UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - USP
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO - ICMC

WICTOR DALBOSCO SILVA - Nº USP: 11871027

PROVA 1

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

São Carlos
2023

Wictor Dalbosco Silva

PROVA 1

Trabalho apresentado à Disciplina de Processos Estocásticos do Curso de Graduação em Ciências de Computação da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para avaliação.

São Carlos
2023

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 QUESTÃO 1

1.1 ENUNCIADO

Dois jogadores, A e B, se alternam numa máquina de jogos até que um deles obtenha um sucesso; o primeiro a fazê-lo é considerado vencedor. A probabilidade de sucesso do jogador A é p, enquanto a de B é q. Considere que jogadas sucessivas são independentes.

(a) Determine a probabilidade de que A vença o jogo dado que A jogue primeiro.

(b) Considerando ainda que o jogador A jogue primeiro, determine o número médio de jogadas dada a informação de que A vence.

1.2 RESOLUÇÃO

(a) Para que o jogador A vença o jogo, ele deve obter sucesso na sua primeira jogada, ou caso contrário, o jogador B falhar na sua jogada subsequente e assim por diante. Esses eventos são independentes, então a probabilidade de A vencer o jogo pode ser calculada somando as probabilidades dos cenários em que A vence em um determinado número de jogadas.

A probabilidade de A vencer na primeira jogada é p. Se A não vencer na primeira jogada, isso significa que A falhou e agora é a vez de B. Neste caso, a probabilidade de A vencer o jogo é a mesma de vencer a partir da situação inicial, mas com as posições de A e B invertidas. Portanto, a probabilidade de A vencer após o fracasso inicial é $(1-p)$ vezes a probabilidade de A vencer o jogo inicialmente. Similarmente, se A falhar novamente, a probabilidade de A vencer será $(1-p)(1-q)$ vezes a probabilidade de A vencer no começo.

Temos então até o momento:

$$((1-p)\cdot(1-q))^n \cdot p$$

Seguimos então com a probabilidade de A vencer denotada por:

$$P\{A\ vence\} = \sum_{n=0}^{\infty} Pr\{(A\ \ joga\ 2n+1)\cap(A\ vence)\}$$

$$= p\cdot\sum_{n=0}^{\infty}((1-p)\cdot(1-q))^n$$

Agora para resolver essa expressão, lembramos que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Obtemos finalmente o resultado:

$$p\cdot\frac{1}{1-((1-p)\cdot(1-q))}$$

(b) Para determinar o número médio de jogadas dada a informação de que A vence, vamos analisar o processo de jogo:

Denotaremos com $E[\#\ jogadas \mid A\ vence]$, desenvolvemos com:

$$E[\#\ jogadas \mid A\ vence] = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cdot Pr\{A\ \ joga\ 2n+1) \mid A\ vence\}$$

Em que $2n+1$ são as jogadas ímpares que A ganha.

$$= Pr\{A\ \ joga\ 2n+1\ vezes \mid A\ vence\} = \frac{Pr\{(A\ \ joga\ 2n+1) \cap (A\ vence)\}}{Pr\{A\ vence\}}$$

Em que o dividendo e divisor conhecemos as equações. Temos do item **(a)** que:

$$Pr\{(A\ \ joga\ 2n+1) \cap (A\ vence)\} = p \cdot [(1-p) \cdot (1-q)]^n$$

$$Pr\{(A\ vence)\} = \frac{p}{1-((1-p) \cdot (1-q))^n}$$

Então reescrevemos:

$$\frac{p \cdot [(1-p) \cdot (1-q)]^n}{\frac{p}{1-((1-p) \cdot (1-q))^n}}$$

$$Pr\{A\ \ joga\ 2n+1) \mid A\ vence\} = [(1-p) \cdot (1-q)]^n \cdot [1-((1-p) \cdot (1-q))]$$

Retornando ao somatório original entao temos:

$$E[\#\ jogadas \mid A\ vence] = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cdot [(1-p) \cdot (1-q)]^n \cdot [1-((1-p) \cdot (1-q))]$$

$$= 1 + \frac{2 \cdot ((1-p) \cdot (1-q))}{(1-((1-p) \cdot (1-q))}$$

Para simplificar a resposta podemos denotar:

$$1 + \frac{2\beta}{1-\beta}$$

Em que $\beta = (1-p) \cdot (1-q)$.

2 QUESTÃO 2

2.1 ENUNCIADO

Encontre o tempo médio (número médio de passos) para o processo alcançar o estado 3 dado que o processo se iniciou no estado 0 para uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 RESOLUÇÃO

Dado este problema em que necessitamos encontrar o tempo médio para o processo alcançar o estado 3 (Estado recorrente final da cadeia), uma vez que o processo se iniciou no estado 0 temos que:

- V_i representa o tempo médio (número médio de passos) para o processo alcançar o estado 3, dado que o processo se encontra no estado i.
- $E[T|X_0 = 0]$ representa o tempo médio para o processo alcançar o estado 3, dado que o processo se iniciou no estado 0.

A relação entre V_i e V_0 é dada pela equação:

$$V_i = 1 + \sum_{j=0}^{r-1} P_{ij} \cdot V_j$$

onde P_{ij} é o elemento i-ésimo da j-ésima linha da matriz $\mathbf{P}$, e r é o número de estados na cadeia de Markov.

Agora vamos resolver o sistema de equações para encontrar $V_0 = E[T|X_0 = 0]$

$$\begin{aligned} &(1) \quad V_0 = 1 + 0.4 \cdot V_0 + 0.3 \cdot V_1 + 0.2 \cdot V_2 \\ &(2) \quad V_1 = 1 + 0.7 \cdot V_1 + 0.2 \cdot V_2 \\ &(3) \quad V_2 = 1 + 0.9 \cdot V_2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, encontramos da equação (3) que V_2 é igual a $\frac{1}{0.1}$, portanto:

$$V_2 = 10$$

Substituindo V_2 em (2):

$$V_1 = 1 + 0.7 \cdot V_1 + 0.2 \cdot 10 = 1 + 0.7 \cdot V_1 + 2 = 0.7 \cdot V_1 + 3$$

Simplificando a equação temos:

$$V_1 = 10$$

Substituindo V_1 e V_2 em (1):

$$V_0 = 1 + 0.4 \cdot V_0 + 3 + 2 \;\; = 6 +).4 \cdot V_0$$

Que simplificando novamente obtemos:

$$V_0 = 10$$

Logo, como V_0, V_1 e V_2 são iguais a 10, podemos concluir que o tempo médio será também:

$$E[T|X_0 = 0] = 10$$

3 QUESTÃO 3

3.1 ENUNCIADO

A ruína do apostador. Um jogador realiza uma série de apostas independentes. Em cada aposta, ele ganha uma moeda com probabilidade p e perde uma com probabilidade q. As apostas continuam até que o jogador alcance N moedas ou até que termine sem nenhuma. Supondo que o número inicial de moedas seja i, calcule, em função de i e N, o número esperado de apostas, $v_i = E[T|X0 = i]$, para que a série termine. Considere que $p = q = 1/2$.

3.2 RESOLUÇÃO

Para resolver o problema da ruína do apostador, vamos usar a técnica das equações de recorrência. Vamos denotar por v_i o número esperado de apostas para que a série termine, dado que o jogador começa com i moedas. Queremos encontrar uma expressão para v_i em termos de i e N.

Quando o jogador está com i moedas, ele tem duas possibilidades: ele pode ganhar uma moeda com probabilidade $p = \frac{1}{2}$ e passar para $i+1$ moedas, ou ele pode perder uma moeda com probabilidade $q = \frac{1}{2}$ e passar para $i-1$ moedas.

Se o jogador tem N moedas, ele já alcançou o objetivo e a série termina. Portanto, nesse caso, temos $v_N = 0$ (zero apostas necessárias).

Se o jogador está com 0 moedas, ele já perdeu todas as suas moedas e a série também termina. Portanto, nesse caso, temos $v_0 = 0$.

Para os demais valores de i (entre 1 e $N-1$), temos a seguinte relação de recorrência:

$$v_i = 1 + \sum P_i j \cdot V_i = 1 + p \cdot V_{i+1} + q \cdot V_{i-1}$$

A primeira parcela 1 representa a aposta atual, e as parcelas $p \cdot v_{i+1}$ e $q \cdot v_{i-1}$ representam a expectativa de apostas restantes caso o jogador ganhe ou perca uma moeda, respectivamente.

Usando essa relação de recorrência, podemos calcular v_i para valores crescentes de i até alcançar N.

Vamos verificar essa relação de recorrência para encontrar uma expressão geral para v_i em termos de i e N:

$$p(V_{i+1} - V_i) = q(V_i - V_{i-1}) - 1$$

$$= (V_{i+1} - V_i) = \frac{q}{p}(V_i - V_{i-1}) - \frac{1}{p} \rightarrow (p = q = \frac{1}{2})$$

$$= (V_{i+1} - V_i) = (V_i - V_{i-1} - 2)$$

Temos desta forma:

$$V_1 - V_0 = V_1$$

$$V_2 - V_1 = (V_1 - V_0) - 2 = V_1 - 2$$

$$V_3 - V_2 = (V_2 - V_1) - 2 = V_1 - 4$$

$$V_4 - V_3 = (V_3 - V_2) - 2 = V_1 - 6$$

Até chegar em i:

$$V_i - V_{i-1} = V_i - 2(i-1)$$

E na generalização em função de N e i:

$$V_N - V_{N-1} = V_i - 2(N-1)$$

Escrevendo o somatório:

$$V_i = i \cdot V_i - 2 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} j = i \cdot V_i + 2 \cdot \frac{i(i-1)}{2}$$

$$V_i = i \cdot V_i - i \cdot (1-1)$$

$$V_i = i(N-1)$$

Portanto, o número esperado de apostas v_i em função de i e N é dado por $v_i = i(N-1)$.

4 QUESTÃO 4

4.1 ENUNCIADO

Um sapo e um gafanhoto deslocam-se ao longo de uma linha. A cada instante de tempo discreto, o sapo sempre se move em uma unidade espacial em direção ao gafanhoto. Este último, por sua vez, se move em direção ao sapo com probabilidade 0.3 e se afasta com probabilidade 0.3. Com probabilidade 0.4, o gafanhoto permanece onde está. Quando o sapo e o gafanhoto se encontram fisicamente na mesma posição, no solo, *e somente nesta situação*, o gafanhoto é capturado.

(a) Construa uma cadeia de Markov que descreva a distância relativa, $X_n = i$, entre o sapo e o gafanhoto (isto é, identifique todos os estados possíveis e encontre as probabilidades de transição $P_i j = PrX_n + 1 = j|X_n = i)$. Considere que a distancia inicial entre eles seja n.

(b) Identifique os estados transientes e recorrentes.

4.2 RESOLUÇÃO

(a) A cadeia de Markov pode ser definida pelos seguintes estados: a distância entre o sapo e o gafanhoto em relação à posição inicial. Vamos denotar a distância inicial como n.

Os estados possíveis são: $0, 1, 2, \ldots, n$.

Para a transição dos estados, temos as seguintes probabilidades:

- Para $i = 1, 2, \ldots, n-1$:
  - O sapo se move em direção ao gafanhoto com probabilidade 0.3.
  - O sapo se mantém na mesma posição com probabilidade 0.4.
  - O sapo se move em direção oposta ao gafanhoto com probabilidade 0.3.
- Para $i = n$ (penúltimo estado):
  - O sapo se mantém na mesma posição com probabilidade 0.6.
  - O sapo captura o gafanhoto com probabilidade 0.4.
- Para $i = 0$ (último estado):
  - O sapo se mantém na mesma posição com probabilidade 1.

As probabilidades de transição podem ser representadas pela matriz de transição:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 1 – Matriz de Transição

(b) Para identificar os estados transientes e recorrentes, podemos analisar a matriz de transição.

O estado 0 é recorrente, pois uma vez que o sapo e o gafanhoto estão na mesma posição, o gafanhoto é capturado e a cadeia permanece nesse estado.

Todos os outros estados, de 1 a $n-1$, são transitórios. Isso ocorre porque, em algum momento, o sapo e o gafanhoto podem se encontrar e o gafanhoto será capturado, levando a cadeia ao estado recorrente 0.

Portanto, temos um estado recorrente (0) e $n-1$ estados transitórios (1 a $n-1$).