V_\pi$.

Переходя к произвольному афф. пр-ву A_n дадим

<u>Определение 1</u> Пусть $V^k \subset V^n$ k-мерное вект. подпр-во (A^n – афф. n-мерное пр-во, ассоц. с V^n); т. $M_0 \in A^n$

Назовем <u>k-мерной плоскостью, проходящей ч/з т. M_0 с направляющим подпростр-м V^k</u>, множ-во

$$\Pi^k = \{ \text{т.} M \in A^n \mid \overrightarrow{M_0M} \in V^k \}.$$

$\dim \Pi^k = k$ — краткая запись размерности Π^k.

<u>Примеры</u>: 1) $k = 1 \Rightarrow \Pi^k$ есть <u>прямая</u>.

$$\forall \bar a \in V^n, \ \bar a \neq \bar 0 \Rightarrow \Pi^1 = \{ \text{т.} M \in A^n \mid \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \bar a, \ t \in \mathbb{R} \} \text{ есть прямая.}$$

2) $k = n-1 \Rightarrow \Pi^{n-1}$ называется гиперплоскостью A^n.

Ясно, что $\forall$ k-мерная пл-ть Π^k сама является аффинным k-мерным пр-вом, ассоциир-м с V^k (почему?)

<u>Теорема 1</u> Если т. $N_0 \in \Pi^k$, то k-мерная пл-ть, проход. ч/з N_0 с направляющим подпр-м V^k совпадает с Π^k:

$$\{ \text{т.} M \mid \overrightarrow{N_0M} \in V^k \} = \{ \text{т.} M \mid \overrightarrow{M_0M} \in V^k \}$$

Смысл теор. 1 состоит в том, что в качестве начальной точки пл-ти Π^k можно выбрать $\forall$ т. $\in \Pi^k$.

<u>Док-во</u>. $(A3) \Rightarrow \overrightarrow{N_0M} = \overrightarrow{N_0M_0} + \overrightarrow{M_0M}$ $(*)$.

Т.к. т.т. $N_0, M_0 \in \Pi^k \Rightarrow \overrightarrow{N_0M_0} \in V^k$

Поэтому из $(*) \Rightarrow \overrightarrow{N_0M} \in V^k \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in V^k$. ▶

§6 Задание плоскости Π^k (параметрические уравнения)

Пусть $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}$ базис в V^k. Тогда $\forall \bar{a} \in V^k$ задается в виде $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i \bar{a}_i$ для некоторых чисел t_i.

Т.о. т. $M \in \Pi^k \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \sum\limits_{i=1}^{k} t_i \bar{a}_i$ $(*)$

Если фиксирована т. O, то $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$ есть разность 2^x радиус-векторов $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$. В итоге:

<u>Предложение 1</u>. (векторное ур-е Π^k)

т. $M \in \Pi^k \Leftrightarrow \bar{r} = \bar{r}_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} t_i \cdot \bar{a}_i$ — ур-е Π^k, где

$\bar{r} = \overrightarrow{OM}$, $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\{\bar{a}_i\}$ базис V^k, t_i — произвольные числа (параметры). Из предл. 1 (переходя к координатам) получаем:

<u>Предложение 2</u> (параметрическое ур-е Π^k)

Если $R = \{т. O; \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ аффинный репер, т. $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})_R$, т. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)_R$, $\bar{a}_i(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_n^{(i)})$ относ-но базиса $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, то ур-е пл-ти Π^k имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} + t_1 \cdot a_1^{(1)} + t_2 \cdot a_1^{(2)} + \dots + t_k \cdot a_1^{(k)} \\ x_2 &= x_2^{(0)} + t_1 \cdot a_2^{(1)} + t_2 \cdot a_2^{(2)} + \dots + t_k \cdot a_2^{(k)} \\ &\dots \\ x_n &= x_n^{(0)} + t_1 \cdot a_n^{(1)} + t_2 \cdot a_n^{(2)} + \dots + t_k \cdot a_n^{(k)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(1)} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ \vdots \\ a_n^{(2)} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

где параметры $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ однозначно определяют координаты т. $M \in \Pi^k$.

§7 Задание плоск-ти Π^k (общее уравнение)

В векторном пр-ве V^n фиксируем базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$. Тогда V^n отождествляется с $\mathbb{R}^n$: $\bar{a} \in V^n \leftrightarrow$ координаты $(x_1, x_2, \dots x_n)$ вектора $\bar{a}$ в базисе $\{\bar{e}_i\}$.

Известно (см. курс алгебры, 2 семестр), что k-мерное вект. подпр-во $V^k \subset V^n$ (в координатах) отождествляется с простр-вом решений СЛОУ (системы линейных однородных уравнений)

$$(*) \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где матрица A размера $m \times n$ имеет ранг (rang) равный $n-k$: $\mathrm{rang}\, A = n-k$.

Далее замечаем:

$$(**) \begin{cases} \text{т. } M \in \Pi^k \Leftrightarrow \bar{r} - \bar{r}_0 \in V^k \Leftrightarrow \text{координаты вектора } \bar{r} - \bar{r}_0 = \\ = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} \text{ в базисе } \{\bar{e}_i\} \text{ удовлетворяют уравнению } (*). \end{cases}$$

Пусть $R = \{\text{т.} O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ - афф. репер, т. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)_R$, т. $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})_R$. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ имеет координаты

$$(x_1 - x_1^{(0)}, x_2 - x_2^{(0)}, \dots, x_n - x_n^{(0)}).$$

В итоге, плоскость Π^k задается уравнением

$$A \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{или же} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ где} \qquad (***)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Ур-е (***) в развернутой записи

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \text{- - - - - -} \\ \text{- - -} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases}, \quad \mathrm{rang}\, A = n-k$$

называется общим ур-ем Π^k

<u>Теорема 1</u>. Плоскость Π^k состоит из точек $M(x_1, x_2 \dots x_n)_R$ координаты которых являются решениями СЛУ (***), т.е. $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, где $\mathrm{rang}\, A = n-k$.