Plantear P.P.L.

Existen muchos métodos para la solución de un P.P.L. De igual forma, para poder determinar el modelo matemático que representa.

Depende de la habilidad de la persona que esté planteando y de la información que pueda disponer. En muchas ocasiones de manera empírica se conocen algunos de los resultados, aunque a veces no represente el valor óptimo.

Recordar que un P.P.L. puede tener un número muy grande de soluciones, no necesariamente corresponde una única solución.

Por ejemplo, para ser Ingeniero en Sistemas Computacionales, hay que acreditar las asignaturas con un mínimo de 6 y cumplir con los requisitos de titulación (servicio social, constancias de no adeudo, etc.).

Cumpliendo estos requisitos (restricciones), nos otorgan un título de Licenciatura. Y con un promedio que puede ir desde 6.0 hasta 10.0, todo ese rango [6.0,10.0] es una gama de posibles soluciones para ser Ingeniero (F.O.).

Otro ejemplo, es la elaboración de agua de sabor (función objetivo). Podemos tener n cantidad de ingredientes en la mezcla al momento de prepararla (restricciones), y será óptima si acertamos en la cantidad exacta de lo que busquemos en el agua (sabor, contenido de azúcar, calorías, etc.).

Los problemas pueden ser tan cotidianos como complejos queramos, por ejemplo, ¿cuánto papel moneda emitir para que siempre exista dinero circulante?, o ¿cuánta energía emplear en los cohetes de una sonda espacial, para contrarrestar la fuerza gravitacional del planeta y los satélites naturales?.

Los modelos matemáticos pueden ser de cualquier índole de las áreas disciplinarias, y son empleados de manera más recurrente en la optimización de variables y predicción de las mismas.

Su naturaleza pueden ser de programación lineal o no lineal: P.P.L (Problema de Programación Lineal) o P.P.N.L. (Problemas de Programación No Lineales).

De manera general, se sugiere seguir los siguientes pasos para el planteamiento de un sistema.

1. Identificar lo que se pretenda optimizar, si es que se quiere maximizar o minimizar.
2. Una vez que se ha definido lo que se va a optimizar, establecer o identificar las variables de las cuáles depende. La información que dispongamos nos ayuda para la elaboración del modelo matemático. Esto nos ayudará a definir la F.O.

3. Relacionar la información que dispongamos en función de las variables establecidas. No siempre es posible involucrar toda la información, pues tenemos datos adicionales que no inciden en nuestro modelo matemático, o que tenemos que discriminar por estar incompleta.
4. Con la relación de la información, se formulan las restricciones. Hay que cuidar que sean consistentes en las unidades del lado izquierdo y derecho de las desigualdades. El sistema de restricciones en adimensional, es decir, una restricción puede tener unas unidades y las otras restricciones no necesariamente refieren estas mismas unidades.
5. Expresar correctamente nuestro modelo, de manera simple y reducida, cuidando que en las restricciones las variables estén de un lado de la desigualdad y el término constante del otro lado. Añadir las restricciones de no negatividad, en caso de ser necesarias. Depende en mucho de la naturaleza de nuestro problema. Casi siempre, en los P.P.L., son necesarias para contextualizar el resultado con la realidad.

Con esto tenemos nuestro modelo matemático resuelto.

Vamos a ver unos ejemplos.

a) Considere que usted dispone de un capital de 21,000 dólares para invertir en la bolsa de valores. Un amigo le recomienda 2 acciones que en el último tiempo han estado al alza: Acción A y Acción B. La Acción A tiene una rentabilidad del 10% anual y la Acción B del 8% anual. Su amigo le aconseja tener una cartera equilibrada y diversa y por tanto le recomienda invertir un máximo de 13,000 dólares en la Acción A y como mínimo 6,000 dólares en la Acción B. Además la inversión en la Acción A debe ser menor o igual que el doble de la inversión destinada a la Acción B. Usted quiere formular y resolver un modelo de Programación Lineal que permita obtener la política de inversión que permita obtener la máxima rentabilidad (interés) anual.

1. Primero vemos si es maximizar o minimizar. En este caso es claro, maximizar el interés.
2. El interés depende de lo que podemos invertir en las acciones tipo A o B. Con esto plantearemos la F.O.

$$A = Cantidad\ \$\ que\ se\ invierta\ en\ A$$
$$B = Cantidad\ \$\ que\ se\ invierta\ en\ B$$

$$Máx\ Z = 10\%\ A + 8\%B$$

$$Máx\ Z = 0.1\ A + 0.08B$$

3. Se asocia la demás información en términos de estas variables y
4. Se formulan las restricciones.

El capital que disponemos lo podemos invertir en ambos tipos de acciones, así que la suma no puede exceder lo que nosotros disponemos para invertir.

$$A + B \leq 21{,}000$$

Invertir como máximo 13,000 dólares en la Acción A.

$$A \leq 13{,}000$$

Invertir como mínimo 6,000 dólares en la Acción B.

$$B \geq 6{,}000$$

La inversión en la Acción A debe ser menor o igual que el doble de la inversión destinada a la Acción B

$$A \leq 2B$$

Se observa que las unidades del lado derecho e izquierdo de todas las desigualdades son las mismas, dólares.

5. Expresar correctamente nuestro modelo.

$$Máx\ Z = 0.1\ A + 0.08B$$

s.a.

r1: $A + B \leq 21{,}000$
r2: $A \leq 13{,}000$
r3: $B \geq 6{,}000$
r4: $A - 2B \leq 0$
r5: $A \geq 0$
r6: $B \geq 0$

Z=Interés obtenido de invertir en las acciones tipo A y B.
A=Cantidad $ que se invierta en A
B=Cantidad $ que se invierta en B

b) Se dispone de 2 ingredientes para fabricar caramelos, cuyo sabor variará dependiendo de la proporción en que intervengan cada uno de los ingredientes. El primer ingrediente se compra a \$10 por kg. y el segundo a \$20 por kg. El proceso de elaboración supone un costo de \$5 por kg. fabricado, cuya cantidad total corresponde simplemente a la suma de los kg. empleados en la mezcla. La demanda máxima para un mes se cifra en 100 kg y el precio de venta \$50 kg. A la empresa no le interesa producir más de los que puede vender en el mes. Por último, la composición de la masa debe contener una proporción que no supere el 50% del primer ingrediente y el 80% del segundo ingrediente. Se requiere determinar cuántos kg. de caramelos se tiene que fabricar al mes y las proporciones en las que deben ser utilizados los ingredientes para obtener un máximo beneficio.

1. Primero vemos si es maximizar o minimizar. En este caso es claro, maximizar el beneficio.
2. El beneficio depende de los ingredientes empleados en los caramelos. Con esto plantearemos la F.O.

$$I_1 = Kg\ del\ ingrediente\ 1$$
$$I_2 = Kg\ del\ ingrediente\ 2$$

Sabemos que el beneficio es igual a los ingresos menos los costos. Así:
Precio de venta \$50 kg. El primer ingrediente se compra a \$10 por kg. y el segundo a \$20 por kg. El proceso de elaboración supone un costo de \$5 por kg. fabricado, cuya cantidad total corresponde simplemente a la suma de los kg. empleados en la mezcla.

$$Máx\ Z = 50(I_1 + I_2) - 10I_1 - 20I_2 - 5(I_1 + I_2)$$

$$Máx\ Z = 35I_1 + 25I_2$$

3. Se asocia la demás información en términos de estas variables y
4. Se formulan las restricciones.

La demanda máxima para un mes se cifra en 100 kg.

$$I_1 + I_2 \leq 100$$

La composición de la masa debe contener una proporción que no supere el 50% del primer ingrediente.

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} \leq 50\%$$
$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} \leq 0.5$$

Se expresa así porque nos refiere una proporción, es decir, un porcentaje, del lado izquierdo de la desigualdad se obtiene, porque son kg/kg.

La composición de la masa debe contener una proporción que no supere el 80% del segundo ingrediente.

$$\frac{I_2}{I_1 + I_2} \leq 80\%$$
$$\frac{I_2}{I_1 + I_2} \leq 0.8$$

5. Expresar correctamente nuestro modelo.

$$Máx\ Z = 35I_1 + 25I_2$$

s.a.

r1: $I_1 + I_2 \leq 100$
r2: $0.5I_1 - 0.5I_2 \leq 0$
r3: $0.8I_1 - 0.2I_2 \geq 0$
r4: $I_1 \geq 0$
r5: $I_2 \geq 0$

Z=Beneficio obtenido de la venta de los caramelos.

I_1=Kg del ingrediente 1

I_2=Kg del ingrediente 2

Resolver en clase

Un alumno de ESCOM debe realizar un examen de problemas para acreditar la asignatura de Teoría de Señales y se le da la posibilidad de elegirlos de tres listas disponibles. Los problemas de la lista 1 se valúan con 5 puntos cada uno, los de la 2 con 4 puntos y los de la tres con 6. El alumno sabe que necesita 3 minutos para resolver cada problema de la lista 1, 2 minutos para los de la 2 y 4 minutos para los de la 3. Dispone de 3 horas y media para realizar el examen. Los problemas de las listas 1 y 2 emplean bastante cálculo y el alumno no desea dedicarles más de 2 horas y media. ¿Cómo puede alcanzar la puntuación máxima?, Pues requiere obtener la mayor puntuación dado que entregó muy pocas actividades en el rubro de evaluación continua que equivalen a 230 puntos y requiere al menos de 600 puntos (Calif=6) de 1000 puntos (Calif=10) para acreditar.

EJERCICIO

Plantear en equipo de 3 integrantes los siguientes P.P.L. en una hoja de cálculo y **resolver por el método solicitado**, entregar su hoja de respuestas y **resolviendo por método gráfico**. Realizar la **comprobación** los valores de las variables en todas las restricciones al utilizar cualquier método. Recuerde que debe identificar claramente cada variable en su modelo matemático.

1. Un fabricante de muebles tiene 6 unidades de madera y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricara biombos decorativos. Con anterioridad se han vendido bien 2 modelos de tal manera que se limitara a producir solo 2 tipos. Estima que el modelo 1 requiere 2 unidades de madera y 7 horas de tiempo, mientras que el modelo 2 requiere 1 unidad de madera y 8 horas de tiempo disponible. Los precios de los modelos son $120 y $ 80 respectivamente. Cuantos biombos de cada modelo se debe fabricar si se desea maximizar sus ingresos de ventas. (Analítico + Gráfico)

2. Una firma de contadores públicos especializados en preparar liquidaciones y pago de impuestos así como auditorias en empresas pequeñas. El interés es saber cuántas auditorias y liquidaciones pueden realizar mensualmente de tal manera que obtengan los máximos ingresos. Se dispone de 800 horas para trabajo directo y 320 horas para revisión. Una auditoria en promedio requiere de 40 horas de trabajo directo y 10 horas de revisión además aporta u ingreso de $300. Una liquidación de impuestos requiere 8 horas de trabajo directo y 5 horas de revisión y produce un ingreso de $100. Determina la función objetivo y sus ecuaciones de restricción. (Simplex 1.0 + Gráfico)

3. Un departamento de publicidad tiene que planear para el próximo mes una estrategia de publicidad para el lanzamiento de una línea de T.V. a color tiene a consideración 2 medios de difusión: La televisión y el periódico. Los estudios de mercado han mostrado que: 1. La publicidad por T.V. Llega al 2 % de las familias de ingresos altos y al 3 % de las familias de ingresos medios por comercial. 2. La publicidad en el periódico llega al 3 % de las familias de ingresos altos y al 6 % de las familias de ingresos medios por anuncio. La publicidad en periódico tiene un costo de 500 dls. Por anuncio y la publicidad por T.V. tiene un costo de 2000 dls. Por comercial. La meta es obtener al menos una presentación como mínimo al 36 % de las familias de ingresos altos y al 60 % de las familias de ingresos medios minimizando los costos de publicidad. . (Simplex 2.0+Gráfico)

4. Un herrero con 80 kg. De acero y 120 kg. De aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 2,000 y 1500 pesos cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1 kg. De acero y 3 kg de aluminio, y para la de

montaña 2 kg. De ambos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña tendrá que fabricar para obtener el máximo beneficio? . (Simplex 1.0+Gráfico)

5. Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos pero no menos de 200. En cada vuelo A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. En cada viaje del avión A la empresa gana $30,000 y $20,000 por cada viaje del B.
   a. ¿Cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias? . (Simplex 1.0+Gráfico)
   b. ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo? . (Simplex 3.0+Gráfico)