



## Teorema Dual

En muchas ocasiones se puede simplificar un P.P.L. haciendo uso de este teorema. Lo que permite es encontrar un modelo de P.L. equivalente que nos facilite la resolución de un problema.

Lo hace encontrando un modelo matemático que pueda involucrar menos variables, así un problema de Maximizar puede ser expresado como uno de Minimizar y viceversa.

La forma original de nuestro P.P.L, se le denomina Primal, la forma equivalente Dual.

La siguiente tabla se puede leer de la 1ª columna a la 3ª, o al revés. Dependiendo si es Maximizar o Minimizar.

| Maximizar                                    | << == >> | Minimizar                                    |
|----------------------------------------------|----------|----------------------------------------------|
| Restricciones del tipo $\leq$<br>Menor igual |          | Restricciones del tipo $\geq$<br>Mayor igual |
| Número de variables                          |          | Número de restricciones                      |
| Número de restricciones                      |          | Número de variables                          |
| Coefficientes de F.O.                        |          | Coefficientes de Vector<br>solución          |
| Coefficientes de Vector<br>solución          |          | Coefficientes de F.O.                        |

Cuando se pasa de primal a dual, los coeficientes de las restricciones del dual, se obtienen mediante la matriz traspuesta de los coeficientes de las restricciones del primal. Las de no negatividad no se consideran al momento de encontrar la equivalencia, aunque si son necesarias para el primal y dual. La solución de las variables del primal, se lee en la última tabla simplex, en la intersección de la fila de  $Z_j$  con las variables de holgura, en orden de aparición de cada variable, y el valor de  $Z_j$ .

Veamos un ejemplo:

$$\text{Máx } Z = a + b$$

s.a.

$$r1: a + 2b \leq 10$$

$$r2: 3a + b \geq 5$$

$$r3: a \geq 0$$

$$r4: b \geq 0$$

Esta forma original de nuestro P.P.L. se le denomina primal.

Vamos a calcular su equivalente, es decir, la forma dual.



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES



Primero tenemos que unificar el sentido de las restricciones.

|                                                                                                            |                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $Máx Z = a + b$<br>s.a.<br>$r1: a + 2b \leq 10$<br>$r2: 3a + b \geq 5$<br>$r3: a \geq 0$<br>$r4: b \geq 0$ | $Máx Z = a + b$<br>s.a.<br>$r1: a + 2b \leq 10$<br>$r2: -3a - b \leq -5$<br>$r3: a \geq 0$<br>$r4: b \geq 0$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**NOTA:** Recordar que las de no negatividad no se consideran al momento del análisis, por eso quedan  $\geq$ , *mayor igual*. Cuando se obtiene el dual se agregan nuevamente.

Ahora se procede a realizar los cambios.

| Primal                                                                                                       | Dual                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $Máx Z = a + b$<br>s.a.<br>$r1: a + 2b \leq 10$<br>$r2: -3a - b \leq -5$<br>$r3: a \geq 0$<br>$r4: b \geq 0$ | $Mín Z = 10x - 5y$<br>s.a.<br>$r1: x - 3y \geq 1$<br>$r2: 2x - y \geq 1$<br>$r3: x \geq 0$<br>$r4: y \geq 0$ |

**NOTA:** No se pueden emplear las mismas variables en el primal y dual, porque no es el mismo planteamiento de P.L.

Resolviendo ambos casos por Simplex Analítico, para comprobar la equivalencia tenemos:

**Primal:**

$$Máx Z = a + b$$

s.a.

$$r1: a + 2b \leq 10$$

$$r2: -3a - b \leq -5$$

$$r3: a \geq 0$$

$$r4: b \geq 0$$

Replantando nuestro sistema, queda de la siguiente forma.



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO**  
**MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES**



$$\text{Máx } Z = a + b + 0h_1 + 0h_2 - MA_1$$

s.a.

$$r1: a + 2b + h_1 + 0h_2 + 0A_1 = 10$$

$$r2: 3a + b + 0h_1 - h_2 + A_1 = 5$$

|               | $C_j$       | 1    | 1   | 0     | 0     | -M    |     |
|---------------|-------------|------|-----|-------|-------|-------|-----|
| Coef. en F.O. |             | $a$  | $b$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ |     |
| 0             | $h_1$       | 1    | 2   | 1     | 0     | 0     | 10  |
| -M            | $A_1$       | 3    | 1   | 0     | -1    | 1     | 5   |
|               | $Z_j$       | -3M  | -M  | 0     | M     | -M    | -5M |
|               | $C_j - Z_j$ | 1+3M | 1+M | 0     | -M    | 0     |     |

Se determina la intersección. Se elige columna más (+) y menor cociente (+).

| $C_j$       | 1    | 1   | 0     | 0     | -M    |     |           |
|-------------|------|-----|-------|-------|-------|-----|-----------|
|             | $a$  | $b$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ |     | Cocientes |
| $h_1$       | 1    | 2   | 1     | 0     | 0     | 10  | 10/1=10   |
| $A_1$       | 3    | 1   | 0     | -1    | 1     | 5   | 5/3       |
| $Z_j$       | -3M  | -M  | 0     | M     | -M    | -5M |           |
| $C_j - Z_j$ | 1+3M | 1+M | 0     | -M    | 0     |     |           |

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

|               |            | $C_j$       | 1   | 1   | 0     | 0     | -M     |      |
|---------------|------------|-------------|-----|-----|-------|-------|--------|------|
| Coef. en F.O. | Operación  |             | $a$ | $b$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$  |      |
| 0             | $-a + h_1$ | $h_1$       | 0   | 5/3 | 1     | 1/3   | -1/3   | 25/3 |
| 1             | $1/3 A_1$  | $a$         | 1   | 1/3 | 0     | -1/3  | 1/3    | 5/3  |
|               |            | $Z_j$       | 1   | 1/3 | 0     | -1/3  | 1/3    | 5/3  |
|               |            | $C_j - Z_j$ | 0   | 2/3 | 0     | 1/3   | -M-1/3 |      |

Se determina la intersección. Se elige columna más (+) y menor cociente (+).

| $C_j$       | 1   | 1   | 0     | 0     | -M     |      |            |
|-------------|-----|-----|-------|-------|--------|------|------------|
|             | $a$ | $b$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$  |      | Cocientes  |
| $h_1$       | 0   | 5/3 | 1     | 1/3   | -1/3   | 25/3 | 25/3/5/3=5 |
| $a$         | 1   | 1/3 | 0     | -1/3  | 1/3    | 5/3  | 5/3/1/3=5  |
| $Z_j$       | 1   | 1/3 | 0     | -1/3  | 1/3    | 5/3  |            |
| $C_j - Z_j$ | 0   | 2/3 | 0     | 1/3   | -M-1/3 |      |            |



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO**  
**MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES**



Se tienen 2 opciones para elegir fila. Puede ser cualquiera. Tomaremos la 1ª fila.

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla.

|               |              | $C_j$       | 1   | 1   | 0      | 0      | -M       |   |
|---------------|--------------|-------------|-----|-----|--------|--------|----------|---|
| Coef. en F.O. | Operación    |             | $a$ | $b$ | $h_1$  | $h_2$  | $A_1$    |   |
| 1             | $3/5 h_1$    | $b$         | 0   | 1   | $3/5$  | $1/5$  | $-1/5$   | 5 |
| 1             | $-1/3 b + a$ | $a$         | 1   | 0   | $-1/5$ | $-2/5$ | $2/5$    | 0 |
|               |              | $Z_j$       | 1   | 1   | $2/5$  | $-1/5$ | $1/5$    | 5 |
|               |              | $C_j - Z_j$ | 0   | 0   | $-2/5$ | $1/5$  | $-M-1/5$ |   |

Se determina la intersección. Se elige columna más (+) y menor cociente (+).

| $C_j$       | 1   | 1   | 0      | 0      | -M       |   |                  |
|-------------|-----|-----|--------|--------|----------|---|------------------|
|             | $a$ | $b$ | $h_1$  | $h_2$  | $A_1$    |   | Cocientes        |
| $b$         | 0   | 1   | $3/5$  | $1/5$  | $-1/5$   | 5 | $5/1/5=25$       |
| $a$         | 1   | 0   | $-1/5$ | $-2/5$ | $2/5$    | 0 | $0/-2/5=-\infty$ |
| $Z_j$       | 1   | 1   | $2/5$  | $-1/5$ | $1/5$    | 5 |                  |
| $C_j - Z_j$ | 0   | 0   | $-2/5$ | $1/5$  | $-M-1/5$ |   |                  |

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla.

|               |               | $C_j$       | 1   | 1   | 0      | 0      | -M       |    |
|---------------|---------------|-------------|-----|-----|--------|--------|----------|----|
| Coef. en F.O. | Operación     |             | $a$ | $b$ | $h_1$  | $h_2$  | $A_1$    |    |
| 1             | $5b$          | $h_2$       | 0   | 5   | 3      | 1      | -1       | 25 |
| 1             | $2/5 h_2 + a$ | $a$         | 1   | 2   | 1      | 0      | 0        | 10 |
|               |               | $Z_j$       | 1   | 1   | $2/5$  | $-1/5$ | $1/5$    | 5  |
|               |               | $C_j - Z_j$ | 0   | 0   | $-2/5$ | $1/5$  | $-M-1/5$ |    |

Dado que no existen (+) en  $C_j - Z_j$  se considera concluida la tabla.

Se lee.

| $C_j$       | 1   | 1   | 0     | 0     | -M    |    |
|-------------|-----|-----|-------|-------|-------|----|
|             | $a$ | $b$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ |    |
| $h_2$       | 0   | 5   | 3     | 1     | -1    | 25 |
| $a$         | 1   | 2   | 1     | 0     | 0     | 10 |
| $Z_j$       | 1   | 2   | 1     | 0     | 0     | 10 |
| $C_j - Z_j$ | 0   | -1  | -1    | 0     | -M    |    |



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES



$$a = 10$$

$$b = 0$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 25$$

$$A_1 = 0$$

$$Z_j = 10$$

**Dual:**

$$\text{Mín } Z = 10x - 5y$$

s.a.

$$r1: x - 3y \geq 1$$

$$r2: 2x - y \geq 1$$

$$r3: x \geq 0$$

$$r4: y \geq 0$$

Replantando nuestro sistema, queda de la siguiente forma.

$$\text{Mín } Z = 10x - 5y + 0h_1 + 0h_2 + MA_1 + MA_2$$

s.a.

$$r1: x - 3y - h_1 + 0h_2 + A_1 + 0A_2 = 1$$

$$r2: 2x - y + 0h_1 - h_2 + 0A_1 + A_2 = 1$$

|               | $C_j$       | 10    | -5    | 0     | 0     | +M    | +M    |    |
|---------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| Coef. en F.O. |             | $x$   | $y$   | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ | $A_2$ |    |
| +M            | $A_1$       | 1     | -3    | -1    | 0     | 1     | 0     | 1  |
| +M            | $A_2$       | 2     | -1    | 0     | -1    | 0     | 1     | 1  |
|               | $Z_j$       | 3M    | -4M   | -M    | -M    | M     | M     | 2M |
|               | $C_j - Z_j$ | 10-3M | -5+4M | M     | M     | 0     | 0     |    |



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO**  
**MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES**



Se determina la intersección. Se elige columna más (-) y menor cociente (+).

| $C_j$       | 10    | -5    | 0     | 0     | +M    | +M    |    |           |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|-----------|
|             | $x$   | $y$   | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ | $A_2$ |    | Cocientes |
| $A_1$       | 1     | -3    | -1    | 0     | 1     | 0     | 1  | $1/1=1$   |
| $A_2$       | 2     | -1    | 0     | -1    | 0     | 1     | 1  | $1/2=0.5$ |
| $Z_j$       | 3M    | -4M   | -M    | -M    | M     | M     | 2M |           |
| $C_j - Z_j$ | 10-3M | -5+4M | M     | M     | 0     | 0     |    |           |

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

|               |            | $C_j$       | 10  | -5   | 0     | 0     | +M    | +M    |             |
|---------------|------------|-------------|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| Coef. en F.O. | Operación  |             | $x$ | $y$  | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ | $A_2$ |             |
| 1             | $-x + A_1$ | $A_1$       | 0   | -5/2 | -1    | 1/2   | 1     | -1/2  | 1/2         |
| +M            | $1/2 A_2$  | $x$         | 1   | -1/2 | 0     | -1/2  | 0     | 1/2   | 1/2         |
|               |            | $Z_j$       | 9   | -9/2 | 0     | 1/2   | M     | M-1/2 | $1/2 + M/2$ |
|               |            | $C_j - Z_j$ | 1   | -1/2 | 0     | -1/2  | 0     | 1/2   |             |

Se elige columna más (-) y menor cociente (+).

Se tienen 2 opciones para columna, con el mismo valor. Se elige cualquiera de ellos. En este caso, elegiremos a la variable  $h_2$ . Se determina la intersección.

| $C_j$       | 10  | -5   | 0     | 0     | +M    | +M    |             |               |
|-------------|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------------|---------------|
|             | $x$ | $y$  | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ | $A_2$ |             | Cocientes     |
| $A_1$       | 0   | -5/2 | -1    | 1/2   | 1     | -1/2  | 1/2         | $1/2/1/2=1$   |
| $x$         | 1   | -1/2 | 0     | -1/2  | 0     | 1/2   | 1/2         | $1/2/-1/2=-1$ |
| $Z_j$       | 9   | -9/2 | 0     | 1/2   | M     | M-1/2 | $1/2 + M/2$ |               |
| $C_j - Z_j$ | 1   | -1/2 | 0     | -1/2  | 0     | 1/2   |             |               |

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla.

|               |               | $C_j$       | 10  | -5  | 0     | 0     | +M    | +M    |    |
|---------------|---------------|-------------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|----|
| Coef. en F.O. | Operación     |             | $x$ | $y$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ | $A_2$ |    |
| 0             | $2 A_1$       | $h_2$       | 0   | -5  | -2    | 1     | 2     | -1    | 1  |
| 10            | $1/2 h_{2+x}$ | $x$         | 1   | -3  | -1    | 0     | 1     | 0     | 1  |
|               |               | $Z_j$       | 10  | -30 | -10   | 0     | 10    | 0     | 10 |
|               |               | $C_j - Z_j$ | 0   | 25  | 0     | 0     | M     | M     |    |



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
**MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES**



Dado que no existen (+) en  $C_j - Z_j$  se considera concluida la tabla.

Se lee.

|             |     |     |       |       |       |       |    |
|-------------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|----|
| $C_j$       | 10  | -5  | 0     | 0     | +M    | +M    |    |
|             | $x$ | $y$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ | $A_2$ |    |
| $h_2$       | 0   | -5  | -2    | 1     | 2     | -1    | 1  |
| $x$         | 1   | -3  | -1    | 0     | 1     | 0     | 1  |
| $Z_j$       | 10  | -30 | -10   | 0     | 10    | 0     | 10 |
| $C_j - Z_j$ | 0   | 25  | 0     | 0     | M     | M     |    |

$$x = 1$$

$$y = 0$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 1$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = 0$$

$$Z_j = 10$$

Vamos a comparar la forma primal y dual.

La Z obtenida en la última tabla es el mismo valor. Para comprobar el valor de las variables, tomaremos la última tabla de cada forma, primal y dual.

| PRIMAL                                                                                                       |     |     |       |       |       |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-------|-------|-------|----|
| $\text{Máx } Z = a + b$ <p>s.a.</p> $r1: a + 2b \leq 10$ $r2: -3a - b \leq -5$ $r3: a \geq 0$ $r4: b \geq 0$ |     |     |       |       |       |    |
| $C_j$                                                                                                        | 1   | 1   | 0     | 0     | -M    |    |
|                                                                                                              | $a$ | $b$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ |    |
| $h_2$                                                                                                        | 0   | 5   | 3     | 1     | -1    | 25 |
| $a$                                                                                                          | 1   | 2   | 1     | 0     | 0     | 10 |
| $Z_j$                                                                                                        | 1   | 2   | 1     | 0     | 0     | 10 |
| $C_j - Z_j$                                                                                                  | 0   | -1  | -1    | 0     | -M    |    |
| $a = 10$ $b = 0$                                                                                             |     |     |       |       |       |    |



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES



$$\begin{aligned}h_1 &= 0 \\h_2 &= 25 \\A_1 &= 0 \\Z_j &= 10\end{aligned}$$

**DUAL**

$$\begin{aligned}\text{Min } Z &= 10x - 5y \\ \text{s.a.} \\ r1: x - 3y &\geq 1 \\ r2: 2x - y &\geq 1 \\ r3: x &\geq 0\end{aligned}$$

| $C_j$       | 10  | -5  | 0     | 0     | +M    | +M    |    |
|-------------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|----|
|             | $x$ | $y$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ | $A_2$ |    |
| $h_2$       | 0   | -5  | -2    | 1     | 2     | -1    | 1  |
| $x$         | 1   | -3  | -1    | 0     | 1     | 0     | 1  |
| $Z_j$       | 10  | -30 | -10   | 0     | 10    | 0     | 10 |
| $C_j - Z_j$ | 0   | 25  | 0     | 0     | M     | M     |    |

$$\begin{aligned}x &= 1 \\y &= 0 \\h_1 &= 0 \\h_2 &= 1 \\A_1 &= 0 \\A_2 &= 0 \\Z_j &= 10\end{aligned}$$

La solución del primal en el dual está en la intersección de la fila de  $Z_j$  con las variables de holgura.

Los coeficientes son 10 y 0 corresponden a las variables a y b.  $Z_j$  es el mismo valor para el dual y el primal. Existe un cambio de signo porque se pasó de *Máx* a *Mín*.

La propiedad del teorema dual se mantiene, si se cambian las referencias, es decir, si ahora consideráramos el dual como planteamiento primal, obtenemos la siguiente información.





INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES



**PRIMAL**

$$\text{Mín } Z = 10x - 5y$$

s.a.

$$r1: x - 3y \geq 1$$

$$r2: 2x - y \geq 1$$

$$r3: x \geq 0$$

| $C_j$       | 10  | -5  | 0     | 0     | +M    | +M    |    |
|-------------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|----|
|             | $x$ | $y$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ | $A_2$ |    |
| $h_2$       | 0   | -5  | -2    | 1     | 2     | -1    | 1  |
| $x$         | 1   | -3  | -1    | 0     | 1     | 0     | 1  |
| $Z_j$       | 10  | -30 | -10   | 0     | 10    | 0     | 10 |
| $C_j - Z_j$ | 0   | 25  | 0     | 0     | M     | M     |    |

$$x = 1$$

$$y = 0$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 1$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = 0$$

$$Z_j = 10$$

**DUAL**

$$\text{Máx } Z = a + b$$

s.a.

$$r1: a + 2b \leq 10$$

$$r2: -3a - b \leq -5$$

$$r3: a \geq 0$$

$$r4: b \geq 0$$

| $C_j$       | 1   | 1   | 0     | 0     | -M    |    |
|-------------|-----|-----|-------|-------|-------|----|
|             | $a$ | $b$ | $h_1$ | $h_2$ | $A_1$ |    |
| $h_2$       | 0   | 5   | 3     | 1     | -1    | 25 |
| $a$         | 1   | 2   | 1     | 0     | 0     | 10 |
| $Z_j$       | 1   | 2   | 1     | 0     | 0     | 10 |
| $C_j - Z_j$ | 0   | -1  | -1    | 0     | -M    |    |

$$a = 10$$

$$b = 0$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 25$$

$$A_1 = 0$$

$$Z_j = 10$$



La solución del primal en el dual está en la intersección de la fila de  $Z_j$  con las variables de holgura.

Los coeficientes son 1 y 0 corresponden a las variables  $x$  y  $y$ .  $Z_j$ , es el mismo valor para el dual y el primal. No existe un cambio de signo porque se pasó de *Mín a Máx*.

## EJERCICIO

Resolver en equipos de 3 integrantes los siguientes P.P.L. empleando el método Simplex analítico de 2 fases gran M o v2.0, en hoja de cálculo y entregar su hoja de respuestas. Para todos los casos hay que encontrar el mínimo de la F.O. empleando el teorema dual (resolver mediante maximización). Primero hay que plantear el dual de cada ejercicio y posteriormente resolverlo.

1.  $Z = 4a + b$

s.a.

r1:  $a + b \leq 150$

r2:  $2a + b \leq 80$

r3:  $a \geq 0$

r4:  $b \geq 0$

2.  $Z = x + 3y$

s.a.

r1:  $x + y \geq 10$

r2:  $2x + 2y \leq 25$

r3:  $x \leq 8$

r4:  $x \geq 0$

r5:  $y \geq 0$

3.  $Z = 0.1x + 0.5y$

s.a.

r1:  $4x + 3y \leq 30$

r2:  $6x + y \leq 36$

r3:  $x - y \leq 20$

r4:  $x \geq 0$

r5:  $y \geq 0$

4.  $Z = m + 2n$

s.a.

r1:  $3m + n \leq 14$

r2:  $m + 5n \leq 20$

r3:  $m \leq n - 10$

r4:  $m \geq 0$

r5:  $n \geq 0$

5.  $Z = 4x + 3y$

s.a.

r1:  $3x + 2y \leq 25$

r2:  $x \leq 5$

r3:  $8x \leq 21 - 6y$

r4:  $x \geq -2$

r5:  $y \geq 1$