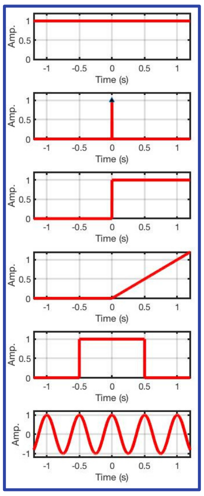
Departamento de Engenharia Informática

Capítulo 1: Introdução (cont.)

- Sinais e suas propriedades
- Transformações da variável independente

Sinais e suas propriedades

Sinais unidimensionais de tempo contínuo ($t \in \mathbf{R}$) mais comuns:

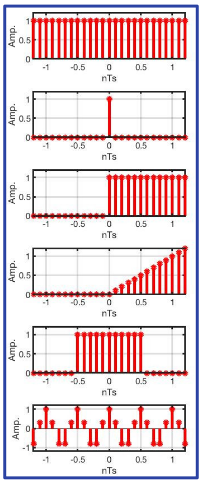


- Constante:
  - **x(t) = a** , em que **a** é uma constante.
- Impulso de Dirac (ou Delta de Dirac, **δ(t)**)
  - **x(t) =δ(t)** , com: **x(t)=0 para** $t \neq 0$, **x(t)=∞ para** $t = 0$
- Degrau unitário (representado por **u(t)**):
  - **x(t) = 0 para t < 0, x(t) = 1 para t ≥ 0.**
- Rampa unitária:
  - **x(t) = 0 para t < 0, x(t) = t para t ≥ 0.**
- Pulso unitário retangular:
  - **x(t) = 1 para a ≤ t ≤ b, x(t) = 0 para os outros casos.**
- Sinusóide:
  - **x(t) = C cos(ωt + θ).**

Sinais e suas propriedades

Sinais unidimensionais de tempo discreto ($n \in \mathbf{Z}$) mais comuns:

- Constante:
  - **x[n] = a** , em que **a** é uma constante.
- Impulso unitário (representado por δ[n]):
  - **x[n] = 0 para n $\neq$ 0, x[n] = 1 para n = 0.**
- Degrau unitário (por vezes representado por 1[n] ou u[n]):
  - **x[n] = 0 para n < 0, x[n] = 1 para n $\geq$ 0.**
- Rampa unitária:
  - **x[n] = 0 para n < 0, x[n] = n para n $\geq$ 0.**
- Pulso unitário retangular:
  - **x[n] = 1 para a $\leq$ n $\leq$ b, x[n] = 0 para os outros casos.**
- Sinusóide:
  - **x[n] = C cos[Ωn + θ].**

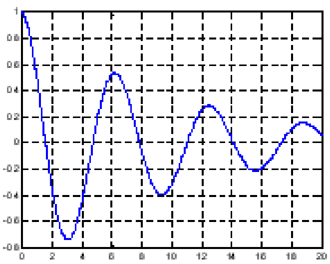


Sinais e suas propriedades

Sinais de tempo contínuo

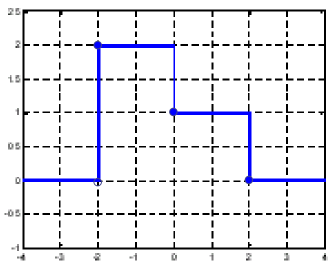
- Um sinal diz-se de **tempo contínuo** quando a variável independente (tempo) é contínua ($t \in \mathbf{R}$).

$$x(t) = \cos(t)e^{-0.1t}$$



$$0 \leq t \leq 20$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , t < -2 \\ 2 & , -2 \leq t < 0 \\ 1 & , 0 \leq t < 2 \\ 0 & , t \geq 2 \end{cases}$$



$$-4 \leq t \leq 4$$

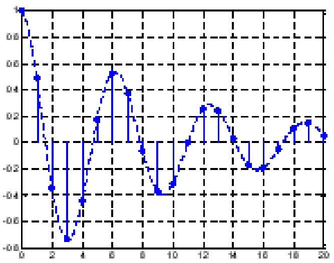
Sinais e suas propriedades

Sinais de tempo discreto

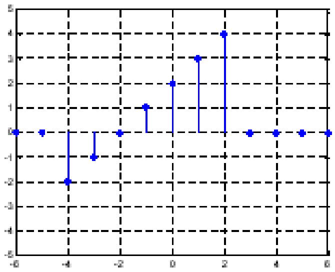
- Um sinal diz-se de **tempo discreto** quando a variável independente (tempo) é discreta (n ∈ **Z**).

$$x[n] = \cos[n]e^{-0.1n}$$

$$x[n] = \begin{cases} 0 & ,n < -4 \\ n+2 & ,-4 \le n < 3 \\ 0 & ,n \ge 3 \end{cases}$$



$$0 \le n \le 20$$



$$-6 \le n \le 6$$

Sinais e suas propriedades

Sinais pares

- Um sinal diz-se **par** quando é **<u>simétrico em relação ao eixo das ordenadas</u>**. No caso contínuo um **sinal par** satisfaz, por definição, a condição:

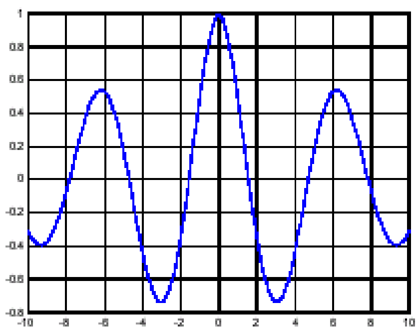
  x(t) = x(-t) , ∀ t ∈ **R**

  e no caso discreto, a condição

  x[n] = x[-n] , ∀ n ∈ **Z**

$$x(t) = \cos(t)e^{-0.1|t|}$$

$$-10 \le t \le 10$$



Sinais e suas propriedades

Sinais ímpares

- Um sinal diz-se **ímpar** quando é **anti-simétrico em relação ao eixo das ordenadas**. No caso contínuo um **sinal ímpar** satisfaz, por definição, a condição:

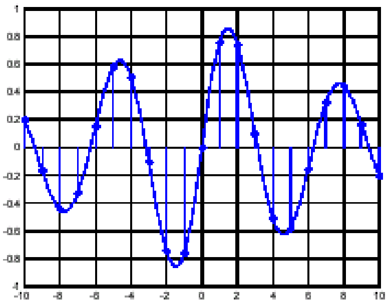
  x(t) = - x(-t) , ∀ t ∈ **R**

  e no caso discreto, a condição

  x[n] = - x[-n] , ∀ n ∈ **Z**

$$x[n] = \sin[n]e^{-0.1|n|}$$

$$-10 \le n \le 10$$



Sinais e suas propriedades

Decomposição par-ímpar

- Qualquer sinal de tempo contínuo x(t), pode ser decomposto nas suas componentes par $x_p(t)$ e ímpar $x_i(t)$:

$$x_p(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

- Para um sinal de tempo discreto, x[n], as suas componentes par $x_p[n]$ e ímpar $x_i[n]$ são dadas pelas expressões:

$$x_p[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2}$$

$$x_i[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2}$$

Sinais e suas propriedades

Decomposição par-ímpar (exercício)

- Considere o sinal x(t), t ∈ **R** :

$$x(t)=\begin{cases}0 & ,t<-2\\ 2 & ,-2\le t<0\\ 1 & ,0\le t<2\\ 0 & ,t\ge 2\end{cases}$$

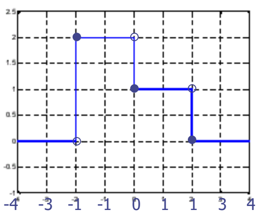
- Esboce o sinal. Calcule e esboce as suas componentes par e ímpar.

Sinais e suas propriedades

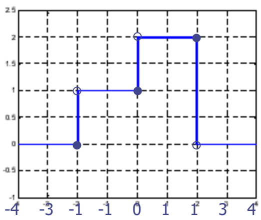
Decomposição par-ímpar (exercício)

- Decomposição do sinal x(t):

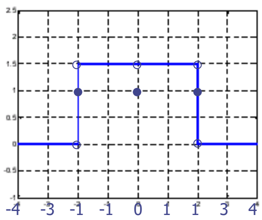
x(t)



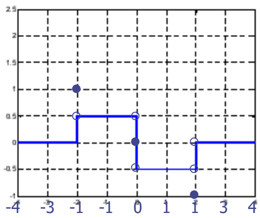
x(-t)



$x_p(t)$



$x_i(t)$



Sinais e suas propriedades

Decomposição par-ímpar (exercício)

- Decomposição do sinal x(t):

$$x(-t)=\begin{cases}0 & ,t\le -2\\ 1 & ,-2<t\le 0\\ 2 & ,0<t\le 2\\ 0 & ,t>2\end{cases}$$

$$x_p(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}=\begin{cases}0 & ,t<-2\\ 1 & ,t=-2\\ 1.5 & ,-2<t<0\\ 1 & ,t=0\\ 1.5 & ,0<t<2\\ 1 & ,t=2\\ 0 & ,t>2\end{cases}$$

$$x_i(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}=\begin{cases}0 & ,t<-2\\ 1 & ,t=-2\\ 0.5 & ,-2<t<0\\ 0 & ,t=0\\ -0.5 & ,0<t<2\\ -1 & ,t=2\\ 0 & ,t>2\end{cases}$$

Sinais e suas propriedades

Sinais de tempo contínuo periódicos

- Um sinal de tempo contínuo, x(t), diz-se **periódico** se satisfaz a seguinte condição:

  $$x(t) = x(t+T_0) \quad ,\ \forall\ t \in \mathbf{R}$$

  em que $\mathbf{T_0}$ é uma constante positiva.

- O menor valor positivo de $\mathbf{T_0}$ que satisfaz a condição é designado por **período fundamental** do sinal, vulgarmente designado apenas por **período** do sinal. O inverso do período é designado por **frequência fundamental** do sinal, $\mathbf{f_0=1/T_0}$ em Hz.

- O correspondente valor angular é designado por **frequência angular fundamental** do sinal (em radianos por segundo):

  $$\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}\ {}^{rad}\!/_{s}}$$

- Um sinal para o qual não exista nenhum valor $\mathbf{T_0}$ tal que $x(t) = x(t+T_0)$, $\forall$ t, diz-se um sinal **não periódico** ou sinal **aperiódico**.

Sinais e suas propriedades

Sinais de tempo discreto periódicos

- Um sinal de tempo discreto, x[n], diz-se **periódico** se satisfaz a seguinte condição:

  x[n] = x[n+N] , ∀ n em que **N** é um inteiro positivo.

- O menor valor de **N** que satisfaz a condição é designado por **período fundamental** do sinal de tempo discreto.

- No caso discreto, a **frequência angular fundamental** é representada pelo carácter maiúsculo (em radianos):

$$\boxed{\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} rad}$$

- Caso o sinal de tempo discreto resulte da amostragem de um sinal de tempo contínuo (com um período de amostragem: $\mathbf{T_s}$), temos $\mathbf{T_0=N\ T_s}$ ou seja:

$$\boxed{\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = 2\pi\frac{T_s}{T_0} = \omega_0 T_s = 2\pi\frac{f_0}{f_s} rad}$$

Sinais e suas propriedades

Sinais periódicos (exercício)

- Considere o sinal de tempo contínuo:

$$x(t) = \cos(10\pi t)$$

- Calcule a sua frequência angular, frequência e período fundamental.

- Escreva a **expressão do sinal discreto** resultante da amostragem do sinal **x(t)** com uma frequência de amostragem $\mathbf{f_{sk} = k\ f_0}$ e calcule a sua frequência angular e o seu período.

- Particularize a expressão obtida para k = 2, 4, 6, 8 e 10.
  Para cada um dos valores de **k** calcule a frequência angular e o período dos sinais discretos.

Sinais e suas propriedades

Sinais periódicos (exercício)

- Sabemos que o co-seno pode ser escrito genericamente na forma ***cos(ω₀ t + θ₀)***, sendo ω_0 a frequência angular e θ_0 a fase na origem. Para o sinal particular temos:

$$\omega_0 = 10\pi \ rad\ s^{-1}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5\ Hz$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.2\ s$$

- Amostrando o sinal $\boldsymbol{x(t) = \cos(2\pi f_0 t)}$ com uma frequência de amostragem $\boldsymbol{f_{sk} = k\, f_0}$, resulta o sinal discreto:

$$x[n] = x[nT_s] = x(t)\big|_{t=nT_s} = \cos[2\pi f_0 n T_s] = \cos[2\pi \frac{f_0}{f_s} n] = \cos[\frac{2\pi}{k} n]$$

Sinais e suas propriedades

Sinais periódicos (exercício)

- Sendo a frequência angular e o período fundamentais dados por:

$$\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s} = \frac{2\pi}{k} \quad , N = \frac{2\pi}{\Omega_0} = k$$

- De notar que a expressão geral do sinal de tempo discreto é $\cos[\Omega_0 n + \theta_0]$

- Para k = 2, 4, 6, 8 e 10:

$$x[n] = \cos[n\pi] \quad , \Omega_0 = \pi \ , N = 2$$
$$x[n] = \cos[n\tfrac{\pi}{2}] \quad , \Omega_0 = \tfrac{\pi}{2} \ , N = 4$$
$$x[n] = \cos[n\tfrac{\pi}{3}] \quad , \Omega_0 = \tfrac{\pi}{3} \ , N = 6$$
$$x[n] = \cos[n\tfrac{\pi}{4}] \quad , \Omega_0 = \tfrac{\pi}{4} \ , N = 8$$
$$x[n] = \cos[n\tfrac{\pi}{5}] \quad , \Omega_0 = \tfrac{\pi}{5} \ , N = 10$$

Sinais e suas propriedades

Energia de um sinal

- A energia de um sinal de tempo contínuo **x(t)**, é dada por (em *J*):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

- A energia de um sinal de tempo discreto **x[n]**, é dada por (em *J*):

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Sinais e suas propriedades

Potência de um sinal de tempo contínuo

- A potência média (em *W*) de um sinal de tempo contínuo **x(t)**, é dada por:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

- Se o sinal for periódico de período fundamental $\mathbf{T_0}$, obtém-se:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

Sinais e suas propriedades

Potência de um sinal de tempo discreto

- A potência média (em *W*) de um sinal discreto **x[n]**, é dada por:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$

- Se o sinal for periódico de período fundamental **N**, obtém-se :

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Sinais e suas propriedades

Sinal de energia:

- Um sinal diz-se **sinal de energia** se a sua energia for finita não nula:

$$0 < E < \infty$$

  - Um sinal de energia tem potência média nula.

Sinal de potência:

- Um sinal diz-se **sinal de potência** se a sua potência média for finita não nula:

$$0 < P < \infty$$

  - Um sinal de potência tem energia infinita.

Sinais e suas propriedades

Energia de um sinal de tempo contínuo (exercício):

- Calcule a energia do seguinte sinal de tempo contínuo:

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & ,0 \le t \le 4 \\ 0 & ,t \notin [0,4] \end{cases}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_0^4 |t^2|^2 \, dt = \left. \frac{t^5}{5} \right|_0^4 = \frac{4^5}{5} = 204.8J$$

Sinais e suas propriedades

Potência de um sinal de tempo contínuo (exercício):

- Calcule a potência do seguinte sinal de tempo contínuo periódico:

$$x(t) = 4\cos(10\pi t)$$

$$\omega_0 t = 10\pi t \Rightarrow \tfrac{2\pi}{T_0} t = 10\pi t \Rightarrow T_0 = \tfrac{1}{5} s$$

$$P = \tfrac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt = 5 \int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} 4^2 \cos^2(10\pi t) dt =$$

$$= 4^2 \left(\tfrac{1}{4\pi} \cos(10\pi t)\sin(10\pi t) + \tfrac{5t}{2} \right) \Big|_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} = \frac{4^2}{2} = 8W$$

$\therefore$ **A potência do sinal x(t) = C cos(ω_0t+θ) é igual a C²/2.**

Sinais e suas propriedades

Energia de um sinal de tempo discreto (exercício):

- Calcule a energia do seguinte sinal de tempo discreto (n ∈ **Z**):

$$x[n] = \begin{cases} 0 & , n < -4 \\ n+2 & , -4 \le n < 3 \\ 0 & , n \ge 3 \end{cases}$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-4}^{2} |x[n]|^2 =$$
$$= (-2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 35J$$

Sinais e suas propriedades

Potência de um sinal de tempo discreto (exercício):

- Calcule a potência do seguinte sinal de tempo discreto periódico:

$$x[n] = \cos[\tfrac{\pi}{3} n]$$

$$\Omega_0 n = \tfrac{\pi}{3} n \Rightarrow \tfrac{2\pi}{N} n = \tfrac{\pi}{3} n \Rightarrow N = 6$$
$$P = \tfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \tfrac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} \cos^2[n\tfrac{\pi}{3}] =$$
$$= \tfrac{1}{6}\left((1)^2 + (0.5)^2 + (-0.5)^2 + (-1)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 \right) = 0.5W$$

Sinais e suas propriedades

Transformações lineares da variável independente

- A transformação linear da variável independente de um sinal de tempo contínuo ***x(t)***, é dada por:

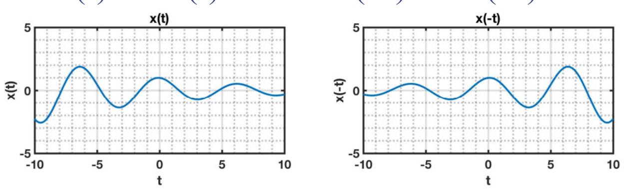
$$x(t) \Rightarrow x(at-b) \quad \text{sendo } a \text{ e } b \text{ reais.}$$

- Casos particulares:
  - **Inversão** (*a=-1* e *b=0*)
  - **Compressão** (*a>1* e *b=0*)
  - **Expansão** (*0<a<1* e *b=0*)
  - **Avanço** (*a=1* e *b<0*)
  - **Atraso** (*a=1* e *b>0*)

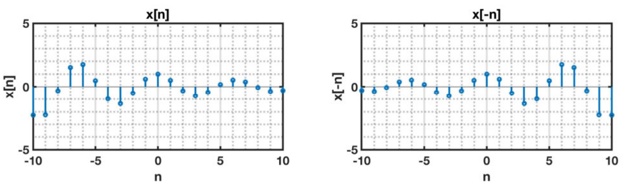
Sinais e suas propriedades

- **Inversão:** $x(t) \Rightarrow x(at-b)\Big|_{\substack{a=-1\\b=0}} \Leftrightarrow x(t) \Rightarrow x(-t)$

$$x(t) = \cos(t)e^{-0.1t} \Rightarrow x(-t) = \cos(-t)e^{0.1t}$$



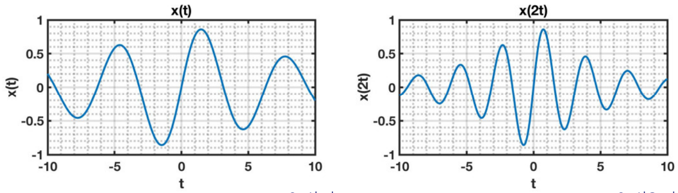
$$x[n] = \cos[n]e^{-0.1n} \Rightarrow x[-n] = \cos[-n]e^{0.1n}$$



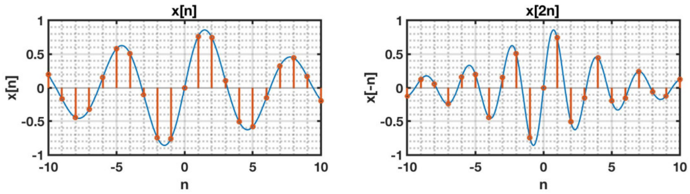
Sinais e suas propriedades

- **Compressão:** $x(t) \Rightarrow x(at-b)\Big|_{\substack{a>1\\b=0}} \Leftrightarrow x(t) \Rightarrow x(at)$

$$x(t)=\sin(t)e^{-0.1|t|} \Rightarrow x(2t)=\sin(2t)e^{-0.1|2t|}$$



$$x[n]=\sin[n]e^{-0.1|n|} \Rightarrow x[2n]=\sin[2n]e^{-0.1|2n|}$$

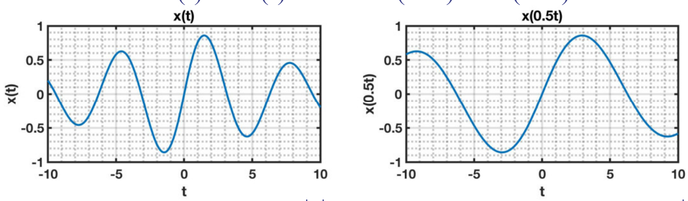


Se ***an*** não for inteiro, há amostras do sinal que se perdem.

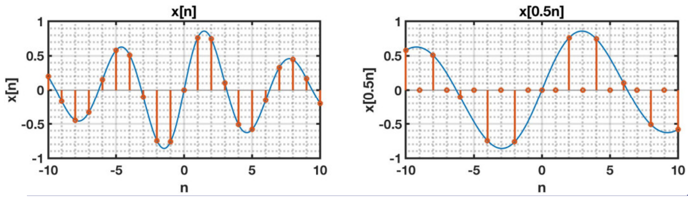
Sinais e suas propriedades

- **Expansão:** $x(t) \Rightarrow x(at-b)\Big|_{\substack{0<a<1\\b=0}} \Leftrightarrow x(t) \Rightarrow x(at)$

$$x(t)=\sin(t)e^{-0.1|t|} \Rightarrow x(0.5t)=\sin(0.5t)e^{-0.1|0.5t|}$$



$$x[n]=\sin[n]e^{-0.1|n|} \Rightarrow x[0.5n]=\sin[0.5n]e^{-0.1|0.5n|}$$

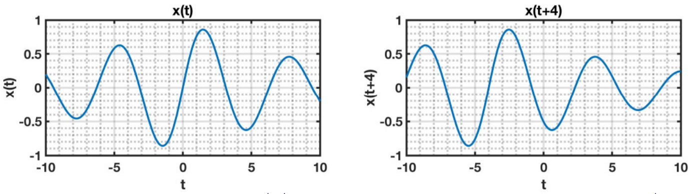


Na expansão, há amostras do novo sinal que têm que ser estimadas.

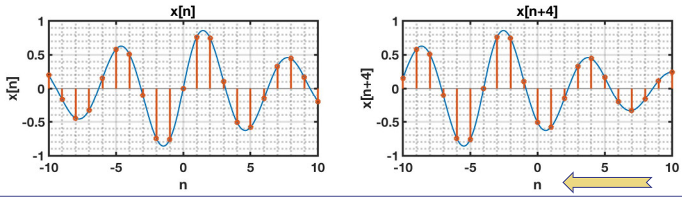
Sinais e suas propriedades

◆ **Avanço:** $x(t) \Rightarrow x(at-b)\Big|_{\substack{a=1\\b<0}} \Leftrightarrow x(t) \Rightarrow x(t+|b|)$

$$x(t)=\sin(t)e^{-0.1|t|} \Rightarrow x(t+4)=\sin(t+4)e^{-0.1|t+4|}$$



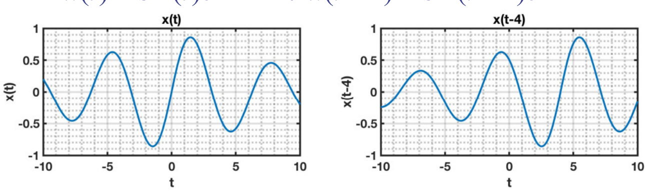
$$x[n]=\sin[n]e^{-0.1|n|} \Rightarrow x[n+4]=\sin[n+4]e^{-0.1|n+4|}$$



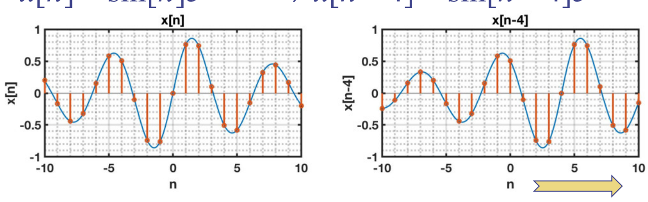
Sinais e suas propriedades

◆ **Atraso:** $x(t) \Rightarrow x(at-b)\Big|_{\substack{a=1\\b>0}} \Leftrightarrow x(t) \Rightarrow x(t-|b|)$

$$x(t)=\sin(t)e^{-0.1|t|} \Rightarrow x(t-4)=\sin(t-4)e^{-0.1|t-4|}$$



$$x[n]=\sin[n]e^{-0.1|n|} \Rightarrow x[n-4]=\sin[n-4]e^{-0.1|n-4|}$$



Sinais e suas propriedades

- **Transformação linear da variável independente:**

$$x(t) \Rightarrow x(at-b) \quad \text{sendo } a \text{ e } b \text{ reais.}$$

- Para se obter corretamente o sinal resultante da transformação linear da variável independente de um sinal, deve proceder-se:
  - em primeiro lugar, à operação de **translação** (atraso ou avanço) e
  - seguidamente à operação de **escalonamento** (expansão ou compressão):

$$y(t) = x(at-b) \text{ , sendo } a \text{ e } b \text{ reais} \Leftrightarrow$$

$$y_{aux}(t) = x(t - b_{aux}) \quad ,$$

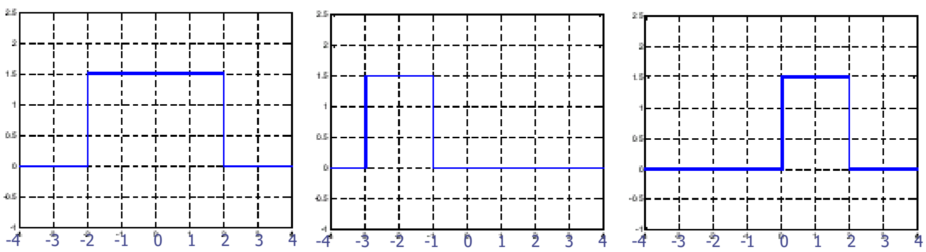
$$y(t) = y_{aux}(at) = x(a(t-b_{aux})) = x(at-b)$$

Sinais e suas propriedades

Transformação linear (exercício)

- Determine as relações entre o sinal ***x(t)*** e os sinais ***$y_1(t)$*** e ***$y_2(t)$***:

x(t) *$y_1(t)$* *$y_2(t)$*



$$y_1(t) = x(2(t+2)) = \\ = x(2t+4)$$

$$y_2(t) = x(2(t-1)) = \\ = x(2t-2)$$

Sinais e suas propriedades

Transformação linear (exercício)

- Como o sinal ***x*(*t*)** é par, não se pode avaliar se há inversão do sinal, mas pode-se verificar que:

$$\begin{cases} y_1(-3) = x(-2) \\ y_1(-1) = x(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(-3) = x(a\,t|_{t=-3} - b) = x(-2) \\ y_1(-1) = x(a\,t|_{t=-1} - b) = x(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(-3a-b) = x(-2) \\ x(-a-b) = x(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow y_1(t) = x(2t+4)$$

$$\begin{cases} y_2(0) = x(-2) \\ y_2(2) = x(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2(0) = x(a\,t|_{t=0} - b) = x(-2) \\ y_2(2) = x(a\,t|_{t=2} - b) = x(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(-b) = x(-2) \\ x(2a-b) = x(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y_2(t) = x(2t-2)$$

Sinais e suas propriedades

Exercício:

- Considere o sinal de tempo discreto $x[n] = 4\cos[0.1\pi n - \pi]$
  - Caracterize e determine os parâmetros de uma transformação linear da variável independente que aplicada no sinal $x[n]$ resulte no sinal:

$$y[n] = -4\sin[0.5\pi n]$$

  - Calcule a potência do sinal $y[n]$ e diga, justificadamente, qual a relação entre as potências dos sinais $x[n]$ e $y[n]$.

Sinais e suas propriedades

Resolução do exercício:

- A transformação linear da variável independente é dada por $y[m] = x[am\text{-}b]$. Reescrevendo as expressões de $y[m]$ e de $x[am\text{-}b]$, obtém-se:

$$y[m] = -4\sin[0.5\pi m] = -4\cos[-0.5\pi m + \tfrac{\pi}{2}] \quad \text{e:}$$

$$x[am-b] = 4\cos[0.1\pi(am-b) - \pi]$$

Ou seja: $$x[am-b] = -4\cos[0.1\pi(am-b)] = -4\cos[0.1\pi am - 0.1\pi b]$$

Comparando as duas expressões obtém-se:

$$(0.1\pi am - 0.1\pi b) = (-0.5\pi m + \tfrac{\pi}{2}) + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$$

Escolhendo k =0, vem: $$\left| \begin{array}{l} 0.1\pi a = -0.5\pi \\ -0.1\pi b = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = -5 \\ b = -5 \end{array} \right.$$

Sinais e suas propriedades

Resolução do exercício (cont.):

- Assim, a transformação é caracterizada por uma compressão e inversão (a=-5) e por um avanço (b=-5).

- Sendo $x[n]$ e $y[n]$ sinais sinusoidais, a potência só depende da sua amplitude. Assim, as potências dos sinais $x[n]$ e $y[n]$ são iguais e de valor 8 W.