ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова

Департамент электронной инженерии

Дисциплина: "Электромагнитные поля и волны в современных телекоммуникациях"

ДОМАШНЯЯ РАБОТА

на тему:
Электростатическое поле. Поле электрического диполя

Выполнил студент группы
БИТ-203
_____________/Ефремов В.В./

Преподаватель:
д.т.н., проф. Нефедов В. Н.

Москва 2023

Содержание

1 Введение

Электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла. Стоит отметить, что, во-первых, уравнения зависят от системы единиц измерения (в документе используется СИ, в СГС формулировки несколько отличаются). Во-вторых, уравнения 1.1 и 1.2 эквивалентны. Первый набор уравнений порой называют микроскопическими или уравнениями в вакууме, а второй - макроскопическими или уравнениями в среде. Разница в том, что, в некотором смысле, второй набор уравнений зашивает свойства окружающей среды в поле.

Уравнения Максвелла, в вакууме:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \tag{1.1d}$$

Уравнения Максвелла, в среде:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.2a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.2b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.2c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.2d}$$

Остановимся на обозначениях. $\boldsymbol{E}$ - вектор напряженности электрического поля. Показывает с какой силой поле будет действовать на пробный заряд. Измеряется в В/м.

$\boldsymbol{D}$ - электрическая индукция, измеряется в Кл/м^2.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{P}$ - вектор поляризации. Зачастую можно считать, что вектор поляризации $\boldsymbol{P}$ пропорционален вектору напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$. И тогда $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$.

$\boldsymbol{B}$ - вектор магнитной индукции. Показывает с какой силой магнитное поле будет действовать на движущийся пробный заряд. Единица измерения - тесла (Тл).

$\boldsymbol{H}$ - напряженность магнитного поля, измеряется в А/м.

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{M}$ - намагниченность. В простейших случаях $\boldsymbol{M}$ пропорционален $\boldsymbol{B}$, откуда получается $\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H}$.

ρ - плотность зарядов, измеряется в Кл/м^3. $\boldsymbol{J}$ - плотность тока, измеряется в А/м^2.

2 Электростатическое поле

Электростатическое поле - поле неподвижных зарядов, или, если говорить точнее, случай когда плотность зарядов ρ не меняется во времени. Из-за стационарности во времени правые части всех уравнений кроме первого обнуляются.

Известно, что ротор градиента любой достаточно гладкой функции - нуль. Поэтому можно написать $\boldsymbol{E} = \nabla\phi$. Иногда такая запись оказывается полезной, т.к. сводит нахождение векторного поля $\boldsymbol{E}$ к поиску скалярного.

При такой замене уравнение 1.1а превращается в

$$\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.1}$$

Если взять уравнение 1.1а, проинтегрировать по некоторому объему и применить теорему Стокса, то получится иногда полезное выражение

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.2}$$

Т.е. интеграл по *произвольной* замкнутой поверхности от напряженности электрического поля равен нормированной на ε_0 сумме зарядов внутри объема ограниченного поверхностью.

3 Поле электрического диполя

Рассмотрим действие электрического поля на атом. Поле толкает положительно заряженную часть (ядро) в одну сторону и тянет отрицательно заряженную (облако электронов) в другую. В результате атом как бы растягивается и поворачивается. Этот эффект называется поляризацией, но давайте посмотрим на упрощенную модель - диполь.

(Физический) диполь - система из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов расположенных на малом расстоянии друг от дргуа. Взаимодействие диполя с электрическим полем описывается дипольным моментом

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} \tag{3.1}$$

Это вектор с направлением от отрицательного конца к положительному и длинной пропорциональной заряду. Если вектора $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{p}$ не параллельны, то есть ненулевой момент силы, который заворачивает диполь.

Порой рассматривают идеальный диполь. Он отличается от физического тем, что расстояние d между зарядами устремлено к нулю, и, Соответственно, заряды устремлены к бесконечности чтобы сохранить конечный дипольный момент.

Если говорить о поле диполя, то его потенциал (в сферических координатах) имеет вид

$$\phi_{dip} = \frac{pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{3.2}$$

А само поле

$$\boldsymbol{E_{dip}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2cos\theta\boldsymbol{r} + sin\theta\boldsymbol{\theta}\right) \tag{3.3}$$

Стоит отметить, что потенциал диполя убывает как r^{-2}. Для сравнения, потенциал точечного заряда убывает как r^{-1}. Соответственно, напряженность поля диполя убывает как куб, а точечного заряда как квадрат. Эта закономерность продолжается, если рассмотреть более сложные аналоги диполя - квадруполь (система из четырех зарядов в вершинах квадрата, потенциал убывает как r^{-3}), октополь (восемь зарядов расположенных в вершинах куба, потенциал убывает как r^{-4}).

4 Примеры задач

Задача 1. [1, p. 76, Problem 2.12] *Найдите напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара с плотностью заряда ρ.*

В этой задаче крайне полезна формула 2.2. Из-за сферической симметрии вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ может зависеть только от расстояния до центра шара. Возьмем в качестве области V шар радиуса r. Т.к. E постоянна на границе шара, то интеграл по границе - это просто произведение E на площадь границы.

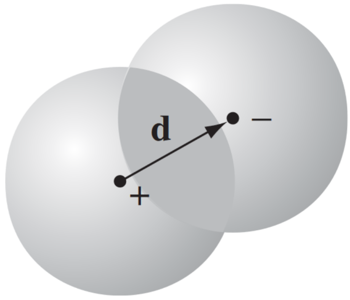
$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = E(r) \cdot (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \tag{4.1}$$

Откуда

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho\boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0} \tag{4.2}$$

□

Задача 2. [1, p. 76, Problem 2.18] *Два шара радиуса R каждый равномерно заряжены с плотностями заряда $+\rho$ и $-\rho$ и расположены так, что частично пересекаются. Покажите что в области пересечения поле постоянно и найдите его значение.*



Возьмем произвольную точку в пересечении и обозначим $\boldsymbol{r}_+$ и $\boldsymbol{r}_-$ - радиус-вектора до этой точки из центров шаров. Поля создаваемые каждым из шаров известны из предыдущей задачи $\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}_+) = \frac{\rho \boldsymbol{r}_+}{3\varepsilon_0}$, $\boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}_-) = \frac{\rho \boldsymbol{r}_-}{3\varepsilon_0}$. И ответом будет их суперпозиция.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{(\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-)\rho}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho \boldsymbol{d}}{3\varepsilon_0} \tag{4.3}$$

Где $\boldsymbol{d}$ - вектор от центра положительно заряженного шара до центра отрицательно заряженного. □

Задача 3. [1, p. 164, Problem 3.50(a)] *Пусть распределение зарядов ρ_1 создает потенциал ϕ_1, а заряды ρ_2 - ϕ_2. Покажите что*

$$\int_{R^3} \rho_1 \phi_2 dV = \int_{R^3} \phi_1 \rho_2 dV \tag{4.4}$$

Докажем одно вспомогательное утверждение. Пусть f и g - скалярные поля, тогда

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g \tag{4.5}$$

Действительно,

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla \cdot \left(f \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \boldsymbol{x_i} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = \\ \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right) = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g \tag{4.6}$$

Перейдем теперь к исходной задаче. Рассмотрим следующий интеграл

$$\int \boldsymbol{E_1} \cdot \boldsymbol{E_2} dV = \int \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 dV = \int \left(\nabla \cdot (\phi_1 \nabla \phi_2) - \phi_1 \Delta \phi_2 \right) dV = \\ \int_{\partial V} \phi_1 \nabla \phi_2 dS - \int_V \phi_1 \Delta \phi_2 dV = - \int_V \phi_1 \frac{\rho_2}{\varepsilon_0} dV \tag{4.7}$$

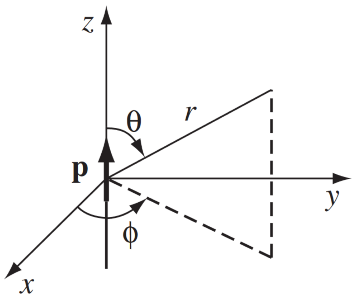
Здесь стоит пояснить почему интеграл по границе обращается в нуль. Мы интегрируем по всему пространству, поэтому граница - это бесконечно удаленные точки. Потенциал определяется с точностью до аддитивной константы и мы, для удобства, берем константу такой, чтобы на бесконечности потенциал обращался в нуль.

С другой стороны, все выкладки в 4.7 симметричны относительно 1 и 2. Поэтому, домножая на $-\varepsilon_0$, получаем

$$\int_{R^3} \rho_1 \phi_2 dV = \int_{R^3} \phi_1 \rho_2 dV \tag{4.8}$$

□

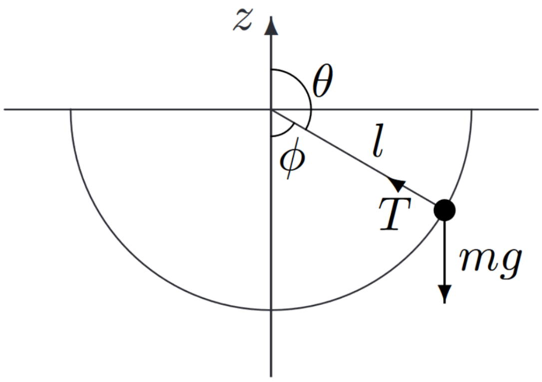
Задача 4. [1, p. 166, Problem 3.56] *Идеальный электрический диполь расположен в начале координат и направлен вверх (по оси Oz). Под действием поля диполя покоящийся точечный заряд расположенный на плоскости xOy начинает двигаться. Покажите что он будет двигаться по полукруглой траектории подобно маятнику.*



Из 3.3 следует, что на заряд будет действовать сила

$$\boldsymbol{F} = \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2cos\theta\boldsymbol{r} + sin\theta\boldsymbol{\theta}\right) \tag{4.9}$$

Рассмотрим математический маятник и покажем, что в нем, с точностью до константы, сила такая же.



Прежде всего, из закона сохранения энергии получается

$$mglcos\phi = \frac{mv^2}{2} \tag{4.10}$$

Из второго закона Ньютона (в проекции на радиальную ось)

$$m\frac{v^2}{l} = T - mgcos\phi \tag{4.11}$$

Выражая T из 4.11 и подставляя v^2 из 4.10, получаем

$$T = 3mgcos\phi = -3mgcos\theta \tag{4.12}$$

На маятник действует всего две силы - тяжести и натяжения подвеса. Суммарная сила действующая на маятник

$$\boldsymbol{F} = -T\boldsymbol{r} - mg\boldsymbol{z} = 3mgcos\theta\boldsymbol{r} - mg\left(cos\theta\boldsymbol{r} - sin\theta\boldsymbol{\theta}\right) = mg(2cos\theta\boldsymbol{r} + sin\theta\boldsymbol{\theta}) \tag{4.13}$$

Выражения 4.9 и 4.13 очень похожи, они отличаются только константой. Первое описывает силу, которая действует на заряд в поле диполя, а второе - силу действующую на маятник. Т.к. силы одинаковы, то и траектории будут одинаковы. Поистине прелестный результат! □

5 Литература

[1] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, Boston, MA, 2013. Re-published by Cambridge University Press in 2017.