

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова  
Департамент электронной инженерии

Курс: ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

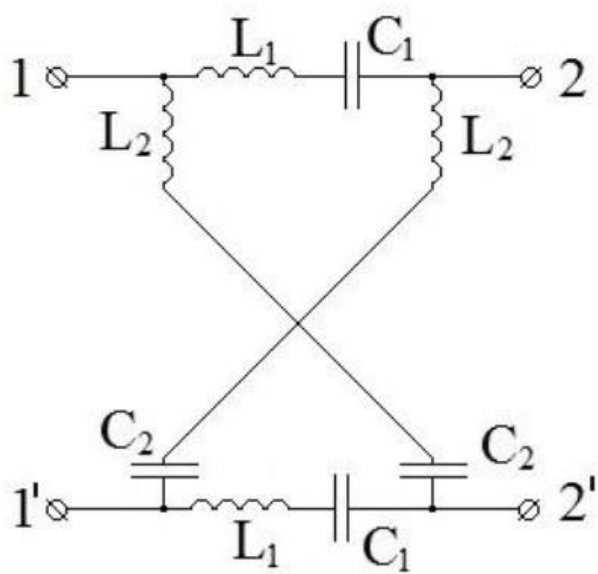
Домашнее задание №3

«ФИЛЬТРЫ»

Ефремов Виктор Васильевич  
БИТ-203  
Вариант 6

Москва  
2021

$L=L_1=50 \text{ мГн}, L_2=10 \text{ мГн}, C=C_1=10 \text{ мкФ}, C_2=1 \text{ мкФ}.$



1.

Система уравнений для А-параметров:

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2$$

$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$$

Рассмотрим фильтр в режиме холостого хода и примем 1' за землю, тогда

$$\varphi_2 = \frac{U_1 * \left( j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

$$\varphi_{2'} = \frac{U_1 * \left( j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right)}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

$$U_2 = \varphi_2 - \varphi_{2'} = \frac{U_1 * \left( j\omega(L_2 - L_1) + \frac{1}{j\omega C_2} - \frac{1}{j\omega C_1} \right)}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = U_1 * \frac{(C_1 - C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)}{(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 + L_1)}$$

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 + L_1)}{(C_1 - C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)}$$

$$A_{11}(0) = \frac{C_1 + C_2}{C_1 - C_2} = \frac{10 + 1}{10 - 1} \approx 1.22 > 1$$

$$A_{11}(\infty) = \frac{L_2 + L_1}{L_2 - L_1} = \frac{10 + 50}{10 - 50} = -1.5 < -1$$

Поэтому это полосовой фильтр.

Найдем граничные частоты:

$$A_{11}(\omega) = 1$$

$$(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 + L_1) = (C_1 - C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)$$

$$2C_2 = 2\omega^2 C_1 C_2 L_1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}} = \sqrt{\frac{1}{50 * 10^{-3} * 10 * 10^{-6}}} \approx 1414.21$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{1414.21}{2 * 3.1415926} \approx \mathbf{225.08 \text{ Гц}}$$

$$A_{11}(\omega) = -1$$

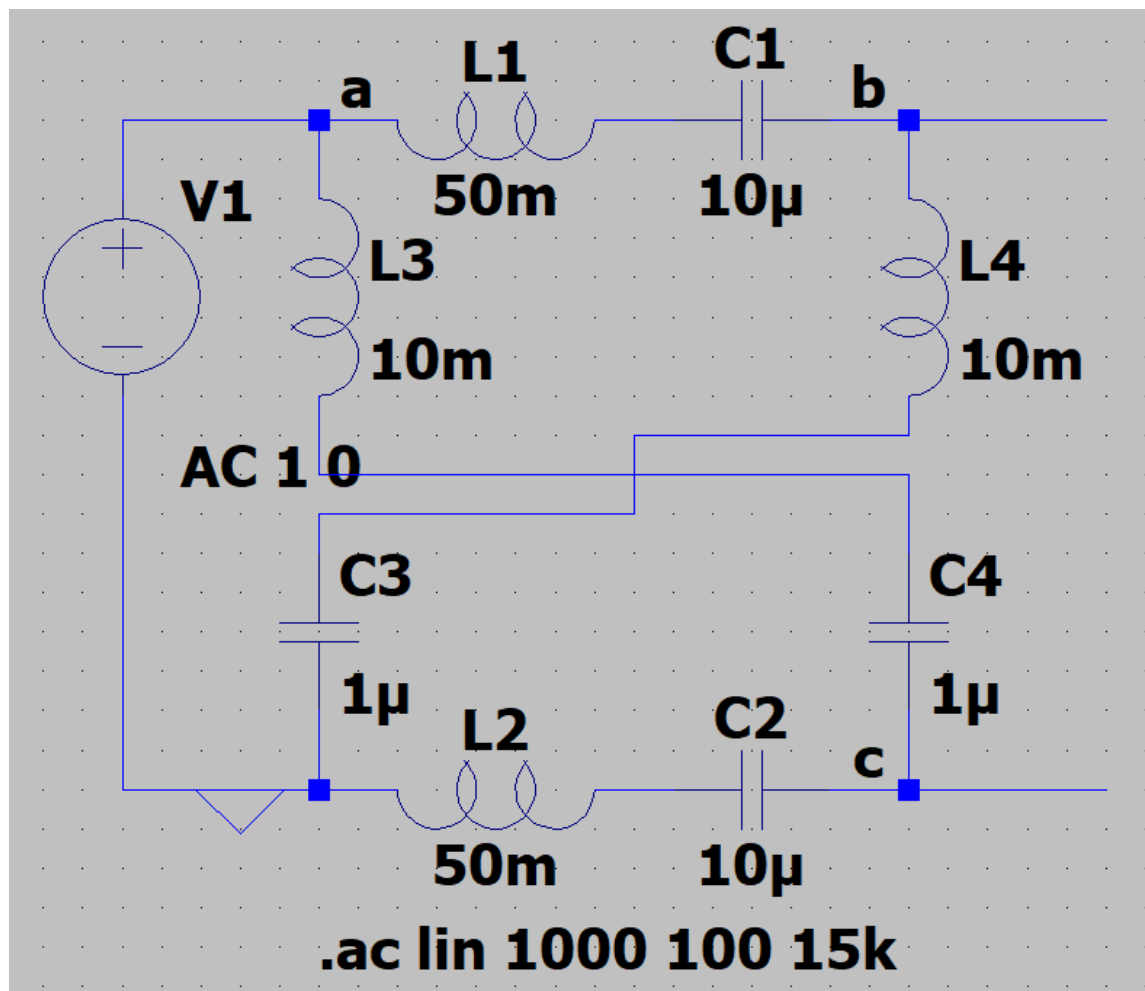
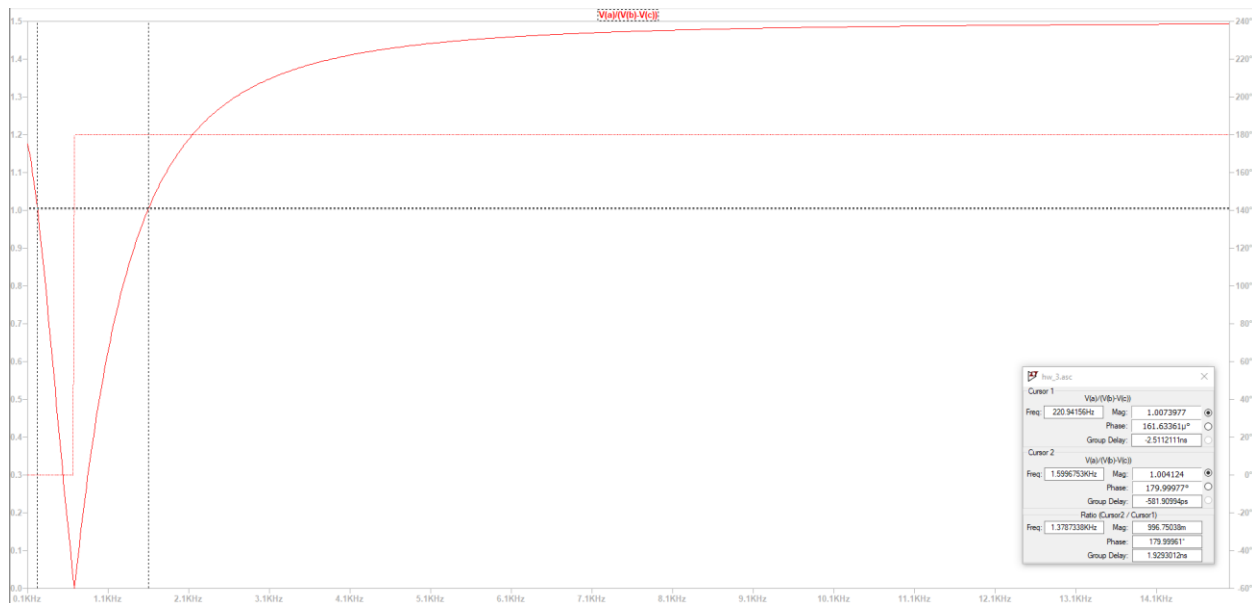
$$(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 + L_1) = -(C_1 - C_2) + \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)$$

$$2C_1 = 2\omega^2 C_1 C_2 L_2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2}} = \sqrt{\frac{1}{10 * 10^{-3} * 1 * 10^{-6}}} \approx 10000$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{10000}{2 * 3.1415926} \approx \mathbf{1591.55 \text{ Гц}}$$

Симуляция спайса ниже. Можно видеть, что граничные частоты отличаются от теоретически рассчитанных всего на несколько герц.



2.

Положим  $\omega' = 6 * 10^3$ ,  $\omega'' = 30 * 10^3$ . Найдем характеристическое сопротивление, коэффициент ослабления и коэффициент фазы.

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 + L_1)}{(C_1 - C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)} = \frac{11 * 10^{-6} - \omega^2 * 10 * 10^{-12} * 60 * 10^{-3}}{9 * 10^{-6} - \omega^2 * 10 * 10^{-12} * (-40) * 10^{-3}}$$

$$= \frac{11 - 6 * 10^{-7} * \omega^2}{9 + 4 * 10^{-7} * \omega^2} = \frac{110 * 10^6 - 6\omega^2}{90 * 10^6 + 4\omega^2}$$

$$A_{11}(\omega') = -0.45$$

$$A_{11}(\omega'') = -1.43$$

Известно (см. например лекции), что

$$Z_C = \sqrt{Z_K Z_X}$$

$$Z_X = \frac{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}}{2}$$

$$Z_K = 2 * \left( j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) \parallel \left( j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) = \frac{2 * \left( j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) * \left( j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

$$= \frac{1}{Z_X} * \left( j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) * \left( j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)$$

$$Z_C = \sqrt{\left( j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) * \left( j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}$$

$$Z_C(\omega')$$

$$= \sqrt{\left( j6 * 10^3 * 50 * 10^{-3} + \frac{1}{j6 * 10^3 * 10 * 10^{-6}} \right) * \left( j6 * 10^3 * 10 * 10^{-3} + \frac{1}{j6 * 10^3 * 1 * 10^{-6}} \right)}$$

$$\approx 173.85$$

$$Z_C(\omega'')$$

$$= \sqrt{\left( j30 * 10^3 * 50 * 10^{-3} + \frac{1}{j30 * 10^3 * 10 * 10^{-6}} \right) * \left( j30 * 10^3 * 10 * 10^{-3} + \frac{1}{j30 * 10^3 * 1 * 10^{-6}} \right)}$$

$$\approx j631.75$$

Т.к. фильтр из задания симметричный, то посчитаем постоянную передачи  $\Gamma = A + jB$ , и из нее найдем постоянные ослабления и фазы.

Известно (см. например лекции), что

$$\tanh \Gamma = \sqrt{\frac{Z_K}{Z_X}} = \frac{\sqrt{Z_K Z_X}}{Z_X} = \frac{Z_C}{Z_X}$$

$$Z_X(\omega') = \frac{j * 6 * 10^3 * 60 * 10^{-3} + \frac{1}{j * 6 * 10^3 * 10 * 10^{-6}} + \frac{1}{j * 6 * 10^3 * 1 * 10^{-6}}}{2} \approx j88.33$$

$$\tanh \Gamma(\omega') \approx \frac{173.85}{j88.33} \approx -j1.97$$

$$\Gamma(\omega') \approx -j1.1$$

Т.е. в случае  $\omega' = 6 * 10^3$  (частота в полосе пропускания) постоянная ослабления  $A = 0$ , а постоянная фазы  $B = -1.1$ .

$$Z_X(\omega'') = \frac{j * 30 * 10^3 * 60 * 10^{-3} + \frac{1}{j * 30 * 10^3 * 10 * 10^{-6}} + \frac{1}{j * 30 * 10^3 * 1 * 10^{-6}}}{2} \approx j881.67$$

$$\tanh \Gamma(\omega'') \approx \frac{j631.75}{j881.67} \approx 0.72$$

$$\Gamma(\omega'') \approx 0.9$$

В случае же  $\omega'' = 6 * 10^3$  (частота в полосе задерживания) постоянная ослабления  $A = 0.9$ , а постоянная фазы  $B = 0$ .

3.

Посчитаем А-параметры.

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2$$

$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$$

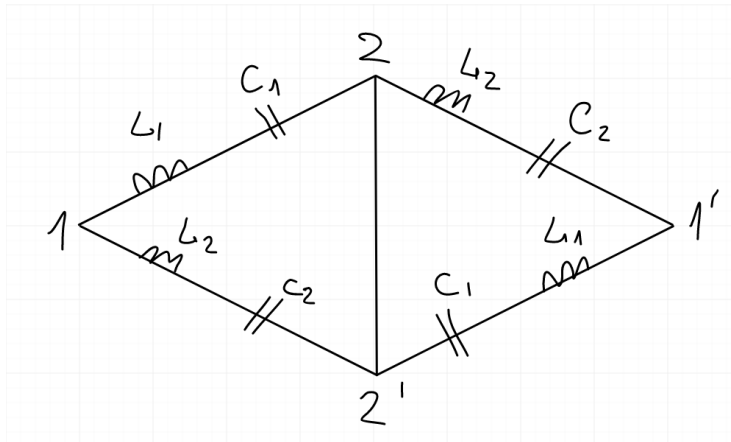
Рассмотрим фильтр в режиме холостого хода. Выше было посчитано, что

$$U_2 = \varphi_2 - \varphi_{2'} = \frac{U_1 * \left( j\omega(L_2 - L_1) + \frac{1}{j\omega C_2} - \frac{1}{j\omega C_1} \right)}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = U_1 * \frac{(C_1 - C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)}{(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 + L_1)}$$

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 + L_1)}{(C_1 - C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)}$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} = \frac{U_1}{Z_X U_2} = \frac{A_{11}}{Z_X} = \frac{(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 + L_1)}{(C_1 - C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)} * \frac{2}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

Рассмотрим теперь режим короткого замыкания (схематичный рисунок ниже):



Ток из узла 1 в 2, по правилу делителя токов, будет равен  $I_1 * \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$ , где  $Z_k = j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}$ .

Аналогично ток из 1 в 2' будет равен  $I_1 * \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$ . Откуда, ток из 2 в 2' будет равен их разности

$$I_2 = I_1 * \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$A_{22} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} = \frac{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega(L_2 - L_1) - \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_1 + L_2)}{(C_1 - C_2) - \omega^2 C_1 C_2 (L_2 - L_1)} = A_{11}$$

$$A_{12} = \frac{U_1}{I_2} = \frac{I_1 * 2 * \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}{I_2} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} = \frac{2 * \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) * \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)}{j\omega(L_2 - L_1) - \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

$$= \frac{2(1 - \omega^2 L_1 C_1)(1 - \omega^2 L_2 C_2)}{j\omega(C_1 - C_2) - j\omega^3 C_1 C_2 (L_2 - L_1)}$$

Подставим числа (я привожу только конечный ответ ради краткости):

|          | $\omega'$ | $\omega''$ |
|----------|-----------|------------|
| $A_{11}$ | -0.45     | -1.43      |
| $A_{12}$ | j155      | -j649      |
| $A_{21}$ | j0.0051   | j0.0016    |
| $A_{22}$ | -0.45     | -1.43      |
| $Det A$  | 0.993     | 1.0065     |

Можно видеть что уравнение связи ( $Det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ ) вполне выполняется (с поправкой на округления при вычислениях).

Пусть сопротивление нагрузки равно  $Z_H = Z_C(\omega') = 174 \text{ Ом}$ , а ток  $I_2 = 1 \text{ А}$ . Найдем напряжение и ток на входе, а также входное сопротивление. Для этого воспользуемся уравнением А-параметров.

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2$$

$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$$

$$U_2 = I_2 * Z_H = 1 * 174 = 174 \text{ В}$$

$$\text{Для } \omega' = 6 * 10^3$$

$$U_1 = -0.45 * 174 + j155 * 1 = -78.3 + j155$$

$$I_1 = j0.0051 * 174 - 0.45 * 1 = -0.45 + j0.8874$$

$$Z_{Bx} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{-78.3 + j155}{-0.45 + j0.8874} \approx -103.5 + j204.8$$

$$\text{Для } \omega'' = 30 * 10^3$$

$$U_1 = -1.43 * 174 - j649 * 1 = -248.82 - j649$$

$$I_1 = j0.0016 * 174 - 1.43 * 1 = -1.43 + j0.2784$$

$$Z_{Bx} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{-248.82 - j649}{-1.43 + j0.2784} \approx 606.1 + j1580.9$$