Crecimiento poblacional dependiente de la densidad

La tasa reproductiva neta ya no es constante, sino que decrece linealmente con la densidad. Cuando N pasa un determinado valor, Ro se hace menor que 1. El punto donde N genera un Ro de 1 se llama *punto de equilibrio* (Ro=1 implica crecimiento 0).

Para ver mejor esto, representamos Nt/Nt+1 frente a Nt. Cuando Nt es muy pequeño, Nt/Nt+1=1/R. Cuando Nt es muy grande, y R=1, Nt+1=Nt, y entonces Nt/Nt+1=1. Es el punto de equilibro, y se denomina a este valor de N como K. La pendiente de la recta es 1-(1/R)/K-0

Con esta consideración, una población cuya tasa de reproducción neta disminuye linealmente con el tamaño poblacional crece según la siguiente ecuación:

Nt/Nt+1= [(1-(1/R))/K]Nt+1/R,

Nt+1=NtR/1+[(R-1)Nt]/K

Nt+1= Nt exp R(1-Nt/K)

Propiedades:

1) Se denomina ecuación de Ricker, su resolución se efectúa mejor por simulación. Tiene un
equilibrio cuando Nt=K, porque dentro de paréntesis es 0, y exp (0) = 1.

2) El comportamiento de la población dependerá de la pendiente B de la recta de Ro frente a densidad de población multiplicado por la Nequilibrio. En general, se puede predecir el comportamiento de la población analizando BNeq:
   - Si BNeq está entre 0 y 1, entonces la población se acerca al equilibrio sin oscilaciones. Es la curva denominada *sigmoidal*.
   - Si BNeq está entre 1 y 2, hay oscilaciones de amplitud decreciente convergentes al punto de equilibrio.
   - Si BNeq está entre 2 y 2.57 hay oscilaciones cíclicas estables indefinidamente
   - Si BNeq es mayor que 2.57, la población fluctua caóticamente de forma más o menos al azar, dependiendo de las condiciones de partidas.

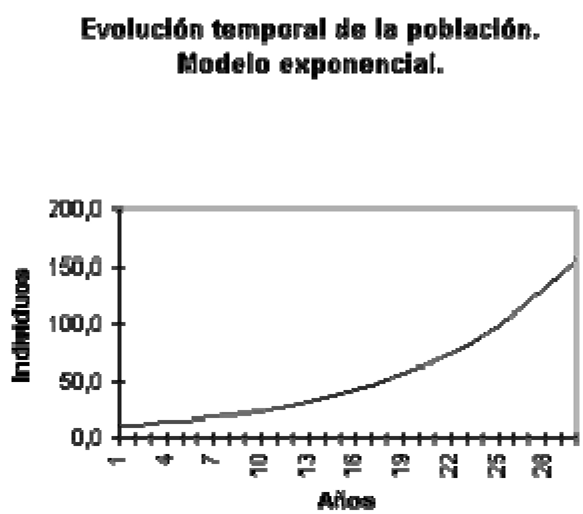
La ecuación general para el crecimiento poblacional se puede deducir como: Nt = N0. Donde Nt es el tamaño poblacional en algún momento (t), N0 es la población inicial y es la tasa de incremento anual. Otra forma de presentar esta ecuación es: Nt = N0 • t. Cuando no existe suficiente información como para llenar una tabla de vida de la población, puede ser calculado a partir de la tasa de cambio en un intervalo de tiempo determinado. Por ejemplo: 7 = Nt+1 / Nt. La ecuación Nt = N0 • t describe a una población que crece exponencialmente en el tiempo. Este tipo de crecimiento (similar al del interés compuesto en economía) se da cuando es mayor que 1, el ambiente es constante y hay exceso de recursos. es el responsable de la forma de la curva de crecimiento poblacional. Este parámetro define la velocidad del crecimiento poblacional.

El crecimiento poblacional está influenciado por las características del ciclo vital de las especies tales como: la edad al inicio de la reproducción, el número de descendientes producidos, la supervivencia de los individuos y la longitud del periodo reproductivo. Una población puede crecer en forma exponencial hasta que sobrepasa la capacidad del ambiente para sostenerla. Justo en ese momento la población entra en un abrupto declive debido precisamente a la inanición, enfermedad o emigración. La curva en forma de J o exponencial la podemos apreciar más usualmente en poblaciones de animales introducidos en ambientes nuevos. La tasa finita de incremento anual puede ser expresada como una tasa de incremento, r, que describe el crecimiento poblacional instantáneo.

En este caso se asume que la población crece continuamente en el tiempo en vez de que exista una estación de cría discreta. La tasa de incremento se calcula como: r = ln La tasa de incremento depende de si la población a la que nos referimos posee una distribución estable en clases de edad, de las fecundidades y supervivencias de cada edad de la población. Dado que todas estas variables cambian, como es de suponerse, continuamente, los valores de r y cambian también continuamente. A pesar de esto el uso de r permite comparar el crecimiento de poblaciones que viven bajo diferentes condiciones ambientales, también permite una comparación directa de tasas, así como para calcular el tiempo de duplicación de una población. Aquí podemos permitirnos observar un hecho que es de gran importancia a nivel de la vida de las especies. Con esto hago referencia a las condiciones ambientales que limitan el crecimiento poblacional. Es decir que, en la naturaleza el ambiente cambia constantemente y los recursos, como es bien sabido, son limitados. Esto nos refleja una situación que se presenta que a medida que la densidad de una población aumenta, la competencia entre los miembros de la misma población por recursos disponibles también aumenta.

Ante este escenario y la escasez de los elementos, la mortalidad se incrementa y/o la fecundidad disminuye. Como resultado el crecimiento de la población disminuye alcanzando en algunos casos un nivel estable. **Este nivel se conoce como la capacidad de carga o K.**

Teóricamente en K la población se encuentra en equilibrio sin crecer ni disminuir. En los casos en los cuales el crecimiento poblacional no es afectado por los niveles de densidad poblacional se habla de crecimiento denso independiente. A este último caso corresponde los modelos de crecimiento poblacional exponencial. Podemos verificar que para un intervalo de tiempo específico, este modelo se expresa como: $Nt = N0\ ert$ (Lo único que estamos haciendo, es reemplazar t por el término “ert”) Cuando esta modelo se especifica para tiempo continuo (no para intervalos), se expresa por la ecuación diferencial: $dN / dt = rN$ Una última forma de representar el modelo del crecimiento exponencial, y dentro de la dinámica de las poblaciones de manera muy resumida y concreta , además de ser muy sencilla es como se anuncia a continuación: Se supone un crecimiento continuo e indefinido (que se refiere a la retroalimentación positiva) $dN/dt = rN$ N = # de individuos de la población, t = tiempo durante el cual se dará el crecimiento, índice reproductor neto expresado como tasa diferencial, d = diferencial de... Por cada unidad de tiempo que pase la población se multiplicará por una cantidad constante, mientras más grande será N mayor será el crecimiento.



Una manera sencilla de hacerlo es sustituir el valor de r por un parámetro, a, que tenga la forma de una función lineal: $a = r - bN$ De esta ecuación puede inferirse que a y r representan tasas de crecimiento poblacional, ya que ambas poseen las mismas unidades; b en tanto, es un parámetro de “autolimitación”, que hace decrecer r a medida que N aumenta. Si se sustituye el parámetro r por a en el modelo de Malthus:

$$\frac{dN}{dt} = rN = aN \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = (r - bN)N \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN - bN^2$$

Para encontrar analíticamente el significado de los parámetros r y b, consideremos dos casos:

i) Cuando la densidad poblacional es muy pequeña, esto es, cuando N ≈ 0 :

$a = r - bN \approx r$ => $\frac{dN}{dt} = rN - bN^2 \approx rN$. De ahí que r representa la tasa de crecimiento poblacional cuando la limitante dependiente de la densidad de población no existe, esto es, toma el valor de a0. 7

ii) Cuando la población deja de crecer, esto es = 0 dt dN:

$\frac{dN}{dt} = rN - bN^2 = 0$ => $\frac{dN}{dt} = rN - bN^2 = 0$ => $\frac{dN}{dt} = (r - bN)N = 0$. Lo que significa que, para alguna N en particular, llamada K, el incremento poblacional es nulo. Esto es:

$\frac{dN}{dt} = (r - bK)K = 0$. Para que ello suceda, alguno de los términos debe ser cero. Si K no es igual a cero, entonces se requiere que: $r - bK = 0$ de dónde $K = \frac{r}{b}$.

Esta densidad particular de población es conocida de manera más específica como capacidad de carga, que refiere la densidad de población de una determinada especie que puede ser sostenida por el ecosistema.

De la ecuación anterior, se puede despejar el parámetro b y expresarlo como una constante que depende de r y K. $b = \frac{r}{K}$ si la sustituimos en la ecuación: $\frac{dN}{dt} = (r - bN) = rN - bN^2$ => $\frac{dN}{dt} = rN - \left(\frac{r}{K}\right)N^2$ = > $\frac{dN}{dt} = \frac{rN(K - N)}{K}$ = > $\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{K - N}{K}\right)$ (Ecuación logística de crecimiento poblacional, El significado ecológico de esta ecuación es Krebs, 1978):

tasa instantánea de crecimiento de la población por unidad de tiempo	=	indice de crecimiento de la población por individuo	×	tamaño de la población	×	oportunidad no utilizada de crecimiento de la población

De esta expresión, pueden derivarse algunas conjeturas sencillas e interesantes:

• Si N es pequeña, la fracción $\left(\frac{K-N}{K}\right) \approx 1$, y la población tenderá esencialmente a un crecimiento malthusiano.

• Si N tiende a la capacidad de carga del sistema (N → K), implica que (K − N)→ 0, por tanto la relación $\frac{dN}{dt}$ tenderá a cero también.

• El signo de la tasa de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ depende del valor de N en relación a K.

• Para N>K, (K - N) es negativo y la población decrece;

• Mientras que para N<K, (K – N) es positiva y la población aumenta,

• Este comportamiento sugiere que la trayectoria del crecimiento poblacional siempre tiende a estabilizarse alrededor del valor de K.

Resolviendo de manera analítica:

Partiendo de la ecuación: $\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{K-N}{K}\right)$ = > $\frac{dN}{dt} = \frac{rN(K-N)}{K}$ = > $\frac{KdN}{N(K-N)} = rdt$ se puede integrar: $\int \frac{KdN}{N(K-N)} = \int rdt$, por fracciones parciales: $\frac{K}{N(K-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{K-N}$ = > $\frac{K}{N(K-N)} = \frac{A(K-N)+BN}{N(K-N)}$, Encontrando "A" y "B": $K = AK - AN + BN$ => $K = AK + N(B-A)$; $B - A = 0$ => $B = A$, por lo tanto: $AK = K$ Lo que quiere decir que *A = 1* y *B = 1* = > $\int \frac{1}{N} dN + \int \frac{1}{(K-N)} dN = \int rdt$ = > $\ln(K-N) - \ln N = C - rt$, dónde C es la constante de integración y por propiedad de los logaritmos: $\ln\left(\frac{K-N}{N}\right)=C-rt$ => cómo *t = 0* = > $C=\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)$, aplicando exponencial a ambos lados: $e^{\ln\left(\frac{K-N}{N}\right)}=e^{C-rt}$ => $\frac{K-N}{N}=e^{C-rt}$ => $K-N=Ne^{C-rt}$ => $K=Ne^{C-rt}+N$ => $K=N(e^{C-rt}+1)$ => $N=\frac{K}{e^{C-et}+1}$ (Ecuación integrada del modelo).

BIBLIOGRAFIÍA

[1]Xavier Chiappa Carrara María del Carmen Galindo de Santiago, Armando, Servantes Sandovall, “*Introducción a los modelos matemáticos de crecimiento con aplicaciones en sistemas biológicos”. 2009.*

http://www.sisal.unam.mx/labeco/LAB_ECOLOGIA/Ecologia_Acuatica_files/PAPIME_Manual_Modelos.pdf. Recuperado el 18/04/2020

[2] García Gándara Miriam Janet, “Modelos de crecimiento exponencial”. http://lya.fciencias.unam.mx/gfgf/ode/ode_files/result5b.pdf. Recuperado el 18/04/2020

[3] “*Modelos de crecimiento exponencial”.*

https://www.ugr.es/~jmgreyes/crecimiento_poblacional.html. Recuperado el 18/04/2020