Método simplex

(Simplex analítico de 2 fases o gran M, versión 2.0)

Existen muchas versiones del método simplex. Aquí abordaremos una versión de éste que puede maximizar y minimizar sin la necesidad de realizar adecuaciones para que se llegue al resultado final. Al igual que el método analítico, no tiene limitantes en cuanto al número de variables a emplear.

Sus pasos son:

1. Se hace un cambio en el sistema del P.P.L. para quitar las desigualdades y se añaden variables adicionales. Si la restricción es menor igual, se añade una variable de holgura (+h), pero si la restricción es mayor igual, se añade una variable artificial y una de holgura (-h+A).
2. Cuando se tienen variable artificiales, se añade un coeficiente (M) que es un número muy grande en la F.O., si es maximizar es negativo (-M) y si es minimizar es positivo (+M).
3. Se plantea la 1ª tabla simplex.
4. Se inicia iterando, si es maximizar, se elige la columna más (+) en fila $C_j - Z_j$, y el menor cociente (+) de dividir el vector solución entre la columna elegida. Si es minimizar, se elige la columna más (-) en fila $C_j - Z_j$, y el menor cociente (+) de dividir el vector solución entre la columna elegida.
5. La intersección se hace 1 (unidad) y se aplica el método de Gauss Jordan arriba y debajo de la intersección sólo en las filas correspondientes a las variables. La columna elegida es la variable que entra, la fila elegida es la variable que sale.
6. Se itera hasta que, si es maximizar no existan (+) en fila $C_j - Z_j$, o si es minimizar no existan (-) en fila $C_j - Z_j$.

NOTA: El cero no es criterio de elección ni de fila ni de columna. Las restricciones de no negatividad no son necesarias incluirlas, porque están implícitas en el método simplex.

En caso de existir una desigualdad del tipo igual (=) descomponer en 2 (>= y <=).
Ejemplo: $x + y = 1$: $x + y \leq 1$ y $x + y \geq 1$

Puede haber mínimo y máximo, o sólo uno de ellos, o más de uno de ellos o ninguno de ellos.

Resolviendo el mismo ejercicio que se resolvió en el método gráfico y analítico, se tiene.

Ejemplo. Hallar el máximo y mínimo del siguiente P.P.L.

$$Z = a + 2b$$

s.a.

r1: $a + 3b \leq 15$
r2: $2a + b \leq 12$
r3: $a \geq 0$

r4: $b \geq 0$

Se añaden las variables a fin de quitar las desigualdades, y no se consideran las de no negatividad.

r1: $a + 3b + h_{1=}15$
r2: $2a + b + h_{2=}12$

Como no existen variables artificiales (A) no se incluyen en la F.O.

Replanteando nuestro sistema, queda de la siguiente forma.

$$Z = a + 2b + 0h_1 + 0h_2$$

s.a.

r1: $a + 3b + h_1 + 0h_2 = 15$
r2: $2a + b + 0h_1 + h_2 = 12$

Nótese que para que el sistema sea lineal, se incluyen todas las variables en las restricciones y la F.O.. En esta última tienen coeficiente cero.

NOTA: Las variables de holgura representan el excedente de cada recurso asociado a cada restricción.

Para maximizar.

Se plantea la 1ª tabla simplex.

C_j	1	2	0	0	
	a	b	h_1	h_2	
h_1	1	3	1	0	15
h_2	2	1	0	1	12
Z_j	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$	1	2	0	0	

$$C_j = Coeficientes\ de\ la\ F.O.\ de\ las\ variables$$

$$Z_j = Evaluación\ de\ la\ F.O.\ con\ los\ valores\ de\ cada\ columna$$

$$C_j - Z_j = Resta\ aritmética\ de\ esas\ filas$$

Se inician las iteraciones.

Se elige la columna más (+) en $C_j - Z_j$.

C_j	1	2	0	0	
	a	b	h_1	h_2	
h_1	1	3	1	0	15
h_2	2	1	0	1	12
Z_j	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$	1	2	0	0	

Se realizan los cocientes del vector solución entre la columna elegida.

C_j	1	2	0	0		
	a	b	h_1	h_2		Cocientes
h_1	1	3	1	0	15	15/3=5
h_2	2	1	0	1	12	12/1=12
Z_j	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$	1	2	0	0		

Se elige el menor cociente (+).

C_j	1	2	0	0		
	a	b	h_1	h_2		Cocientes
h_1	1	3	1	0	15	15/3=5
h_2	2	1	0	1	12	12/1=12
Z_j	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$	1	2	0	0		

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla. Se hace 1 la intersección dividiendo entre 3 y se aplica Gauss Jordan sólo a las filas de las variables, en este caso sólo a h_2. La intersección es el pivote.

	C_j	1	2	0	0	
Operación		a	b	h_1	h_2	
1/3 h_1	b	1/3	1	1/3	0	5
$-b + h_2$	h_2	5/3	0	-1/3	1	7
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

Se calcula Z_j y $C_j - Z_j$.

La evaluación de Z_j equivale a multiplicar los coeficientes de la variables $b\ y\ h_2$ por sus respectivos coeficientes en la F.O. (Se pueden ver en C_j) por los valores de la columna y sumar cada correspondencia . $C_j - Z_j$ es la resta aritmética.

	C_j	1	2	0	0	
Coef. en F.O.		a	b	h_1	h_2	
2	b	1/3	1	1/3	0	5
0	h_2	5/3	0	-1/3	1	7
	Z_j	2/3	2	2/3	0	10
	$C_j - Z_j$	1/3	0	-2/3	0	

Se continua iterando. Se busca la intersección. Se elige columna más (+) y menor cociente (+).

C_j	1	2	0	0		
	a	b	h_1	h_2		Cocientes
b	1/3	1	1/3	0	5	5/1/3=15
h_2	5/3	0	-1/3	1	7	7/5/3=21/5
Z_j	2/3	2	2/3	0	10	
$C_j - Z_j$	1/3	0	-2/3	0		

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

	C_j	1	2	0	0	
Operación		a	b	h_1	h_2	
$-1/3a + b$	b	0	1	2/5	-1/5	18/5
$3/5h_2$	a	1	0	-1/5	3/5	21/5
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

	C_j	1	2	0	0	
Coef. en F.O.		a	b	h_1	h_2	
2	b	0	1	2/5	-1/5	18/5
1	a	1	0	-1/5	3/5	21/5
	Z_j	1	2	3/5	1/5	57/5
	$C_j - Z_j$	0	0	-3/5	-1/5	

Dado que no existen (-) en $C_j - Z_j$ se considera concluida la tabla.

Se lee.

C_j	1	2	0	0	
	a	b	h_1	h_2	
b	0	1	2/5	-1/5	18/5
a	1	0	-1/5	3/5	21/5
Z_j	1	2	3/5	1/5	57/5
$C_j - Z_j$	0	0	-3/5	-1/5	

$$a = 21/5$$

$$b = 18/5$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 0$$

$$Z_j = 57/5$$

Las variables h_1 y h_2 tienen un valor de cero porque no aparecen en la columna de C_j.

Z_j se lee de la fila Z_j en la última columna de la tabla.

Las tablas de cada iteración se pueden ver en la siguiente secuencia. Esto se hará sólo en este ejemplo a fin de analizar el cambio de tabla a tabla.

Tabla 1(inicial):

C_j	1	2	0	0	
	a	b	h_1	h_2	
h_1	1	3	1	0	15
h_2	2	1	0	1	12
Z_j	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$	1	2	0	0	

Tabla 2:

C_j	1	2	0	0	
	a	b	h_1	h_2	
b	1/3	1	1/3	0	5
h_2	5/3	0	-1/3	1	7
Z_j	2/3	2	2/3	0	10
$C_j - Z_j$	1/3	0	-2/3	0	

Tabla 3(final):

C_j	1	2	0	0	
	a	b	h_1	h_2	
b	0	1	2/5	-1/5	18/5
a	1	0	-1/5	3/5	21/5
Z_j	1	2	3/5	1/5	57/5
$C_j - Z_j$	0	0	-3/5	-1/5	

Minimizando ahora la función.

Se plantea la 1ª tabla simplex.

C_j	1	2	0	0	
	a	b	h_1	h_2	
h_1	1	3	1	0	15
h_2	2	1	0	1	12
Z_j	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$	1	2	0	0	

Se elige al más (-) de $C_j - Z_j$. Como no existen (-) se dan por concluidas las iteraciones. Así, si las variables no se encuentran en la columna de C_j, tienen un valor de cero.

$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$h_1 = 15$$

$$h_2 = 12$$

$$Z_j = 0$$

Resolviendo otro ejemplo. Maximizar y minimizar la F.O.

$$Z = a + b$$

s.a.

r1: $a + 2b \leq 10$
r2: $3a + b \geq 5$
r3: $a \geq 0$
r4: $b \geq 0$

Maximizar:

Replanteando nuestro sistema, queda de la siguiente forma.

$$Z = a + b + 0h_1 + 0h_2 - MA_1$$

s.a.

r1: $a + 2b + h_1 + 0h_2 + 0A_1 = 10$
r2: $3a + b + 0h_1 - h_2 + A_1 = 5$

C_j	1	1	0	0	-M	
	a	b	h_1	h_2	A_1	
h_1	1	2	1	0	0	10
A_1	3	1	0	-1	1	5
Z_j						
$C_j - Z_j$						

NOTA: La variable A tiene prioridad sobre h. Siempre que una restricción tenga a estas dos variables, en la 1a tabla simplex se anotará la artificial. Si no existiera la variable artificial, sólo se anota la de holgura.

	C_j	1	1	0	0	-M	
Coef. en F.O.		a	b	h_1	h_2	A_1	
0	h_1	1	2	1	0	0	10
-M	A_1	3	1	0	-1	1	5
	Z_j	-3M	-M	0	M	-M	-5M
	$C_j - Z_j$	1+3M	1+M	0	-M	0	

Se determina la intersección. Se elige columna más (+) y menor cociente (+).

C_j	1	1	0	0	-M		
	a	b	h_1	h_2	A_1		Cocientes
h_1	1	2	1	0	0	10	10/1=10
A_1	3	1	0	-1	1	5	5/3
Z_j	-3M	-M	0	M	-M	-5M	
$C_j - Z_j$	1+3M	1+M	0	-M	0		

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

	C_j	1	1	0	0	-M	
Operación		a	b	h_1	h_2	A_1	
$-a + h_1$	h_1	0	5/3	1	1/3	-1/3	25/3
1/3 A_1	a	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

	C_j	1	1	0	0	-M	
Coef. en F.O.		a	b	h_1	h_2	A_1	
0	h_1	0	5/3	1	1/3	-1/3	25/3
1	a	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3
	Z_j	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3
	$C_j - Z_j$	0	2/3	0	1/3	-M-1/3	

Se determina la intersección. Se elige columna más (+) y menor cociente (+).

C_j	1	1	0	0	-M		
	a	b	h_1	h_2	A_1		Cocientes
h_1	0	5/3	1	1/3	-1/3	25/3	25/3/5/3=5
a	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3	5/3/1/3=5
Z_j	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3	
$C_j - Z_j$	0	2/3	0	1/3	-M-1/3		

Se tienen 2 opciones para elegir fila. Puede ser cualquiera. Tomaremos la 1ª fila.

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

	C_j	1	1	0	0	-M	
Operación		a	b	h_1	h_2	A_1	
$3/5h_1$	b	0	1	3/5	1/5	-1/5	5
-1/3 $b + a$	a	1	0	-1/5	-2/5	2/5	0
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

	C_j	1	1	0	0	-M	
Coef. en F.O.		a	b	h_1	h_2	A_1	
1	b	0	1	3/5	1/5	-1/5	5
1	a	1	0	-1/5	-2/5	2/5	0
	Z_j	1	1	2/5	-1/5	1/5	5
	$C_j - Z_j$	0	0	-2/5	1/5	-M-1/5	

Se determina la intersección. Se elige columna más (+) y menor cociente (+).

C_j	1	1	0	0	-M		
	a	b	h_1	h_2	A_1		Cocientes
b	0	1	3/5	1/5	-1/5	5	5/1/5=25
a	1	0	-1/5	-2/5	2/5	0	0/-2/5=-∞
Z_j	1	1	2/5	-1/5	1/5	5	
$C_j - Z_j$	0	0	-2/5	1/5	-M-1/5		

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

	C_j	1	1	0	0	-M	
Operación		a	b	h_1	h_2	A_1	
$5b$	h_2	0	5	3	1	-1	25
2/5 $h_2 + a$	a	1	2	1	0	0	10
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

	C_j	1	1	0	0	-M	
Coef. en F.O.		a	b	h_1	h_2	A_1	
0	h_2	0	5	3	1	-1	25
1	a	1	2	1	0	0	10
	Z_j	1	2	1	0	0	10
	$C_j - Z_j$	0	-1	-1	0	-M	

Dado que no existen (+) en $C_j - Z_j$ se considera concluida la tabla.

Se lee.

C_j	1	1	0	0	-M	
	a	b	h_1	h_2	A_1	
h_2	0	5	3	1	-1	25
a	1	2	1	0	0	10
Z_j	1	2	1	0	0	10
$C_j - Z_j$	0	-1	-1	0	-M	

$$a = 10$$

$$b = 0$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 25$$

$$A_1 = 0$$

$$Z_j = 10$$

Para minimizar la función.

Replanteando nuestro sistema, queda de la siguiente forma.

$$Z = a + b + 0h_1 + 0h_2 + MA_1$$

s.a.

r1: $a + 2b + h_1 + 0h_2 + 0A_1 = 10$
r2: $3a + b + 0h_1 - h_2 + A_1 = 5$

C_j	1	1	0	0	+M	
	a	b	h_1	h_2	A_1	
h_1	1	2	1	0	0	10
A_1	3	1	0	-1	1	5
Z_j						
$C_j - Z_j$						

NOTA: La variable A tiene prioridad sobre h. Siempre que una restricción tenga a estas dos variables, en la 1a tabla simplex se anotará la artificial. Si no existiera la variable artificial, sólo se anota la de holgura. M ahora es (+) porque es minimizar.

	C_j	1	1	0	0	+M	
Coef. en F.O.		a	b	h_1	h_2	A_1	
0	h_1	1	2	1	0	0	10
+M	A_1	3	1	0	-1	1	5
	Z_j	3M	M	0	-M	M	5M
	$C_j - Z_j$	1-3M	1-M	0	M	0	

Se determina la intersección. Se elige columna más (-) y menor cociente (+).

C_j	1	1	0	0	+M		
	a	b	h_1	h_2	A_1		Cocientes
h_1	1	2	1	0	0	10	10/1=10
A_1	3	1	0	-1	1	5	5/3
Z_j	3M	M	0	-M	M	5M	
$C_j - Z_j$	1-3M	1-M	0	M	0		

Se hace el cambio de variable y se calcula la siguiente tabla

	C_j	1	1	0	0	+M	
Operación		a	b	h_1	h_2	A_1	
$-a + h_1$	h_1	0	5/3	1	1/3	-1/3	25/3
1/3 A_1	a	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

	C_j	1	1	0	0	+M	
Coef. en F.O.		a	b	h_1	h_2	A_1	
0	h_1	0	5/3	1	1/3	-1/3	25/3
1	a	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3
	Z_j	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3
	$C_j - Z_j$	0	2/3	0	1/3	M-1/3	

Dado que no existen (-) en $C_j - Z_j$ se considera concluida la tabla.

Se lee.

C_j	1	1	0	0	+M	
	a	b	h_1	h_2	A_1	
h_1	0	5/3	1	1/3	-1/3	25/3
a	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3
Z_j	1	1/3	0	-1/3	1/3	5/3
$C_j - Z_j$	0	2/3	0	1/3	M-1/3	

$$a = 5/3$$

$$b = 0$$

$$h_1 = 25/3$$

$$h_2 = 0$$

$$A_1 = 0$$

$$Z_j = 5/3$$

EJERCICIO

Resolver en equipo de 3 integrantes los siguientes P.P.L. empleando el método Simplex analítico de 2 fases o gran M, en hoja de cálculo y entregar su hoja de respuestas (una para cada inciso). Para todos los casos hay que encontrar el máximo y mínimo de la F.O..

1. $Z = 4a + b$
   s.a.
      r1: $a + b \leq 150$
      r2: $2a + b \leq 80$
      r3: $a \geq 0$
      r4: $b \geq 0$

2. $Z = x + 3y$
   s.a.
   - r1: $x + y \geq 10$
   - r2: $2x + 2y \leq 25$
   - r3: $x \leq 8$
   - r4: $x \geq 0$
   - r5: $y \geq 0$

3. $Z = 0.1x + 0.5y$
   s.a.
   - r1: $4x + 3y \leq 30$
   - r2: $6x + y \leq 36$
   - r3: $x - y \leq 20$
   - r4: $x \geq 0$
   - r5: $y \geq 0$

4. $Z = m + 2n$
   s.a.
   - r1: $3m + n \leq 14$
   - r2: $m + 5n \leq 20$
   - r3: $m \leq n - 10$
   - r4: $m \geq 0$
   - r5: $n \geq 0$

5. $Z = 4x + 3y$
   s.a.
   - r1: $3x + 2y \leq 25$
   - r2: $x \leq 5$
   - r3: $8x \leq 21 - 6y$
   - r4: $x \geq -2$
   - r5: $y \geq 1$