entonces:

$$m_X(t) = \exp(-\lambda)\exp[\lambda\exp(t)].$$

Por lo tanto:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lambda\exp(-\lambda)\exp(t)\exp\left[\lambda \exp(t)\right]\Big|_{t=0}$$

$$= \lambda = E(X).$$

Referencias

1. J. G. Freund, *Mathematical statistics*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
2. P. G. Hoel, *Introduction to mathematical statistics*, 4th ed., Wiley, New York, 1971.
3. W. Mendenhall and R. L. Schaeffer, *Mathematical statistics with applications*, Duxbury, North Scituate, Mass., 1973.

Ejercicios

3.1. Sea X una variable aleatoria que representa el número de llamadas telefónicas que recibe un conmutador en un intervalo de cinco minutos y cuya función de probabilidad está dada por $p(x) = e^{-3}(3)^x/x!$, $x = 0, 1, 2, \ldots$.

a) Determinar las probabilidades de que X sea igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
b) Graficar la función de probabilidad para estos valores de X.
c) Determinar la función de distribución acumulativa para estos valores de X.
d) Graficar la función de distribución acumulativa.

3.2. Sea X una variable aleatoria discreta. Determinar el valor de k para que la función $p(x) = k/x$, $x = 1, 2, 3, 4$, sea la función de probabilidad de X. Determinar $P(1 \leq X \leq 3)$. 7

3.3. Sea X una variable aleatoria continua.

a) Determinar el valor de k, de manera tal que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X.
b) Determinar la función de distribución acumulativa de X y graficar $F(x)$.
c) Calcular $P(X \geq 1/2)$ y $P(-1/2 \leq X \leq 1/2)$.

3.4. Sea X una variable aleatoria continua.

a) Determinar el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} k\exp(-x/5) & x > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X

b) Graficar $f(x)$.
c) Calcular $P(X \leq 5)$ y $P(0 \leq X \leq 8)$.
d) Determinar $F(x)$ y graficarla.

3.5. La duración en horas de un componente electrónico, es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulativa es $F(x) = 1 - \exp(-x/100)$, $x > 0$.

a) Determinar la función de probabilidad de X.
b) Determinar la probabilidad de que el componente trabaje más de 200 horas.

3.6. La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

a) Graficar $F(x)$.
b) Obtener $P(X < 1/2)$ y $P(X > 3/4)$.
c) Determinar $f(x)$.

3.7. Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. Dada la siguiente información

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	0.05	0.10	0.10	0.10	0.20	0.25	0.10	0.05	0.05

encontrar $E(X)$ y $Var(X)$.

3.8. Una compañía de seguros debe determinar la cuota anual a cobrarse por un seguro de \$50 mil para hombres cuya edad se encuentra entre los 30 y 35 años. Con base en las tablas actuariales el número de fallecimientos al año, para este grupo, es de 5 por cada mil. Si X es la variable aleatoria que representa la ganancia de la compañía de seguros, determinar el monto de la cuota anual para que la compañía no pierda, a pesar de tener un número grande de tales seguros.

3.9. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a) $E(X)$ *b)* $Var(X)$

3.10. Sea X una variable aleatoria que representa la magnitud de la desviación, a partir de un valor prescrito, del peso neto de ciertos recipientes, los que se llenan mediante una máquina. La función de densidad de probabilidad de X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a) $E(X)$ *c)* $\alpha_3(X)$
b) $Var(X)$ *d)* $\alpha_4(X)$

3.11. Supóngase que la duración en minutos de una llamada de negocios, es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está determinada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\exp(-x/4) & x > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a) $E(X)$
b) $Var(X)$
c) $\alpha_3(X)$
d) $\alpha_4(X)$
e) Refiérase al ejercicio 3.10. Basándose en sus respuestas a las preguntas *a,* a *d* del problema 3.11, compare las dos distribuciones de probabilidades. ¿Cuál muestra la mayor dispersión relativa?

3.12. La calificación promedio en una prueba de estadística fue de 62.5 con una desviación estándar de 10. El profesor sospecha que el examen fue difícil. De acuerdo con lo anterior, desea ajustar las calificaciones de manera que el promedio sea de 70 y la desviación estándar de 8. ¿Qué ajuste del tipo $aX + b$, debe utilizar?

3.13. Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2.

a) Evaluar $E(X - c)^2$ en términos de μ y σ^2 en donde c es una constante.
b) ¿Para qué valor de c es $E(X - c)^2$ mínimo?

3.14. Con respecto al ejercicio 3.11, demostrar que la variable aleatoria $Y = (X - 4)/4$ tiene media cero y desviación estándar uno. Demostrar que los factores de forma, primero y segundo, de la distribución de Y son los mismos de la distribución de X.

3.15. Considérese la función de densidad de probabilidad de X dada en el ejercicio 3.9. Determinar la desviación media de X y compararla con su desviación estándar.

3.16. Considérese la función de densidad de probabilidad de X dada en el ejercicio 3.10. Determinar la desviación media de X y compararla con su desviación estándar.

3.17. Supóngase que el ingreso semanal de un asesor profesional es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está determinada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{800}\exp(-x/800) & x > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Determinar los ingresos medios y medianos.
b) Determinar el recorrido intercuartil.
c) Determinar el recorrido interdecil.
d) Determinar la probabilidad de que el ingreso semanal exceda al ingreso promedio.

3.18. Comprobar que la función generadora de momentos central de una variable aleatoria X, genera todos los momentos centrales de X.

3.19. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está determinada:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x\exp(-x/4) & x > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Determinar la función generadora de momentos de X.

b) Utilizar la función generadora de momentos para encontrar la media y la varianza de X.

3.20. Considérese la función de densidad de probabilidad dada en el ejercicio 3.11. Encontrar la función generadora de momentos y utilizarla para comprobar los valores de la media y la varianza, determinados en el ejercicio 3.11.

3.21. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x)$ $x = 0,1,2,\ldots,n$, y sean a, b, y c constantes. Demostrar que $E(c) = c$, $E(aX + b) = aE(X) + b$, y $E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)]$, en donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones de X.

3.22. Para la variable aleatoria discreta del ejercicio anterior, utilizar las definiciones 3.8 y 3.9 para demostrar que $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

1.7. *b)* $\bar{x} = 18.82$; *Moda* $= 14.0$
c) $s^2 = 123.4196$; $s = 11.11$; *M.D.* $= 9.27$

Capítulo 2

2.1. *a)* Los eventos no son mutuamente excluyentes
b) 1. 180/400; 2. 150/400; 3. 30/400; 4. 60/180; 5. 60/200
c) $P(S \mid M) = 50/220$; $P(S) = 150/400$; no son estadísticamente independientes
d) No; $P(A \mid F) = 0.1111$, $P(A) = 0.125$
e) 1. 240/400; 2. 210/400; 3. 60/400; 4. 30/50

2.3. Cuando alguno o ambos eventos son vacíos

2.5. Las permutaciones son GGG, GGB, GBG, BGG, BBG, BGB, y BBB. La probabilidad de tener dos niños del mismo sexo es 6/8; la probabilidad de un niño y dos niños es 3/8; la probabilidad de que todos sean del mismo sexo es 2/8.

2.7. $(1/2)^{10}$; 1/2

2.9. 13/30

2.11. *a)* Cuatro resultados posibles: ambos componentes trabajan; ambos no y uno trabaja y el otro no (en dos formas posibles)
b) 0.99

2.13. $n = 4$

2.15. 0.6571

2.17. 0.41

Capítulo 3

3.1. *a), c)*

x	$p(x)$	$F(x)$
0	0.0498	0.0498
1	0.1494	0.1992
2	0.2240	0.4232
3	0.2240	0.6472
4	0.1680	0.8152
5	0.1008	0.9160
6	0.0504	0.9664
7	0.0216	0.9880

3.3. *a)* 3/2; *b)* $(x^3 + 1)/2$; *c)* 7/16, 1/8

3.5. *a)* $(1/100)\exp(-x/100)$; *b)* 0.8187

3.7. $E(X) = 4$; $Var(X) = 4.1$

3.9. *a)* 1/3; *b)* 1/18

3.11. *a)* 4; *b)* 16; *c)* 2; *d)* 9
e) La distribución del ejercicio 3.10 es simétrica y se encuentra centrada alrededor del valor 5, tiene varianza igual a 8.33 y desviación estándar de 2.8868. Esta distribución tiene un sesgo positivo y un pico relativamente grande; la dispersión relativa también es grande.

3.13. *a)* $\sigma^2 + (\mu - c)^2$; *b)* $c = \mu$

3.15. $M.D.(X) = 0.19753$, $d.e.\ (X) = 0.2357$

3.17. *a)* Media = 800, Mediana = 554.52; *b)* 878.89 *c)* 1757.78; *d)* 0.3679

3.19. *a)* $(1 - 4t)^{-2}$ *b)* $E(X) = 8$, $Var(X) = 32$

Capítulo 4

4.5. *a)* 0.6562, 0.9346; *b)* 0.5696, 0.9391

4.7. $P(X = 4) = 0.0049$, $P(X \geq 4) = 0.0055$; existe una inclinación a concluir que la afirmación es incorrecta

4.9. 0.2122

4.11. Seis o más

4.15. 0.7601, 0.9718

4.17. 0.0488

4.19. 0.0803, 0.9862

4.21. 0.6767

4.23. 0.0293, sí

4.25. 0.1837, no

4.27. *a)* 0.5973; *b)* 5987; *c)* 0.6065

4.31.

x	*Frecuencia relativa*	*Probabilidad teórica*
0	0.715	0.7201
1	0.179	0.1689
2	0.063	0.0630
3	0.019	0.0263
4	0.010	0.0116
5	0.010	0.0053
6	0.002	0.0025
7	0.000	0.0012
8	0.002	0.0006

4.33. *a)* 0.0189; *b)* 0.0180; la ocurrencia es poco probable

Capítulo 5

5.3. *a)* 0.4649; *b)* 0.2204; *c)* 0.0228; *d)* 0.8643

5.5. *a)* 1.775; *b)* 18.225; *c)* 21.65; *d)* −1.65; *e)* 0.2; *f)* 19.8

5.7. 1018

5.9. 0.00069

5.11. 0.000008; la ocurrencia es muy poco probable

5.13. $228 000

5.15. *a)* 0.0256; *b)* ≈0; *c)* ≈0

5.17. Sí, la probabilidad de ocurrencia es virtualmente cero.

5.19. *a)* 0.5774; *b)* no

5.21. *a)* = 4, *b* = 16