Método Simplex Dual (No es teorema dual, v3.0)

En algunas ocasiones al emplear simplex analítico, en algunas tablas aparecen valores negativos en el vector solución, esto significa que el modelo perdió factibilidad. Podríamos seguir iterando omitiendo esta situación, pero nos traería conflictos porque las tablas empezarían a ser cíclicas, es decir, al seguir iterando saldría una variable y entraría otra, pero llegaría el punto que la variable que salió nuevamente vuelve a entrar, y es un bucle sin fin.

Para poder seguir iterando sin conflictos es necesario emplear el método simplex dual.

Es un criterio un poco distinto del método simplex tradicional, y consiste en:

1. Si aparece uno o más valores negativos en el vector solución, se elige primero la fila en vez de la columna. El más (-) si hubiera más de un valor.
2. Se divide la fila de $C_j - Z_j$ entre la fila elegida. El cociente más próximo a cero es el que determina la columna a elegir puede ser de los (+) o de los (-), depende si es maximizar, minimizar, o del traslape de los semiplanos. Se sugiere primero probar con el más próximo a cero sean (+) o (-), si se cicla la tabla elegir por signo el más próximo a cero. Algunos autores sugieren probar primero con los (-) más próximos a cero, y si no hubiera con los (+).
3. La intersección se hace la unidad, y respecto a esta se aplica Gauss Jordan, en las filas de las variables.
4. Una vez que no existan valores (-) en el vector solución, se cambia al método simplex analítico tradicional, a fin de poder encontrar la solución, pues ya se recuperó la factibilidad.

NOTA: Simplex-Dual no necesariamente se puede aplicar cuando aparecen valores negativos en el vector solución, se puede emplear desde el inicio, depende del planteamiento a fin de que facilite la solución del P.P.L.
Cero no es criterio de elección.

Ejemplo:

$$Mín\ Z = 10x - 5y$$

s.a.

r1: $x - 3y \geq 1$

r2: $2x - y \geq 1$

r3: $x \geq 0$

r4: $y \geq 0$

Replanteando nuestro sistema, queda de la siguiente forma.

$$Mín\ Z = 10x - 5y + 0h_1 + 0h_2 + MA_1 + MA_2$$

s.a.

r1: $x - 3y - h_1 + 0h_2 + A_1 + 0A_2 = 1$
r2: $2x - y + 0h_1 - h_2 + 0A_1 + A_2 = 1$

Sin embargo, podríamos resolverlo empleando simplex dual. Así, que invertiremos las restricciones 1 y 2 para que evitemos manejar variables artificiales.

$$Mín\ Z = 10x - 5y$$

s.a.

r1: $-x + 3y \leq -1$

r2: $-2x + y \leq -1$

r3: $x \geq 0$

r4: $y \geq 0$

$$Mín\ Z = 10x - 5y + 0h_1 + 0h_2$$

s.a.

r1: $-x + 3y + h_1 + 0h_2 = -1$
r2: $-2x + y + 0h_1 - h_2 = -1$

Planteando la 1ª tabla simplex.

	C_j	10	-5	0	0	
Coef. en F.O.		x	y	h_1	h_2	
0	h_1	-1	3	1	0	-1
0	h_2	-2	1	0	1	-1
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	10	-5	0	0	

Se elige la fila más (-) , en este caso tenemos 2 opciones, puede ser cualquiera. Tomemos la 1ª por convencionalidad. Y el cociente más próximo a cero, de $\frac{C_j - Z_j}{fila\_elegida}$.

C_j	10	-5	0	0	
	x	y	h_1	h_2	
h_1	-1	3	1	0	-1
h_2	-2	1	0	1	-1
Z_j	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$	10	-5	0	0	
$\frac{C_j - Z_j}{fila\_elegida}$	10/-1=-10	-5/3=-1.67	0	∞	

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

		C_j	10	-5	0	0	
Coef. en F.O.	Operación		x	y	h_1	h_2	
-5	$1/3h_1$	y	-1/3	1	1/3	0	-1/3
0	$-y + h_2$	h_2	-5/3	0	-1/3	1	-2/3
		Z_j	5/3	-5	-5/3	0	5/3
		$C_j - Z_j$	25/3	0	5/3	0	

Se elige la fila más (-), y el cociente más próximo a cero, de $\frac{C_j - Z_j}{fila\_elegida}$. Se tienen 2 opciones para los cocientes. Vamos a elegir el 1º por convencionalidad.

C_j	10	-5	0	0	
	x	y	h_1	h_2	
y	-1/3	1	1/3	0	-1/3
h_2	-5/3	0	-1/3	1	-2/3
Z_j	5/3	-5	-5/3	0	5/3
$C_j - Z_j$	25/3	0	5/3	0	
$\frac{C_j - Z_j}{fila\_elegida}$	25/3/-5/3=-5	0/0=∞	5/3/-1/3=-5	0/1=0	

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

		C_j	10	-5	0	0	
Coef. en F.O.	Operación		x	y	h_1	h_2	
-5	$1/3x + y$	y	0	1	2/5	-1/5	-1/5
10	$-3/5h_2$	x	1	0	1/5	-3/5	2/5
		Z_j	10	-5	0	-5	5
		$C_j - Z_j$	0	0	0	5	

Se elige la fila más (-), y el cociente más próximo a cero, de $\frac{C_j - Z_j}{fila\_elegida}$.

C_j	10	-5	0	0	
	x	y	h_1	h_2	
y	0	1	2/5	-1/5	-1/5
x	1	0	1/5	-3/5	2/5
Z_j	10	-5	0	-5	5
$C_j - Z_j$	0	0	0	5	
$\frac{C_j - Z_j}{fila\_elegida}$	0/0=∞	0/1=0	0/2/5=0	5/-1/5=-25	

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

		C_j	10	-5	0	0	
Coef. en F.O.	Operación		x	y	h_1	h_2	
0	$-5y$	h_2	0	-5	-2	1	1
10	$3/5\,h_2 + x$	x	1	-3	-1	0	1
		Z_j	10	-30	-10	0	10
		$C_j - Z_j$	0	25	10	0	

Como ya no existen (-) en el vector solución, ahora cambiamos al método simplex analítico tradicional de la gran M o dos fases para minimizar, porque el problema es de minimizar. Si el problema hubiera sido de maximizar, continuamos con simplex criterio de maximizar.

Observamos que no existe criterio de elección, pues se busca la columna más (-) en la fila $C_j - Z_j$, y sólo existen (+). Por lo tanto, queda concluido el ejercicio.

$$x = 1$$

$$y = 0$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 1$$

$$\boldsymbol{Z_j = 10}$$

Para comprobarlo, se resolverá por simplex analítico de la gran M.

$$Mín\ Z = 10x - 5y$$

s.a.

r1: $x - 3y \geq 1$

r2: $2x - y \geq 1$

r3: $x \geq 0$

r4: $y \geq 0$

Replanteando nuestro sistema, queda de la siguiente forma.

$$Mín\ Z = 10x - 5y + 0h_1 + 0h_2 + MA_1 + MA_2$$

s.a.

r1: $x - 3y - h_1 + 0h_2 + A_1 + 0A_2 = 1$
r2: $2x - y + 0h_1 - h_2 + 0A_1 + A_2 = 1$

	C_j	10	-5	0	0	+M	+M	
Coef. en F.O.		x	y	h_1	h_2	A_1	A_2	
+M	A_1	1	-3	-1	0	1	0	1
+M	A_2	2	-1	0	-1	0	1	1
	Z_j	3M	-4M	-M	-M	M	M	2M
	$C_j - Z_j$	10-3M	-5+4M	M	M	0	0	

Se determina la intersección. Se elige columna más (-) y menor cociente (+).

C_j	10	-5	0	0	+M	+M		
	x	y	h_1	h_2	A_1	A_2		Cocientes
A_1	1	-3	-1	0	1	0	1	1/1=1
A_2	2	-1	0	-1	0	1	1	½=0.5
Z_j	3M	-4M	-M	-M	M	M	2M	
$C_j - Z_j$	10-3M	-5+4M	M	M	0	0		

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

		C_j	10	-5	0	0	+M	+M	
Coef. en F.O.	Operación		x	y	h_1	h_2	A_1	A_2	
1	$-x + A_1$	A_1	0	-5/2	-1	1/2	1	-1/2	1/2
+M	1/2 A_2	x	1	-1/2	0	-1/2	0	1/2	1/2
		Z_j	9	-9/2	0	1/2	M	M-1/2	1/2 +M/2
		$C_j - Z_j$	1	-1/2	0	-1/2	0	1/2	

Se elige columna más (-) y menor cociente (+).

Se tienen 2 opciones para columna, con el mismo valor. Se elige cualquiera de ellos. En este caso, elegiremos a la variable h_2. Se determina la intersección.

C_j	10	-5	0	0	+M	+M		
	x	y	h_1	h_2	A_1	A_2		Cocientes
A_1	0	-5/2	-1	1/2	1	-1/2	1/2	1/2/1/2=1
x	1	-1/2	0	-1/2	0	1/2	1/2	1/2/-1/2=-1
Z_j	9	-9/2	0	1/2	M	M-1/2	1/2 +M/2	
$C_j - Z_j$	1	-1/2	0	-1/2	0	1/2		

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla.

		C_j	10	-5	0	0	+M	+M	
Coef. en F.O.	Operación		x	y	h_1	h_2	A_1	A_2	
0	2 A_1	h_2	0	-5	-2	1	2	-1	1
10	1/2 h_{2+x}	x	1	-3	-1	0	1	0	1
		Z_j	10	-30	-10	0	10	0	10
		$C_j - Z_j$	0	25	0	0	M	M	

Dado que no existen (+) en $C_j - Z_j$ se considera concluida la tabla.

Se lee.

C_j	10	-5	0	0	+M	+M	
	x	y	h_1	h_2	A_1	A_2	
h_2	0	-5	-2	1	2	-1	1
x	1	-3	-1	0	1	0	1
Z_j	10	-30	-10	0	10	0	10
$C_j - Z_j$	0	25	0	0	M	M	

$$x = 1$$
$$y = 0$$
$$h_1 = 0$$
$$h_2 = 1$$
$$A_1 = 0$$
$$A_2 = 0$$

$$\boldsymbol{Z_j = 10}$$

EJERCICIO

Resolver en equipo de 3 integrantes el siguiente P.P.L. empleando el método Simplex dual, en hoja de cálculo y entregar su hoja de respuestas y comprobar empleando el método gráfico.

1. $Mín\ Z = 4x + 3y$

   s.a.

   r1: $3x + 2y \leq 25$
   r2: $x \leq 5$
   r3: $8x \leq 21 - 6y$
   r4: $x \geq -2$
   r5: $y \geq 1$