Método simplex (Simplex analítico->Versión 1.0)

Este fue el primer método que George Dantzing, propuso para resolver problemas de programación lineal. Tiene algunas limitantes, pero el concepto fue muy revolucionario para su momento.

Sus pasos son:

1. Se hace un cambio en el sistema del P.P.L. para quitar las desigualdades y se añaden variables adicionales. Si la restricción es menor igual, se añade una variable de holgura (+h), pero si la restricción es mayor igual, hay que re expresarla como menor igual.
2. Se plantea la 1ª tabla simplex.
3. Cuando se pretende maximizar, se cambia el signo de los coeficientes al plantear la primera tabla simplex. Si es minimizar no existe cambio en el signo.
4. Se inicia iterando, si es maximizar o minimizar, se elige la columna más (-) en fila Z_j, y el menor cociente (+) de dividir el vector solución entre la columna elegida.
5. La intersección se hace 1 (unidad) y se aplica el método de Gauss Jordan arriba y debajo de la intersección. La columna elegida es la variable que entra, la fila elegida es la variable que sale.
6. Se itera hasta que no existan (-) en fila Z_j.

NOTA: El cero no es criterio de elección ni de fila ni de columna. Las restricciones de no negatividad no son necesarias incluirlas, porque están implícitas en el método simplex. Variable que no exista (no esté en la tabla simplex) tiene un valor de cero.

En caso de existir una desigualdad del tipo igual (=) descomponer en 2 (>= y <=).
Ejemplo: $x + y = 1$: $x + y \leq 1$ y $x + y \geq 1$

Puede haber mínimo y máximo, o sólo uno de ellos, o más de uno de ellos o ninguno de ellos.

Resolviendo el mismo ejercicio que se resolvió en el método gráfico y analítico, se tiene.

Ejemplo. Hallar el máximo y mínimo del siguiente P.P.L.

$$Z = a + 2b$$

s.a.

r1: $a + 3b \leq 15$
r2: $2a + b \leq 12$
r3: $a \geq 0$
r4: $b \geq 0$

Se añaden las variables a fin de quitar las desigualdades, y no se consideran las de no negatividad.

r1: $a + 3b + h_{1=} 15$
r2: $2a + b + h_{2=} 12$

Replanteando nuestro sistema, queda de la siguiente forma.

$$Z = a + 2b + 0h_1 + 0h_2$$

s.a.

r1: $a + 3b + h_1 + 0h_2 = 15$
r2: $2a + b + 0h_1 + h_2 = 12$

Nótese que para que el sistema sea lineal, se incluyen todas las variables en las restricciones y la F.O.. En esta última tienen coeficiente cero.

NOTA: Las variables de holgura representan el excedente de cada recurso asociado a cada restricción.

Para maximizar.

Se plantea la 1ª tabla simplex.

Como es un problema de maximizar se cambian los signos de los coeficientes de la F.O.

	a	b	h_1	h_2	
h_1	1	3	1	0	15
h_2	2	1	0	1	12
Z_j	-1	-2	0	0	0

$$Z_j = Evaluación\ de\ la\ F.O.\ con\ los\ valores\ de\ cada\ columna$$

Se inician las iteraciones.

Se elige la columna más (-) en Z_j.

	a	b	h_1	h_2	

h_1	1	3	1	0	15
h_2	2	1	0	1	12
Z_j	-1	-2	0	0	0

Se realizan los cocientes del vector solución entre la columna elegida.

	a	b	h_1	h_2		Cocientes
h_1	1	3	1	0	15	15/3=5
h_2	2	1	0	1	12	12/1=12
Z_j	-1	-2	0	0	0	

Se elige el menor cociente (+).

	a	b	h_1	h_2		Cocientes
h_1	1	3	1	0	15	15/3=5
h_2	2	1	0	1	12	12/1=12
Z_j	-1	-2	0	0	0	

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla. Se hace 1 la intersección dividiendo entre 3 y se aplica Gauss Jordan a las demás filas. La intersección es el pivote.

Operación		a	b	h_1	h_2	
1/3 h_1	b	1/3	1	1/3	0	5
$-b+h_2$	h_2	5/3	0	-1/3	1	7
$+2b+Z_j$	Z_j	-1/3	0	2/3	0	10

La evaluación de Z_j equivale a multiplicar los coeficientes de la variables b y h_2 por sus respectivos coeficientes en la F.O. (Se pueden ver en C_j) por los valores de la columna y sumar cada correspondencia .

Se continua iterando. Se busca la intersección. Se elige columna más (-) y menor cociente (+).

	a	b	h_1	h_2		Cocientes
b	1/3	1	1/3	0	5	5/1/3=15
h_2	5/3	0	-1/3	1	7	7/5/3=21/5
Z_j	-1/3	0	2/3	0	10	

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla.

Operación		a	b	h_1	h_2	
$-1/3a + b$	b	0	1	2/5	-1/5	18/5
$3/5h_2$	a	1	0	-1/5	3/5	21/5
$1/3a + Z_j$	Z_j	0	0	3/5	1/5	57/5

Dado que no existen (-) en Z_j se considera concluida la tabla.

Se lee.

	a	b	h_1	h_2	
b	0	1	2/5	-1/5	18/5
a	1	0	-1/5	3/5	21/5
Z_j	0	0	3/5	1/5	57/5

$$a = 21/5$$

$$b = 18/5$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 0$$

$$Z_j = 57/5$$

Las variables h_1 y h_2 tienen un valor de cero porque no aparecen en la última tabla

Z_j se lee de la última columna de la tabla de esa fila.

Las tablas de cada iteración se pueden ver en la siguiente secuencia. Esto se hará sólo en este ejemplo a fin de analizar el cambio de tabla a tabla.

Tabla 1(inicial):

	a	b	h_1	h_2	
h_1	1	3	1	0	15
h_2	2	1	0	1	12
Z_j	-1	-2	0	0	0

Tabla 2:

	a	b	h_1	h_2	
b	1/3	1	1/3	0	5
h_2	5/3	0	-1/3	1	7
Z_j	-1/3	0	2/3	0	10

Tabla 3(final):

	a	b	h_1	h_2	
b	0	1	2/5	-1/5	18/5
a	1	0	-1/5	3/5	21/5
Z_j	0	0	3/5	1/5	57/5

Minimizando ahora la función.

Se plantea la 1ª tabla simplex. Los signos de los coeficientes de la F.O. no cambian.

	a	b	h_1	h_2	
h_1	1	3	1	0	15
h_2	2	1	0	1	12
Z_j	1	2	0	0	0

Se elige al más (-) de $C_j - Z_j$. Como no existen (-) se dan por concluidas las iteraciones. Así, si las variables no se encuentran, tienen un valor de cero.

$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$h_1 = 15$$

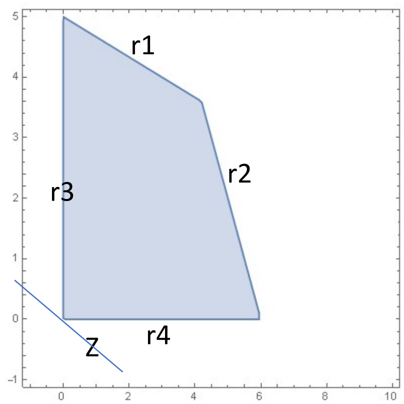
$$h_2 = 12$$

$$Z_j = 0$$

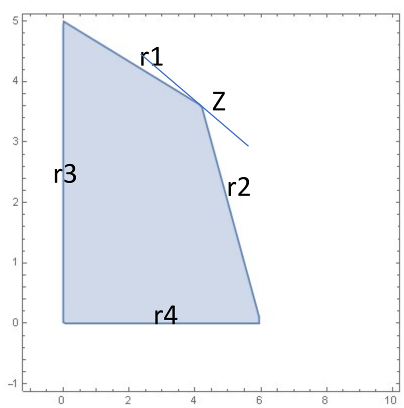
Resolviendo gráficamente:

Se grafica.

Cómo m<0 en F.O., Z se desplaza sobre el eje de b. El primer punto de contacto es el origen que corresponde al mínimo $a \to 0, b \to 0, \mathrm{Z} \to 0$.



El último punto de contacto que es el máximo es la intersección de r1 y r2.



Resolviendo el sistema: $r1: a + 3b = 15, \mathrm{r2}: 2a + b = 12$ obtenemos $a \to \frac{21}{5}, b \to \frac{18}{5}$, que evaluado en la F.O. $Z \to \frac{57}{5}$, que es similar al valor encontrado con el método simplex.

EJERCICIO

Resolver en equipo(3 integrantes) los siguientes P.P.L. empleando el método Simplex versión 1.0 y entregar su hoja de respuestas. Para todos los casos hay que encontrar el máximo y mínimo de la F.O..

1. $Z = a + 3b$
   s.a.
   r1: $2a + b \leq 50$
   r2: $a + 2b \leq 60$
   r3: $a \geq 0$
   r4: $b \geq 0$

2. $Z = 4x + y$
   s.a.
   r1: $x + y \geq 8$
   r2: $2x + 2y \leq 35$
   r3: $x \leq 6$
   r4: $x \geq 0$
   r5: $y \geq 0$

3. $Z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y$
   s.a.
   r1: $2x + 3y \leq 30$
   r2: $7x + y \leq 49$
   r3: $x - y \leq 15$
   r4: $x \geq 0$
   r5: $y \geq 0$

4. $Z = 7m + 2n$
   s.a.
   r1: $4m + n \leq 16$
   r2: $m + 5n \leq 30$
   r3: $m \leq n - 12$
   r4: $m \geq 0$
   r5: $n \geq 0$

5. $Z = 3x - 5y$

   s.a.

   r1: $3x + 2y \leq 25$

   r2: $x \leq 5$

   r3: $4x \leq 36 - 3y$

   r4: $x \geq -4$

   r5: $y \geq 2$