



Mayo, 2021

## ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA Y REDES DE FLUJO MÁXIMO

El **árbol de expansión mínima**, o árbol de extensión mínima es empleado como una herramienta para conectar n cantidad de nodos en una red con la menor distancia posible. Generalmente se emplea para estimar los enlaces de los diferentes nodos de redes de comunicaciones, ya sea microondas, cableado estructurado, enlaces satelitales; cálculo de ramificaciones de tubería, envío de paquetes en red, etc.

Existen muchos algoritmos para resolverlo (Por ejemplo: Algoritmo de Kruskal) , sin embargo, no todos llegan a encontrar la mínima distancia; se aproximan, pero no es la óptima. Así, vamos a emplear un algoritmo que si puede obtener el mínimo, sin necesidad de emplear tantas operaciones.

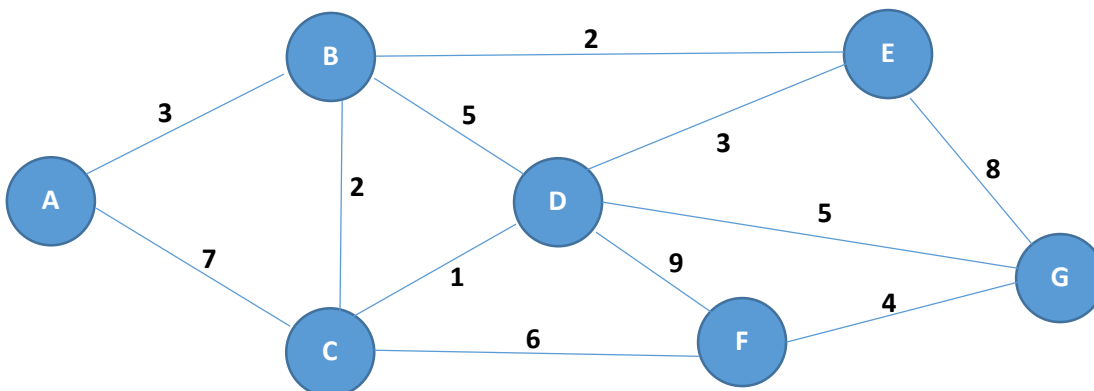
La forma de representar las uniones entre los nodos se muestra a continuación.



A y B son los nodos a conectar y D es la distancia entre éstos.

Veamos un ejemplo.

Dada una red como la que se muestra a continuación, encontrar el árbol de expansión mínima.





**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO**  
**METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES**



Si se considerara la distancia que une los nodos que prevalece actualmente, es equivalente a la suma de todas las mostradas en la red, así:

Nodos enlace	Distancia
AB	3
AC	7
BE	2
BC	2
BD	5
CD	1
CF	6
DE	3
DG	5
DF	9
EG	8
FG	4

$$\text{Distancia total} = 3 + 7 + 2 + 2 + 5 + 1 + 6 + 3 + 5 + 9 + 8 + 4$$

$$\text{Distancia total} = 55 \text{ unidades}$$

Para implementar nuestro algoritmo, se siguen los siguientes pasos:

1. Se ordenan las distancias de menor a mayor.
2. Se buscan la menor de las distancias y se unen estos nodos. Si hubiera más de una, es decir, que tengan la misma distancia otros nodos, se comienza con la asignación de una de ellas, puede ser cualquiera de éstas.
3. Se continúa uniendo los nodos, hasta que todos estén enlazados. Es muy probable que se hagan subredes, pero al final hay que enlazarlas a todas. Si el nodo ya está enlazado, continuar con la siguiente combinación.

Otro algoritmo es el buscar todas las posibles combinaciones, para identificar la que suma la menor distancia, pero requiere de mucho tiempo de procesamiento.



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES



Para nuestro caso vamos a aplicar el primer algoritmo mencionado.  
Aplicando a nuestra red.

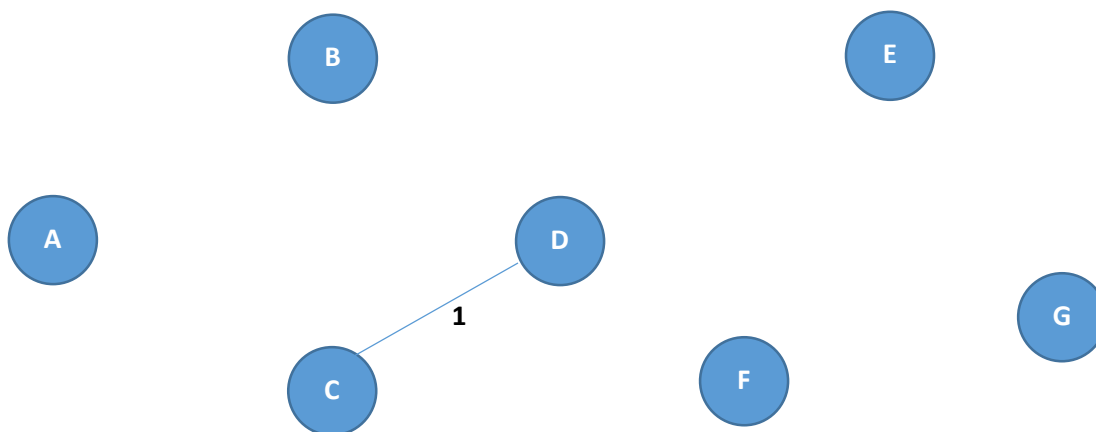
Ordenando las distancias de menor a mayor.

Id	Nodos enlace	Distancia
1	CD	1
2	BC	2
3	BE	2
4	AB	3
5	DE	3
6	FG	4
7	BD	5
8	DG	5
9	CF	6
10	AC	7
11	EG	8
12	DF	9

Vamos a ir uniendo los nodos en ese orden de aparición en la tabla, para realizar cada grafo.

1.

Id	Nodos enlace	Distancia
1	CD	1

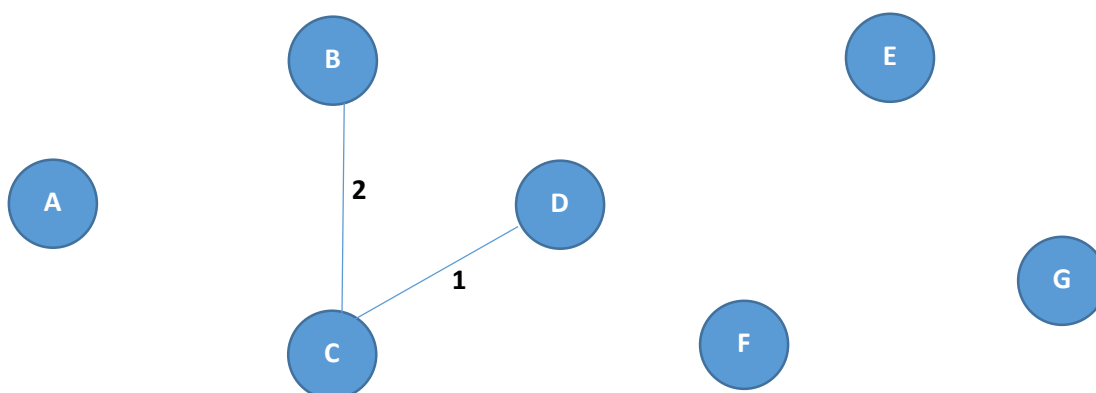


Se unen los nodos CD.



2.

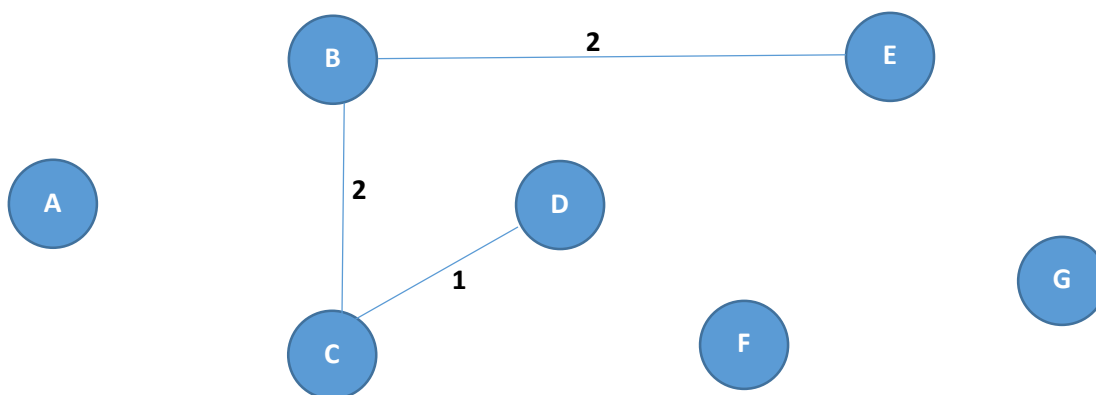
Id	Nodos enlace	Distancia
2	BC	2



Se unen los nodos: BCD

3.

Id	Nodos enlace	Distancia
3	BE	2

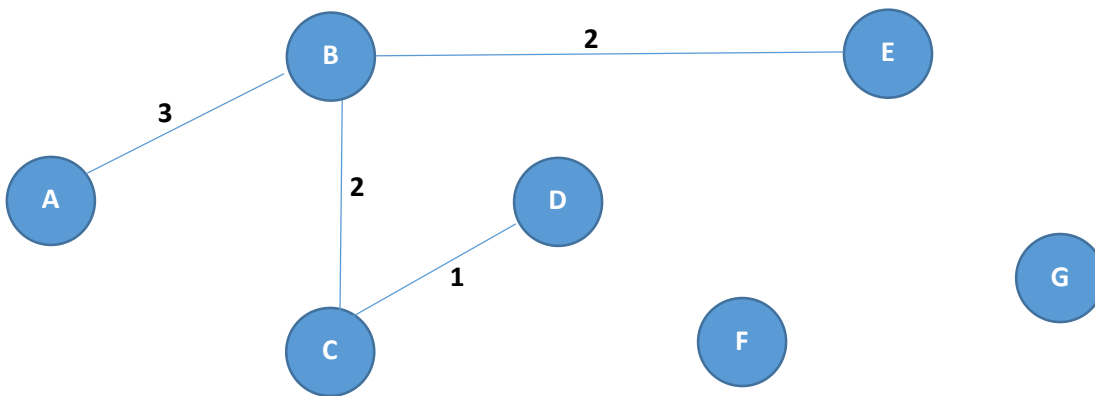


Se unen los nodos: BCDE



4.

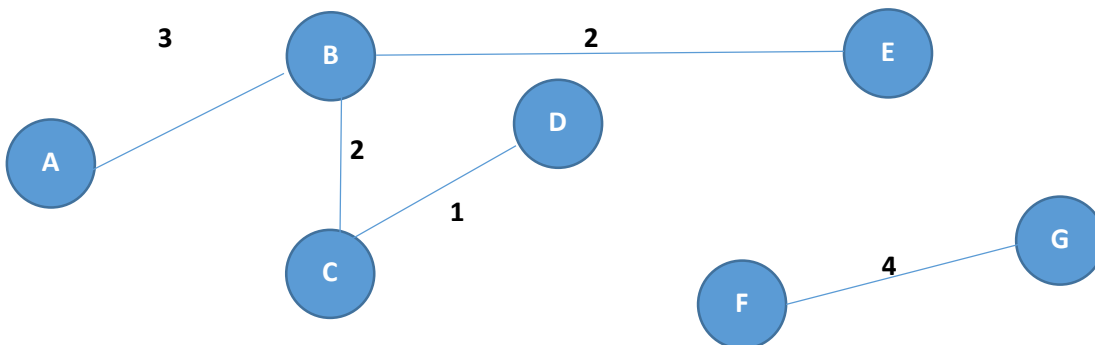
Id	Nodos enlace	Distancia
4	AB	3



Se unen los nodos: ABCDE

5. La siguiente iteración es DE, pero ambos nodos ya están unidos. Continuando con FG. Se tienen ahora dos subredes. ABCDE y FG.

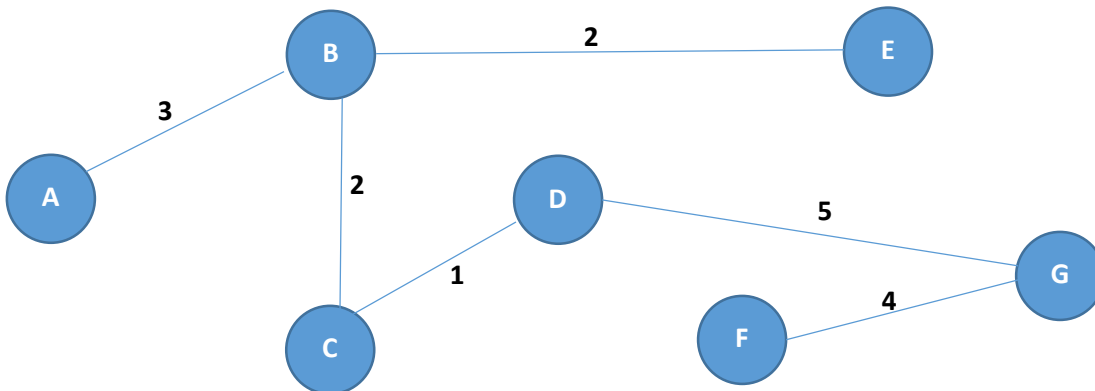
Id	Nodos enlace	Distancia
5	DE	3
6	FG	4





6. Continuando con las combinaciones sigue BD, pero ya están unidos, sigue DG

Id	Nodos enlace	Distancia
7	BD	5
8	DG	5



Vemos ahora que todos los nodos se encuentran unidos en la misma red. Así que se termina de iterar. Calculando la distancia:

$$\begin{aligned} \text{Distancia total} &= 3 + 2 + 2 + 1 + 5 + 4 \\ \text{Distancia total} &= 17 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Como se observa, mejora considerablemente la distancia total de 55 a 17 unidades, lo que implica una reducción del costo en su implementación. El costo puede representar infraestructura, tiempo, recursos técnicos, velocidad de respuesta, etc.



Las **redes de flujo máximo** son empleadas para estimar la capacidad simultánea de unidades que pueden pasar de un nodo a otro. Nos ayuda a estimar el posible tráfico que se pueda presentar en un momento en específico. Al igual que árbol de expansión mínima, se emplea en redes de comunicaciones, diseño de vialidades peatonales, vehiculares, y de navegación marítima y aérea, planificación de aforos a recintos (foro sol, estadio azteca, etc.), diseño de rutas de emergencia en protección civil, etc.

Se pueden identificar diferentes formas de expresar el flujo en este tipo de redes, pero lo más común son las siguientes tipologías. El flujo está expresado sobre el arco que une los nodos a conectar.



En el primer caso,  $F$  representa el flujo de A hacia B. La flecha nos indica la dirección del flujo.

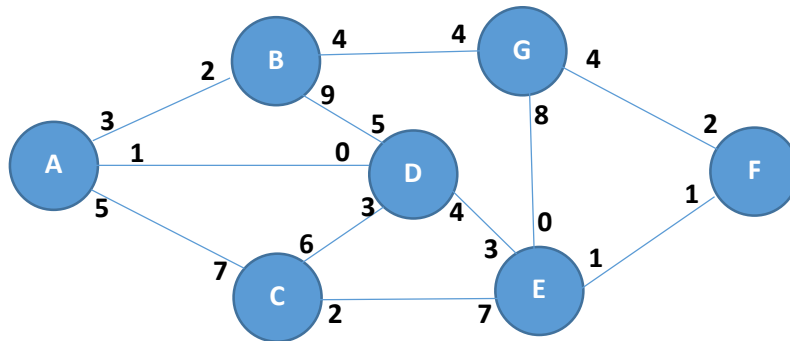
En el segundo caso,  $F1$  es el flujo de A hacia B, y  $F2$  es el flujo de B hacia A. Nótese que no existe una flecha. Se leen con la siguiente consideración. El flujo que va de un nodo a otro es el que está más cerca al nodo de inicio y más lejos del nodo final, gráficamente hablando.

El algoritmo consiste en lo siguiente.

1. Elegir una trayectoria al azar del nodo inicial al final.
2. Asignar tantas unidades como sea posible y decrementar la capacidad en el número de unidades programadas.
3. Repetir hasta asignar que ya no existan unidades por asignar o que la red no permita el paso de más unidades.



Para ver como se implementa, tenemos el siguiente ejemplo. Calcular el flujo máximo del B al E.



Nodo inicial: B

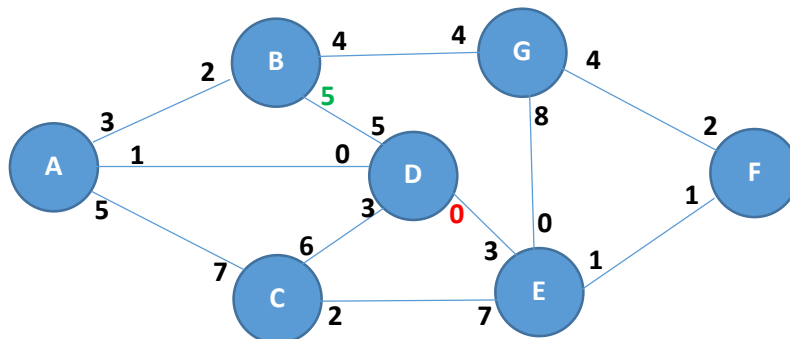
Nodo final: E

Se elige una trayectoria al azar, en este caso: BDE

La capacidad máxima de la trayectoria es 4, porque de BD=9, y de DE=4, se toma la de menor valor, pues es el cuello de botella. El flujo acumulado es el mismo que el flujo de trayectoria, pues es el flujo de la trayectoria más cero, dado que es la primera iteración.

Iteración	Trayectoria	Flujo	Flujo acumulado
1	BDE	4	4

Se decrementa la asignación en la trayectoria en el grafo. (BD:9-4=5, DE:4-4=0)



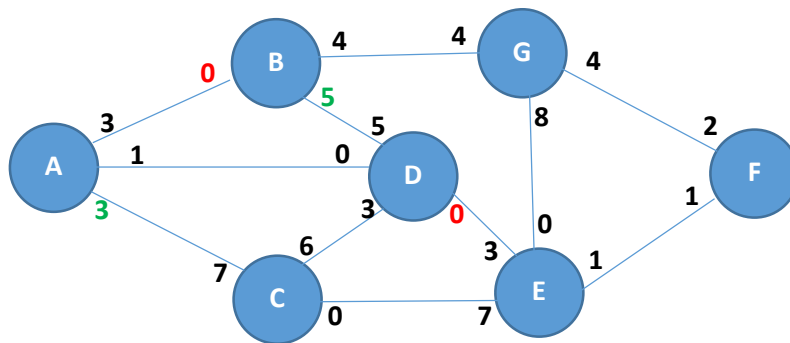
Se elige otra trayectoria al azar, en este caso, BACE. (BA:2-2=0, AC:5-2=3, CE:2-2=0). El flujo acumulado es 4+2=6 (flujo acumulado<sub>n</sub> = flujo acumulado<sub>n-1</sub> + flujo de trayectoria<sub>n</sub>).





Iteración	Trayectoria	Flujo	Flujo acumulado
1	BDE	4	4
2	BACE	2	6

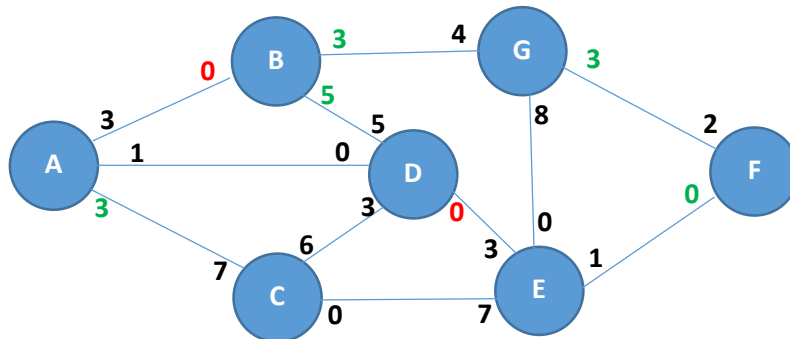
Se decrementa la asignación en la trayectoria en el grafo.



Continuamos con otra trayectoria al azar BGFE.

Iteración	Trayectoria	Flujo	Flujo acumulado
1	BDE	4	4
2	BACE	2	6
3	BGFE	1	7

Se decrementa la asignación en la trayectoria en el grafo.

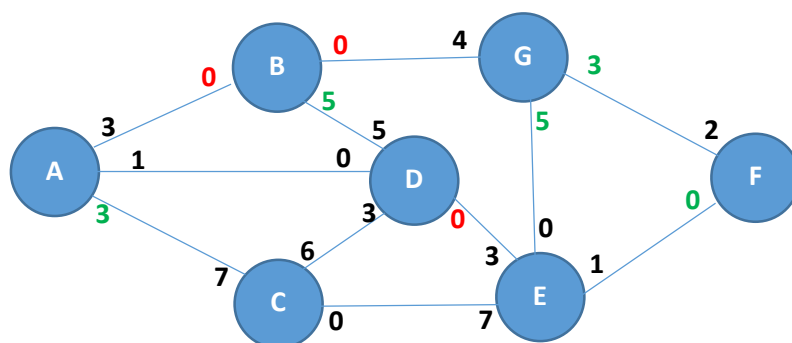


Continuamos con otra trayectoria, BGE.



Iteración	Trayectoria	Flujo	Flujo acumulado
1	BDE	4	4
2	BACE	2	6
3	BGFE	1	7
4	BGE	3	10

Se decrementa la asignación en la trayectoria en el grafo.



Seguimos buscando más trayectorias, pero observamos que aún cuando todavía tenemos 5 unidades por programar en B, ya no existe paso hacia E.

El flujo máximo lo leemos de la tabla en la última fila del flujo acumulado, en este caso:

*Flujo máximo = 10 unidades.*

#### NOTAS:

- No importa que se elijan trayectorias distintas, se llega al mismo resultado.
- Como se eligen las trayectorias al azar, no se puede determinar un número determinado de ellas, es decir, si se resolviera el mismo ejercicio empleando otra secuencia en las trayectorias, es probable que el número de iteraciones cambie para llegar al mismo resultado.
- Cuando el flujo de llegada es mayor al flujo de salida, está incorrecta la implementación del algoritmo.
- Cuando el flujo de llegada es menor o igual al flujo de salida, está correcto nuestro resultado.