ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова

Ефремов Виктор Васильевич, группа БИТ 203

Отчет
по домашней работе 1, часть 3
по дисциплине "Информатика"
Тема: "Математические основы вычислительной техники"

Номер варианта: 6
Дата сдачи отчета: 30.10.2020

Москва 2020

Предисловие

Напомним числа из варианта №6.

$N = 29$

$M = 4$

$p_1 = 0.87$

$p_2 = 0.36$

$p_3 = 0.94$

Будем решать задачи в общем виде и подставлять числа в самом конце. Потому что задачи у всех одинаковые, только числа различаются ;).

Предполагается, что читатель слышал про сочетания, размещения и перестановки, и их версии с повторениями. А также правила сложения и умножения.

3.1

Студенческая группа состоит из 33 человек, среди которых N юношей и M девушек (в соответствии с вариантом). Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Можно выбрать либо двух девушек, либо двух парней.
Посмотрим сколькими способами можно выбрать пару юношей.
Порядок людей в паре не важен, поэтому это сочетание из N по 2, равное

$$C_N^2 = \frac{N!}{(N-2)! \cdot 2!} = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$$

Но можно и руками посчитать. Первым можно взять любого, поэтому N вариантов. Вторым - любого из оставшихся, т.е. $N-1$ вариантов. Т.е. всего $N \cdot (N-1)$ пар. При этом мы посчитали каждую пару дважды, взяв первым человеком пары сначала одного, а потом другого. И т.к. порядок людей в паре не важен, нужно поделить произведение пополам. Итого способов вырать пару юношей: $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$

Аналогично для девушек:

$$\frac{M \cdot (M-1)}{2}$$

Складываем, подставляем числа, получаем итоговый ответ:

$$\frac{N \cdot (N-1) + M \cdot (M-1)}{2} = \frac{29 \cdot 28 + 4 \cdot 3}{2} = 412$$

3.2

Согласно государственному стандарту пароль должен состоять из N букв и M цифр. Буквы при этом могут быть как верхнего, так и нижнего регистров. При этом недопустимы пароли, в которых все буквы одинаковые (независимо от регистра). Сколько различных паролей может быть использовать согласно стандарту?

Будем считать, что буквы берутся из английского алфавита и их 26 (от a до z), а цифр 10 (от 0 до 9).

Заметим, что каждый пароль однозначно определятся местами букв в пароле, упорядоченным набором N букв и упорядоченным набором M цифр.

Поясним на примере. Пусть пароль 1tt01e. Буквы находятся на 2, 3, 6 местах. Упорядоченный набор букв получается из пароля выбрасыванием всех цифр - tte. Набор цифр - 101.

Посчитаем места букв. Нужно выбрать N мест среди $N+M$ мест. Их, очевидно, $C_{N+M}^N = \frac{(N+M)!}{N! \cdot M!}$.

Посчитаем наборы букв. Т.к. мы используем и строчные, и прописные буквы, то просто слово длины N можно составить 52^N способами.

Посчитаем слова из одинаковых букв. Например из **A** и **a**. Первую букву можно выбрать из двух вариантов (**A** и **a**), вторую тоже, третью тоже, и т.д. Поэтому всего таких слов 2^N. А т.к. вместо **A** и **a** можно брать любые из 26 букв, то всего нужно выкинуть $26 \cdot 2^N$.

Наборы цифр аналогичны наборам букв. Их 10^M.

Итоговый ответ:

$$\frac{(N+M)!}{N! \cdot M!} \cdot (52^N - 26 \cdot 2^N) \cdot 10^M$$

Подставляем числа:

$$\frac{33!}{29! \cdot 4!} \cdot (52^{29} - 26 \cdot 2^{29}) \cdot 10^4 \approx 2.4 \cdot 10^{58}$$

3.3

С трех различных рабочих станций на сервер передаются пакеты данных. Вероятность успешной передачи пакета данных от первой рабочей станции p_1, от второй - p_2, от третьей - p_3. Найти вероятность того, что:

а. хотя бы один пакет данных будет принят сервером;

б. только два пакета будут приняты сервером;

в. сервер примет не менее двух пакетов.

а. Рассмотрим отрицание утверждения. "Неверно, что хотя бы один пакет данных будет принят сервером"$\Leftrightarrow$ "Не будет принято ни одного пакета". Его вероятность $(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3)$. Вероятности перемножаются, т.к. события независимы - потеря или прием первого пакета не влияют на второй и третий.

Отсюда искомая вероятность:

$$1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3)$$

Подставляем числа:

$$1-(1-0.87)\cdot(1-0.36)\cdot(1-0.94) = 0.995008$$

б. Просто рассмотрим все варианты. Вероятность того, что первый и второй пакеты приняты, а третий потерян - $p_1 \cdot p_2 \cdot (1-p_3)$. Аналогично принятые первый и третий - $p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3$. Принятые второй и третий - $(1-p_1) \cdot p_2 \cdot p_3$.

Итого ответ:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot (1-p_3) + p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3 + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot p_3$$

Подставляем числа:

$$0.87 \cdot 0.36 \cdot (1-0.94) + 0.87 \cdot (1-0.36) \cdot 0.94 + (1-0.87) \cdot 0.36 \cdot 0.94 = 0.586176$$

в. "Сервер примет не менее двух пакетов"$\Leftrightarrow$ "Сервер примет либо два, либо три пакета". Вероятность двух пакетов посчитана в пункте б. Вероятность принять все три пакета - $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$.

Поэтому ответ:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot (1-p_3) + p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3 + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

Подставляем числа:

$$0.87 \cdot 0.36 \cdot (1-0.94) + 0.87 \cdot (1-0.36) \cdot 0.94 + (1-0.87) \cdot 0.36 \cdot 0.94 + 0.87 \cdot 0.36 \cdot 0.94 = 0.880584$$

3.4

Студент сдаёт экзамен по теории вероятностей, при этом N билетов он знает хорошо, а M плохо. Предположим, в первый день экзамен сдаёт часть группы, например, $\frac{N}{2}$ человек, включая нашего героя. В каком случае студенту с большей вероятностью достанется «хороший» билет – если он пойдёт «в первых рядах», или если зайдёт «посерединке», или если будет тянуть билет в числе последних? Когда лучше заходить?

Неважно. Вероятность вытащить хороший билет всегда одинакова.

Пусть наш герой идет первым. Тогда вероятность взять хороший билет равна

$$\frac{N}{N+M}$$

Рассмотрим теперь случай, когда герой идет вторым. Первый человек может вытащить либо плохой билет с вероятностью $\frac{M}{N+M}$, либо хороший с вероятностью $\frac{N}{N+M}$. В первом случае шансы героя повышаются, вероятность получить хороший билет становится $\frac{N}{N+M-1}$. Во втором уменьшаются - $\frac{N-1}{N+M-1}$.

Итого, шансы вытащить хороший билет, заходя вторым, равны

$$\frac{M}{N+M}\cdot\frac{N}{N+M-1}+\frac{N}{N+M}\cdot\frac{N-1}{N+M-1}=\frac{N\cdot M+N^2-N}{(N+M)(N+M-1)}=$$
$$=\frac{N\cdot(N+M-1)}{(N+M)(N+M-1)}=\frac{N}{N+M}$$

Таким образом мы показали, что разницы между первым и вторым местами нет. Но в рассуждениях выше важно лишь что эти два человека идут друг за другом. А первый и второй они, или семнадцатый и восемнадцатый не важно. Т.е. соседние места равнозначны.

А следовательно любые два места равны, т.к. их всегда можно соеденить цепочкой соседних.

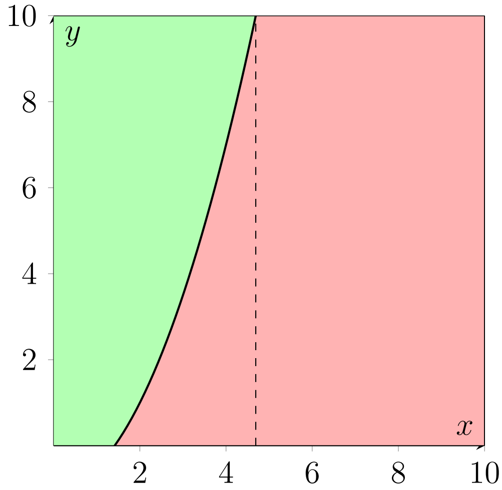
3.5

Генератор чисел выдает на выходе два числа x и y в промежутке от 0 до $(p_1+p_2+p_3)\cdot 100$. Какова вероятность, что $y>\frac{x^2}{2}-1$?

Прежде всего положим, что генератор выдает равномерно распределенные и независимые действительные числа.

Также положим $p=(p_1+p_2+p_3)\cdot 100$.

В этой задаче крйне полезна наглядная/геометрическая интерпретация. Схеатически построим график $f(x)=\frac{x^2}{2}-1$ при $x\in[0;p], y\in[0,p]$. Для простоты и нагядности будем считать $p=10$.



Неравенство из условия выполняется для пары (x, y) только если эта точка лежит выше графика, т.е. попадает в зеленую область. Соответственно, не выполняется, если точка лежит ниже графика. И поэтому искомая вероятность будет равна

$$\frac{S_a}{S_a + S_b} = 1 - \frac{S_b}{S}$$

где S_a - площадь над графиком (зеленая область), S_b - площадь под графиком (красная), S - площадь квадрата на котором мы строим график.

Ясно, что $S = p^2$

Площадь S_b можно посчитать по-разному, например взяв интеграл.
$f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$
$f(x_2) = p \Rightarrow x_2 = \sqrt{2p+2}$

$$S_b = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + (p - x_2) \cdot p = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2p+2}} \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) dx + \left(p - \sqrt{2p+2}\right) \cdot p =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} - x\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2p+2}} + \left(p - \sqrt{2p+2}\right) \cdot p =$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{2p+2}\right)^3}{6} - \sqrt{2p+2}\right) - \left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{6} - \sqrt{2}\right) + \left(p - \sqrt{2p+2}\right) \cdot p =$$

$$= p^2 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\left(\sqrt{p+1}\right)^3 - 1\right)$$

Поэтому искомая вероятность:

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{p+1}\right)^3 - 1}{p^2}$$

Подставим числа:

$$p = (0.87 + 0.36 + 0.94) \cdot 100 = 217$$
$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{217+1}\right)^3 - 1}{217^2} \approx 0.064$$