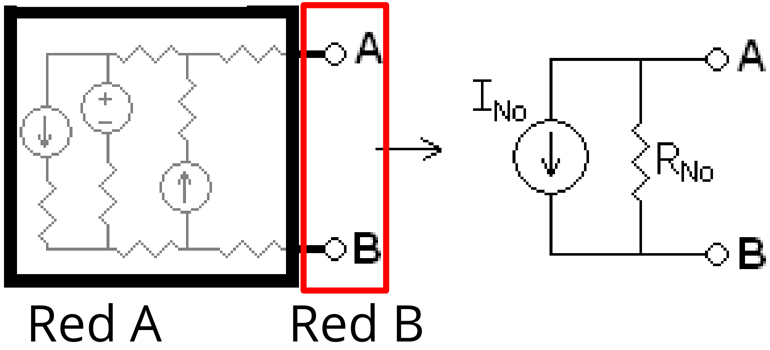
Teorema de Norton

Osornio Sánchez Christopher
Pacheco Castillo Isaias
Pineda Servín Juan Sebastián

Introducción

El **Teorema de Norton** establece que es posible sustituir todo el circuito (red A), excepto el resistor de carga (red B), por un circuito equivalente compuesto de una fuente independiente de corriente en paralelo con un resistor.



I_{No} = corriente de Norton

R_{No} = resistencia de Norton

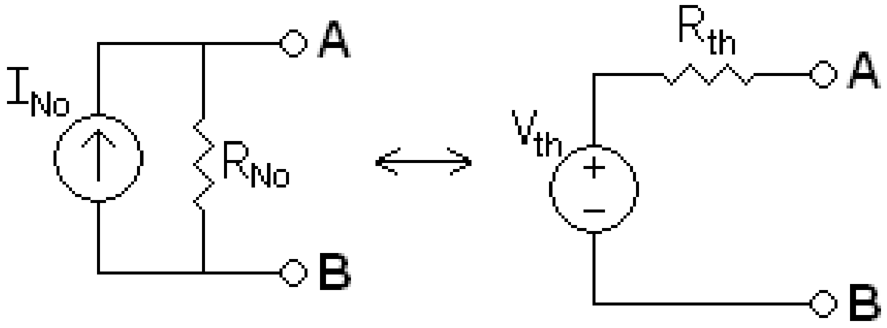
Puntos a considerar para aplicar el teorema.

- Preparar el circuito en forma de dos redes separadas A y B.
- “A” debe ser un circuito lineal.
- Desconectar la red B y poner las terminales de la red A en cortocircuito.
- Definir y calcular la corriente de Norton **(In)** como la corriente de cortocircuito entre las terminales de la red A.
- Apagar las fuentes independientes y calcular la resistencia de Norton **(Rn).**

Observación

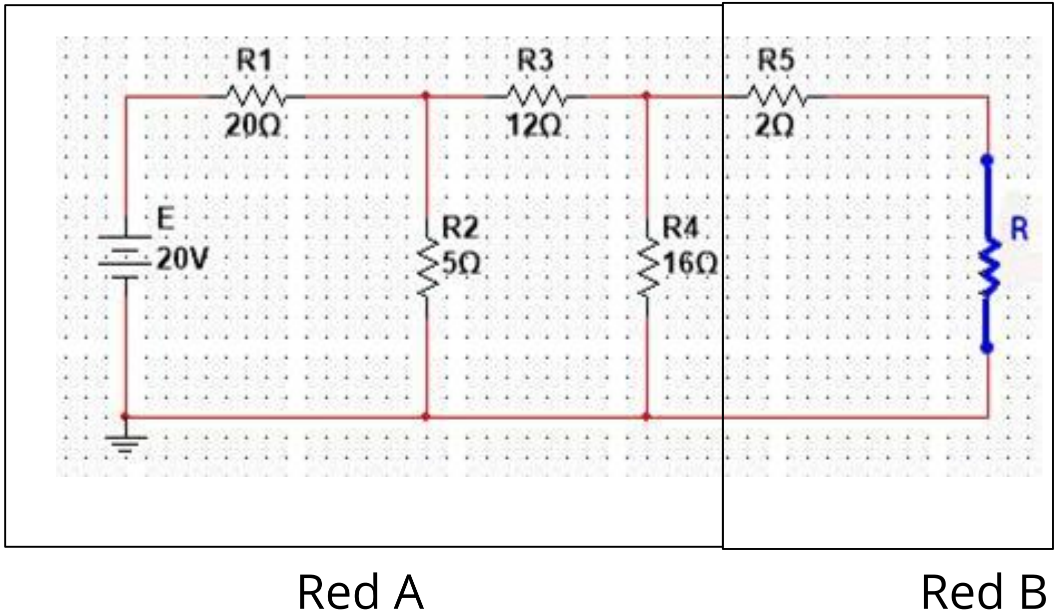
Es posible pasar de un circuito en la forma de Norton a la forma de Thévenin con una transformación de fuente.

$$R_{Th} = R_{No}$$
$$V_{Th} = I_{No} R_{No}$$

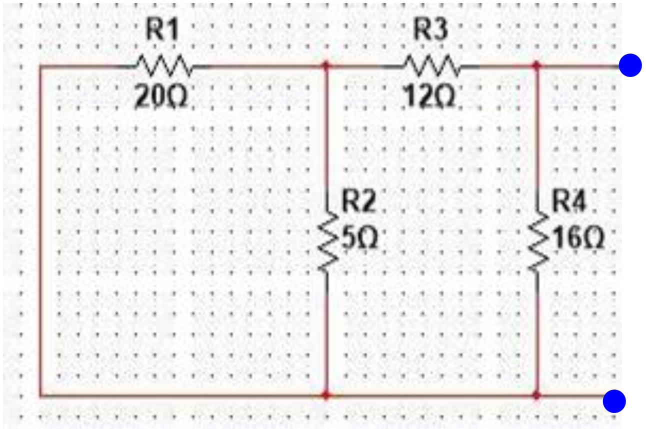


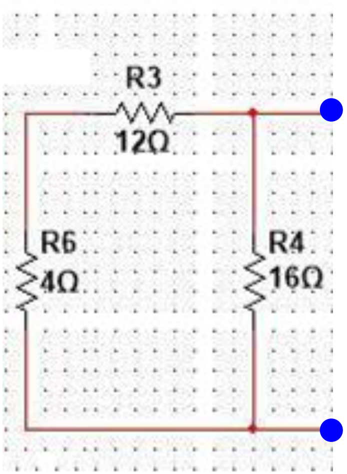
Ejercicio 1

Determine la corriente a través del resistor R, si su valor es de 50 Ω.



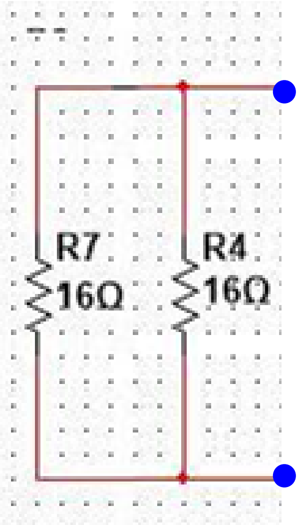
Como primer paso calcularemos la resistencia de Norton R_N , para ello eliminamos la fuente de voltaje y desconectamos la red B.





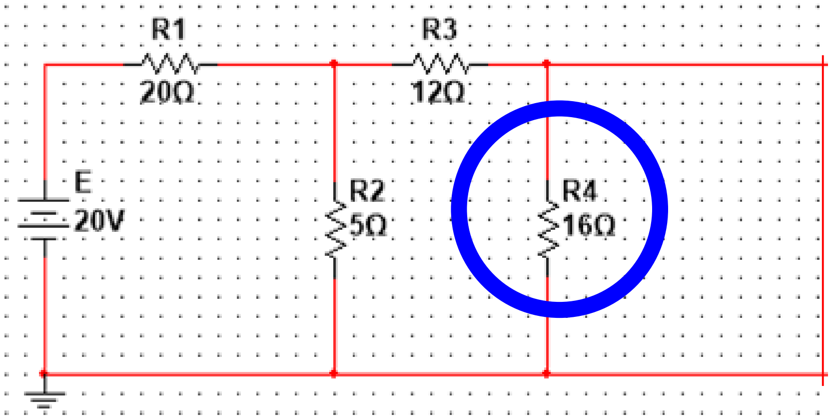
$$R_6 = R_1 \| R_2 = \frac{20x5}{25} = 4 \ \Omega$$

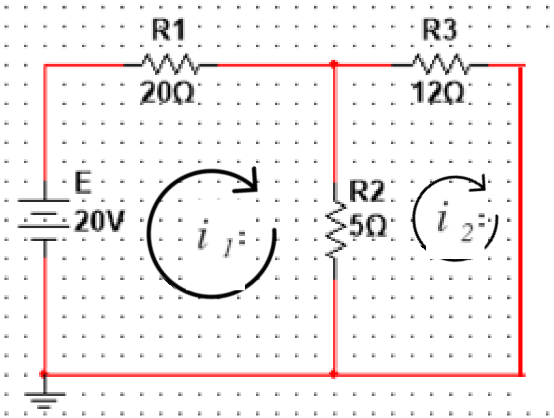
$$R_7 = R_3 + R_6 = 12 + 4 = 16\Omega$$



$$R_8 = R_7 \| R_4 = \frac{(16)(16)}{16+16} = 8\ \Omega$$

Ahora se calcula la corriente In.





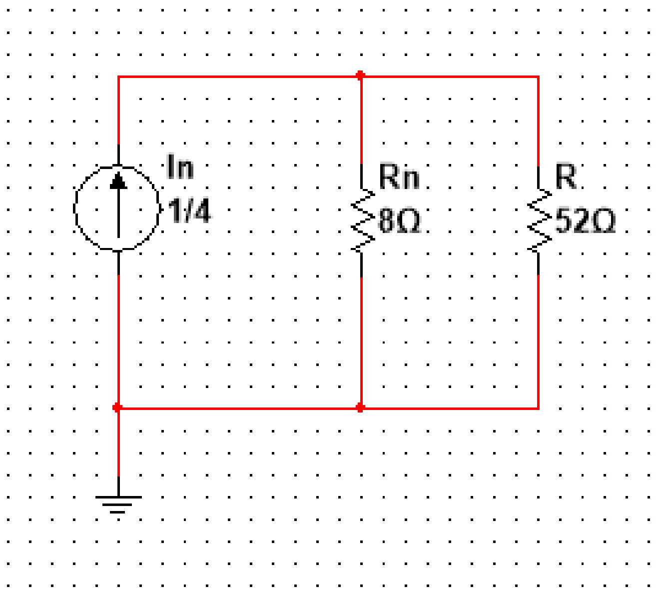
$$25i_1 - 5i_2 = 20$$

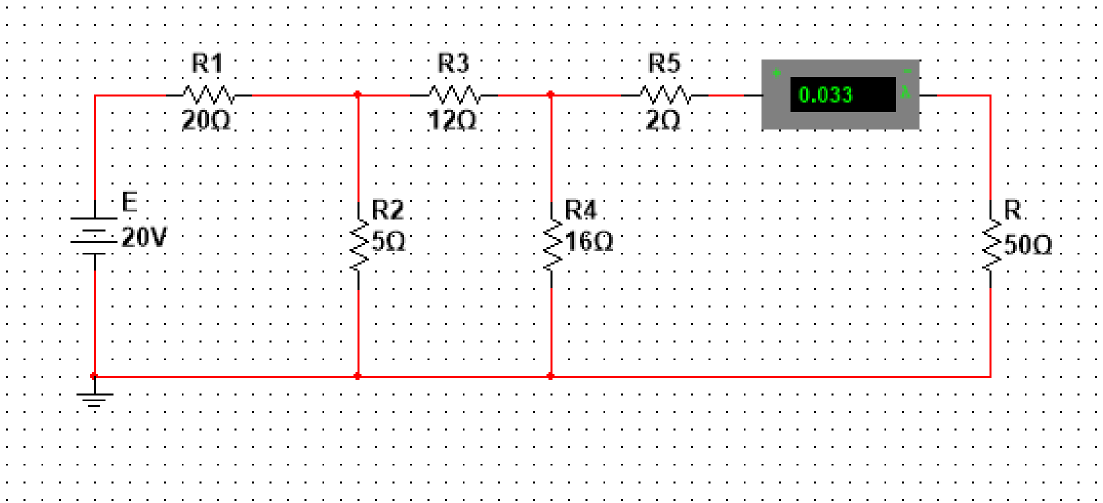
$$-5i_1 + 17i_2 = 0$$

$$i_1 = \frac{17}{20} A$$

$$i_2 = \frac{1}{4} A$$

Finalmente colocamos In y Rn en la configuración del circuito de Norton y aplicamos divisor de corriente.





$$i_{R5+R}=(\frac{1}{4})(\frac{8}{8+52})=33.33mA$$

Ejercicio 2

Obtener la corriente que circula por R2.

$V_1 = 220V \measuredangle 0^{\circ}$

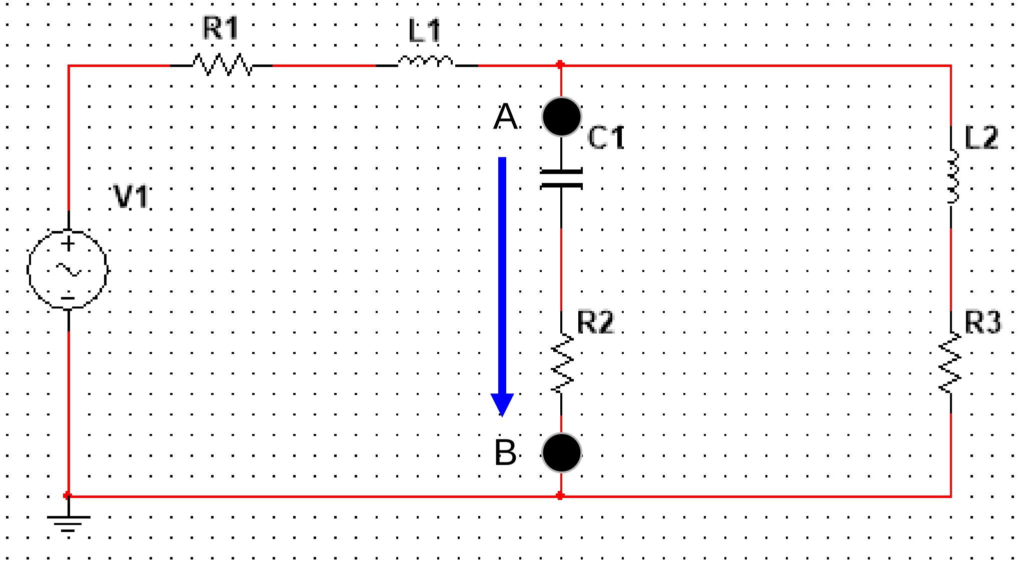
$Z_{C1} = -3j\Omega$

$Z_{L1} = 3j\Omega$

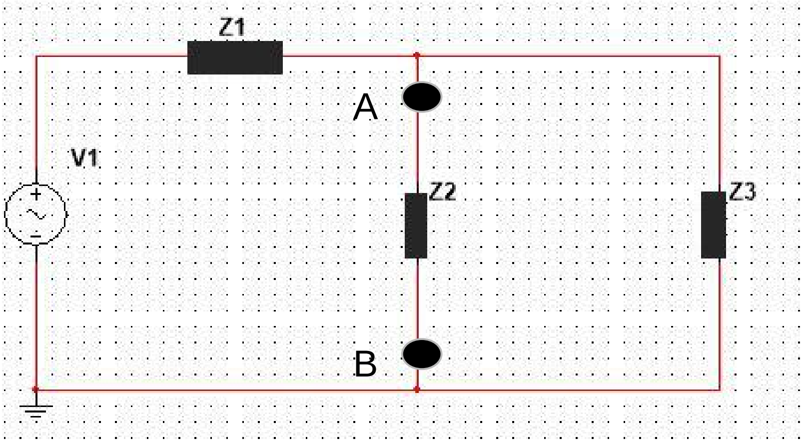
$Z_{L2} = 5j\Omega$

$R_1 = R_2 = 8\Omega$

$R_3 = 5\Omega$



Calculamos impedancias equivalentes

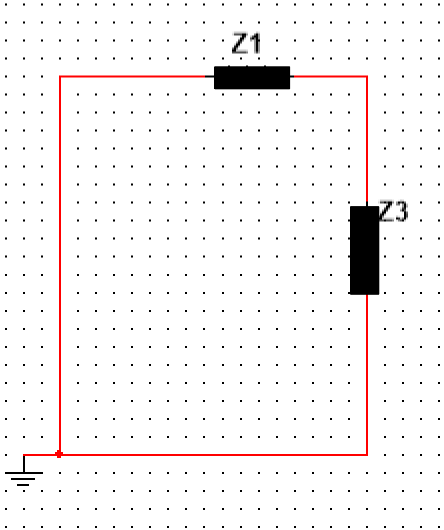


$$Z_1 = (8+3j)\Omega$$

$$Z_2 = (8-3j)\Omega$$

$$Z_3 = (5+5j)\Omega$$

Ahora calculamos Zn, quitando la fuente de voltaje y Z2.

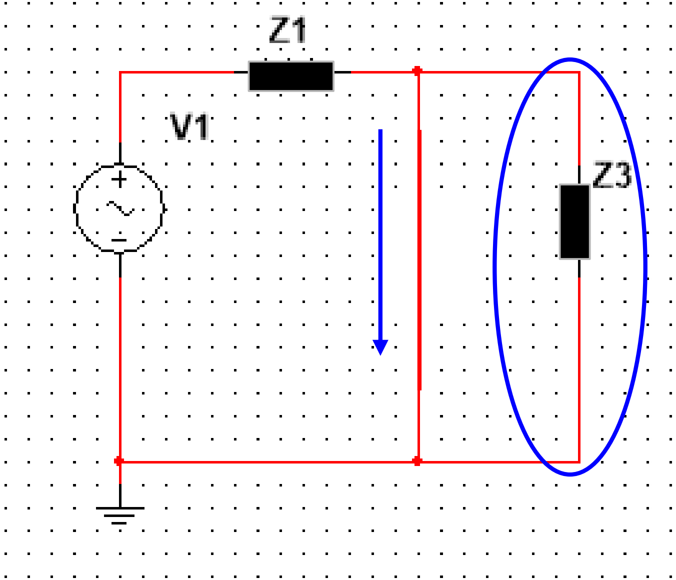


$$Z_n = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1+Z_3}$$

$$= \frac{60.37\measuredangle 65.55}{13+8j}$$

$$Z_n = \frac{60.37\measuredangle 65.55}{15.26\measuredangle 31.60} = (3.95\measuredangle 33.95)\Omega$$

Ahora calculamos In.

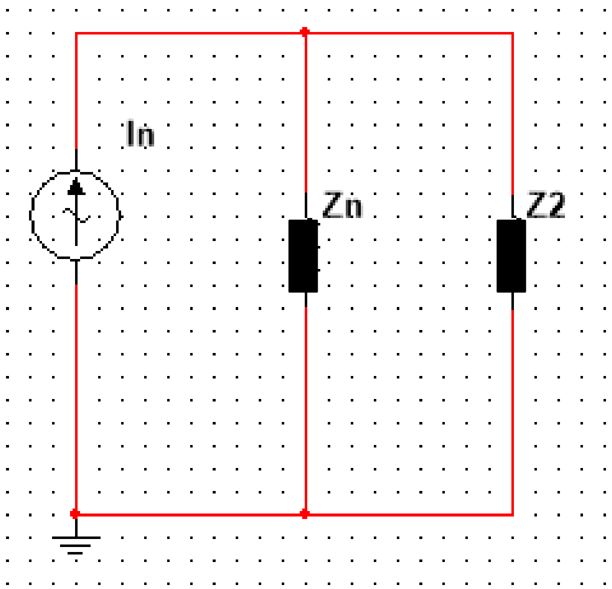


$$V_{Z1} = V_1$$

$$I_n = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{220\measuredangle 0}{8.54\measuredangle 20.55} = (25.76\measuredangle -20.55)A$$

$$I_n = (24.12 - 9.04j)A$$

Finalmente se construye el circuito equivalente de Norton y se aplica divisor de corriente.



$$Z_n = (3.27+2.2j)\Omega$$

$$I_n = (24.12-9.04j)A$$

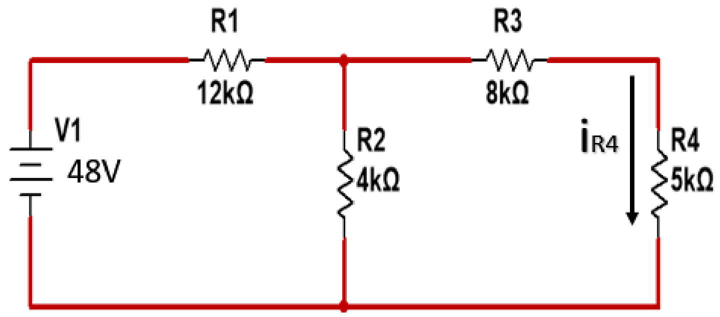
$$Z_2 = (8-3j)\Omega$$

$$I_{Z2} = I_n\left(\frac{Z_n}{Z_2+Z_n}\right) = (25.76\measuredangle-20.55\ A)\left(\frac{(3.95\measuredangle 33.95)\ \Omega}{(11.27-0.8j)\ \Omega}\right)$$

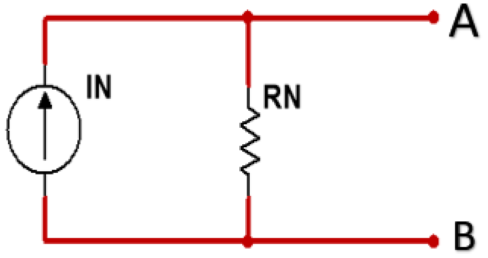
$$I_{Z2} = (25.76\measuredangle-20.55\ A)\left(\frac{(3.95\measuredangle 33.95)\ \Omega}{(11.29\measuredangle-4.06)\ \Omega}\right) = (9.01\measuredangle 17.46)\ A$$

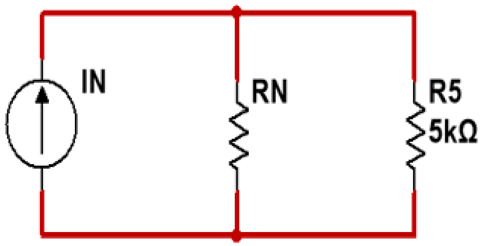
$$I_{Z2} = (8.59+2.7j)\ A$$

Dado el siguiente circuito obtenga i en R4.

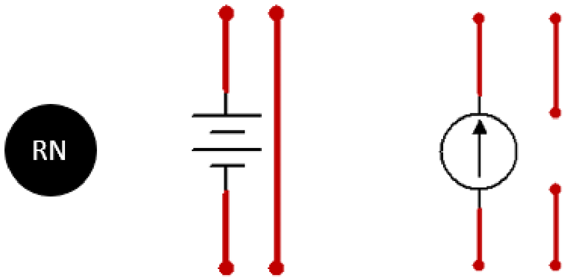


Circuito equivalente de Norton



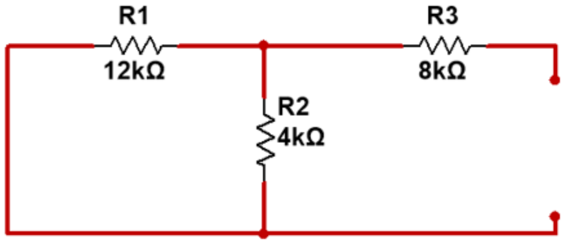


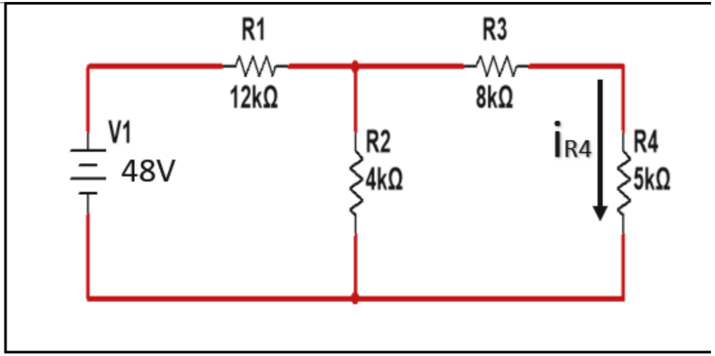
Así nos debe quedar el circuito.



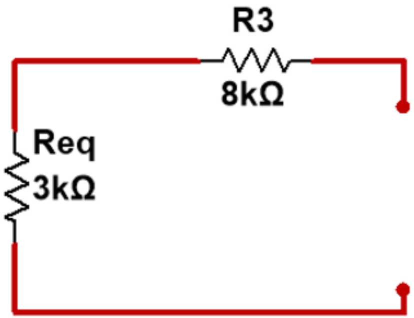
Para obtener RN transformamos nuestras fuentes.

RN





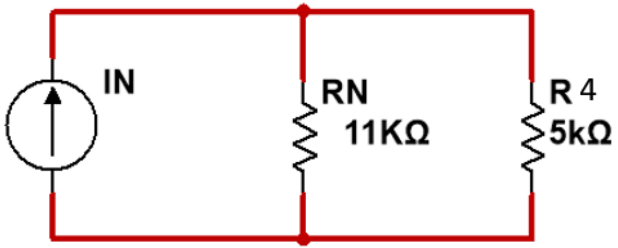
$$R1||R2 = \frac{12*4}{12+4} = 3k\Omega$$

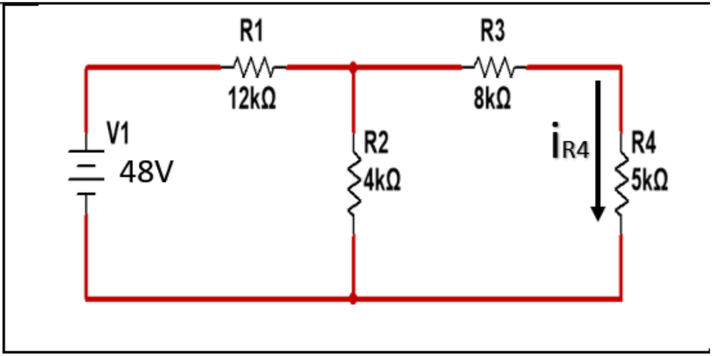


$$Rt = 3k + 8k = 11k\Omega$$

RN

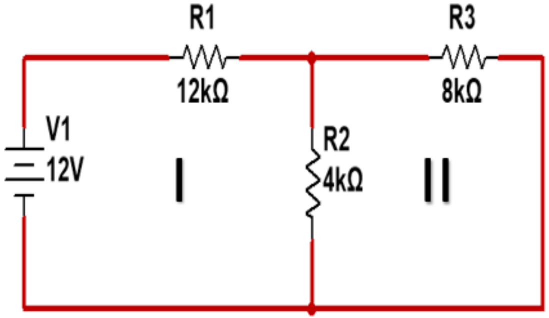
IN

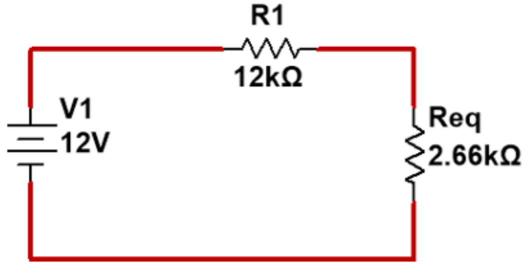




Colocamos Rn en nuestro circuito equiv.

Ahora para IN colocamos un cable en R4.

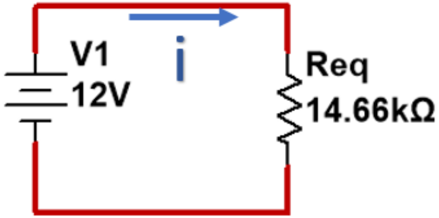


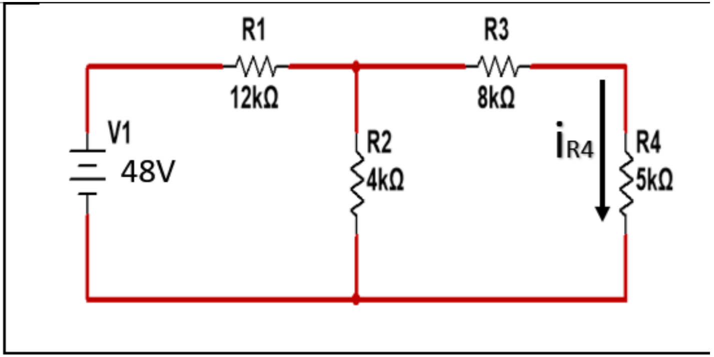


$$Req = \frac{8*4}{8+4} = 2.6\Omega$$

$$Rt = 2.66 + 12 = 14.66k\Omega$$

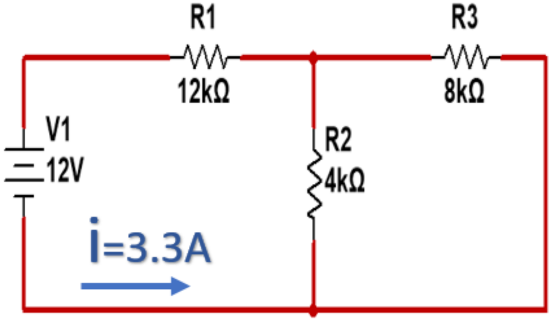
IN

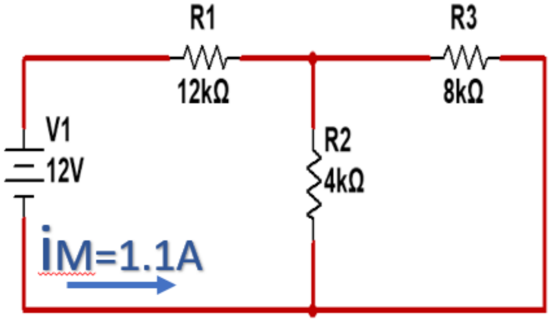




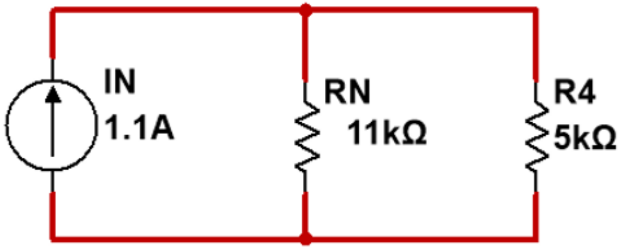
$$I = \frac{V}{R} = \frac{48}{14.66} = 3.3A$$

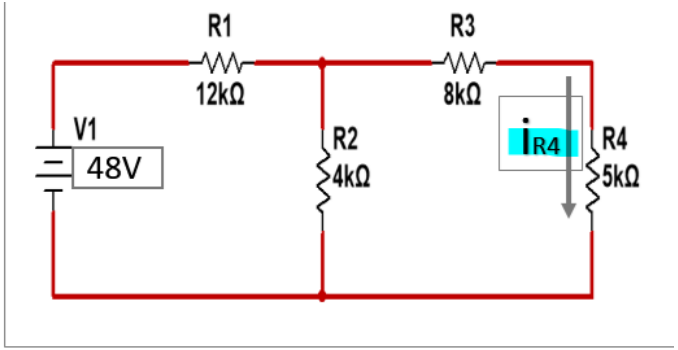
$$iM = 3.3 * \frac{4}{8+4} = 1.1A$$





Sustituimos IN y nuestro circuito equivalente nos queda.

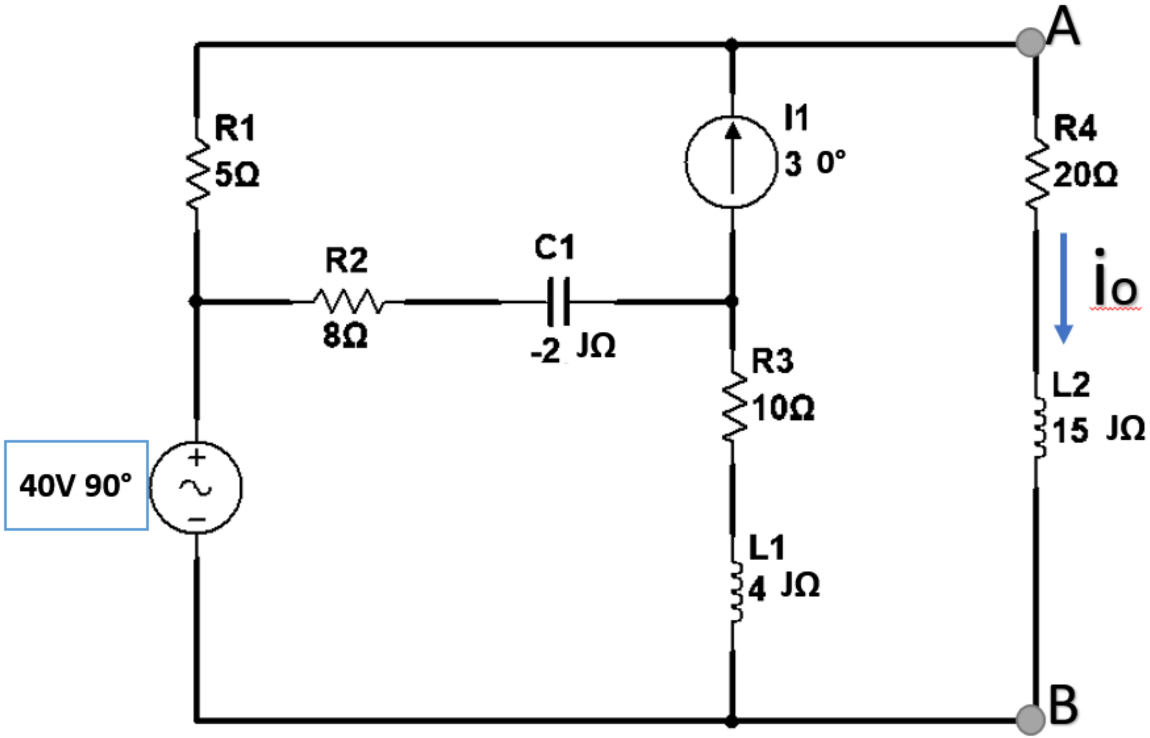




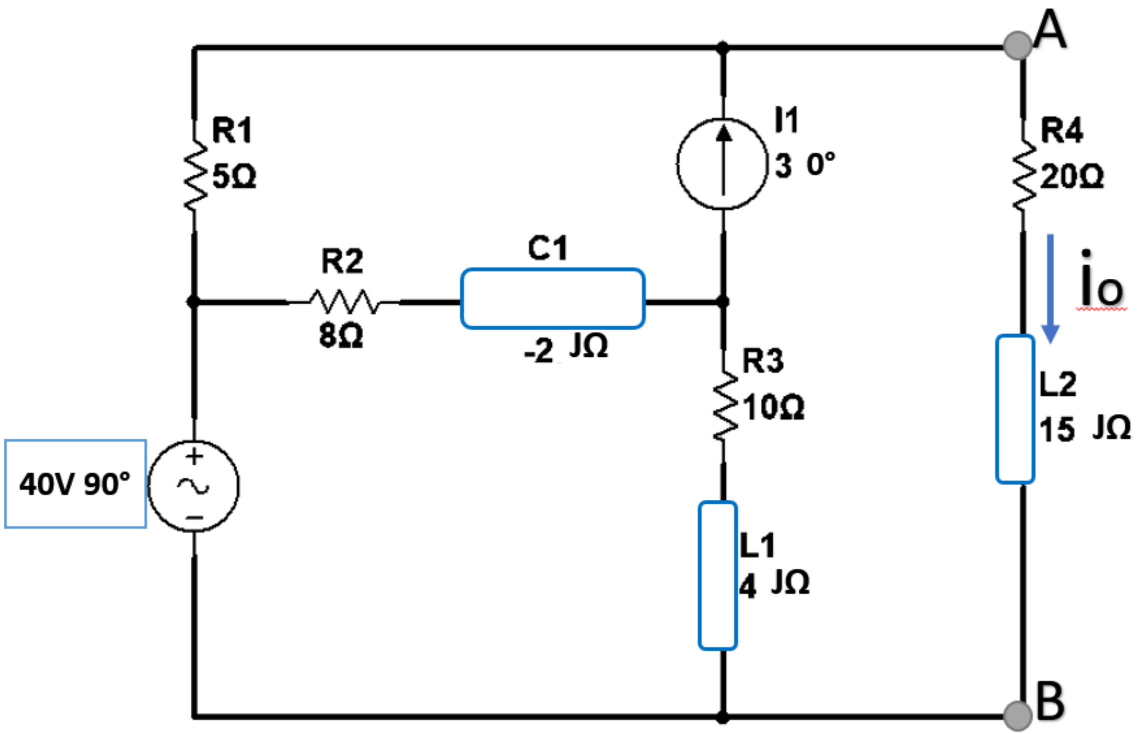
$$iR4 = 1.1 * \frac{11}{5+11} = 0.75A$$

Obtenemos IR4 con divisor de corriente.

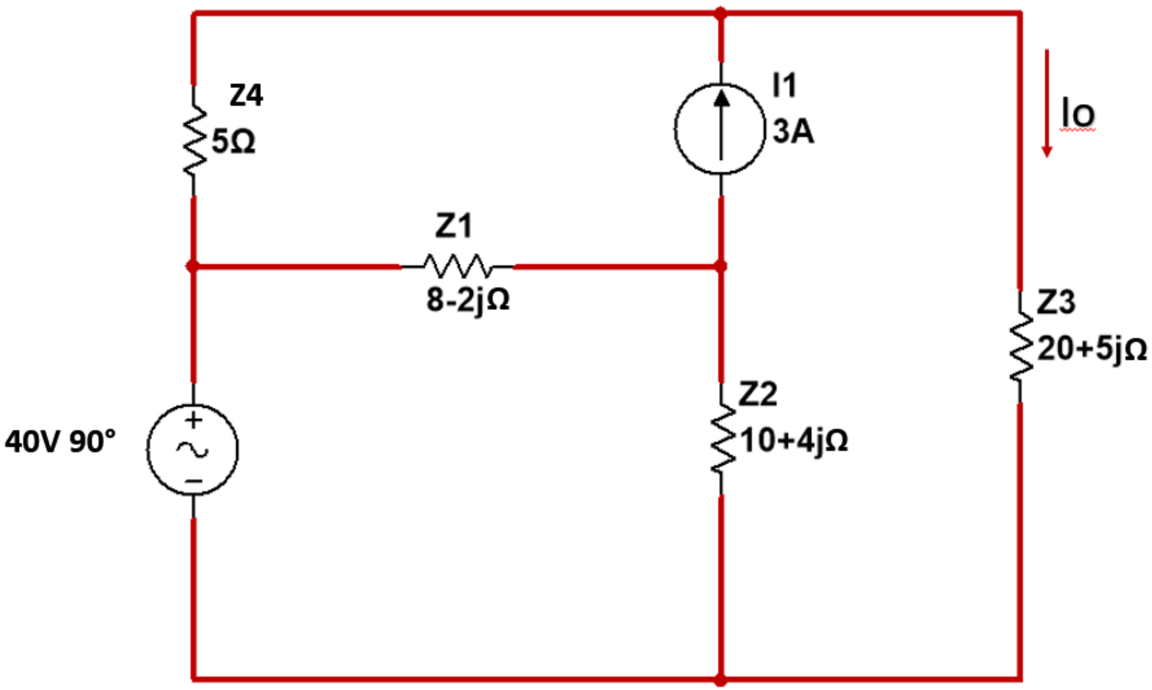
Dado el siguiente circuito, obtenga la corriente I_o aplicando el teorema de Norton.



Expresamos nuestro circuito en términos de impedancia.

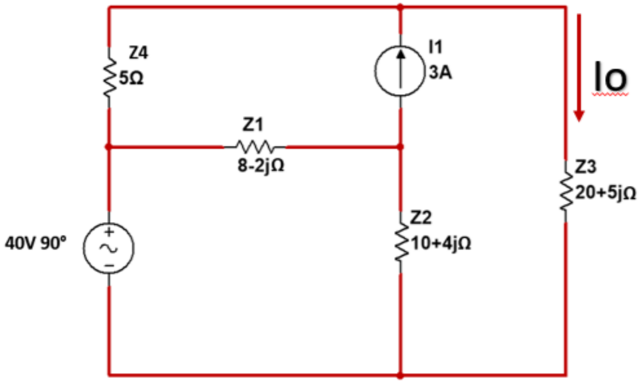


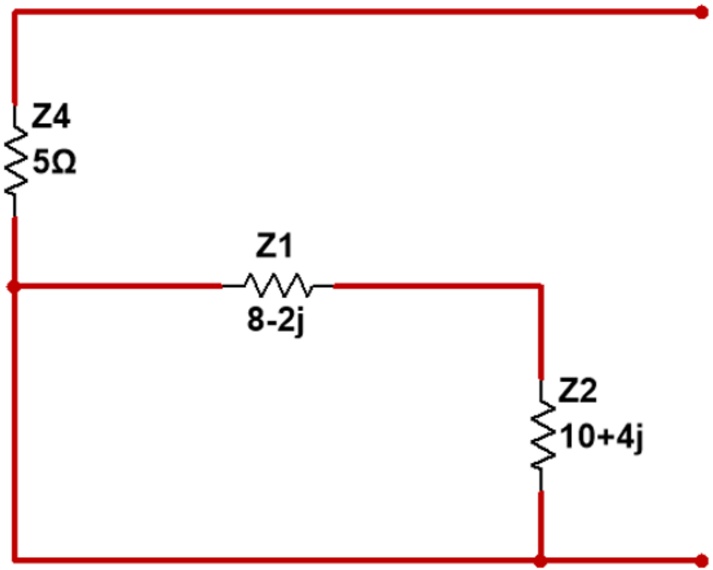
Circuito resultante con impedancias:



ZN

Para la impedancia de Norton quitamos las fuentes de corriente, voltaje y la impedancia a analizar.



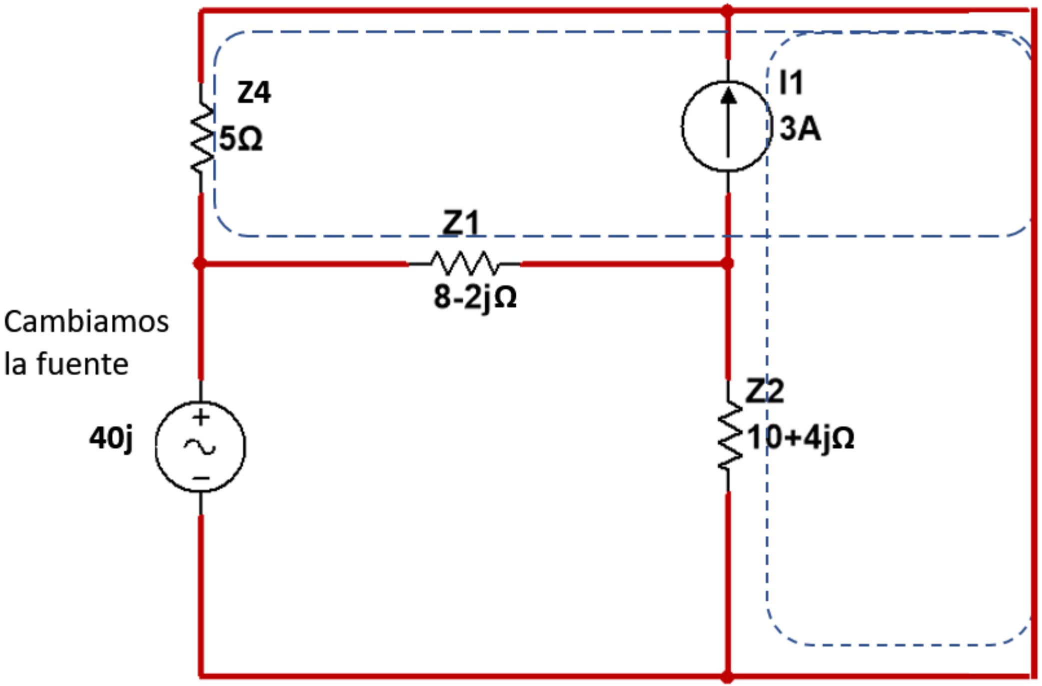


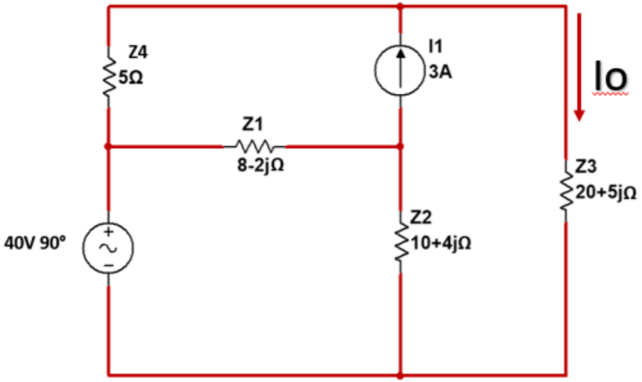
Como Z1 y Z2 están en corto solo consideramos la impedancia Z4.

$$\boxed{Zn = 5\ \Omega}$$

IN

Para la intensidad de Norton cortocircuitamos las terminales a-b, y aplicamos análisis de mallas.

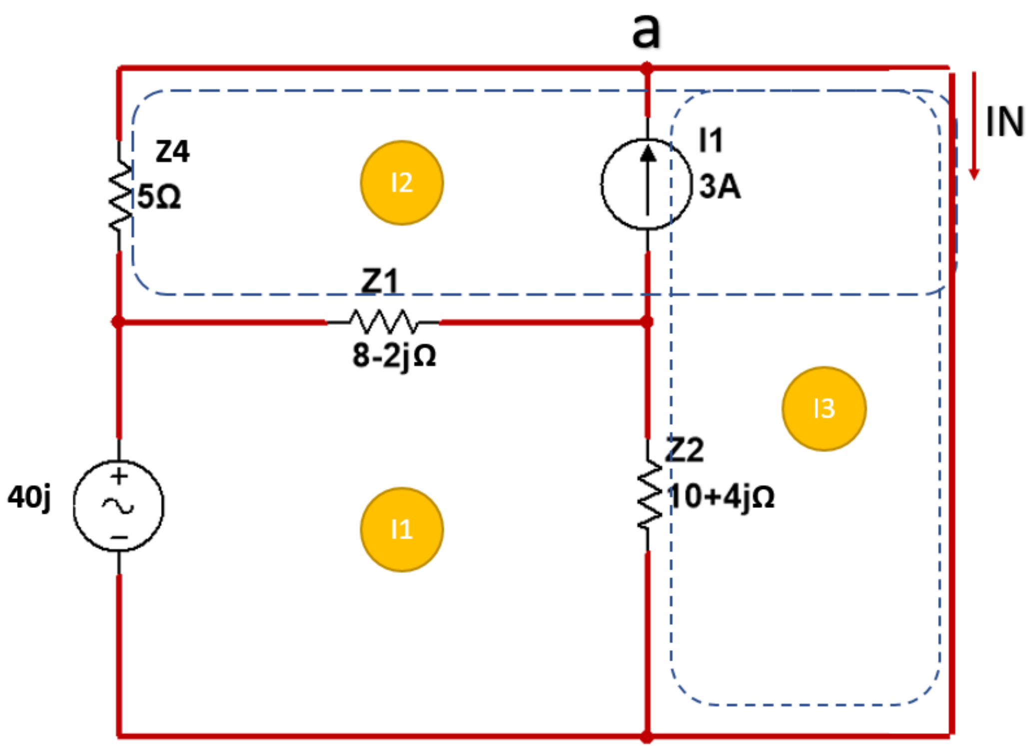


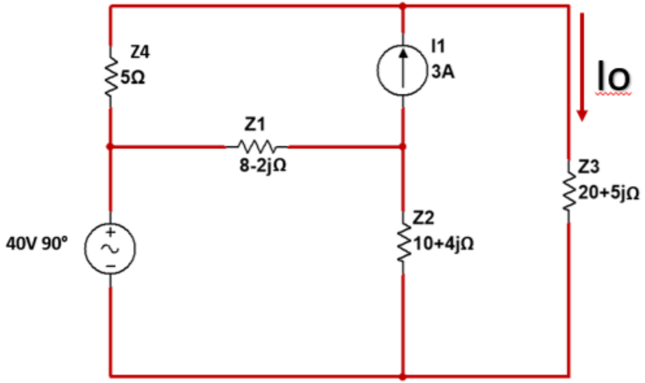


$$40\cos(90°) + 40 sen(90°) = 40j$$

IN

En nuestro circuito se forma una super malla
Por lo tanto las ecuaciones nos quedan...





Malla I

$$-40j + (18+2j)I1 - (8-2j)i2 - (10+4j)I3 = 0$$ 1

Super Malla

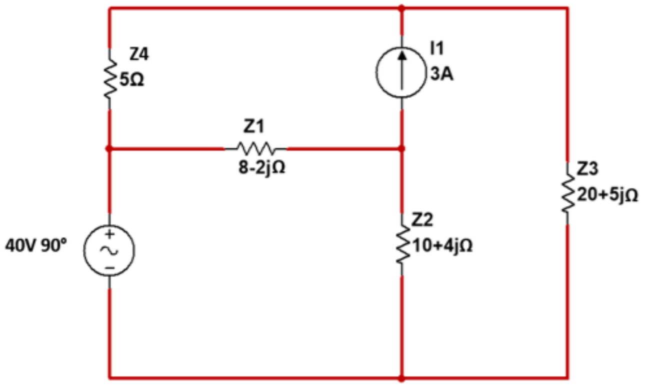
$$(13-2j)I2 + (10+4j)I3 - (18+2j)\mathbf{I1} = 0$$ 2

Nodo a

$$I3 = I2 + 3$$ 3

$$-40j + (18+2j)i1 - (8-2j)i2 - (10+4j)i3 = 0 \qquad 1$$

$$-(18+2j)i1 + (13-2j)i2 + (10+4j)i3 = 0 \qquad 2$$



$$-40j(-8+\cancel{2j}+13-\cancel{2j})i2 = 0$$

$$-40j + 5i2 = 0$$ Despejamos i2

$$i2 = 8j$$

Sustituimos en i2 en 3

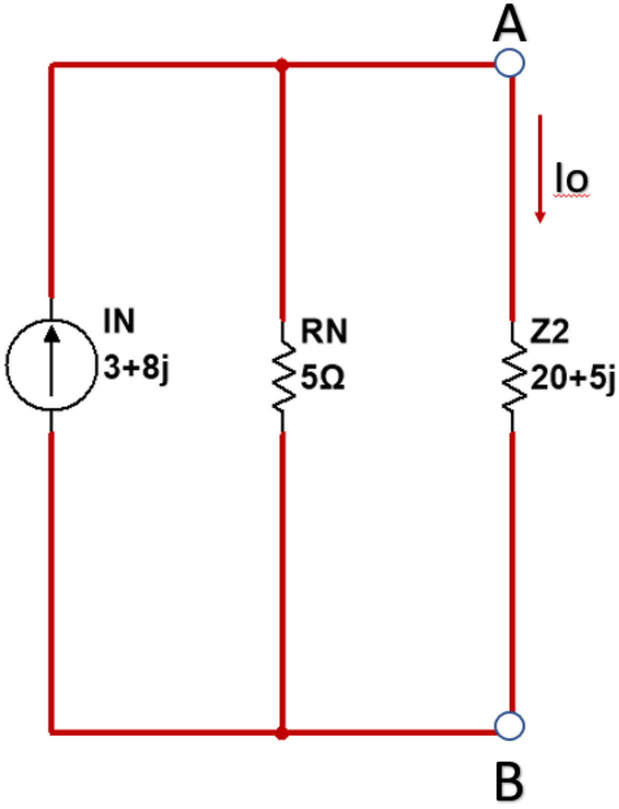
$$i3 = i2 + 3 \qquad 3$$

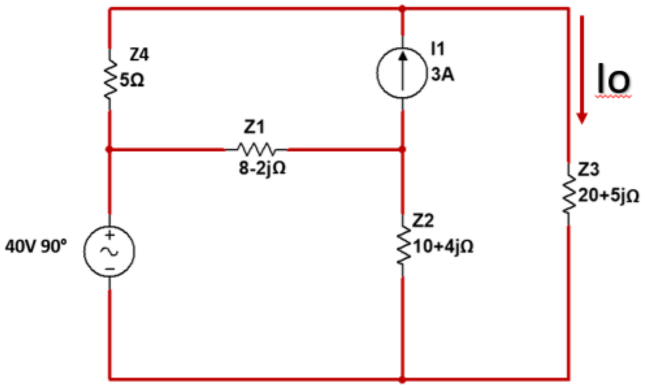
$$i3 = 3 + 8j$$

IN

Como IN = i3 entonces IN= 3+8j

Ahora que tenemos RN e IN podemos dibujar el circuito equivalente de Norton...



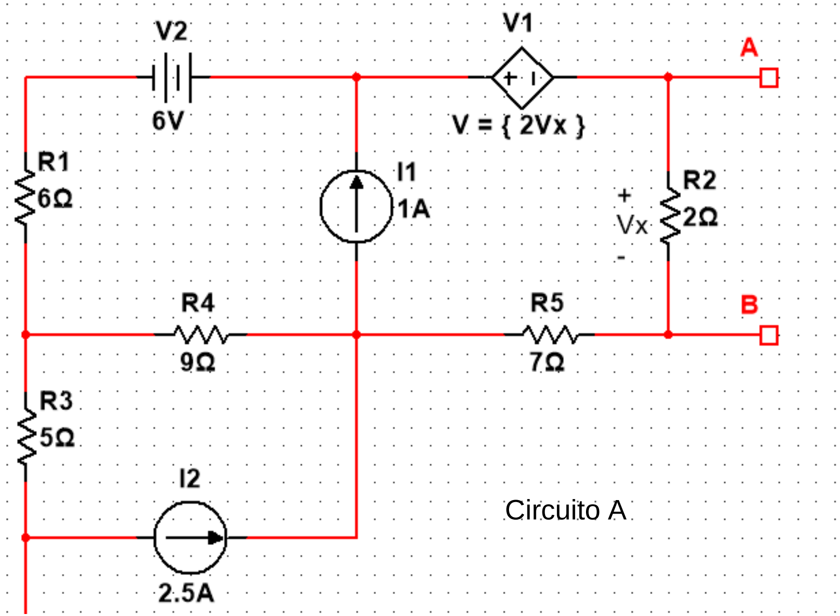


Ahora por divisor de corriente obtenemos Io...

$$Io = 3 + 8j\left(\frac{5}{5 + 20 + 5j}\right) = \frac{3 + 8j}{3 + 3j}$$

$$= 1.465\angle 38.48°\ \mathrm{A}$$

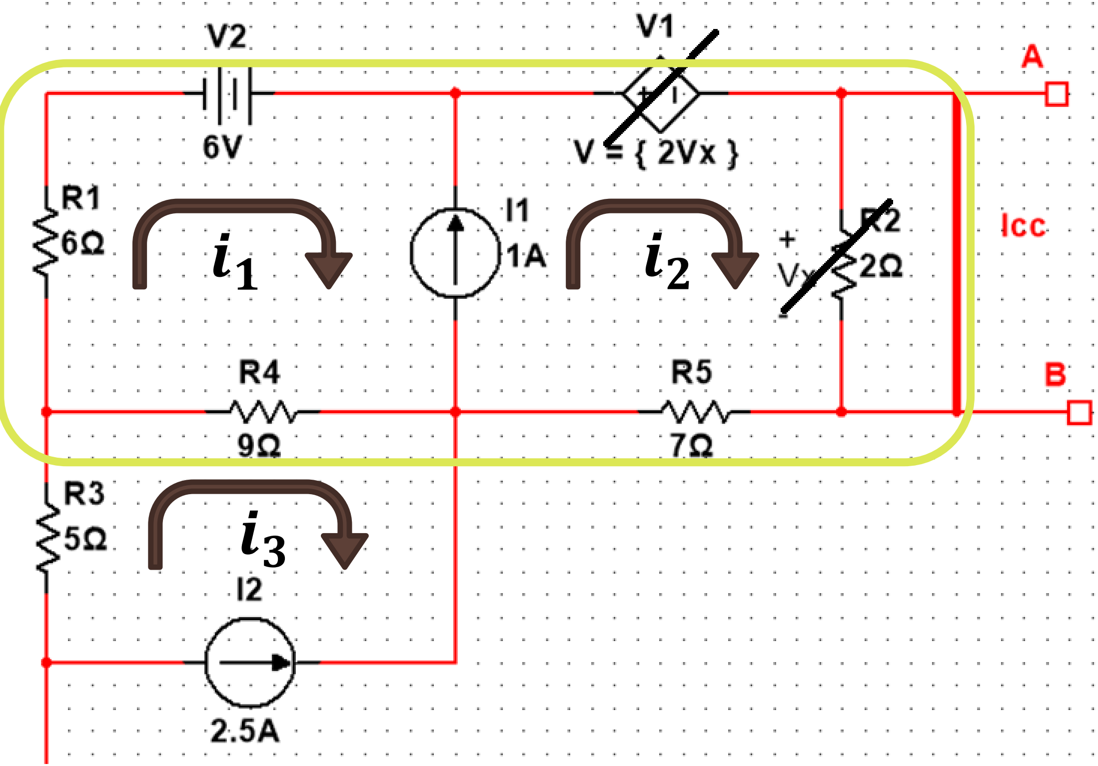
Encuentre el circuito equivalente de Norton para el circuito A



Circuito A

- Calculo de la corriente de Norton I_N

Se hace un cortocircuito entre el nodo **A y B** y se calcula la corriente **Icc** que se genera.



Super malla:

$$6i_1 - 6 + 7i_2 + 9(i_1 - i_3) = 0$$
$$15i_1 + 7i_2 - 9i_3 = 6$$

$$i_2 - i_1 = 1 \quad \rightarrow \quad i_1 = i_2 - 1$$

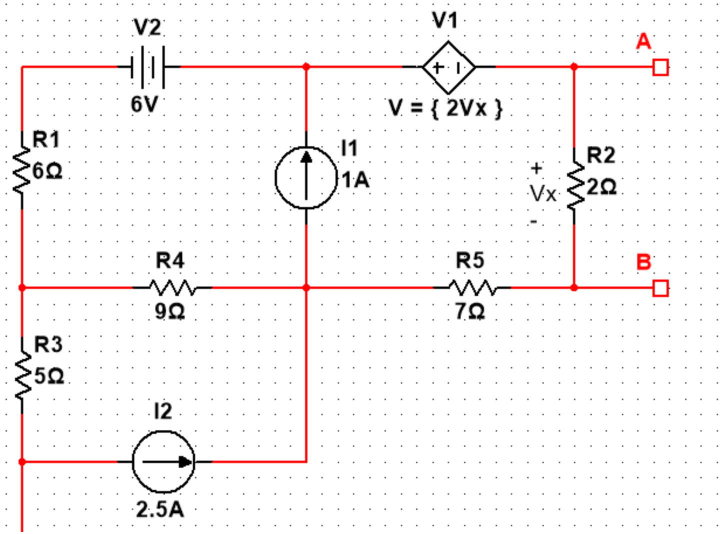
Sustituyendo $i_1 \; y \; i_3$ en la primera ecuación tenemos:

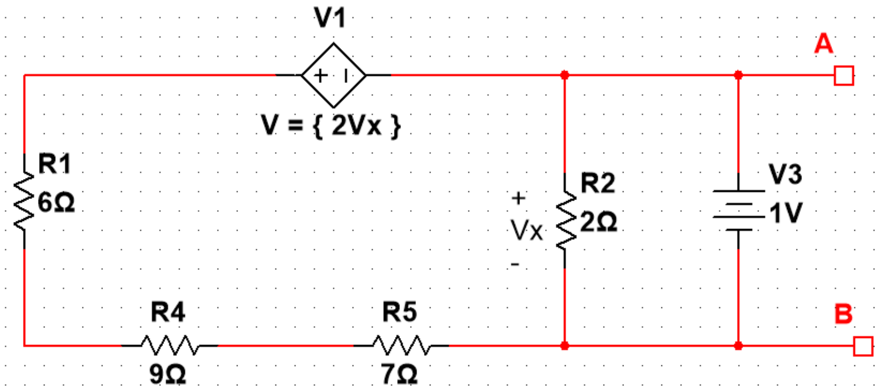
$$15(i_2 - 1) + 7i_2 = 6 + 9(-2.5)$$

Despejando i_2:

$$i_2 = {}^{-1.5}/_{22} = -.068A$$

$$i_2 = I_{CC} = I_N$$

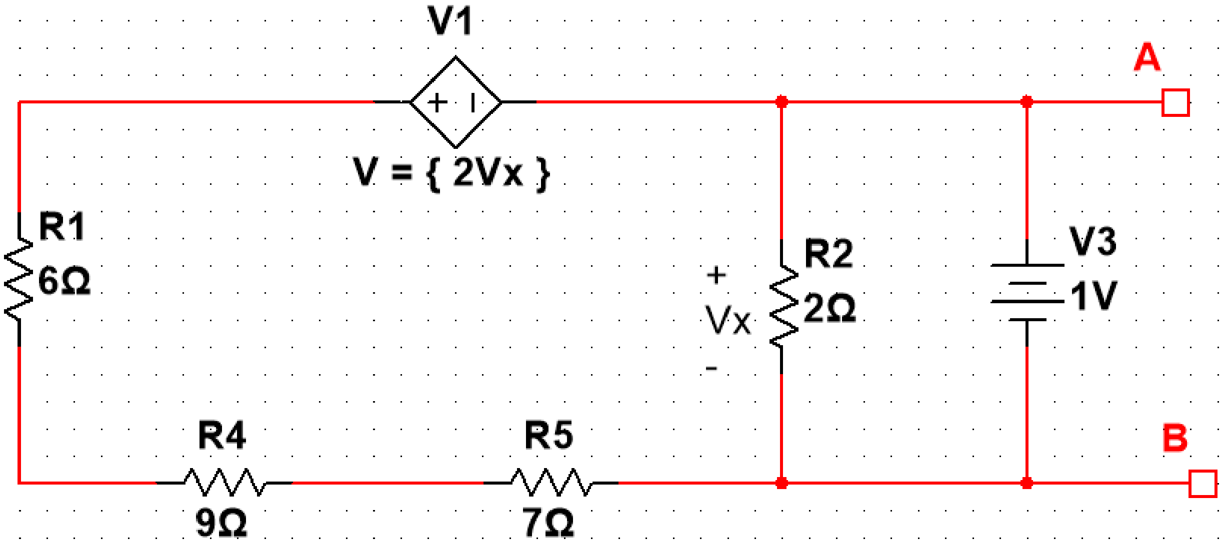




- Calculo de la resistencia de Norton R_N

Para poder hallar la resistencia de Norton se anulan las fuentes independientes, cortocircuitando las de voltaje y abriendo las de corriente.

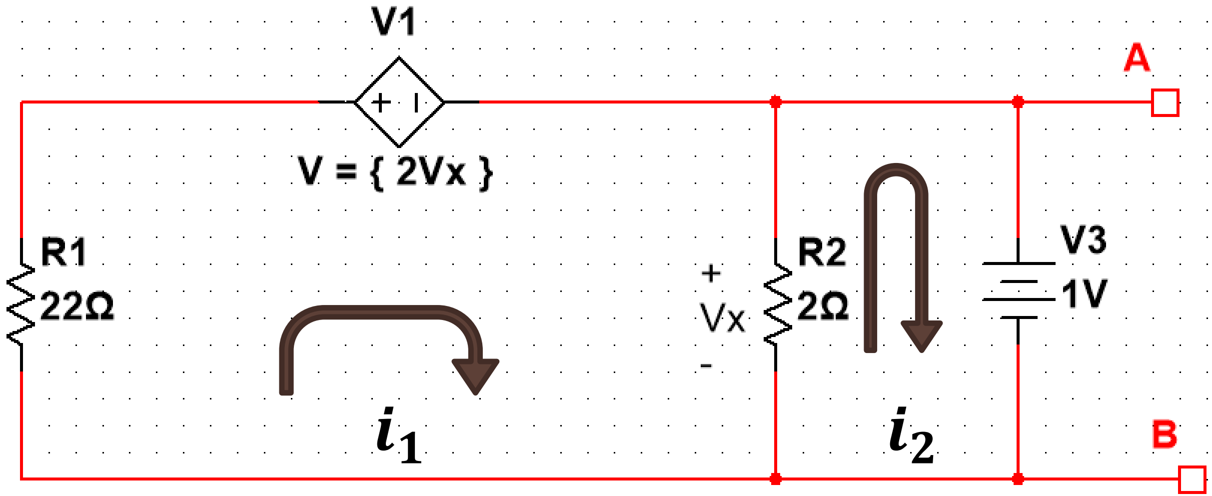
En este caso se tiene también una fuente dependiente por lo que se agrega una fuente de prueba entre los nodos **A y B** y se calcula Rn con el Voltaje de la fuente que agregamos y su corriente**.**



Sumando las resistencias en serie y aplicando una vez mas LCK para mallas:

$$V_x = 1v$$
$$22i_1 + 2V_x + 2(i_1 - i_2) = 0$$

$$2(i_1 - i_2) - 1 = 0$$

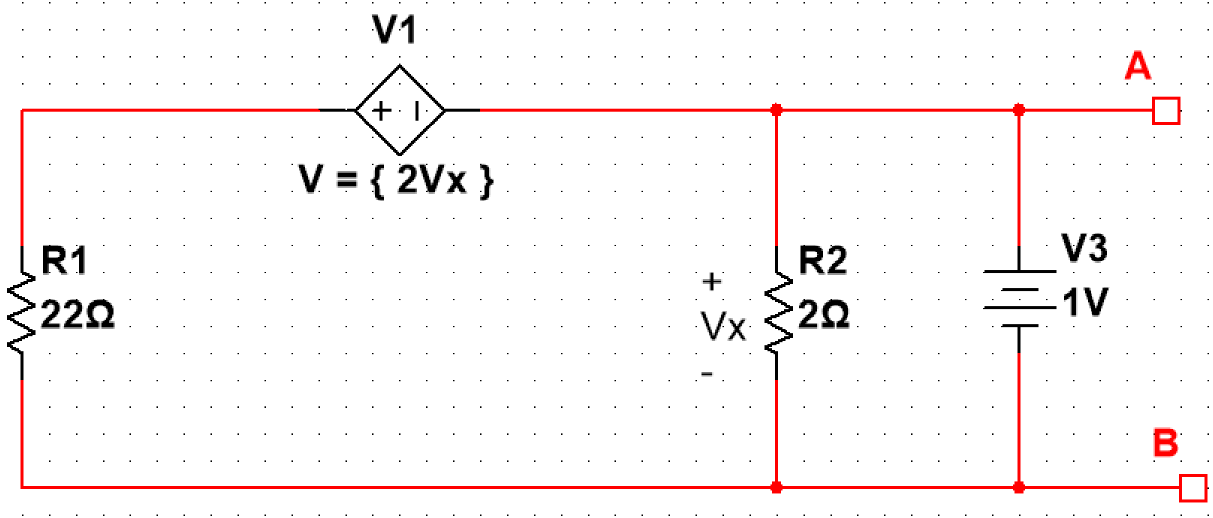


Sustituyendo V_x y resolviendo para i_2

$$22i_1 = -3$$

$$i_1 = -\frac{3}{22} \; y \; i_2 = -\frac{3}{22} - \frac{1}{2}$$

$$i_1 = -.136A \; y \; i_2 = -.63$$

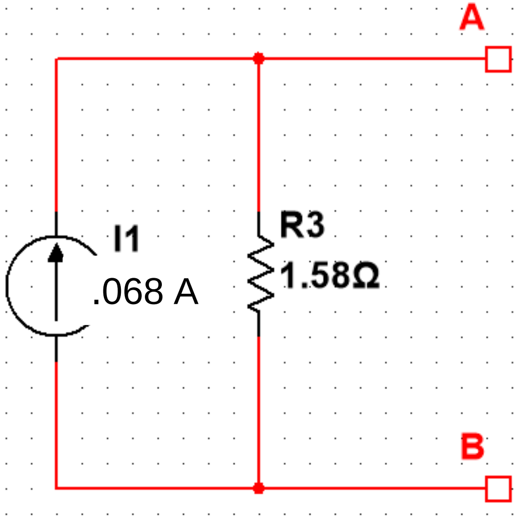


Por ultimo tenemos que:

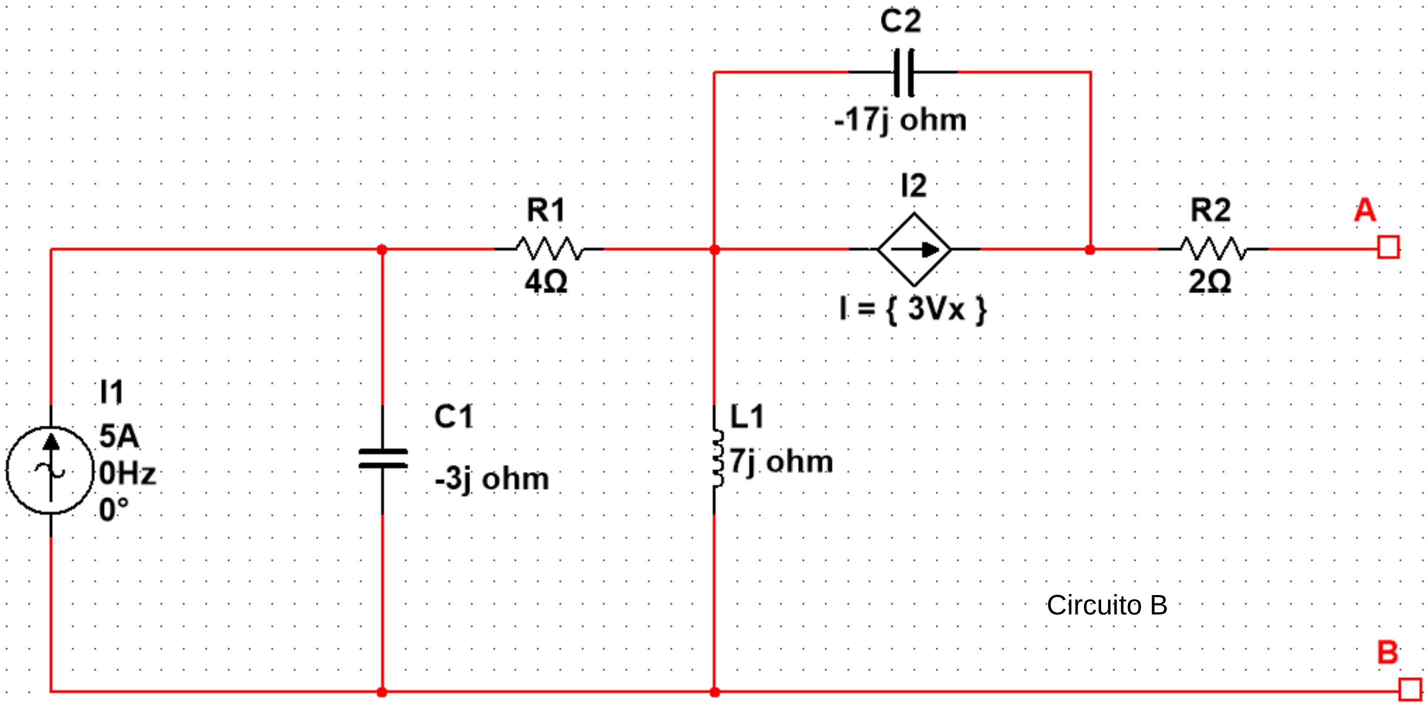
$$R_N = \frac{V_3}{i_2} = 1.58\Omega$$

$$V_{TH} = .106v$$

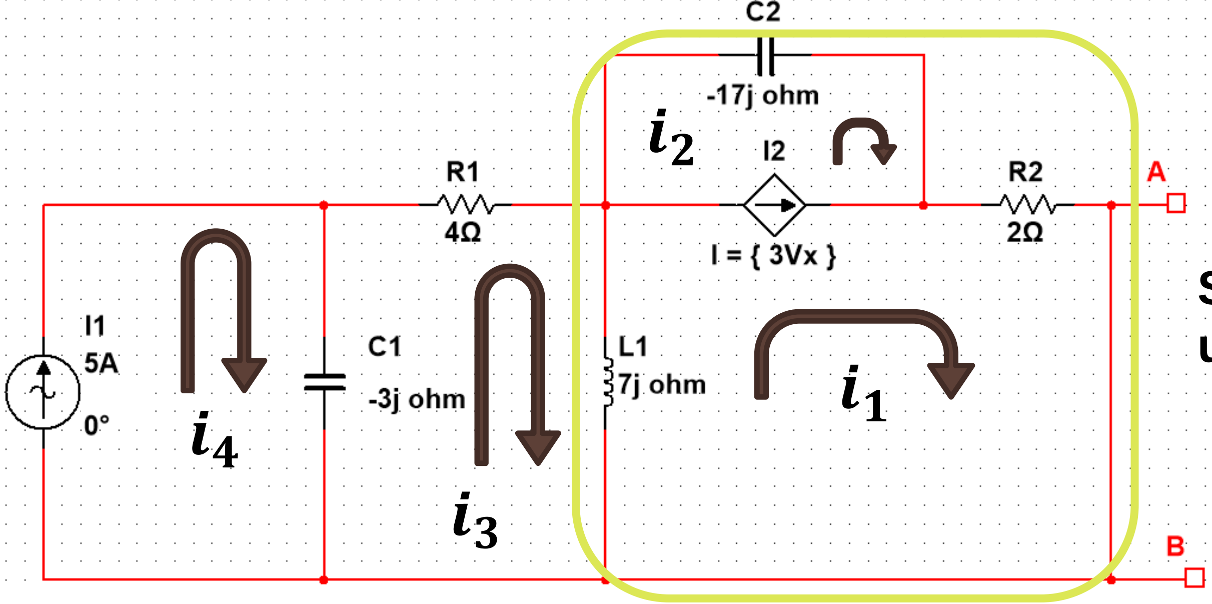
$$R_N = \frac{V_{TH}}{I_N} = 1.55\Omega$$



Encuentre el circuito equivalente de Norton para el circuito B



Circuito B



Se procede a calcular In o Icc utilizando análisis de mallas.

Super malla:

$$7j(i_1 - i_3) - 17j(i_2) + 2i_1 = 0$$

- $(2 + 7j)i_1 - 17j(i_2) - 7j(i_3) = 0$

$$i_1 - i_2 = 3v_x = 3(2i_1)$$

$$5i_1 + i_2 = 0$$

Malla 3

$$-3j(i_3 - i_4) + 4(i_3) - 7j(i_1 - i_3) = 0$$

Sabemos que $i_4 = 5A$

- $-7j(i_1) + (4 + 4j)i_3 = -15j$

Ya que se tienen las ecuaciones procedemos a encontrar i_1

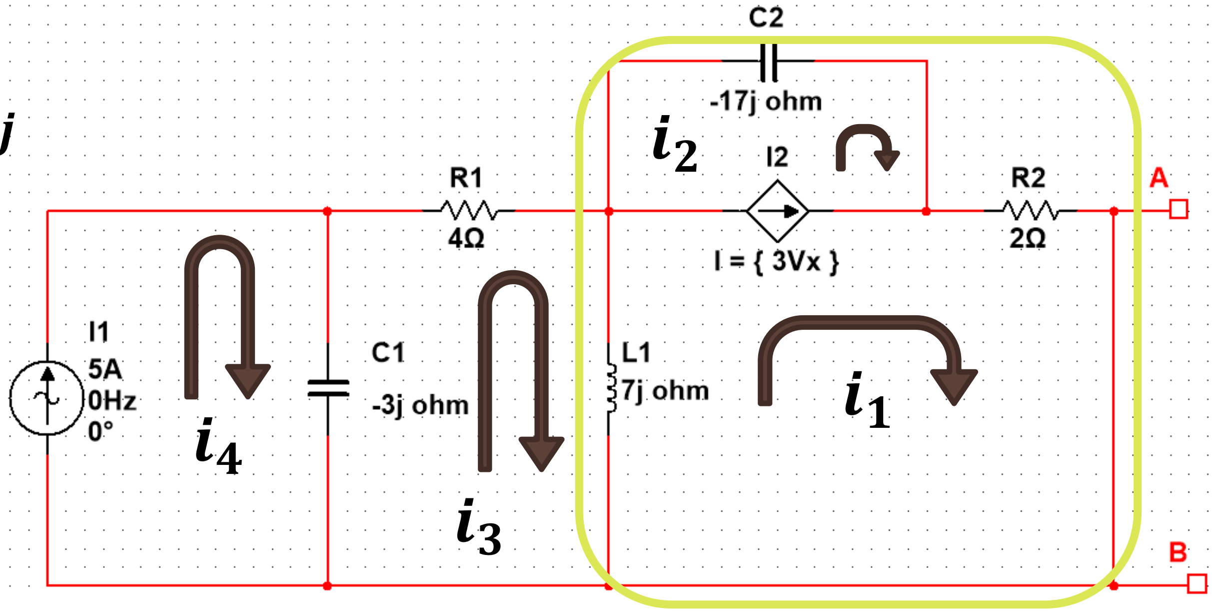
$$(2+7j)(i_1) - 17j(i_2) - 7j(i_3) = 0$$

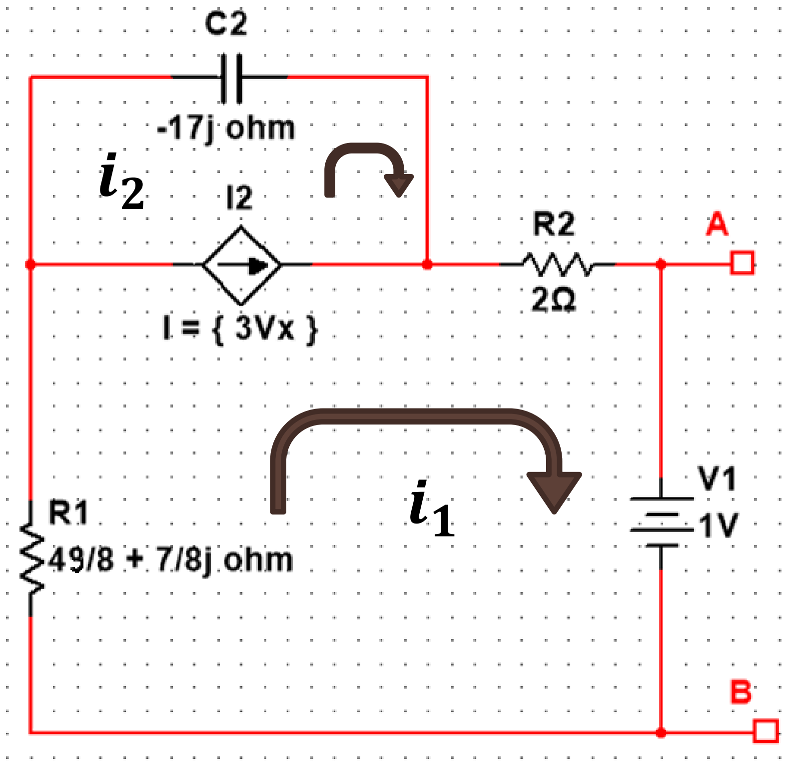
$$5(i_1) + (i_2) = 0$$

$$-7j(i_1) + (4+4j)i_3 = -15j$$

$i_1 = I_N$ =(-.13-.16j) A

POL= .20 A //-129.1º





Ahora para encontrar Rn eliminamos fuentes independientes, simplificamos lo mas que podamos el circuito y volvemos a usar LCK para mallas, como tenemos una fuente dependiente de voltaje, agregamos una fuente de prueba V=1v y calculamos la corriente que pasa por esa fuente.

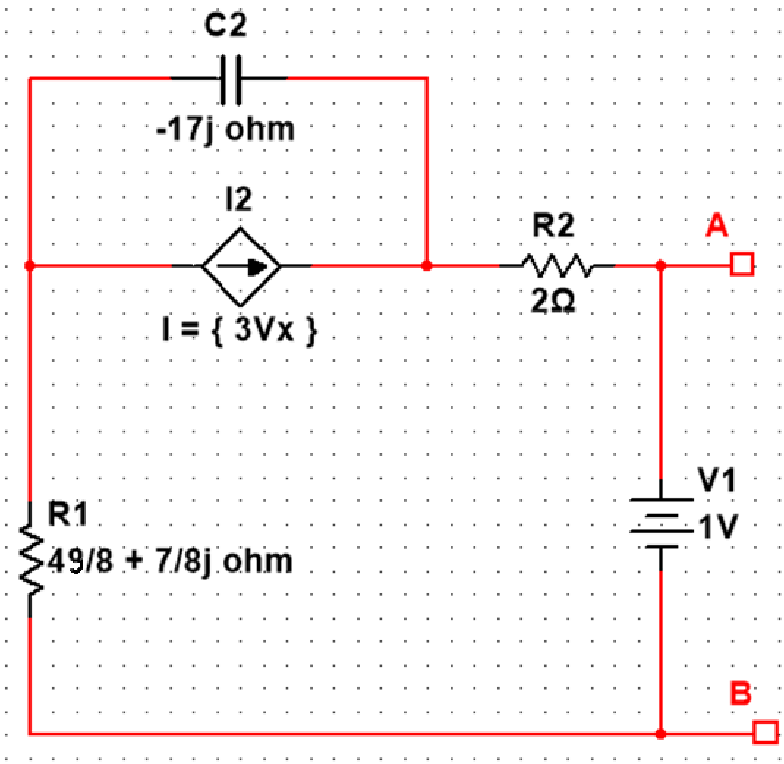
Super malla:

$$\left(\frac{49}{8}+\frac{7}{8}j\right)i_1 - 17j(i_2) + 2i_1 = -1$$

- $\left(\frac{65}{8}+\frac{7}{8}j\right)i_1 - 17j(i_2) = -1$

$$i_1 - i_2 = 3v_x = 3(2i_1)$$

- $5i_1 + i_2 = 0$

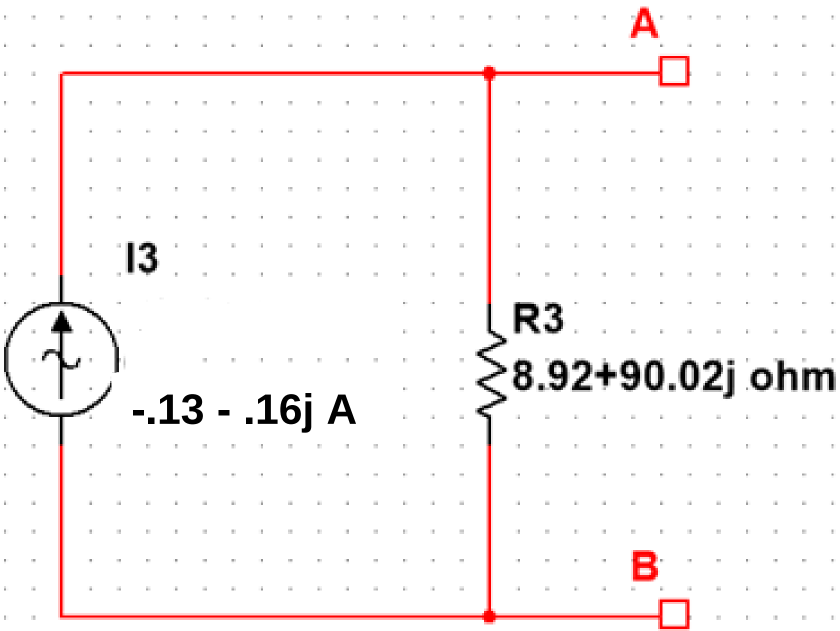


Se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones y se encuentra $\boldsymbol{i_1}$

- $\left(\frac{65}{8} + \frac{7}{8}j\right) i_1 - 17j(i_2) = -1$
- $5i_1 + i_2 = 0$

$$i_1 = (-1.09 * 10^{-3} + .011j)\ A$$

Por ultimo, por ley de ohm se encuentra Rn y se forma el equivalente de Norton.



$$R_N = \frac{V}{\boldsymbol{i_1}} = 1/(1.09x10^{-3} + .011j)$$

$$R_N = 8.92 - 90.02j$$

Referencias

- https://analisisdecircuitos1.wordpress.com/parte-1-circuitos-resistivos-cap-21-a-30-en-construccion/capitulo-28-teoremas-de-thevenin-y-norton/