Instituto Politecnico Nacional

ESCOM “ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO”

TEORÍA DE COMUNICACIÓN Y SEÑALES

PRÁCRICA 1: SERIE TRIGONOMÉTRICA Y EXPONENCIAL DE FOURIER

PROFA: ARZATE GORDILLO JACQUELINE

ALUMNOS: Rojas Alvarado Luis Enrique

Lara Delgado Edgar Alexis

Robles Soza Paula Guadalupe.

GRUPO: 3CV6

1. Objetivo

El Alumno analizara, comprenderá y verificara la STF de funciones dadas, empleando circuitos electrónicos simulados con el programa MULTISIM

2. Antecedentes

Se llama serie de Fourier a la sucesión de sumas parciales (depolinomios trigonométricos) en forma compleja o en forma real.

$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2i\pi nt/T}$ o en forma real

$S_N(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}[\, a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n sen(2\pi nt/T)]$

O su representación a partir de un armónico (sinusoides).

$$S_N(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{N} C_n \cos(2\pi nt/T - \phi_n)$$

Dónde:

$$C_0 = \frac{1}{2}a_o = c_0 \ , \ C_n = \sqrt[2]{a_n{}^2 + b_n{}^2} = 2|c_n|, \quad \phi_n = tan^{-1}(\frac{b_n}{a_n})$$

En todo punto t donde la serie converge se notará S(t) su suma:

$$S(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[\, a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n sen(2\pi nt/T)]$$

Si la función S existe, tendrá un periodo T.

El problema de descomponer una función dada en serie de Fourier no siempre tiene respuesta positiva.

Ahora supongamos que una función f(t) con período T se puede expresar como serie de Fourier, es decir que:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[\, a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n sen(2\pi nt/T)]$$

Entonces integrando ambos miembros de la igualdad en el intervalo $[-T/2, T/2]$ y usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno se obtiene los coeficientes de Fourier.

$$
\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(2\pi n t / T\right)dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}\left(2\pi n t / T\right)dt \end{cases} \quad n \geq 1
$$

Mientras que $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt.$

Se puede remplazar el intervalo simétrico $[-T/2, T/2]$ por cualquier otro intervalo de la forma $[a, a+T]$

Para precisar mejor la diferencia entre la función y la serie de Fourier que se le asocia se usa la notación.

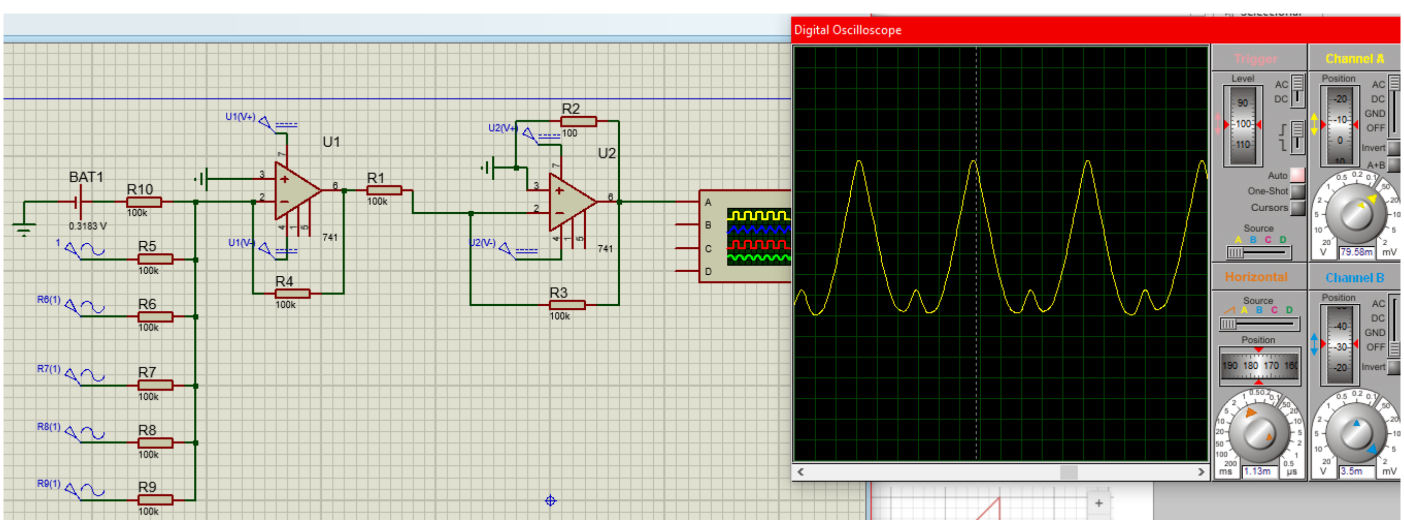
$$
f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(2\pi t/T\right) + b_n sen\left(2\pi t/T\right)\right]
$$

Dónde los coeficientes están dados por las fórmulas anteriores.

En efecto puede suceder que para ciertas funciones los coeficientes no existan y por tanto tampoco la serie de Fourier, o que la serie exista y sea divergente o que aunque sea convergente no lo haga hacia la función.

Se define una función F(t) es suave por tramos en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si tanto la función como primera derivada $f'(t)$ son continuas por tramos en 1 . También se dice que es de clase $C^1(I)$ por tramos.

Actividad 3.1



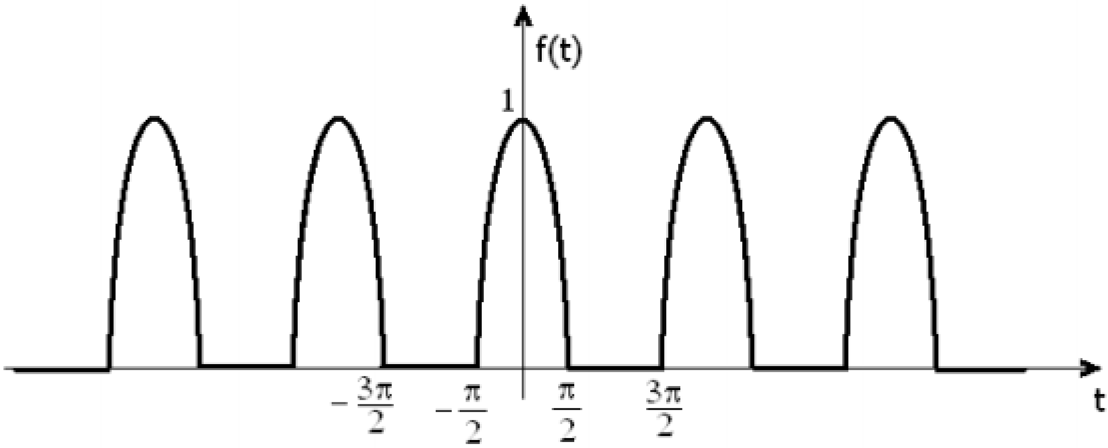


Figura 1

Actividad 3.2

<u>Conclusiones:</u>

<u>Comparando</u> nuestra señal con la de la figura 1. Se puede observar que debido al ruido de los amplificadores operacionales, la señal de salida se suma con todas las de entrada y debido a que no son muchas señales de entrada, la señal se ve de esa forma, ya que si agregáramos más señales de entrada, la señal se vería como la de la figura 1.

Actividad 3.3

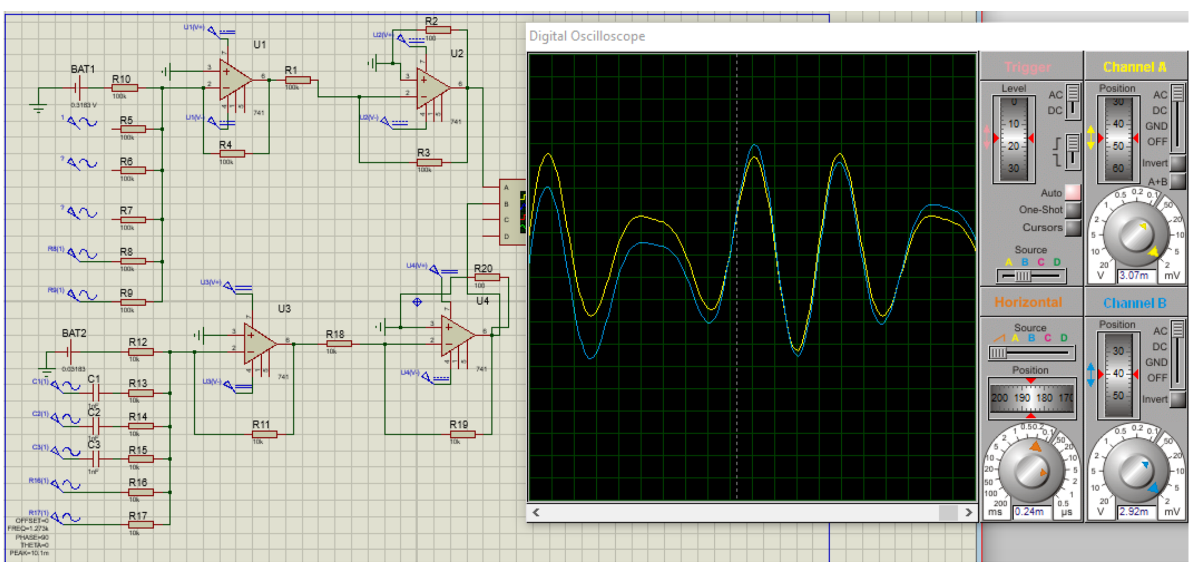


Figura 3.3.1

Conclusión:

Podemos observar que modificando el mismo circuito para sólo seleccionar las señales que yo quiera seleccionar para sumar en la serie de Fourier y ver sólo el comportamiento de esas señales seleccionadas, simplemente se tiene que colocar un condensador de 1nF en la señal que queramos desacoplar y así decir que solo vamos a sumar las que no tienen condensador.

La figura 3.3.1 demuestra lo anterior dicho, en la parte de arriba se puede observar al circuito original con las señales desconectadas para demostrar que es la misma señal si nosotros lo modificamos y colocamos un capacitor en 1nF en las mismas señales. La forma de onda es la misma en ambos canales del osciloscopio.

Comparando:

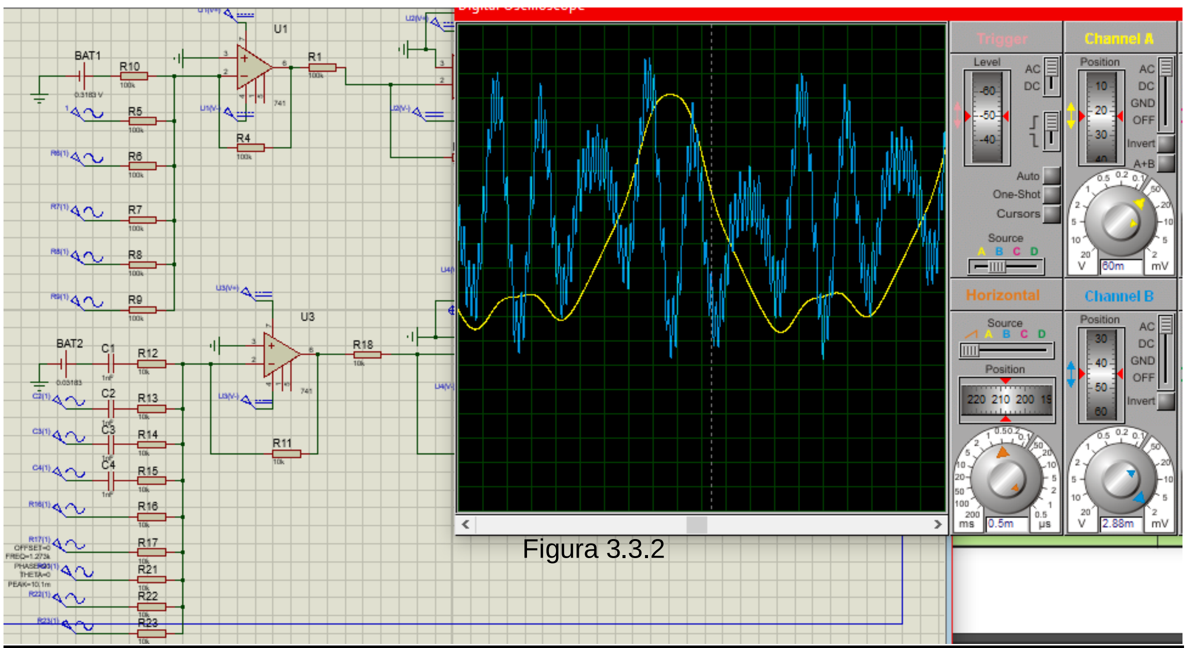
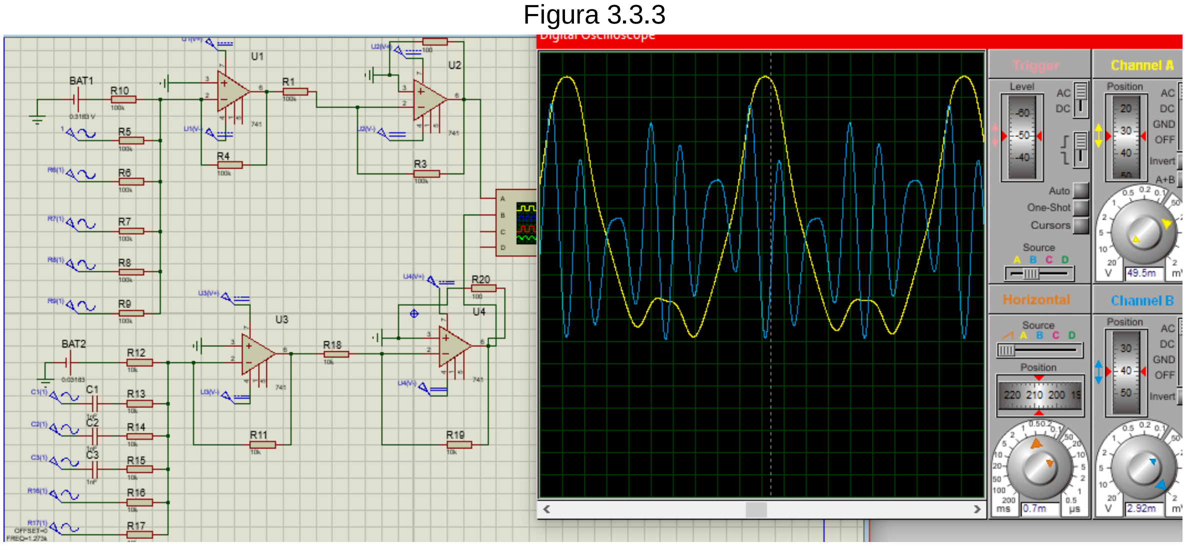


Figura 3.3.2

Figura 3.3.3



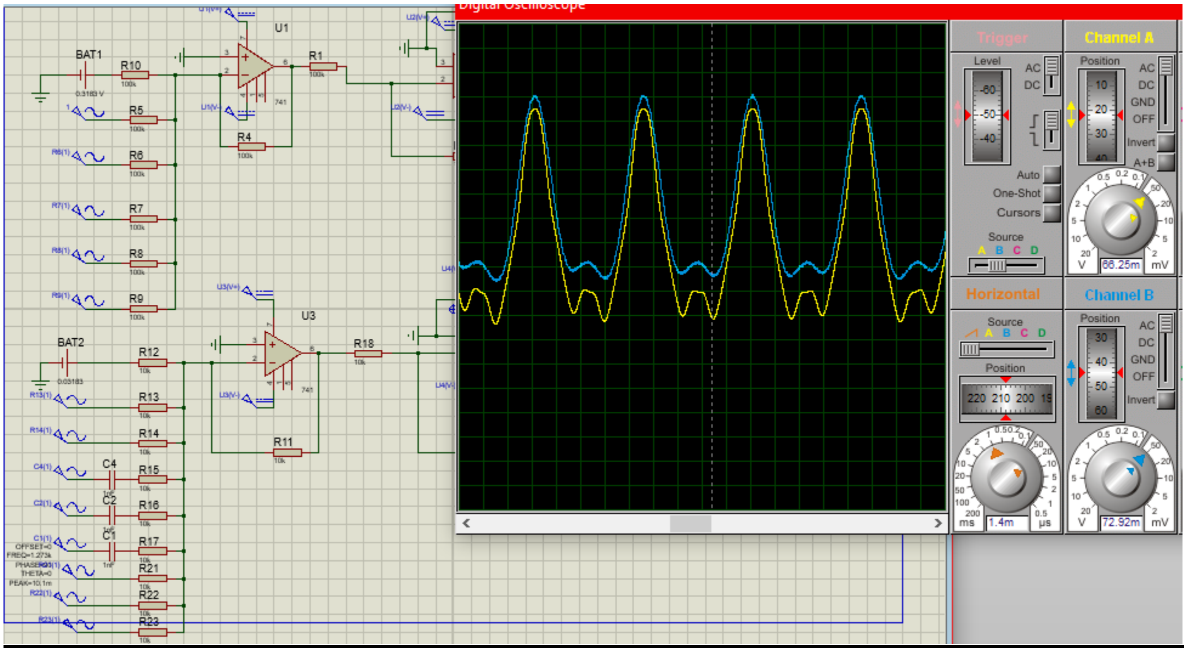


Figura 3.3.4

Para responder las siguientes preguntas se hicieron pruebas agregando más términos a la serie y colocando capacitores de tal manera que se apreciara mucho mejor el comportamiento de la señal.

<u>¿Cuáles son las componentes que definen la forma de onda F(t)?</u>

De acuerdo a las figuras anteriores, la forma de onda es definida por la suma de la a_0 y alguna a_n. Por lo que son los primeros 3 componentes.

<u>¿Cuáles únicamente afinan a F(t)?</u>

Las componentes que afinan a F(t) son las componentes a_n de la sumatoria. Entre más componentes "n" haya, más afinada estará la forma de onda. Por lo que los últimos componentes son los que la afinan.

Actividad 3.4

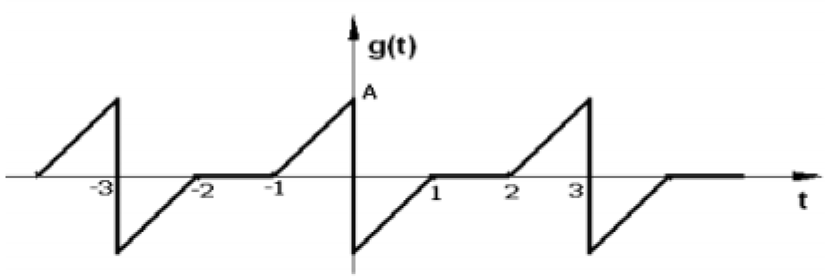


Figura 5

Actividad 3.4.1

Encontrando la STF:

Puesto que la gráfica es impar, $a_0 = a_n = 0$; $g(t) = \begin{cases} A(t-1) & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 1.5 \\ g(t+3) & \text{otro caso} \end{cases}$

T=3; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$

CALCULANDO b_n.

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t) sen(n\omega t)dt = \frac{4}{3}\int_0^1 A(t-1) sen\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt + \frac{4}{3}\int_0^1 0\,dx$$

$$= \frac{4A}{3}\int_0^1 t sen\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt - \frac{4A}{3}\int_0^1 sen\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt = \frac{4A}{3}\left[-\frac{3t}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)\right]_0^1 +$$

$$\ldots + \frac{3}{2n\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt - \frac{4A}{3}\left[-\frac{3t}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)\right]_0^1$$

u = t	du = dt
dv = $sen\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt$	v = $-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)$

$$= \frac{4A}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - 0 + \frac{3}{2n\pi}\left[\frac{3}{2n\pi}sen\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)\right]\right] - \frac{4A}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{3}{2n\pi}\cos(0)\right]$$

$$= \frac{4A}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{3}{2n\pi}\left[\frac{3}{2n\pi}sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{3sen(0)}{2n\pi}\right]\right] - \frac{4A}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{3}{2n\pi}\right]$$

$$= \frac{4A}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{9}{4n^2\pi^2}sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] - \frac{4A}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{3}{2n\pi}\right]$$

$$= \frac{4A}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{9}{4n^2\pi^2}sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{3}{2n\pi}\right]$$

$$= \frac{4A}{3}\left[\frac{9}{4n^2\pi^2}sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{3}{2n\pi}\right] = \frac{4A}{3}\left[\frac{3}{2n\pi}\left(\frac{3}{2n\pi}sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - 1\right)\right]$$

$$= \frac{2A}{n\pi}\left[\frac{3}{2n\pi}sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - 1\right] = \boldsymbol{\frac{3A}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{2A}{n\pi}}$$

FINALMENTE

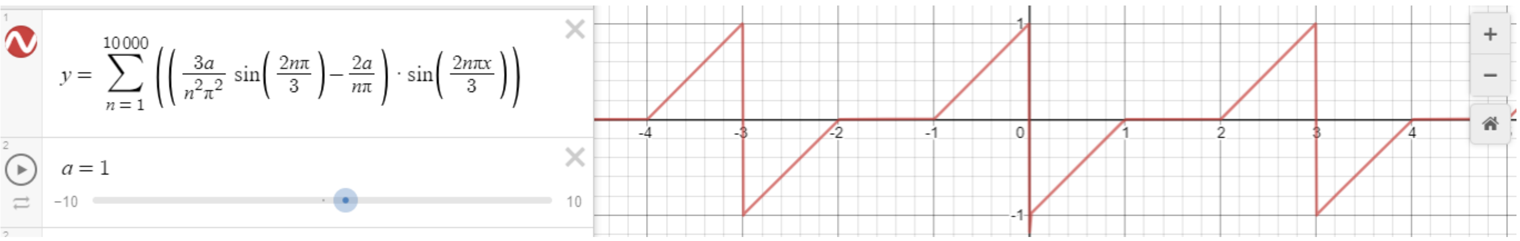
$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin(n\omega t))$$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3A}{n^2\pi^2} sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{2A}{n\pi}\right] sen\left(\frac{2n\pi}{3} t\right)$$

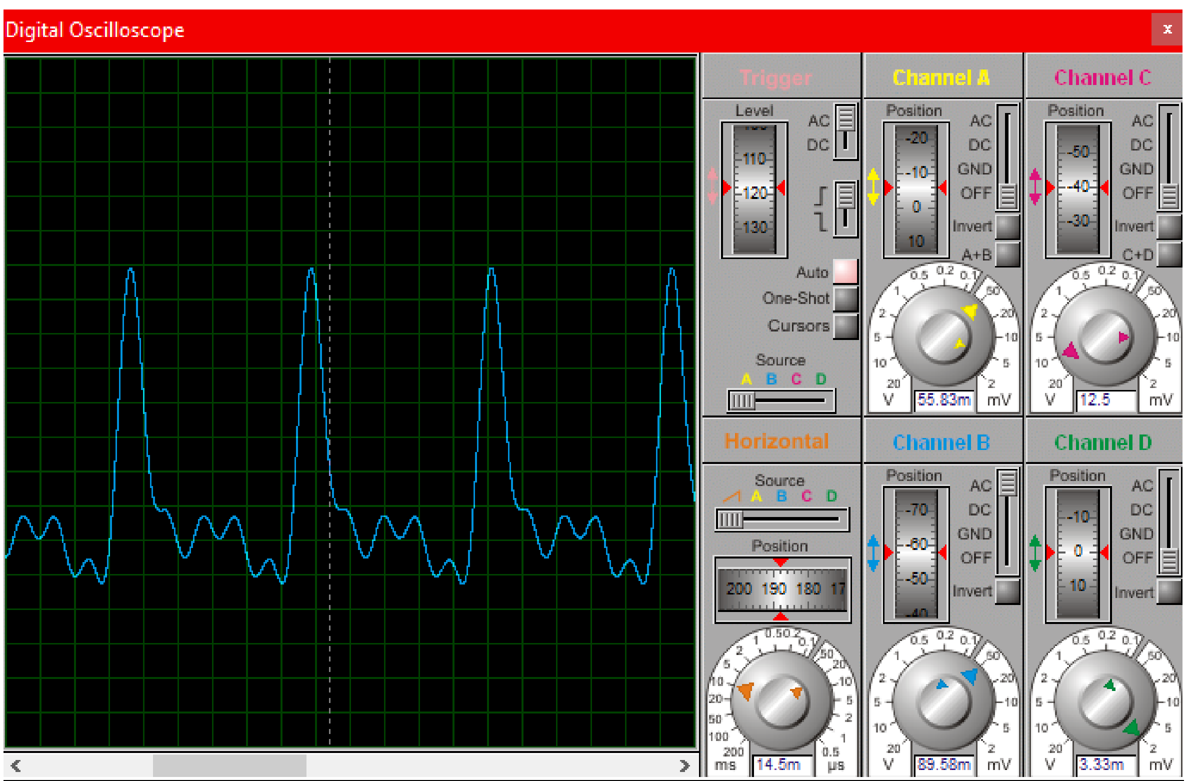
Actividad 3.4.2

Graficando:



Actividad 3.4.3

<u>Simulación:</u>

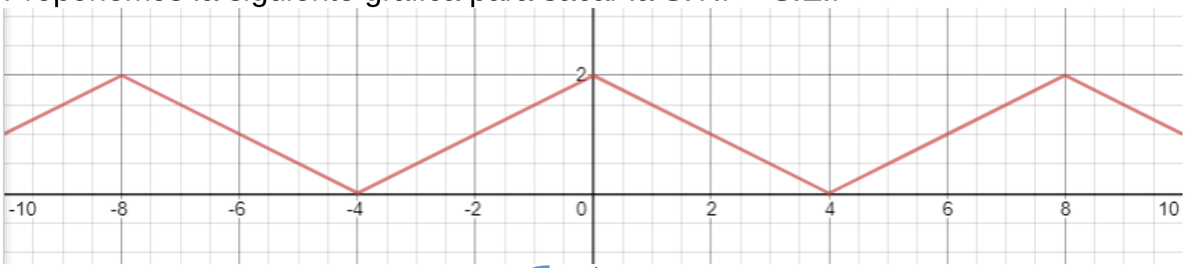


Tomando como $V_p = b_n$ para cada n = 1, 2, 3, 4, 5

Siendo la F= $\frac{\omega 0\, n}{2\pi}$ Para cada n = 1, 2, 3, 4, 5
Debido a que no se tomaron en cuenta muchas fuentes de voltaje, la forma de onda no se aprecia exactamente igual que en la gráfica.

Actividad 3.5

Proponemos la siguiente gráfica para sacar la S.T.F - S.E.F



T=8; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ ➔ F(t) = $\begin{cases} -\frac{t}{2} + 2 & 0 < t < 4 \\ \frac{t}{2} + 2 & -4 < t < 0 \\ f(t+4) & \text{otro caso} \end{cases}$ Es función par ➔ $b_n = 0$

Calculando a_n:

u = t du = dt
dv = $cos\left(\frac{n\pi}{4}t\right)\ dt$ v = $\frac{4}{n\pi}\ sen\left(\frac{n\pi}{4}t\right)$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)cos(n\omega t)dt = -\frac{4}{8}\int_0^4 \left(-\frac{t}{2} + 2\right) cos\left(\frac{n\pi}{4}t\right) dt$$

$$= -\frac{4}{16}\int_0^4 t cos\left(\frac{n\pi}{4}t\right) dt - \frac{8}{8}\int_0^4 cos\left(\frac{n\pi}{4}t\right) dt$$

$$= -\frac{4}{16}\left[\frac{4t}{n\pi}\ sen\left(\frac{n\pi}{4}t\right)\Big|_0^4 - \frac{4}{n\pi}\int_0^4 sen\left(\frac{n\pi}{4}t\right) dt\right] - \frac{8}{8}\left[\frac{4}{n\pi}\ sen\left(\frac{n\pi}{4}t\right)\right]_0^4$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{16}{n\pi}\ sen(n\pi) - 0\ - \frac{4}{n\pi}\left(-\frac{4}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{4}t\right)\Big|_0^4\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n\pi}\ sen(n\pi) - 0\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{4}{n\pi}\ (-\cos(n\pi) + \cos(0))\ \right] = \frac{4}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)$$

Calculando a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2}\ a_n\Big|_{n=0} = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$$

$$a_0 = \lim_{n\to 0}\frac{2}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$$

Como se indetermina cuando n tiende a 0, se aplicará L'Hopital

$$a_0 = \lim_{n\to 0}\frac{\frac{d}{dn}2(1-\cos(n\pi))}{\frac{d}{dn}n^2\pi^2} = \lim_{n\to 0}\frac{2\pi sen(n\pi)}{2n\pi^2}$$

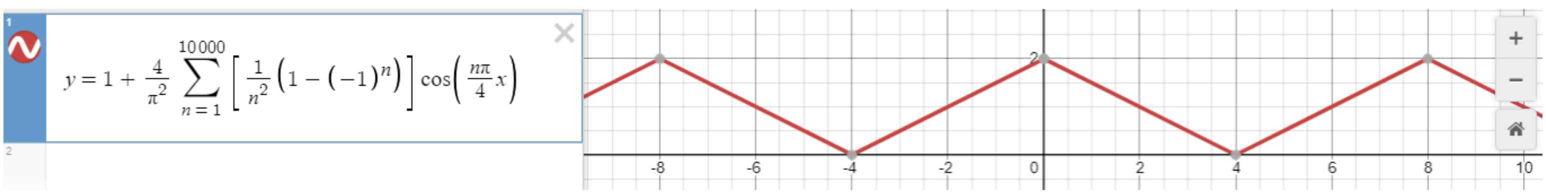
Debido a que se vuelve a indeterminar se vuelve a aplicar L'Hopital

$$a_0 = \lim_{n\to 0} \frac{\frac{d}{dn}2\pi sen(n\pi)}{\frac{d}{dn}n^2\pi^2} = \lim_{n\to 0} \frac{2\pi^2 cos(n\pi)}{2\pi^2} = \lim_{n\to 0} \cos(n\pi) = \cos(0) = 1$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t))$$

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) \right)$$



Calculando la S.E.F

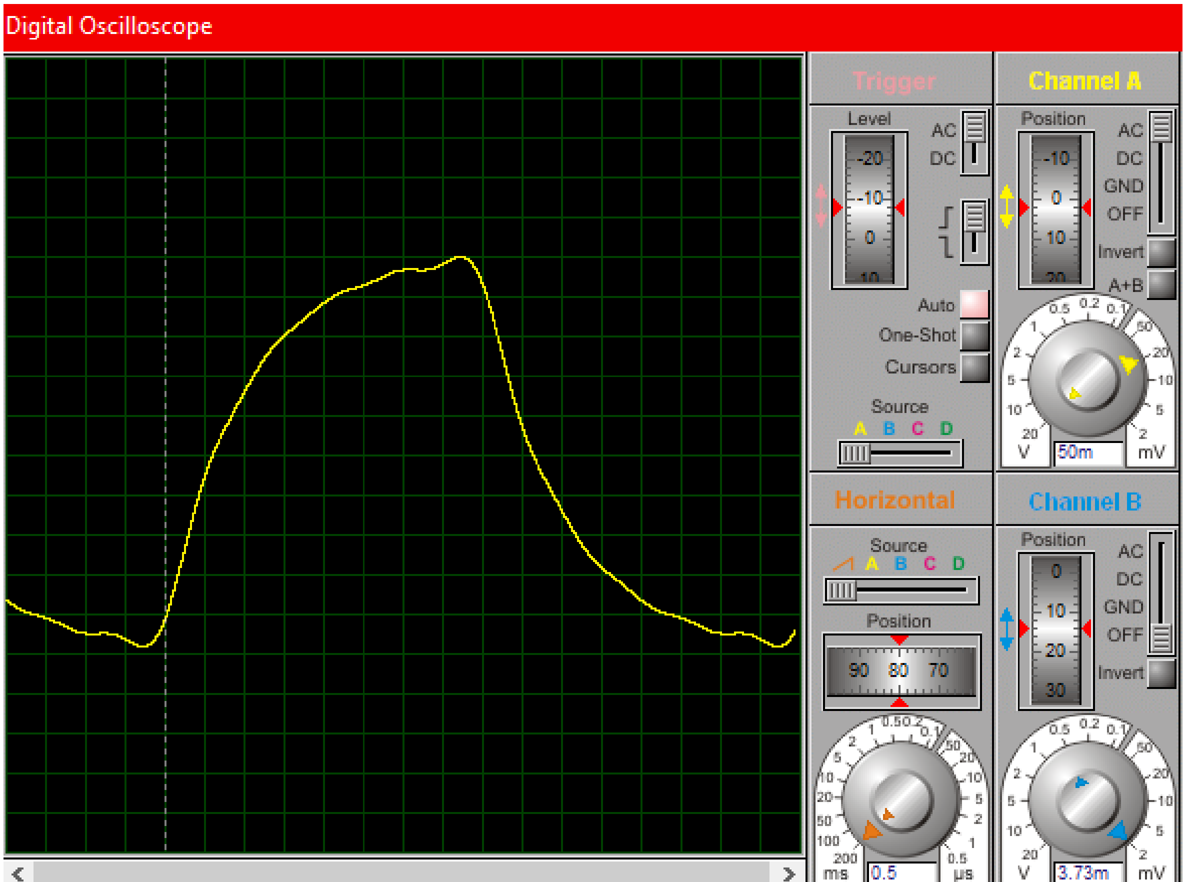
$C_0 = a_0 = 1$

$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi)) - i\ (0) \right)$

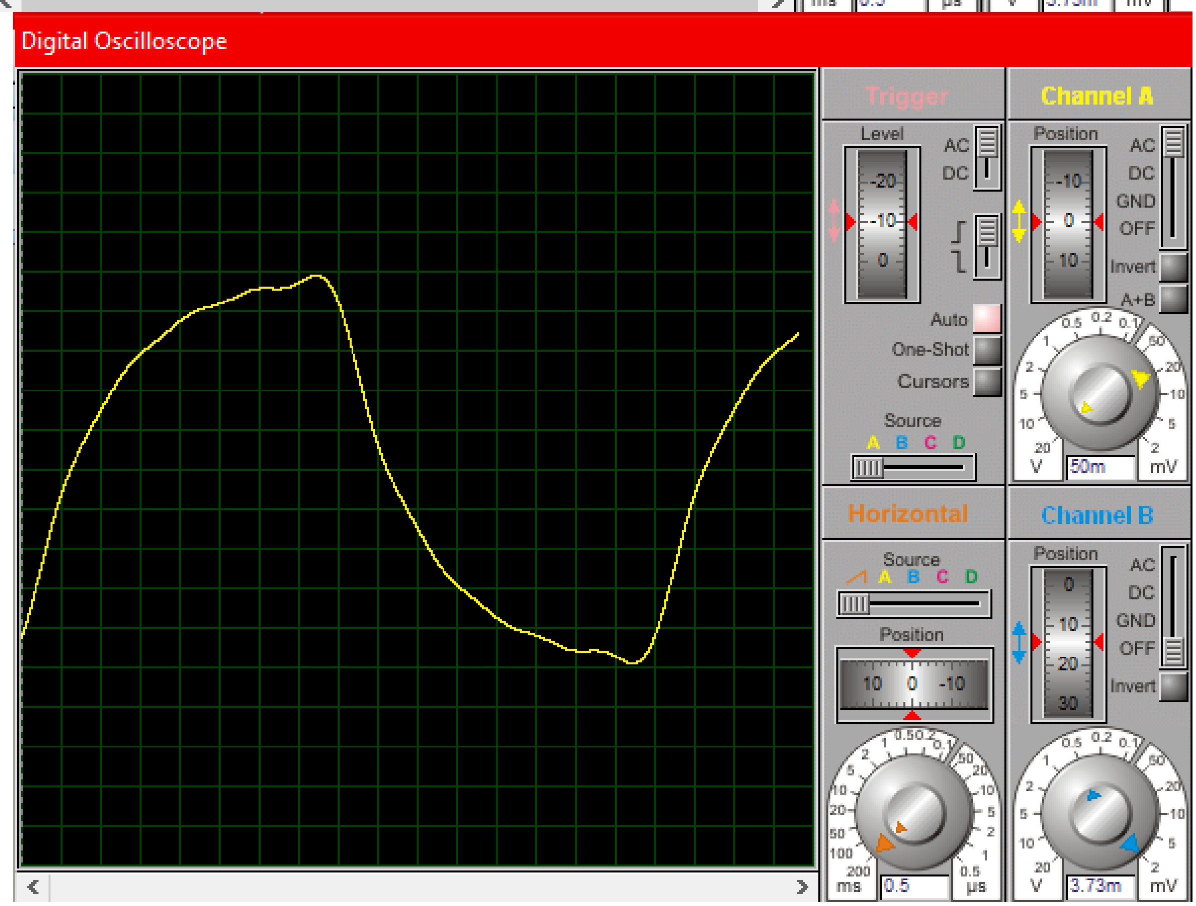
$$C_n = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$$

Sustituyendo en la S.E.F

$$f(t) = 1 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(1 - \cos(n\pi))}{n^2}\ e^{in\frac{\pi}{4}t}$$



Digital Oscilloscope
Trigger
Level
AC
DC
Auto
One-Shot
Cursors
Source
A B C D
Channel A
Position
AC
DC
GND
OFF
Invert
A+B
50m
V
mV
Horizontal
Source
A B C D
Position
90 80 70
ms
0.5
µs
Channel B
Position
AC
DC
GND
OFF
Invert
3.73m
V
mV



Digital Oscilloscope
Trigger
Level
AC
DC
Auto
One-Shot
Cursors
Source
A B C D
Channel A
Position
AC
DC
GND
OFF
Invert
A+B
50m
V
mV
Horizontal
Source
A B C D
Position
10 0 -10
ms
0.5
µs
Channel B
Position
AC
DC
GND
OFF
Invert
3.73m
V
mV

Para los voltajes de entrada, el a_0 es una fuente fija de un volt y para los V_P se tomaron una serie de a_n.

Actividad 3.6

Si quisiera usar el concepto de S.T.F para generar señales periódicas cuadradas, triangulares, dientes de sierra y de otro tipo, usando n fuentes de voltaje alterno. ¿Qué parámetro tendría que modificar en la serie trigonométrica de cada una de las funciones para hacerla ajustable al periodo de éstas?

-Se tendría que ajustar el parámetro de la variable n, puesto que es la variable que hace las repeticiones.

4. Conclusiones

En esta práctica pudimos observar el comportamiento en un circuito de la serie trigonométrica de Fourier, así como la representación de cada coeficiente de la serie en voltaje alterno para ingresarlo a la suma de señales y así poder observar la forma de onda en el osciloscopio. Nos damos cuenta además de que entre más términos le sumemos a la serie de Fourier, la gráfica generada será más parecida a la original. Aprendimos que las señales dadas para su análisis con la serie trigonométrica de Fourier pue de venir de cualquier lado, como por ejemplo, el reconocimiento y grabación de voz.

5. Bibliografía

1) http://exa.unne.edu.ar/depar/areas/informatica/teleproc/Comunicaciones/Presentaciones_Proyector/SenialesyEspectros.pdf
2) https://es.slideshare.net/docdigitus/analisis-de-fourier-para-seales
3) http://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/Serie_trig_de_fourier.pdf