# ДЗ 6

Витя Ефремов

28 апреля 2022 г.

**Задача 1.** *Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):*

| | | X | |
|---|---|---|---|
| | | 3 | 6 |
| Y | 10 | 0.25 | 0.10 |
| | 14 | 0.15 | 0.05 |
| | 18 | 0.32 | 0.13 |

Таблица 1: Совместное распределение

1. *Найти коэффициент корреляции.*
2. *Построить совместную функцию распределения.*
3. *Найти условное среднее $E(Y|X)$.*

Маргинальные вероятности:

| $X$ | 3 | 6 |
|---|---|---|
| $p_X$ | 0.72 | 0.28 |

| $Y$ | 10 | 14 | 18 |
|---|---|---|---|
| $p_Y$ | 0.35 | 0.2 | 0.45 |

Таблица 2: Маргинальные распрееления

Коэффициент корреляции выражается через ковариацию и среднеквадратичные отклонения. Ковариация, в свою очередь, ищется через матожидания случайных величин $X, Y, X \cdot Y$.

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$
$$cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mu_{XY} - \mu_X\mu_Y$$

Найдем ковариацию:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \mathbb{E}X = 3 \cdot 0.72 + 6 \cdot 0.28 = 3.84 \\
\mu_Y &= \mathbb{E}Y = 10 \cdot 0.35 + 14 \cdot 0.2 + 18 \cdot 0.45 = 14.4 \\
\mu_{XY} &= \mathbb{E}[XY] = 3 \cdot 10 \cdot 0.25 + 3 \cdot 14 \cdot 0.15 + 3 \cdot 18 \cdot 0.32 + 6 \cdot 10 \cdot 0.1 + \\
&+ 6 \cdot 14 \cdot 0.05 + 6 \cdot 18 \cdot 0.13 = 55.32 \\
cov(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mu_{XY} - \mu_X\mu_Y = 55.32 - 3.84 \cdot 14.4 = 0.024
\end{aligned}$$

Найдем СКО:

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2 = 3^2 \cdot 0.72 + 6^2 \cdot 0.28 - 3.84^2 = 16.56 - 14.7456 = 1.8144$$
$$\sigma_X = \sqrt{1.8144} \approx 1.34699665924$$
$$\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mu_Y^2 = 10^2 \cdot 0.35 + 14^2 \cdot 0.2 + 18^2 \cdot 0.45 - 14.4^2 = 220 - 207.36 = 12.64$$
$$\sigma_Y = \sqrt{12.64} \approx 3.55527776693$$

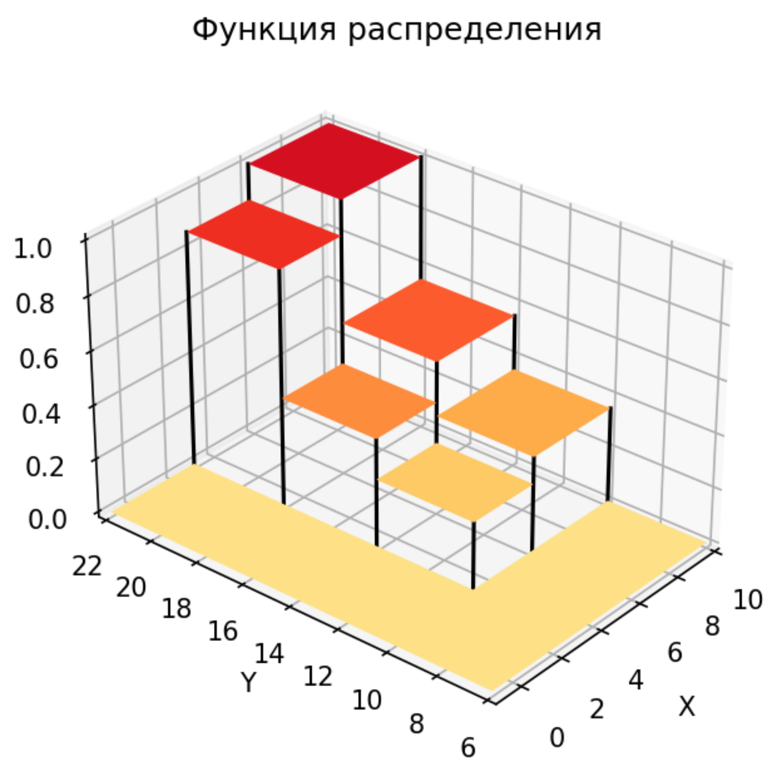
Итого, коэффициент корреляции:

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \approx \frac{0.024}{1.34699665924 \cdot 3.55527776693} \approx \mathbf{0.005}$$

Совместная функция распределения получается из таблицы распределения суммированием всех ячеек левее и выше:

| | | X | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $X < 3$ | $3 \leq X < 6$ | $6 \leq X$ |
| Y | $Y < 10$ | 0 | 0 | 0 |
| | $10 \leq Y < 14$ | 0 | 0.25 | 0.35 |
| | $14 \leq Y < 18$ | 0 | 0.4 | 0.55 |
| | $18 \leq Y$ | 0 | 0.87 | 1 |

Таблица 3: Совместная функция распределения



Условное матожидание $\mathbb{E}(Y|X)$ можно мыслить как функцию от $X$. Например, при $X = 3$ двумерня случайная величина становится одномерной, матожидание этой одномерной случайной величины (число) – значение условного среднего, при условии $X = 3$.

Значение условного матожидания при каждом фиксированном $x$ вычисляется по формулам (обратим внимание, что в первой сумме вероятности условные, а во второй – совместные):

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \sum_y y \cdot p(Y = y|X = x) = \sum_y y \cdot \frac{p(Y = y, X = x)}{p(X = x)}$$

$$\mathbb{E}(Y|X = 3) = \frac{10 \cdot 0.25 + 14 \cdot 0.15 + 18 \cdot 0.32}{0.72} = 14.3888888889$$
$$\mathbb{E}(Y|X = 6) = \frac{10 \cdot 0.1 + 14 \cdot 0.05 + 18 \cdot 0.13}{0.28} = 14.4285714286$$

$\square$