Introdução à Ficha Prática nº 2

Objetivo: *Pretende-se adquirir sensibilidade para as questões fundamentais de sinais, em particular para as propriedades de sinais de tempo contínuo e de tempo discreto e para o cálculo da energia.*

Exercícios:

1. Pretende-se analisar o sinal de tempo contínuo $x_1(t) = 6\cos(3t)\sin(4t)$ para $t \in [-\pi, \pi]s$.
   1.1. Determinar as frequências (linear e angular) fundamentais e o período fundamental de $x_1(t)$, tendo em conta a seguinte formulação de Fourier para sinais de tempo contínuo:
   $$x_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) .$$
   1.2. Verificar a paridade do sinal $x_1(t)$.
   1.3. Obter a expressão do sinal de tempo discreto $x_1[n]$ que resulta de $x_1(t)$ usando $t = nT_s$, em que T_s representa o período de amostragem com que o sinal de tempo contínuo $x_1(t)$ é amostrado.
   1.4. Determinar a frequência angular fundamental e o período fundamental de $x_1[n]$.

2. Pretende-se calcular a energia de um sinal de tempo contínuo $x(t)$ num intervalo $t \in [t_i, t_f]s$.
   2.1. Escrever funções em *Matlab* que permitam o cálculo da energia pelos métodos de integração numérica, regra dos trapézios e regra de *Simpson*.
   2.2. Utilizar essas funções para calcular a energia dos seguintes sinais e comparar com o valor exato usando o cálculo matemático simbólico.
   $x_1(t) = 6\cos(3t)\sin(4t)$ no intervalo $t \in [-\pi, \pi]s$ e no intervalo $t \in [-2\pi, 2\pi]s$;
   $x_2(t) = 6\cos(3t-3)\sin(4t-4)$ no intervalo $t \in [-\pi, \pi]s$;
   $x_3(t) = 3\cos(3t)\sin(4t)$ no intervalo $t \in [-\pi, \pi]s$.
   2.3. Obter a expressão de $x_1[n]$ que resulta de $x_1(t)$ com $t = nT_s$ (T_s=0.01s).
   2.4. Calcular a energia de $x_1[n]$ num intervalo para n correspondente a $t \in [-\pi, \pi]s$.

Métodos de Integração Numérica

Quando se pretende efetuar a integração de uma função $f(t)$ num certo intervalo $[a, b]$, $I(f) = \int_a^b f(t)dt$, poderá ser necessário usar métodos de integração numérica porque poderemos não ter uma expressão analítica de $f(t)$ mas sim uma série temporal ou porque não existe uma expressão analítica para a primitiva da função. Além disso, por vezes, mesmo existindo solução analítica, a solução numérica é mais fácil de obter.

Assim, a ideia base dos métodos numéricos de integração consiste em integrar uma função $p(t)$ semelhante à função pretendida, mas que seja mais fácil de integrar (por exemplo, os polinómios são funções fáceis de integrar), $\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b p(t)dt$.

Deste modo, a aproximação do integral pode ser efetuada considerando fórmulas de integração, nomeadamente as Fórmulas de Newton-Cotes (http://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html) que assumem que a função a integrar é polinomial:

– Polinómio de grau 1 – Regra dos trapézios;
– Polinómio de grau 2 – Regra de Simpson;
– (pode-se usar qualquer grau...).

Para aplicar as fórmulas de integração, divide-se o intervalo a integrar em subintervalos mais pequenos, encontra-se o polinómio interpolador de grau n para cada n+1 pontos, e integra-se esse polinómio. O erro resultante depende da largura dos subintervalos e do valor da derivada de ordem superior. De referir que, normalmente, as fórmulas finais são fáceis de obter.

A escolha da melhor fórmula de Newton-Cotes depende da função a integrar e de quão parecida é com cada um dos polinómios interpoladores.

- Regra dos trapézios:

Quando se considera que a função a integrar é aproximada por um polinómio de grau 1 por intervalos, aplica-se a Regra dos trapézios que considera que $f(t)$ é um segmento de reta em cada subintervalo h.

A área de cada subintervalo será dada por $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \approx \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}h$.

A área total é dada por $\int_{t_1}^{t_n} f(t)dt \approx \int_{t_1}^{t_n} p(t)dt \approx \left(\frac{f(t_1)+f(t_n)}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} f(t_i)\right)h$.

- Regra de *Simpson*:

Quando se considera que a função a integrar é aproximada por um polinómio de grau 2 por intervalos, aplica-se a Regra de *Simpson* que considera que $f(t)$ é uma parábola em cada par de subintervalos $2h$, sendo necessários 3 pontos para o cálculo da área em cada iteração.

A área calculada em cada iteração será dada por $\int_{t_1}^{t_3} f(t)dt \approx \frac{h}{3}\left(f(t_1)+4f(t_2)+f(t_3)\right)$.

A área total é dada por $\int_{t_1}^{t_n} f(t)dt \approx \int_{t_1}^{t_n} p(t)dt \approx \frac{h}{3}\left(f(t_1)+f(t_n)+4\sum_{i\,par} f(t_i)+2\sum_{i\,ímpar} f(t_i)\right)$.