Примеры вычисления неопределённых интегралов

Надзея Гришалевич

18 марта 2019 г.

Содержание

1 Замена переменной

Многие простейшие интегралы решаются обычной заменой переменной. Вопрос заключатеся в том, как её увидеть. Проанализировав подынтегральное выражение, можно заметить, что в нём имеется функция и её дифференциал, как в следующем примере:

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

Заметим, что $d(\cos(c)) = -\sin(x)dx$. Выполнив подстановку $\cos(x) = t$, получим, что $dt = -\sin(x)dx$ и интеграл принимает вид:

$$= \int \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C$$

Вместо замены переменной можно сразу подносит выражение под дифференциал:
$\int \frac{dx}{1-\cos(x)} = \int \frac{1+\cos(x)}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}dx = \int \frac{1+\cos(x)}{1-\cos^2(x)}dx = \int \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}dx =$
$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} + \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + \int \frac{d(\sin(x))}{\sin^2(x)} = -\cot(x) - \frac{1}{\sin(x)} + C$

P.S. Для проверки ответа можно вычислить производную от результата и сравнить с подынтегральной функцией.

Задачи:

1. $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$
2. $\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$
3. $\int \frac{x^3}{x^8-2}dx$. Указание: $t = x^4$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$
5. $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1}dx$. Указание: $d(3x^2-7x+1) = (6x-7)dx$
6. $\int x\ e^{x^2}dx$
7. $\int \frac{\ln(x)dx}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$

8. $\int \frac{\ln(\tan(x))dx}{2\sin(x)\cos(x)}$

2 Интегрирование по частям

Возможно, вы сталкивались с проблемой, когда, казалось бы, привычные замены не помогают вычислить интеграл. К тому же, он может содержать смесь различных функций.

Здесь можно попытаться использовать *интегрирование по частям*. Если у вас получилось привести интеграл к следующему виду, то можно применить формулу (1)

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \tag{1}$$

Например, в следующем интеграле можно за u и dv взять $u = x$ и $dv = \sin(x)dx$. Тогда $\sin(x)dx$ – дифференциал функции v. Чтобы найти саму функцию v, необходимо проинтегрировать её дифференциал, т.е. $\sin(x)dx$ и взять первообразную:

$\int x\sin(x)dx = [u = x,\ dv = \sin(x)dx \Rightarrow v = \int \sin(x)dx = -\cos(x),$
$du = dx] = -x\cos(x) - \int -\cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

P.S. Интегрирование по частям можно применять несколько раз в одном и том же примере.

При такой замене удобно выбрать $u(x)$ и $dv(x)$ следующими:

$$u(x) = \begin{cases} P(x) \\ ln(x) \\ arcsin(x) \\ arccos(x) \\ arctan(x) \\ arccot(x) \end{cases} \quad dv(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x)dx \\ \sin(\alpha x)dx \\ e^{\alpha x}dx \\ a^{\alpha x}dx \end{cases}$$

При вычислении некоторых интегралов рассматриваемым методом мы в итоге можем получить исходных интеграл:

$$I = \int \sqrt{4 - x^2}dx$$

Приняв $u = \sqrt{4 - x^2}$ и $dv = dx$, получим, что $du = -\frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$, $v = x$. И тогда:

$$I = x\sqrt{4 - x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Последнюю подынтегральную функцию можно записать как $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}} - \sqrt{4-x^2}$. И интеграл принимает вид:

$$I = x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4\ dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int \sqrt{4-x^2}dx = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin(\frac{x}{2}) - I$$

Решая получившееся уравнение относительно I, получим:

$$I = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + C$$

Задачи:

1. $\int \ln(x)dx$. Указание: $dv = dx$
2. $\int x^2 e^x dx$
3. $\int x^3 \sin(2x) dx$
4. $\int \ln(x + \sqrt(4+x^2))$
5. $\int \arctan(\sqrt(x))dx$
6. $\int x2^x dx$
7. $\int \dfrac{xdx}{\cos^2(x)}$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^3(x)}$ Указание: В процесе вычисления получится:
   $\int \dfrac{dx}{\cos(x)} = \int \dfrac{\cos(x)dx}{\cos^2(x)} = \int \dfrac{d(\sin(x))}{1-\sin^2(x)}$

3 Интегрирование рациональных функций

Для начала нам необходимо вспомнить одну важную теорему из курса алгебры:

Теорема 1 *Любая правильная рациональная дробь вида* $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, *где* $\deg(P(x) < \deg(Q(x))$, *знаменатель которой имеет вид* $Q_n(x) = (x -$

$x_1)^r(x-x_2)^s...(x^2+p_1x+q)^k...$, может быть разложена и притом единственным образом на сумму простейших (элементарных) дробей по правилу

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{B_{ij}+C_{ij}x}{(x^2+p_ix+q_i)^j} \qquad (2)$$

где $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$

Напомним, что простейшими называются дроби вида:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ и } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

Как пользоваться этой теоремой при интегрировании рациональной функции? Для примера рассмотрим интеграл:

$$\int \frac{2x^3+3}{x^3+x}dx$$

Для этого необходимо дробь $\dfrac{2x^3+3}{x^3+x}$ представить в сумму элементарных.

Алгоритм действий

1. Выделим целую часть, т.е. сделаем дробь правильной. Напомним, что у правильной рациональной функции степень числителя меньше степени знаменателя. В данном примере это делается устно, но в общем случае применяется метод деления многочлена на многочлен https://zaochnik.com/spravochnik/matematika.

$$\frac{2x^3+3}{x^3+x} = 2 + \frac{-2x+3}{x^3+x}$$

2. Разложить получившуюся дробь – остаток на сумму простейших методом неопределённых коэффициентов `https://www.webmath.ru/poleznoe/formules_9_10.php`

$$\frac{2x^3+3}{x^3+x} = 2 + \frac{3}{x} - \frac{3x+2}{x^2+1}$$

3. Пользуясь линейностью интеграла, вычислить интеграл от каждого слагаемого.

$$= \int (2 + \frac{3}{x} - \frac{3x+2}{x^2+1})dx = \int 2dx + \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{3x+2}{x^2+1}dx$$

4. Если в знаменателе дроби многочлен первой степени, то получается натуральны логарифм. Если же в знаменателе квадратный трёхчлен, а в числителе константа, то выделяем полный квадрат и в результате получаем либо интеграл вида $\int \frac{dx}{(x \pm b)^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x \pm b}{a} + C$, либо $\int \frac{dx}{(x \pm b)^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x \pm b - a}{x \pm b + a} + C$
   Если же в числителе многочлен первой степени, а в знаменателе второй, то в числителе выделяем производную знаменателя и разделяем дробь на сумму двух. В нашем случае производная
   $(x^2 + 1)' = 2x$, поэтому в числителе нужно получить $2x + \text{const}$ вынесением $\frac{3}{2}$:

   $= 2x + 3\ln|x| - \frac{3}{2}\int \frac{2x + \frac{4}{3}}{x^2+1}dx = 2x + 3\ln|x| - \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = 2x + 3\ln|x| - \frac{3}{2}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = 2x + 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| - 2\arctan(x) + C$

Задачи:

1. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$
2. $\int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2}dx$
3. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$
4. Иногда этот метод может применяться для интегрирования иррациональных функций. Алгоритм остаётся таким же, как если бы радикал отсутствовал:
   $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}$
5. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx$
6. $\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}$

4 Интегрирование иррациональных функций

Если в числителе подынтегральной функции стоит многочлен первой степени либо константа, а в знаменателе – корень из квадратного трёхчлена, то алгоритм остаётся таким же, как при интегрировании рациональной функции такого вида, т.е. если бы радикал отсутствовал:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}} = \ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}|+C$$

Этот алгоритм не всегда применяется в чистом виде, как в следующем примере

Пример 1: $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{-2((x^2+\frac{3}{4})^2-\frac{17}{16})}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2xdx}{\sqrt{\frac{17}{16}-(x^2+\frac{3}{4})^2}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{\frac{17}{16}-(x^2+\frac{3}{4})^2}} = -\frac{\arcsin(\frac{-4x^2-3}{\sqrt{17}})}{2\sqrt{2}} + C$

Пример 2: $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-9}}dx =$

$= \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-9}} = \ln|x+\frac{1}{x}+\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-9}|+C$

Чтобы проинтегрировать иррациональную функцию с несколькими рациональными степенями применяется подстановка $t = x^{\frac{1}{n}}$, где n – НОК знаменателей этих степеней.

$$\int \frac{x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx \Rightarrow t = x^{\frac{1}{6}}$$

Если в интегральной функции имеется лишь один корень n-й степени, то его и нужно заменить. Также при интегрировании функции вида

$$\frac{1}{x^n\sqrt{ax^{2n}+bx^n+q}}$$

применяется замена $t = \frac{1}{x^n}$

Задачи

1. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

2. $\int \dfrac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}$

3. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

4. $\int \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx$. Указание: $d(x+\dfrac{1}{x}) = \dfrac{x^2+1}{x^2}dx$

5. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

6. $\int x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}dx$