

几何学观止 (未完成)

代数拓扑, 微分几何, 代数几何

熊锐

2018 年 11 月 2 日

不必等候炬火。

此后如竟没有炬火：我便是唯一的光。

—鲁迅



А. П. Туня

目录

第一部分 古典几何	1
第一章 点集拓扑 (未完成)	2
1.1 单位分拆	2
1.2 连续函数环	7
记号表	13
习题	14
第二章 曲线曲面	15
2.1 曲线论	15
2.2 曲面论	19
2.3 自然标架法	23
2.4 正交标架法	28
2.5 曲面上的曲线	31
2.6 曲面上的内蕴几何	36
记号表	40
习题	42
第二部分 微分几何	45
第三章 光滑流形	46

3.1	光滑流形和光滑映射	46
3.2	切空间和切映射	54
3.3	浸入, 淹没和子流形	64
3.4	向量丛和向量场	72
3.5	在流形上积分	82
3.6	De Rham 理论 (未完成)	93
	记号表	95
	习题	97
第四章	Riemann 流形	104
4.1	Riemann 流形与等距映射	104
4.2	联络, 第二基本形式, 协变导数	109
4.3	测地线, 指数映射	120
4.4	曲率与 Gauss-Bonnet 公式 (未完成)	124
	记号表	132
	习题	134
第五章	Lie 群	138
5.1	Lie 群及其基本语言	138
5.2	Lie 代数和指数映射	143
5.3	Lie 理论	152
5.4	典型群	158
	记号表	165
	习题	167
附录		171
	参考文献	177
	索引	180

第一部分

古典几何

第一章 点集拓扑 (未完成)

1.1 单位分拆

以后见之明, 我们需要单位分拆作为研究工具.

引理 1.1 (Urysohn, 一般版本) 对于正规空间 $(=T_2+T_4)X$, 令 A, B 是 X 的两个分离的闭集, 则他们可以被连续函数分离, 具体来说, 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得

$$f(A) = 0 \quad f(B) = 1$$

证明 取任意一个在 $[0, 1]$ 上稠密的可数集 $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ (例如 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$), 不妨假设 $a_0 = 0, a_1 = 1$. 下面拟构造一系列开集 (除了 U_0) $\{U_i\}_{i=0}^\infty$, 使得

$$a_i < a_j \iff \overline{U_i} \subseteq U_j$$

具体来说, 令 $U_0 = A, U_1 = B^c$, 假设 $i < n$ 已经构造好, 假设 $a_i < a_n < a_j$. 此时根据条件, $\overline{U_i} \subseteq U_j$, 即 $\overline{U_i}$ 与 U_j^c 不交, 故存在开集 U_n 使得

$$\overline{U_i} \subseteq U_n \subseteq \overline{U_n} \subseteq U_j$$

这样, 登高面已经决定好, 下面我们说明其决定了函数. 定义

$$f: X \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto \inf\{a_i : x \in U_i\}$$

下面说明其连续, $f(x) < r$ 当且仅当对 $x \in \bigcup_{a_i < r} U_i$ 是开集. 因为 a_i 稠密, U_i 嵌套的性质, $f(x) > s$ 当且仅当存在 $s < a_i$ 满足 $x \notin U_i$, 再利

用稠密性知道这还当且仅当存在 $s < a_j < a_i$ 使得 $x \notin \overline{U_j}$, 这当且仅当 $x \in \bigcup_{s < a_j} (\overline{U_j})^c$ 还是开集. 这说明 f 连续. 不难看出 $f(A) = 0, f(B) = 1$, 命题得证. \square

相比之下, 度量空间的 Urysohn 引理更加容易, 且结论更强.

引理 1.2 (Urysohn, 度量空间) 对于度量空间 X , 令 A, B 是 X 的两个分离的闭集, 则他们可以被连续函数分离, 具体来说, 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得

$$f^{-1}(0) = A \quad f^{-1}(1) = B$$

证明 作 $g(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$, 注意, 因为 A 是闭集, 故 $d(x, A) = 0 \iff x \in A$, 故分母不为零, 该函数确实被定义, 再根据二者都非负不难得到 $g(X) \subseteq [0, 1]$. 不难得到此时 $g(x) = 1$ 当且仅当 $x \in B$, $g(x) = 0$ 当且仅当 $x \in A$. \square

作为类比, 局部紧致下的 Urysohn 引理或许更为有用, 注意, 我们所谈的局部紧已经暗含了 Hausdorff 性.

引理 1.3 (Urysohn, 局部紧空间) 对于局部紧空间 X , 令 A, B 是 X 的两个分离的闭集, 且其中之一紧致, 则他们可以被连续函数分离, 具体来说, 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得

$$f(A) = 0 \quad f(B) = 1$$

证明 不妨假设 A 是紧致的, B^c 是 A 的邻域, 根据局部紧的假设, 存在开集 V 使得 $A \subseteq V$ 且 \overline{V} 是紧致的. 由于对于 Hausdorff 紧致空间一定是正规的, 这样可以对 A 和 ∂V 用 Urysohn 引理, 有 $f(A) = 0, f(\partial V) = 1$, 只需要延拓 f 使得在 V 外 f 取值为 1 就是满足条件的连续函数. \square

一个自然的问题是上面的连续能否改为可微? 这需要 X 具有微分结构, 这里不妨假设是欧式空间. 如下的定理已经足够使用了, 这个定理使用了磨光这一技巧. 更强的版本可见习题1.

引理 1.4 (Urysohn, 光滑版本) 对于欧式空间 \mathbb{R}^n 的两个分离的闭集 A, B , 如果其中之一是紧致的, 则他们可以被光滑函数分离, 具体来说, 存在光滑函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得

$$f(A) = 0 \quad f(B) = 1$$

证明 证明分几步

构造“肿块”函数 (bump function). 考虑

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$

不难验证, f, g 是光滑函数. 对于 $a < b \leq c < d$, 记

$$h(x) = \begin{cases} g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & x \leq b \\ g\left(\frac{d-x}{d-c}\right) & b \leq x \leq d \end{cases}$$

这个函数光滑且在 (a, d) 以外为 0, 在 $[b, c]$ 上为 1, 记这种性质为

$$[b, c] \leq h(x) \leq (a, d)$$

任意 ϵ 可以作 $\{0\} \leq h(x) \leq (-\epsilon, \epsilon)$, 再通过调整 h 前的倍数可以使得存在光滑函数 χ_ϵ^0 满足

$$\chi_\epsilon^0(x) > 0 \iff x \in (-\epsilon, \epsilon) \quad \int \chi_\epsilon^0 = 1$$

作 $\chi_\epsilon(x^1, \dots, x^n) = \chi_\epsilon^0(x^1) \dots \chi_\epsilon^0(x^n)$, 则满足

$$\chi_\epsilon(x) > 0 \iff x \in (-\epsilon, \epsilon)^n \quad \int \chi_\epsilon = 1$$

构造函数. 在这里我们选择距离 $d(x, y) = \max |x_i - y_i|$, 选择 $\epsilon > 0$ 使得

$$\forall a \in A, b \in B, \quad 3\epsilon < d(a, b)$$

记 $A^* = \{x : d(x, A) \leq \epsilon\}$, $B^* = \{x : d(x, B) \leq \epsilon\}$. 记 $i = 1 - 1_{A^*}$, 1_{A^*} 是 A^* 的特征函数, 此时考虑

$$f(x) = (i * \chi_\epsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} i(x-t) \chi_\epsilon(t) dt = \int_{(-\epsilon, \epsilon)^n} i(x-t) \chi_\epsilon(t) dt$$

注意到

- $x \in A$ 意味着 $x-t \in A^*$, 此时 $i(x-t) = 0$, 故 $f(x) = 0$.
- $x \in B$ 意味着 $x-t \in B^*$, 此时 $i(x-t) = 1$, 故 $f(x) = 1$.

验证光滑. 下面再验证 $f(x)$ 光滑,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \int \frac{i(x+\Delta x-t) - i(x-t)}{\Delta x} \chi_\epsilon(t) dt \\ &= \int \frac{\chi_\epsilon(x+\Delta x-t) - \chi_\epsilon(x-t)}{\Delta x} i(t) dt \end{aligned}$$

因为 χ_ϵ 光滑且只生活在一个紧致集上根据中值定理以及控制收敛定理, $\Delta x \rightarrow 0$ 和积分号可以交换顺序, 故

$$\frac{d}{dx} f(x) = \int i(t) \frac{d}{dx} \chi_\epsilon(x-t) dt = \int i(x-t) \frac{d}{dt} \chi_\epsilon(t) dt$$

上式是一维情况, 当中 $\frac{d}{dx}$ 在高维可以换成任意偏微分算子, 换言之, 我们证明了 $f(x)$ 是光滑的. □

下面可以来推导著名的单位分拆定理。

定义 1.5 (单位分拆) 对于拓扑空间 X , 对于连续函数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, 记 **支集** $\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. 对于开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 称一族函数 $\{\varphi_i\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的 **单位分拆 (partition of unity)** 如果

- 对任意 i , 存在 α 使得 $\text{supp } \varphi_i \subseteq U_\alpha$.
- 对每个 $x \in X$, 存在邻域 U 使得 $\{i : U \cap \text{supp } \varphi_i \neq \emptyset\}$ 是有限集.
($\text{supp } \varphi_i$ **局部有限**)

- 对任意 $x \in X$ 都有 $\sum_i \varphi_i(x) = 1$, 以及 $\varphi_i(x) \geq 0$.

如果 φ_i 都是光滑的, 就称之为 **光滑单位分拆**.

当然, 最为基本的就是紧致的情況.

定理 1.6 (单位分拆存在定理, 紧致版本) 对于 Hausdorff 紧致空间 X , 任意开覆盖总存在单位分拆.

证明 任意取开覆盖, 对于每一点 x , 假设开覆盖中 $x \in U_x$, 存在开集 W_x, V_x 使得

$$x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$$

此时 $\{W_x\}$ 还是开覆盖, 故存在有限覆盖 $\{W_{x_i}\}$. 此时根据 Urysohn 引理作 $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$ 满足 $\psi_i(\overline{W_{x_i}}) = 1$ 且 $\psi_i(V_{x_i}^c) = 0$, 作 $\psi = \sum \psi_i$, 因为 $\{W_{x_i}\}$ 是开覆盖, 故 $\psi \geq 1$, 故 $\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi} \geq 0$ 的支集 $\subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$, 且满足 $\sum \varphi_i = 1$, 故满足条件. \square

从上面的证明过程知道, 关键并不在于函数如何构造, 而在于如何找到合适的“局部有限”的开覆盖加细, 这样加法才有意义.

推论 1.7 (单位分拆存在定理, 局部紧致版本) 对于 Hausdorff 局部紧致空间 X , 如果还是第二可数的, 那么任意开覆盖总存在单位分拆.

证明 我们总可以找到可数的开集 $\{U_i\}$ 和紧致集 F_i 使得

$$U_1 \subseteq F_1 \subseteq U_2 \subseteq F_2 \subseteq \dots \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = M$$

因为根据 Lindelöf 覆盖定理可以取闭包紧致的可数拓扑基 $\{B_i\}$. 然后定义 $U_1 = B_1, F_1 = \overline{U_1}$, 找充分大的 n 使得 $U_2 = \bigcup_{i=1}^n U_i \supseteq F_1$ 以此类推.

这样 $\{U_{i+1} \setminus F_{i-1}\}$ 就是一个局部有限的可数开覆盖. 任意取开覆盖, 对于每一点 x , 假设开覆盖中 $x \in U_x$, 存在开集 $W_x, V_x \subseteq U_{i+1} \setminus F_{i-1}$ 使得

$$x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$$

此时 $\{W_x\}$ 还是开覆盖, 在每个 $F_i \setminus U_{i-1}$ 上选取有限子覆盖再并起来得到覆盖 $\{W_x : x \in X_0\}$, 则

$$\forall x_0 \in X_0, \quad \#\{x \in X_0 : V_x \cap V_{x_0} \neq \emptyset\} < \infty$$

因为上面的集合包含在有限个 $F_i \setminus U_{i-1}$ 的并上, 根据选择是有限的. 这样之后一切如同上面的证明 (1.6) 一样. □

将上面的证明稍加改造, 将函数取作光滑, 即可得到光滑版本的单位分拆.

定理 1.8 (单位分拆存在定理, 光滑版本) 任意 \mathbb{R}^n 的开覆盖总存在光滑单位分拆.

证明 简单来说, 上面的证明中, 将 V_x, W_x 取作小的开正方形. □

1.2 连续函数环

定义 1.9 (连续函数环) 对于拓扑空间 X , 记所有连续的 $X \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的集合为 $\mathcal{C}(X)$. 其上有自然的拓扑结构

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

从而诱导一个距离使得 $\mathcal{C}(X)$ 成为一个完备的度量空间, 这种拓扑被称为 **一致拓扑**. 其上有自然的 \mathbb{R} -代数结构, 其中零元是常函数 0, 单位元是常函数 1, 加法和乘法都是逐点的

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad (kf)(x) = kf(x)$$

这让 $\mathcal{C}(X)$ 成为一个环. 赋予如上拓扑和代数结构的 $\mathcal{C}(X)$ 被称为 **连续函数环**.

命题 1.10 对于拓扑空间的连续映射 $X \xrightarrow{f} Y$, 诱导了如下的

$$\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \quad g \longmapsto g \circ f$$

这是一个连续的 \mathbb{R} -代数同态.

证明 是 \mathbb{R} -代数同态是显然的, 下面验证连续. 任意 $\epsilon > 0$, 只要取 $\delta = \epsilon$, 那么就有

$$d(g_1, g_2) < \delta \Rightarrow d(g_1 \circ f, g_2 \circ f) < \epsilon$$

根据定义验证, 这是显然的. □

实际上 $\mathcal{C}(X)$ 构成一个 Banach 代数, $\mathcal{C}(f)$ 实际上是 Banach 代数同态, 不过这里我们暂且不需要这种视角. 出于上面的定义和命题, 两个自然的问题是

- 我们能否从 $\mathcal{C}(X)$ 中还原出拓扑空间 X 本身?
- 是否任何连续环同态 $\mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ 都能来自某个连续函数的诱导?

这个答案部分上是肯定.

定义 1.11 对于拓扑空间 X , 任意点 $p \in X$, 都定义了 **计算同态**

$$c_p : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \longmapsto f(p)$$

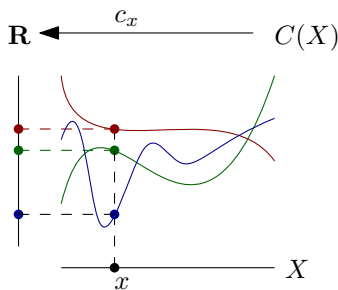


图 1.1: 计算同态

我们的基本想法是从这个角度把拓扑空间还原出来.

定义 1.12 (谱) 对于 \mathbb{R} -代数 R , 定义 R 的 **谱 (spectrum)**

$$\text{spec } R = \{ \text{非零 } \mathbb{R}\text{-代数同态 } R \xrightarrow{f} \mathbb{R} \}$$

定义 R 在 $\text{spec } R$ 上作用为, 任意 $r \in R$, 区分起见, 记

$$\hat{r} : \text{spec } R \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \longmapsto f(r)$$

赋予 $\text{spec } R$ 使得每个 r 都连续的最小的拓扑.

命题 1.13 对于 \mathbb{R} -代数 R , $\text{spec } R$ 是 *Hausdorff* 的.

证明 任意两个点 $p \neq q \in \text{spec } R$, 从而存在 r 使得 $p(r) \neq q(r)$, 即 $\hat{r}(p) \neq \hat{r}(q)$. 只需要取 $U, V \subseteq_{\text{开}} \mathbb{R}$ 分离 $p(r), q(r)$, 取 $\hat{r}^{-1}(U), \hat{r}^{-1}(V)$ 即可分离 p, q . □

定理 1.14 对于任意拓扑空间 X

$$\varphi : X \longrightarrow \text{spec}[\mathcal{C}(X)] \quad p \longmapsto [c_p : f \mapsto f(p)]$$

是连续的. 且如果 X 是 *Hausdorff* 紧致的, 则是同胚.

证明 注意到 $\text{spec}[\mathcal{C}(X)]$ 是由

$$\{\hat{f}^{-1}(U) : f \in \mathcal{C}(X), U \subseteq_{\text{开}} \mathbb{R}\}$$

生成的, 要验证 φ 是连续的, 只需要验证 $\varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(U))$ 是连续的, 换言之, 我们只需要验证 $\hat{f} \circ \varphi$ 是连续的, 但是直接验证知道 $\hat{f} \circ \varphi = f$ 这显然是连续的.

当 X 是 *Hausdorff* 紧致的, 证明分几步.

φ 是单射. 因为任意两个点 $p \neq q$, 根据 Urysohn 引理 (1.1), 可以找函数 f 使得 $f(p) = 0, f(q) = 1$, 此时 $c_p f \neq c_q f$ 故 $c_p \neq c_q$.

φ 是满射. 我们无非是说任何同态都是计算同态. 否则, 假设 $p \in \text{spec}[\mathcal{C}(X)]$ 不是计算同态, 换言之

$$\forall x \in X, \exists f_x \in \mathcal{C}(X) \quad \text{s.t.} \quad f_x(x) \neq p(f_x)$$

用 $f_x - p(f_x)$ 代替 f_x , 条件可改为变成 $f_x \neq 0, p(f_x) = 0$. 对每个 f_x 都定义了开集

$$U_x = \{a \in M : f_x(a) \neq 0\} \quad \ni x$$

这构成 X 的开覆盖, 从而可以找有限覆盖 $\{U_x : x \in X_0\}$, 考虑

$$f = \sum_{x \in X_0} f_x^2 \quad p(f) = \sum_{x \in X_0} (pf_x)^2 = 0$$

但此时对任意 $y \in X$, $f(y) > 0$, 故 $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}(X)$, 产生了矛盾!

φ 是同胚. 因为 X 紧致, $\text{spec}[\mathcal{C}(X)]$ Hausdorff, 从而一定是同胚. □

关于最后一点, 是拓扑学的日常, 可以参考 [5] P167 习题 8.10.

定理 1.15 如果第二可数的局部紧拓扑空间 X , 上述 (1.14) 定义 φ 也是同胚.

证明 回顾单位分拆存在定理 (1.7). 不难验证, 可以作覆盖 U_i , 使得 $\overline{U_i}$ 皆紧致. 考虑其上的可数单位分拆 $\{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, 则 $\text{supp } \varphi_n$ 都是紧致的. 考虑

$$f_0 = \sum_{n \geq 0} (\varphi_n + 2n)$$

这样对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_0^{-1}(\lambda)$ 都是紧致的. 下面效仿 (1.14) 的手段.

φ 是单射. 因为任意两个点 $p \neq q$, 根据 Urysohn 引理局部紧致版本 (1.3), 可以找函数 f 使得 $f(p) = 0, f(q) = 1$, 此时 $c_p f \neq c_q f$ 故 $c_p \neq c_q$.

φ 是满射. 我们无非是说任何同态都是计算同态. 如果成立, 那么任意 $p \in \text{spec}[\mathcal{C}(X)]$, $p = c_x$, 其中 x 应该满足对任意的 f 都有 $f^{-1}(p(f))$. 假设不成立, 有 $p \in \text{spec}[\mathcal{C}(X)]$ 不是计算同态, 换言之

$$\forall x \in X, \exists f_x \in \mathcal{C}(X) \quad \text{s.t.} \quad f_x(x) \neq p(f_x)$$

用 $f_x - p(f_x)$ 代替 f_x , 条件可改为变成 $f_x \neq 0, p(f_x) = 0$. 对每个 f_x 都定义了开集

$$U_x = \{a \in M : f_x(a) \neq 0\} \quad \ni x$$

这构成 $f_0^{-1}(p(f_0))$ 的开覆盖, 从而可以找有限覆盖 $\{U_x : x \in X_0\}$, 考虑

$$f = [f_0 - p(f_0)]^2 + \sum_{x \in X_0} f_x^2 \quad p(f) = 0 + \sum_{x \in X_0} (pf_x)^2 = 0$$

但此时对任意 $y \in X$, $f(y) > 0$, 故 $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}(X)$, 产生了矛盾!

φ 是同胚. 我们证明 φ 是闭映射. 任意闭集 $A \subseteq X$, 因为根据 Urysohn 度量化引理, 第二可数的 Hausdorff 空间都可以度量化, 作距离函数 $f = d(x, A)$, 则 $\hat{f}^{-1}(0)$ 根据 $\text{spec}[\mathcal{C}(X)]$ 拓扑的给法是闭集, $\varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(0)) = f^{-1}(A) = A$, 即 $\varphi(A) = \hat{f}^{-1}(0)$ 是闭集. \square

关于度量化的命题, 参见 [16] 定理 34.1.

下面我们来回答第二个问题.

定理 1.16 对于两个拓扑空间 X, Y , 如果 (1.14) 定义的 $\varphi_X \varphi_Y$ 对各自都是同胚, 那么任意非零 \mathbb{R} -同态 $\mathcal{C}(Y) \xrightarrow{C} \mathcal{C}(X)$, 都存在唯一的连续映射 $X \xrightarrow{f} Y$ 使得 $C = \mathcal{C}(f)$.

证明 我们先构造

$$C_* : \text{spec}[\mathcal{C}(X)] \longrightarrow \text{spec}[\mathcal{C}(Y)] \quad p \longmapsto p \circ C$$

为了看到这是连续的, 考虑 $f \in \mathcal{C}(Y)$, $U \subseteq_{\text{开}} \mathbb{R}$, 我们要证明 $C_*^{-1}(\hat{f}^{-1}(U))$ 是开的, 不难计算 $\hat{f} \circ g_*$ 是计算同态 $c_{C(f)}$, 从而是连续的. 将其照搬回 X 和 Y 上得到 f , 我们验证 $\mathcal{C}(f) = C$.

任意 $g \in \mathcal{C}(Y)$, 假如 $x \in X, y \in Y$ 使得 $f(x) = y$, 即 $C_* c_x = c_y$, 即 $c_x \circ C = c_y$. 带入 g 得到 $C(g)(x) = g(y) = g(f(x))$, 故 $C(g) = g \circ f$. 命题得证. \square

关于这个问题还有更为宽松的回答, 参见 [9] §VI.2 Banach-Stone Theorem. 本节一个值得注意的问题是, 我们这里似乎只使用了代数论证,

而丝毫没有用到 $\mathcal{C}(X)$ 的拓扑结构, 这一结果是惊人的! 实际上, 习题2指出, 任何 $\mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$ 的 \mathbb{R} -代数同态都是连续的. 这是 Banach 代数的标准结果.

记号表

记号	解释	位置
$\text{supp } f$	f 的支集	(1.5)
$\mathcal{C}(X)$	X 的连续函数环	(1.9)
$\mathcal{C}(f)$	f 诱导的连续函数环的同态	(1.10)
c_p	计算同态	(1.11)
$\text{spec } R$	R 的谱	(1.12)

习题

问题 1 对于欧式空间 \mathbb{R}^n 的两个分离的闭集 A, B , 则他们可以被光滑函数分离, 具体来说, 存在光滑函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得

$$f^{-1}(0) = A \quad f^{-1}(1) = B$$

(提示: 采取的方法是对每个闭集 A 找类似距离函数的光滑函数 $\partial(x, A) \geq 0$ 使得 0 的原像就是 A , 然后为了达成要求只需要 $f(x) = \frac{\partial(x, A)}{\partial(x, A) + \partial(x, B)}$. 可以断言, 开集 A^c 是可数个正方形 $\{x_i + (-\epsilon_i, \epsilon_i)^n\}$ 的并, 不妨假设 $\epsilon \leq 1$. 可以作 χ 在 0 处取 1, $\chi^{-1}(0) = \mathbb{R}^n \setminus (-1, 1)^n$, 取 $C_n \geq 1$ 使得

$$\max_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \chi\| \leq C_n$$

作

$$\partial(x, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i^i}{2^i C_i} \chi\left(\frac{x - x_i}{\epsilon_i}\right)$$

此时

$$|\partial^\alpha \partial(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i^{i-|\alpha|}}{2^i C_i} (\partial^\alpha \chi) \left| \left(\frac{x - x_i}{\epsilon_i} \right) \right| \leq \sum_{i=1}^{|\alpha|} (\dots) + \sum_{i=|\alpha|+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

故各阶导数均一致收敛, 故 $\partial(x, A)$ 无限次可微. 而显然 $\partial(x, A) = 0 \iff x \in A$.)

习题 2 对于拓扑空间 X , 证明任何 \mathbb{R} -代数同态 $\mathcal{C}(X) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 都是连续的.

(提示: 只需要证明 $\ker f$ 是闭的, 因为 $\mathcal{C}(X)/\ker f$ 成为一个 Banach 空间, 而有限维 Banach 空间的结构是唯一的. 而 $\ker f$ 如果不闭, 则其闭包必定是整个 $\mathcal{C}(X)$, 但是我们知道常函数 1 附近以 1 为半径的点都是可逆的, 于是都不在 $\ker f$ 中, 矛盾.)

第二章 曲线曲面

2.1 曲线论

定义 2.1 在 \mathbb{R}^3 中, 一条 **曲线** 指的是 $I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的连续可微映射, 其中 I 是 \mathbb{R} 的某个开区间. 对于 $\gamma: [I \xrightarrow{r(t)} \mathbb{R}^3]$, 我们补充如下定义,

- 若 $r(t)$ 连续可微, 则称 γ 为 **光滑曲线**.
- 若 $|r'(t)|$ 处处不为 0, 则称这条曲线为 **正则** 的.
- 若 r 是单射, 即曲线上没有交叉, 则称 γ 是 **简单曲线**.

如下图.

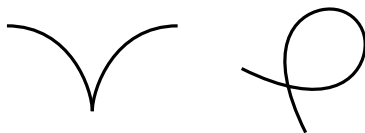


图 2.1: 不正则的曲线和不简单的曲线

不正则的曲线一般都意味着有“尖”点, 而不简单的曲线意味着有“交叉”点.

定义 2.2 (切向量) 对于正则曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{r(t)} \mathbb{R}^3]$, 对于点 $p = r(t_0)$, 定义

- $r'(t_0)$ 为 γ 在 p (或 t_0) 处的 **切向量**.

根据正则性, $r'(t_0)$ 不为 $\mathbf{0}$.

- 由 $\mathbf{r}'(t_0)$ 张成的一维空间被称为 p (或 t_0) 处的 **切线**.

画图时, 几何地, 我们常把原点平移到 p 点.

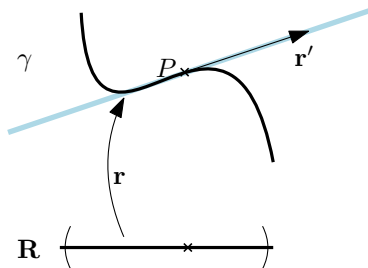


图 2.2: 切向量与切线

运动学的观点看, 上述曲线的定义实际上是一个点的“运动”, 那么切向量就是其运动速度.

定义 2.3 (参数变换) 对于正则曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{\mathbf{r}(t)} \mathbb{R}^3]$ 视为关于自变量 t 的因变量, 那么自然有更换参数的问题.

具体来说, 若有新的参数 s , 有连续可微函数 $s(t), t(s)$ 满足

$$s = s(t) \quad t = t(s) \quad t \circ s = \text{id} \quad s \circ t = \text{id}$$

即建立两参数之间的相互依赖关系对应的函数互为反函数. 那么这就定义了一条自变量为 s 的新的曲线 $\mathbf{r}(t(s))$, 即 $\mathbf{r} \circ t$. 这被称为 γ 的 **参数变换**, 我们仍然认为 $\mathbf{r} \circ t$ 是曲线 γ .

因为 t 有可微的反函数, 故 $t'(s) \neq 0$, 且“切向量”

$$\frac{d(\mathbf{r} \circ t)}{ds}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(s))t'(s) \neq \mathbf{0}$$

从而参数变换下 γ 还是正则的, 且原本的切向量 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$ 经过参数变换之后与 $\frac{d(\mathbf{r} \circ t)}{ds}(s)$ 共线, 故在参数变换下, 切线不变.

称上述参数变换是 **同向的** 如果恒有 $t'(s) > 0$, 否则则称为 **反向的**.

如下图.

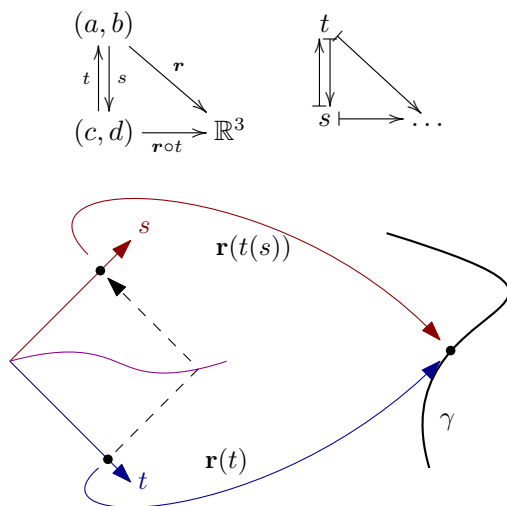


图 2.3: 参数变换

依据变量的观点, \mathbf{r} 没有变化 (但是实际上函数变了), 故我们认为这条曲线还是 γ 本身. 或者说, 我们认为曲线是参数变换下函数的等价类.

定义 2.4 (弧长参数) 对于正则曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{\mathbf{r}(t)} \mathbb{R}^3]$, 可以定义 **弧长参数**

$$s = s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(\tau) \right| d\tau$$

不难验证在每一点 $t_0 \in I$, 都有 $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(\tau) \right| \neq 0$, 根据反函数定理, 在每一个局部都存在反函数, 又因为 s 是单调的, 从而存在 $t = t(s)$ 使得

$$s = s(t) \quad t = t(s) \quad t \circ s = \text{id} \quad s \circ t = \text{id}$$

通过参数变换得到 $\gamma: [I \xrightarrow{\mathbf{r}(t(s))} \mathbb{R}^3]$, 这被称为 γ 的 **弧长参数化**. 事实上, 不难验证, 在相差一个平移和符号下, 弧长参数化是唯一的 **单位速率** 参数化, 即使得切向量是单位向量的参数化, 因为切向量是单位长要求参数化满足

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) \right| = 1 \quad \text{且同向} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|$$

定理 2.5 (Frenet 标架) 对于弧长参数的正则曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{r(s)} \mathbb{R}^3]$, 如果 r 是无穷次可微的, 且 r'' 恒非 0, 那么存在光滑函数

$$\begin{cases} \mathbf{t}: [I \xrightarrow{t(s)} \mathbb{R}^3] \\ \mathbf{n}: [I \xrightarrow{n(s)} \mathbb{R}^3] \\ \mathbf{b}: [I \xrightarrow{b(s)} \mathbb{R}^3] \end{cases} \quad \begin{cases} [\kappa: [I \xrightarrow{\kappa(s)} \mathbb{R}]] \\ [\tau: [I \xrightarrow{\tau(s)} \mathbb{R}]] \end{cases}$$

使得 $r' = \mathbf{t}$, 对任何 s , $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组右手单位正交基. 且满足

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\mathbf{t} = & \kappa\mathbf{n} \\ \frac{d}{ds}\mathbf{n} = -\kappa\mathbf{t} & +\tau\mathbf{b} \\ \frac{d}{ds}\mathbf{b} = & -\tau\mathbf{n} \end{cases}$$

证明 定义

$$\mathbf{t} = r'$$

因为 $\frac{d}{ds}\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 2\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{t} \rangle$, 但 $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$, 故 $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \perp \mathbf{t}$, 令

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| = |r''| \neq 0 \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

根据构造第一行公式得证. 再令

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \quad \tau = \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{b} \right\rangle$$

根据这一构造第二行公式得证. 不难验证, 对于 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, 因为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, 1$ 是常数, 故

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \mathbf{y} \right\rangle + \left\langle \mathbf{x}, \frac{d\mathbf{y}}{ds} \right\rangle$$

这说明系数矩阵是反对称的, 根据上面的构造已经可以解出全部系数. □

如下图

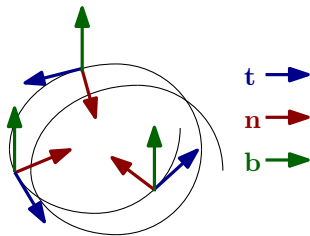


图 2.4: Frenet 标架

定义 2.6 上定理 (2.5) 中, 称 \mathbf{t} 为切向量, \mathbf{n} 为主法向量 (principal normal vector), \mathbf{b} 为次法向量 (binormal vector), κ 为曲率 (curvature), τ 为挠率 (torsion). 称 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$ 为一套 Frenet 标架 (frame).

2.2 曲面论

定义 2.7 (空间曲面) 仿照空间曲线的定义, 一块单曲面是 $U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的单个的可微连续映射, 其中 U 是 \mathbb{R}^2 中的开集. 例如单曲面 $M: [U \xrightarrow{\mathbf{r}(u,v)} \mathbb{R}^3]$. 定义

- 若 $\mathbf{r}(u, v)$ 连续可微, 则称 M 为光滑曲面.
- 若 $\left| \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right|$ 处处不为 0, 则称这块单曲面为正则的.
即 $\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}$ 与 $\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}$ 处处线性无关.

不正则意味着在某些地方, 曲面被“搓”成了一个尖, 例如像上图的圆锥那样.

定义 2.8 (切平面) 对于正则单曲面 $M: [U \xrightarrow{\mathbf{r}(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 在每一点 $p = \mathbf{r}(u_0, v_0)$, 定义

- 由

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

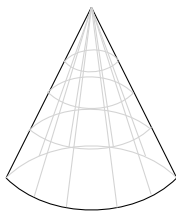


图 2.5: 不正则的曲面

张成的二维空间 (根据正则性) 为 p 点 (或 (u_0, v_0)) 的 **切空间** 或 **切平面**, 记为 $\text{Tan}_p M$ 或者更简单的 Tan_p .

- 这个切平面的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|}$$

这被称为曲面 M 在 p 点 (或 (u_0, v_0)) 的 **法向量**. 根据正则性, \mathbf{n} 也是可微的.

在图中, 我们通常会把这个空间的原点平移到 P 点, 如下图.

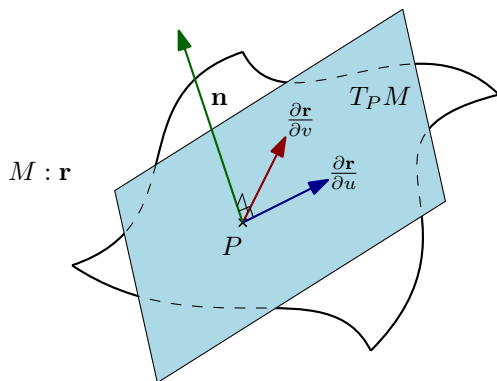


图 2.6: 切平面

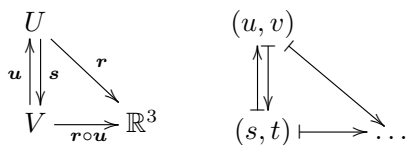
评注 2.9 (参数变换) 和曲线 (2.3) 一样, 也有更换参数的问题. 对于正则单曲面 $M: \mathbf{r}$ 视为关于自变量 u, v 的因变量, 那么有更换参数的问题. 具体来说, 若有新的参数 s, t , 有连续可微函数

$$\mathbf{u}(s, t) = (u(s, t), v(s, t)), \mathbf{s}(u, v) = (s(u, v), t(u, v))$$

满足

$$(u, v) = \mathbf{u}(s, t) \quad (s, t) = \mathbf{s}(u, v) \quad \mathbf{u} \circ \mathbf{s} = \text{id} \quad \mathbf{s} \circ \mathbf{u} = \text{id}$$

即建立两参数之间的关系使得两函数互为反函数. 那么这就定义了一条自变量为 s, t 的新的曲面 $\mathbf{r}(u(s, t), v(s, t))$, 即 $\mathbf{r} \circ \mathbf{u}$. 这被称为 **参数变换**. 如下图.



因为 \mathbf{u} 有可微的反函数, 故 *Jacobi* 行列式

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \neq 0$$

从而

$$\begin{cases} \mathbf{r}_s = u_s \mathbf{r}_u + v_s \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_t = u_t \mathbf{r}_u + v_t \mathbf{r}_v \end{cases}$$

使得 $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_t$ 依旧线性无关, 从而还是正则曲面. 且参数变换下每一点 P 的切平面 $\text{Tan}_P M$ 不变.

同样, 在参数变换下, 我们依旧认为这块曲面为 M 本身, 或者说, 我们直接认为曲面是参数变换下函数的等价类.

定义 2.10 (第一, 二基本形式) 正则单曲面 $M: [U \xrightarrow{\mathbf{r}(u, v)} \mathbb{R}^3]$, 定义 **第一基本形式**

$$I = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

其中

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = \|\mathbf{r}_u\|^2 \quad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = \|\mathbf{r}_v\|^2$$

定义 **第二基本形式**

$$\mathbb{I} = -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n} \rangle = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

其中

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle \quad F = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle \quad G = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle$$

定义 **Weingarten 变换**

$$\begin{aligned} \mathcal{W}: \quad T_P &\longrightarrow T_P \\ x\mathbf{r}_u + y\mathbf{r}_v &\longmapsto -x\mathbf{n}_u - y\mathbf{n}_v \end{aligned}$$

定义 **Gauss 曲率** K 为 $\det \mathcal{W}$.

以上字母在本章均被固定下来, 不加声明地使用.

显然, 对于 $x, y \in \{u, v\}$, 因为 $\langle \mathbf{r}_x, \mathbf{n} \rangle = 0$, 故求导知 $\langle \mathbf{r}_{xy}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_x, \mathbf{n}_y \rangle$. 这是第二基本形式的另一种刻画.

评注 2.11 另外, 曲面面积的微元

$$d\text{面积} = \sqrt{(EG - F^2)} du \wedge dv$$

这是第一基本形式行列式的平方根. 其价值已在微积分中探讨过, 这里不再赘述. 想要严格地定义还需要定向的概念, 因此不同参数下可能差一个负号 (例如交换 u, v).

如果一个量只和第一基本形式有关, 我们称之为 **内蕴的**. **Gauss 绝妙定理 (Gauss Theorema Egregium)** (2.18) 断言 Gauss 曲率是内蕴的, 这是本章想要证明的主要内容.

2.3 自然标架法

评注 2.12 (张量记号) 正则单曲面 $M : [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 如果记 $u^1 = u, u^2 = v$, 那么记号变更如下

- 切向量 $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_{u^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}, \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{n}_{u^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha}$.
- 向量 $\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{u^\alpha u^\beta}, \mathbf{n}_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_{u^\alpha u^\beta}$.
- 算子 $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$.
- **Kronecker 的 δ** $\delta_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta = \delta^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$.
- 第一基本形式的系数 $g_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle$.
- 第一基本形式 $\text{I} = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$.
- 第一基本形式的逆矩阵 $g^{\alpha\beta}$. 即 $\sum_\gamma g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha, \sum_\gamma g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$.
- 第二基本形式的系数 $b_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle$.
- 第二基本形式 $\text{II} = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$.
- **Christoffel 记号** $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_\delta \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_\delta \rangle g^{\delta\gamma}$.

以上字母在本章均被固定下来, 不加声明地使用.

或许上面的记号定义有些不自然, 但是因为他们实际上是标架导数下的系数.

定理 2.13 (自然标架) 正则单曲面 $M : [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \mathbf{r}_\alpha = \sum_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} \\ \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \mathbf{n} = -\sum_\beta \left(\sum_\gamma b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} \right) \mathbf{r}_\beta = -\mathcal{W} \mathbf{r}_\alpha \end{cases}$$

证明 因为正则性的假设, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}$ 处处线性无关, 假设

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \mathbf{r}_\alpha = \sum_{\gamma} G_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{r}_{\gamma} + B_{\alpha\beta} \mathbf{n} \\ \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \mathbf{n} = - \sum_{\beta} B_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}_{\beta} \end{cases}$$

那么

$$\langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_{\delta} \rangle = \sum_{\gamma} G_{\alpha\beta}^{\gamma} \langle \mathbf{r}_{\gamma}, \mathbf{r}_{\delta} \rangle = \sum_{\gamma} G_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta}$$

两边同时乘以 $g^{\delta\hat{\gamma}}$ 对 δ 求和 (即作用逆矩阵), 即得

$$G_{\alpha\beta}^{\hat{\gamma}} = \sum_{\gamma} G_{\alpha\beta}^{\gamma} \delta_{\gamma}^{\hat{\gamma}} = \sum_{\gamma, \delta} G_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta} g^{\delta\hat{\gamma}} = \sum_{\delta} \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_{\delta} \rangle g^{\delta\hat{\gamma}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

而

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} &= \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{n} \rangle = B_{\alpha\beta} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = B_{\alpha\beta} \\ -b_{\alpha\gamma} &= \langle \mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{n}_{\gamma} \rangle = - \sum_{\beta} B_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{r}_{\beta}, \mathbf{r}_{\gamma} \rangle = - \sum_{\beta} B_{\alpha}^{\beta} g_{\beta\gamma} \end{aligned}$$

同理

$$B_{\alpha}^{\beta} = \sum_{\gamma} b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$$

命题得证. □

显然, 上面这一套方法在模拟 Frenet 标架 (2.5), 但是系数的确定本质上没有用到 (2.5) 证明中使用的技巧, 如果使用, 那么就会得到如下的 Gauss 公式.

命题 2.14 (Gauss) 考虑正则单曲面 $M: [U \xrightarrow{\mathbf{r}(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 则

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\delta} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}} \right)$$

作为推论, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 是内蕴的.

证明 因为

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle = \langle \mathbf{r}_{\alpha\gamma}, \mathbf{r}_\beta \rangle + \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_{\beta\gamma} \rangle$$

故加加减减即得

$$\langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_\gamma \rangle = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}$$

这样把 γ 换成 δ 同时乘以 $g^{\delta\gamma}$ 对 δ 求和 (即作用逆矩阵), 即得公式. \square

有了标架, 这样怎样求导有章可循了. 一个自然的问题是 (2.13) 中用两种方法计算 $\mathbf{r}_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $\mathbf{n}_{\alpha\beta}$ 的结果是否相同? 这必然导出关于曲面各个记号新的关系.

评注 2.15 先进行一些计算.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \mathbf{r}_{\delta} + \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (b_{\alpha\beta} \mathbf{n}) && \because (2.13) \\ &= \sum_{\delta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}}{\partial u^\gamma} \mathbf{r}_{\delta} + \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \mathbf{r}_{\gamma\delta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \mathbf{n} + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}_{\gamma} && \because \text{Leibniz 律} \\ &= \sum_{\delta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}}{\partial u^\gamma} \mathbf{r}_{\delta} + \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \left(\sum_{\xi} \Gamma_{\gamma\delta}^{\xi} \mathbf{r}_{\xi} + b_{\gamma\delta} \mathbf{n} \right) \\ &\quad + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \mathbf{n} - b_{\alpha\beta} \sum_{\xi, \delta} b_{\gamma\delta} g^{\delta\xi} \mathbf{r}_{\xi} && \because (2.13) \\ &= \sum_{\xi} \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}}{\partial u^\gamma} + \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \Gamma_{\gamma\delta}^{\xi} - \sum_{\delta} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} g^{\delta\xi} \right) \mathbf{r}_{\xi} \\ &\quad + \left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} b_{\gamma\delta} \right) \mathbf{n} && \because \text{整理} \end{aligned}$$

记 $\sum_{\delta} b_{\alpha\delta} g^{\delta\gamma} = b_{\alpha}^{\gamma}$,

$$\begin{aligned}
 n_{\alpha\beta} &= -\frac{\partial}{\partial u^{\beta}} \sum_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma} r_{\gamma} && \because (2.13) \\
 &= -\sum_{\gamma} \frac{\partial b_{\alpha}^{\gamma}}{\partial u^{\beta}} g^{\delta\gamma} r_{\gamma} - \sum_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial u^{\beta}} && \because \text{Leibniz 律} \\
 &= -\sum_{\gamma} \frac{\partial b_{\alpha}^{\gamma}}{\partial u^{\beta}} r_{\gamma} - \sum_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma} \left(\sum_{\xi} \Gamma_{\beta\gamma}^{\xi} r_{\xi} + b_{\beta\gamma} n \right) && \because (2.13) \\
 &= \sum_{\gamma} \left(\frac{\partial b_{\alpha}^{\gamma}}{\partial u^{\beta}} - \sum_{\delta} b_{\alpha}^{\delta} \Gamma_{\beta\delta}^{\gamma} \right) r_{\gamma} + \left(\sum_{\delta} b_{\alpha}^{\delta} b_{\beta\delta} \right) n && \because \text{整理}
 \end{aligned}$$

故可以得到四组方程

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}}{\partial u^{\gamma}} + \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \Gamma_{\gamma\delta}^{\xi} - \sum_{\delta} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} g^{\delta\xi} &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi}}{\partial u^{\beta}} + \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} - \sum_{\delta} b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} g^{\delta\xi} \\
 \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} + \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} b_{\gamma\delta} &= \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \sum_{\delta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} b_{\beta\delta} \\
 \frac{\partial b_{\alpha}^{\gamma}}{\partial u^{\beta}} - \sum_{\delta} b_{\alpha}^{\delta} \Gamma_{\beta\delta}^{\gamma} &= \frac{\partial b_{\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\alpha}} - \sum_{\delta} b_{\beta}^{\delta} \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma} \\
 \sum_{\delta} b_{\alpha}^{\delta} b_{\beta\delta} &= \sum_{\delta} b_{\beta}^{\delta} b_{\alpha\delta}
 \end{aligned} \right.$$

不难验证, 最后一条是恒成立的, 二三条是等价的. 为了将第一条整理得更美观, 我们将内蕴的量放在一边, 不内蕴的放在另一边.

定义 2.16 (Riemann 记号) 定义 **Riemann 记号**

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \sum_{\xi} g_{\delta\xi} \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi}}{\partial u^{\beta}} + \sum_{\eta} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\xi} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \Gamma_{\eta\beta}^{\xi}) \right)$$

根据定义 $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ 是内蕴的.

命题 2.17 有关于结构方程系数的等式

• *Gauss* 方程

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -(b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} - b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta})$$

作为推论

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\delta\alpha} = -R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\gamma\beta}$$

• Codazzi 方程

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \sum_{\xi} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} b_{\xi\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi} b_{\xi\beta}) = 0$$

证明 根据计算 (2.15). □

定理 2.18 (Gauss 绝妙定理) 正则单曲面 $M : [U \xrightarrow{(u,v)} \mathbb{R}^3]$ 的 Gauss 曲率 K 是内蕴的, 即只和第一基本形式 I 有关.

证明 根据 (2.13),

$$\mathcal{W} \left(\sum_{\alpha} a^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) = \sum_{\beta} \left(\sum_{\alpha, \gamma} a^{\alpha} b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} \right) \mathbf{r}_{\beta}$$

故 \mathcal{W} 在 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 的基下,

$$\left(\sum_{\gamma} b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} \right)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum_{\gamma} b_{1,\gamma} g^{\gamma,1} & \sum_{\gamma} b_{2,\gamma} g^{\gamma,1} \\ \sum_{\gamma} b_{1,\gamma} g^{\gamma,2} & \sum_{\gamma} b_{2,\gamma} g^{\gamma,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix}$$

换言之,

$$K = \det \mathcal{W} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}}$$

根据 (2.17), 带入 Gauss 方程

$$K = \det \mathcal{W} = -\frac{R_{2121}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}} = \frac{R_{2112}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}}$$

因为 Riemann 记号是内蕴的, 从而 Gauss 曲率是内蕴的. □

至此, 以上的推导都并未利用任何几何直观, 本质上只是多次求导出的恒等式. 想要看到 Gauss 曲率的几何意义, 我们将在后文中介绍.

2.4 正交标架法

回顾自然标架法 (2.13), 其复杂之处就在于 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 并不垂直. 假如我们通过恰当选取切向量 (而不在意是否是对某个变量的导数), 那么或许会更加豁然开朗. 例如通过施以 Schmidt 正交化过程, 对于正则曲面的某个局部, 我们可以选择

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$$

且在每一点都构成单位正交基, 即每一点 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 都是该曲面的切向量.

定理 2.19 (正交标架) 正则单曲面 $M: [U \xrightarrow{(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 如果选择了正交标架 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, 使得 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$ 且在每一点都构成单位正交基. 那么

$$\begin{cases} d\mathbf{r} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_{12} \mathbf{e}_2 + \omega_{13} \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_{21} \mathbf{e}_1 + \omega_{23} \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

且 $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$, 其中 ω_{ij} 是 U 上的一次微分形式.

证明 不难发现对 $d\mathbf{r}$ 除以 du 或者 dv , 都应该落在切空间之中, 故没有 \mathbf{e}_3 分量. 对于之后只需要注意到

$$0 = d\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle d\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, d\mathbf{e}_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji}$$

命题得证. □

命题 2.20 条件承上 (2.19), 其中 ω_1, ω_2 是无关的, 即 $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. 换言之, 在每一点, $d\omega_1$ 和 $d\omega_2$ 是一次微分形式的一组基, $d\omega_1 \wedge d\omega_2$ 是二次微分形式的一组基.

证明 假设 $\mathbf{r}_u = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2, \mathbf{r}_v = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$, 根据正则性假设 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 非退化, 那么

$$\omega_1 = adu + bdv \quad \omega_2 = cdu + ddv$$

也不相关. □

同样, 也有一些需要满足的方程.

命题 2.21 条件承上 (2.19), 各个微分形式需满足

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 \end{cases}$$

证明 因为

$$\begin{aligned} 0 &= d\mathbf{r} = d(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) \\ &= d\omega_1 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \wedge d\mathbf{e}_1 + d\omega_2 \mathbf{e}_2 - \omega_2 \wedge d\mathbf{e}_2 \quad \because \text{带符号的 Leibniz 律} \\ &= (d\omega_1 - \omega_2 \wedge \omega_{21})\mathbf{e}_1 + (d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_{12})\mathbf{e}_2 \quad \because (2.19) \end{aligned}$$

命题得证. □

命题 2.22 条件承上 (2.19), 各个微分形式还需满足

• Gauss 方程

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$$

• Codazzi 方程

$$\begin{cases} d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\ d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} \end{cases}$$

证明 同样也是计算

$$\begin{aligned} 0 &= d\mathbf{e}_1 = d(\omega_{12}\mathbf{e}_2 + \omega_{13}\mathbf{e}_3) \\ &= d\omega_{12}\mathbf{e}_2 - \omega_{12} \wedge d\mathbf{e}_2 + d\omega_{13}\mathbf{e}_3 - \omega_{13} \wedge d\mathbf{e}_3 \quad \because \text{带符号的 Leibniz 律} \\ &= (d\omega_{12} - \omega_{13} \wedge \omega_{32})\mathbf{e}_2 + \dots \end{aligned}$$

命题得证. □

推论 2.23 条件承上 (2.19), 几个几何量满足

(1) 第一基本形式

$$I = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2$$

(2) 第二基本形式

$$II = -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{e}_3 \rangle = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}$$

(3) 面积元

$$d\text{面积} = \omega_1 \wedge \omega_2$$

(4) Gauss 曲率

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2}$$

证明 (1) 和 (2) 就是定义. 为了看到 (3), 假设 $\begin{cases} \mathbf{r}_u = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{r}_v = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \end{cases}$, 那么

$\begin{cases} \omega_1 = a du + b dv \\ \omega_2 = c du + d dv \end{cases}$. 这样 $\omega_1 \wedge \omega_2 = (ad - bc)dudv$. 而第一基本形式的

系数容易计算出就是 $\begin{cases} E = a^2 + b^2 \\ F = ac + bd \\ G = c^2 + d^2 \end{cases}$. 这样根据复数的几何意义导出的

恒等式,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2$$

根据 (2.11) 得证.

为了看到 (4), 注意到 $\mathcal{W}(d\mathbf{r}) = -d\mathbf{e}_3$, 故

$$\omega_1 \mathcal{W}\mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathcal{W}\mathbf{e}_2 = \mathcal{W}(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) = -\omega_{31} \mathbf{e}_1 - \omega_{32} \mathbf{e}_2$$

假设 $\begin{cases} \mathcal{W}\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 \\ \mathcal{W}\mathbf{e}_2 = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$, 这样上式变为 $\begin{cases} a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 = -\omega_{31} \\ a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2 = -\omega_{32} \end{cases}$,

将两式作外积

$$\underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}_{=\det \mathcal{W}=K} \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_{31} \wedge \omega_{32} = -\omega_{12}$$

因为根据 (2.20), $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, 故

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2}$$

命题得证. □

评注 2.24 不难知 ω_1, ω_2 只和第一基本形式有关, 因为 $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, 根据 (2.21), ω_{12} 也只和第一基本形式有关, 这样 (2.23) 给出的

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2}$$

实际上再一次证明了 Gauss 绝妙定理, 这次的证明路径显然比 (2.18) 简单很多.

2.5 表面上的曲线

定义 2.25 考虑一张单曲面 $M : [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$. 曲面 M 上的一条 **曲线** 是一个曲线 $I \xrightarrow{r(t)} \mathbb{R}^3$, 使得其可以分裂成

$$I \xrightarrow{u(t)} U \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3$$

且 $u(t)$ 是可微的.

评注 2.26 对于表面上的点 p_0 , 假设这条曲线通过 p_0 , 设 $t_0^{(a,b)} \mapsto (u_0, v_0) \in U \mapsto p_0 \in M$, 假设 $u(t) = (u(t), v(t))$. 其切向量在 p_0 点根据链式法则为

$$r_t(t_0) = u_t(t_0)r_u(u_0, v_0) + v_t r_v(u_0, v_0) \quad \text{简单记为 } r_t = u_t r_u + v_t r_v$$

这样, 可以认为这个曲线的切向量落在这个曲面的切空间之中. 反之, 不难验证 p_0 点的切空间中任何一个元素都可以写成曲面上某个经过 p 点的曲线的切向量.

评注 2.27 在经典意义下, 例如一张单曲面 $M : U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3$, 在 p_0 点处给出

- 一个切向量 $\mathbf{x} = a\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = a\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) + b\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$.

假设 M 上通过 p 点的曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{u} U \xrightarrow{v} \mathbb{R}^3]$ 在 p 点的切向量是 \mathbf{x} .

- 假设 $t_0^{\in(a,b)} \mapsto (u_0, v_0) \in U \mapsto p_0 \in M$

假设 $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t))$, 那么根据 (2.26) 知道 $u_t(t_0) = a, v_t(t_0) = b$.

- 一个光滑函数 $\hat{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$, 假设 $f: U \xrightarrow{r} M \xrightarrow{\hat{f}} \mathbb{R}$.

那么其方向导数应该规定为

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\mathbf{r}(\mathbf{u}(t_0 + t))) - \hat{f}(\mathbf{r}(\mathbf{u}(t_0)))}{t} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(\mathbf{r}(\mathbf{u}(t))) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}(t)) \right|_{t=t_0} \\ &= u_t(t_0) \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + v_t(t_0) \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \quad \because \text{链式法则} \\ &= a \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + b \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

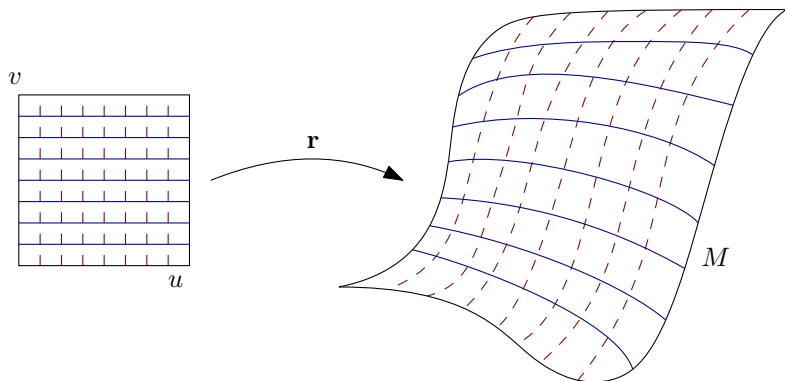
这样,

$$f \text{ 对 } a \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) + b \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \text{ 方向导数为 } a \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + b \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$$

简单粗暴地看, 即将 \mathbf{r} 换成 f .

例 2.28 (u -曲线, v -曲线) 曲面 $M: [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$ 上两条特殊的曲线值得注意, 对固定的 $v = v_0$, $\mathbf{r}(u, v_0)$ 是 M 上的曲线, 这倍称为 u -曲线, 其切向量为 $\mathbf{r}_u(u, v_0)$. 对固定的 $u = u_0$, $\mathbf{r}(u_0, v)$ 是 M 上的曲线, 这倍称为 v -曲线, 其切向量为 $\mathbf{r}_v(u_0, v)$. 故两族曲线在 M 上织成一张网. 如下图.

对于一条表面上的曲线, 其曲率 (2.6) 也被相应的定义, 利用曲线来测量曲面是几何学的一个方法论.

图 2.7: u -曲线, v -曲线

定义 2.29 已知一张单曲面 $M : [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$ 和曲面 M 上的一条曲线 $I \xrightarrow{r(t)} \mathbb{R}^3$. 不妨假设这条曲线是弧长参数的. 那么其“曲率向量”

$$\mathbf{r}'' = \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

分解到切平面和法向量上, 定义 **法 (normal) 曲率** 和 **测地 (geodesic) 曲率**

$$\kappa_n = \langle \mathbf{r}'', \mathbf{n} \rangle \quad \kappa_g = \langle \mathbf{r}'', \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}' \rangle$$

假设 \mathbf{r} 的曲率为 κ , 则满足 $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$. 下面我们会看到, 实际上在某一点处的法曲率只和曲面在这点的性质和曲线在这点的切向量有关. 故我们也会对切向量谈法曲率.

记号 2.30 下面我们指出第一二基本形式在切空间上的作用. 实际上 $du^2, dudv, dv^2$ 都是二次型, 假设

$$\text{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad \text{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

对于切向量 $\begin{cases} X = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v \\ Y = c\mathbf{r}_u + d\mathbf{r}_v \end{cases}$, 记

$$\mathrm{I}(X, Y) = (a, b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \mathrm{II}(X, Y) = (a, b) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

评注 2.31 不难发现根据定义 (2.10),

$$\mathrm{I}(X, X) = \|X\|^2 \quad \mathrm{II}(X, Y) = \langle X, \mathcal{W}Y \rangle = \langle \mathcal{W}X, Y \rangle$$

命题 2.32 已知一张单曲面 $M: [U \xrightarrow{\mathbf{r}(u,v)} \mathbb{R}^3]$ 和曲面 M 上的一条曲线 $I \xrightarrow{\mathbf{r}^{(t)}} \mathbb{R}^3$. 那么其法曲率

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{II}(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}{\mathrm{I}(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}$$

证明 首先, 先假设 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 是单位速率曲线, 此时 $\mathrm{I}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') = 1$, 故只需要证明 $\kappa_g = \mathrm{II}(\mathbf{r}', \mathbf{r}')$. 计算知

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \mathbf{r}_{uu} + 2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \mathbf{r}_{uv} + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \mathbf{r}_{vv}$$

故

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \left\langle \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right\rangle && \because \text{定义} \\ &= L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\ &= \mathrm{II} \left(\frac{du}{ds} \mathbf{r}_u + \frac{dv}{ds} \mathbf{r}_v, \frac{du}{ds} \mathbf{r}_u + \frac{dv}{ds} \mathbf{r}_v \right) \\ &= \mathrm{II}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \end{aligned}$$

这说明曲线曲面上一点处的切向量只和这一点的切向量和曲面第二基本形式有关. 一般情形只需要在某一点处将 \mathbf{r}' 单位化为 $\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathbf{r}'}{\sqrt{\mathrm{I}(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}}$, 找任意的单位速率曲线经过这一点即可. 这样计算得到的法曲率是

$$\mathrm{II} \left(\frac{\mathbf{r}'}{\sqrt{\mathrm{I}(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}}, \frac{\mathbf{r}'}{\sqrt{\mathrm{I}(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}} \right) = \frac{\mathrm{II}(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}{\mathrm{I}(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}$$

命题得证. □

定义 2.33 定义 **主曲率** 为 \mathcal{W} 的特征值, 对应的单位切向量被称为对应的 **主方向**. 显然两个主曲率的乘积就是 *Gauss* 曲率.

注意到 (2.31) 表明 *Weingarten* 变换 \mathcal{W} 是自伴的, 这表明其特征值都是实的, 当两个主曲率不同时, 则主方向是垂直的, 如果相同, 那么 \mathcal{W} 是一个数乘.

命题 2.34 (Euler) 已知一张单曲面 $M : [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 固定某一点. 设 κ_1, κ_2 是该点的主曲率, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为相应的主方向, 若切向量 X 与 \mathbf{e}_1 夹角为 θ , 则 X 对应的法曲率为

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$$

作为推论, 主曲率是法曲率的极大极小值.

证明 当 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 不垂直时, \mathcal{W} 是数乘, 故可以改变 \mathbf{e}_2 使得 $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$. 不妨假设 X 是单位向量, 则 $X = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$, 则

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \mathbb{I}(X, X) && \because (2.32) \\ &= \cos^2 \theta \mathbb{I}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + 2 \cos \theta \sin \theta \mathbb{I}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + \sin^2 \theta \mathbb{I}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\ &= \cos^2 \theta \langle \mathcal{W} \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + 2 \cos \theta \sin \theta \langle \mathcal{W} \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \sin^2 \theta \langle \mathcal{W} \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta && \because \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

命题得证. □

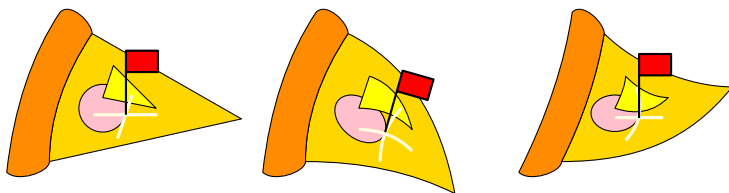


图 2.8: 中式椰丝火腿菠萝披萨

例 2.35 下面我们来解释 (2.18) 的绝妙之处, 考虑一张披萨, 平放在桌面上时任何一点的任何一个切向量对应的法曲率都为 0 (例如考虑直线), 故

Gauss 曲率 K 为零. 一旦沿着边将披萨拿起来, 虽然披萨垂了下去产生了弯曲, 但是第一基本形式不变 (因为第一基本形式是距离的微元这一操作又是保距的) 根据 *Gauss* 绝妙定理 (2.18), K 依旧是 0, 换言之, 必定有某个主曲率为 0. 如果不要披萨垂下来, 可以将披萨沿卷成 \cup 形, 让一个方向产生弯曲, 根据 (2.18), 迫使与“弯曲方向”垂直的方向上不发生弯曲.

2.6 曲面上的内蕴几何

定义 2.36 (协变微分) 已知一张单曲面 $M: [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 可以在形如

$$f^1 e_1 + f^2 e_2 \quad f^1, f^2 \text{ 关于 } u, v \text{ 的光滑函数} \quad (*)$$

上定义一个新的微分 D , 定义为

$$D(f^1 e_1 + f^2 e_2) = d(f^1 e_1 + f^2 e_2) \text{ 在切平面 } \text{span}\{e_1, e_2\} \text{ 上的投影}$$

这被称为 M 上的 **协变 (covariant) 微分**.

上述协变微分实际上可以视作是“生活在曲面上生物”发展出的微积分理论. 因为“生活在曲面上的生物”活在曲面“上”, 并不能感受到“切向量”, 所以一切都是在切平面的投影.

评注 2.37 协变微分 D 也有一些和 d 一样的性质

- $D(v + w) = Dv + Dw$.
- $D(fv) = (df)v + fDv$
- $d\langle v, w \rangle = \langle Dv, w \rangle + \langle v, Dw \rangle$.

其中 v, w 形如 $(*)$.

评注 2.38 先进行一阵计算倘若用 (2.13) 的记号,

$$\begin{aligned}
 & d\left(\sum_{\alpha} f^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}\right) \\
 &= \sum_{\alpha} df^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha} f^{\alpha} d\mathbf{r}_{\alpha} \quad \because d \text{ 的符号 Leibniz 律} \\
 &= \sum_{\alpha} df^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} f^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{r}_{\gamma} du^{\beta} + (\dots) \mathbf{n} \quad \because d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv \\
 &= \sum_{\gamma} \left(df^{\gamma} + \sum_{\alpha, \beta} f^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} du^{\beta} \right) \mathbf{r}_{\gamma} + (\dots) \mathbf{n}
 \end{aligned}$$

故

$$D\left(\sum_{\alpha} f^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}\right) = \sum_{\gamma} \left(df^{\gamma} + \sum_{\alpha, \beta} f^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} du^{\beta} \right) \mathbf{r}_{\gamma}$$

倘若延续 (2.19) 的记号,

$$\begin{aligned}
 & d(f^1 \mathbf{e}_1 + f^2 \mathbf{e}_2) \\
 &= df^1 \mathbf{e}_1 + f^1 d\mathbf{e}_1 + df^2 \mathbf{e}_2 + f^2 d\mathbf{e}_2 \quad \because d \text{ 的符号 Leibniz 律} \\
 &= df^1 \mathbf{e}_1 + f^1 (\omega_{12} \mathbf{e}_2 + \omega_{13} \mathbf{e}_3) \\
 &+ df^2 \mathbf{e}_2 + f^2 (\omega_{21} \mathbf{e}_1 + \omega_{23} \mathbf{e}_3) \quad \because (2.19) \\
 &= (df^1 + f^2 \omega_{21}) \mathbf{e}_1 + (df^2 + f^1 \omega_{12}) \mathbf{e}_2 + (\dots) \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

故

$$D(f^1 \mathbf{e}_1 + f^2 \mathbf{e}_2) = (df^1 + f^2 \omega_{21}) \mathbf{e}_1 + (df^2 + f^1 \omega_{12}) \mathbf{e}_2$$

定理 2.39 已知一张单曲面 $M: [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$ 和曲面 M 上的一条弧长参数曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{r(s)} \mathbb{R}^3]$. 下列条件是等价的

- γ 在每一点的测地曲率 $\kappa_g = 0$.
- $\frac{D(\mathbf{r}')}{ds} = 0$.
- γ 的主法向量 (2.6) 和曲面的法向量 \mathbf{n} 共线.

- 假设 γ 分裂为 $[I-\overline{(u^1(s), u^2(s))} \rightarrow U \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathbb{R}^3]$, 那么 u^1, u^2 满足

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0 \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0 \end{cases}$$

证明 前三条根据定义 (2.29) 是等价的, 因为

$$\frac{D(\mathbf{r}')}{ds} = \frac{d\mathbf{r}'}{ds} \text{ 在切平面的投影} = \text{曲率向量} \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \text{ 在切平面的投影}$$

而根据 (2.5), γ 主法向量和 $\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}$ 只相差一个曲率. 我们证明他们满足的方程都是最后一条.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\sum_{\alpha} \frac{du^\alpha}{ds} \mathbf{r}_\alpha \right) && \because \text{链式法则} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} \mathbf{r}_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \mathbf{r}_{\alpha\beta} && \because \text{链式法则} \\ &= \sum_{\gamma} \frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} \mathbf{r}_\gamma + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{r}_\gamma + (\dots) \mathbf{n} && \because (2.13) \\ &= \sum_{\gamma} \left(\frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \right) \mathbf{r}_\gamma + (\dots) \mathbf{n} \end{aligned}$$

故根据测地曲率的定义 (2.29),

$$\kappa_g = 0 \iff \forall \gamma \in \{1, 2\} \quad \frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$$

命题得证. □

定义 2.40 满足 (2.39) 的曲线被称为 **测地线 (Geodesics)**.

等于说, 测地线实际上是“曲面上生物”认为没有弯曲的线.

定理 2.41 一张单曲面 $M : [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$ 上任何一点 p , 任意一个非零单位切向量 X , 在 p 点附近总存在唯一的经过 p 点, 在 p 点切向量是 X 的测地线.

证明 在 (2.39) 最后的方程中, 给出 X 和 p 实际上给出了初值位置和初值条件, 因为各个函数都光滑, 根据常微分的理论, 这是存在且唯一的. \square

定理 2.42 一张单曲面 $M : [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$. 则 M 上任何一点 p , 存在 $r^{-1}(p)$ 开集 V , 使得任意 $q \in r(V)$, p, q 之间都有测地线相连.

证明 上述 (2.41) 实际上定义了

$$\widehat{\exp} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow U \quad (a, b, s) \longmapsto (u(s), v(s))$$

其中 $(u(s), v(s))$ 使得 $\begin{cases} u(0) = 0, v(0) = 0 \\ r(u(0), v(0)) = p \end{cases}$, $r(u(s), v(s))$ 是在 p 点切向

量是 $a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$ 的测地线 (换作弧长参数后), 即 $u_s(0) = a, v_s(0) = b$. 如果 $(a, b) = 0$, 那么 $\widehat{\exp}(0, s) = p$. 将 a, b 视为参数, 根据常微分方程的光滑依赖性, $\widehat{\exp}$ 也是光滑的, 当中一些点可能没有定义, 但是根据常微分方程的光滑依赖性, $\widehat{\exp}$ 定义在一个 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ 的一个开集上. 注意到

$$\widehat{\exp}(a, b, s) = \widehat{\exp}(sa, sb, 1)$$

这说明

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \widehat{\exp}}{\partial a}(0, 0, 1) & \frac{\partial \widehat{\exp}}{\partial b}(0, 0, 1) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\widehat{\exp}(a, 0, 1) - 0}{a} &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\widehat{\exp}(0, b, 1) - 0}{b} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\widehat{\exp}(1, 0, a) - 0}{a} &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\widehat{\exp}(0, 1, b) - 0}{b} \\ &= (u_s(0), v_s(0))|_{a=1, b=0} &= (u_s(0), v_s(0))|_{a=0, b=1} \\ &= (1, 0) &= (0, 1) \end{aligned}$$

从而 $\exp : (a, b) \mapsto \widehat{\exp}(a, b, 1)$ 在 $(0, 0)$ 处的 Jacobi 就是单位阵. 这样根据反函数定理, 命题就得证了. \square

记号表

记号	解释	位置
I	\mathbb{R} 的某个开区间	(2.1)
U	\mathbb{R}^2 的某个开集	(2.7)
$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$	欧式空间内积	
$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$	欧式空间外积	
$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$	欧式空间混合积	
Tan_p	在 p 点的切空间	(2.8)
$\text{Tan}_p(M)$	在 p 点的切空间	(2.8)
E	第一基本形式系数	(2.10)
F	第一基本形式系数	(2.10)
G	第一基本形式系数	(2.10)
I	第一基本形式	(2.10)
L	第二基本形式系数	(2.10)
M	第二基本形式系数	(2.10)
N	第二基本形式系数	(2.10)
II	第二基本形式	(2.10)
\mathcal{W}	Weingarten 变换	(2.10)
K	Gauss 曲率	(2.10)
\boldsymbol{r}_α	一个切向量	(2.12)
\boldsymbol{n}_α	一个切向量	(2.12)
$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$	一个向量	(2.12)
$\boldsymbol{n}_{\alpha\beta}$	一个向量	(2.12)

∂_i	一个算子	(2.12)
$\delta_{\alpha\beta}$	Kronecker 的 δ	(2.12)
δ_α^β	Kronecker 的 δ	(2.12)
$\delta^{\alpha\beta}$	Kronecker 的 δ	(2.12)
$g_{\alpha\beta}$	第一基本形式系数	(2.12)
$b_{\alpha\beta}$	第二基本形式系数	(2.12)
$g^{\alpha\beta}$	第一基本形式系数之逆	(2.12)
$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$	Christoffel 符号	(2.12)
$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	Riemman 记号	(2.16)
$\omega_1 \wedge \omega_2$	微分形式的外积	
$d\omega_1$	微分形式微分	
κ_n	法曲率	(2.29)
κ_g	测地曲率	(2.29)
$I(X, Y)$	第一基本形式在切空间上作用	(2.30)
$II(X, Y)$	第二基本形式在切空间上作用	(2.30)

习题

问题 3 (非单位速率曲线) 已知一般正则曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{r(t)} \mathbb{R}^3]$, 假设

$$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$$

是其化为单位速率曲线的 *Frenet* 标架再重新用 t 参数化得到的标架, 这被成为 γ (不必弧长参数) 的 **Frenet 标架**. 求证:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t) \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| & & \\ * & \kappa \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 & \\ * & * & \kappa\tau \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

作为推论

$$\mathbf{t} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} \quad \mathbf{b} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|}$$

$$\kappa = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^3} \quad \tau = \frac{\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \right]}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|^2}$$

(提示: 通过计算

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) &= \mathbf{t}(s(t))s'(t) = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| \mathbf{t}(t) \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t) &= \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s(t))(s'(t))^2 + \mathbf{t}(s(t))s''(t) = s''(t)\mathbf{t}(t) + \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|^2 \kappa \mathbf{n}(t) \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}(t) &= \dots = (s''' - \kappa^2 s'^3)\mathbf{t}(t) + (\kappa s' s'' + (\kappa s'^2)')\mathbf{n} + \kappa\tau \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|^3 \mathbf{b} \end{aligned}$$

得证.)

习题 4 计算半径为 R 的圆周的曲率和挠率. (提示: 考虑 $\mathbf{r}(t) = (R \cos(t/R), R \sin(t/R), 0)$, 计算知 $\mathbf{t} = (-\sin(t/R), \cos(t/R), 0)$, $\kappa = 1/R$, $\mathbf{n} = (-\cos(t/R), -\sin(t/R), 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\kappa = 0$.)

习题 5 如果正则曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{r(t)} \mathbb{R}^3]$ 取 $\{t, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$ 是 *Frenet* 标架. 假设 $p = \mathbf{r}(t_0)$ 的曲率是 κ , 那么以 $p + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$ 为圆心, $\frac{1}{\kappa}$ 为半径的圆与曲线二次相切 (即速度和加速度都相同). (提示: 实际上根据 (2.5), 只需要验证弧长参数下, $\mathbf{r}, t, \mathbf{n}, \kappa$ 在 t_0 处相同即可. 注意到对于半径为 R 的圆 $\mathbf{n} = -\frac{1}{R} \mathbf{r}$.)

习题 6 验证 (2.15) 中的 “不难得到, 最后一条是恒成立的, 二三条是等价的”. (提示: 对 $\sum_{\gamma} g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ 两边同时求导, 可以把 g^{**} 的导数转移到 g_{**} 上.)

问题 7 一类 \mathbb{R}^3 中很常见的曲面是由某个光滑函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 某个点的原像组成的, 例如球面 $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 就是一例. 考虑光滑函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 满足任何 $f(x, y, z) = 0$ 的点, 都有 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \neq 0$. 求证: $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$ 在局部是一个正则单曲面, 在 (x, y, z) 处的法向量和 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ 共线. (提示: 隐函数定理.)

习题 8 求半径为 a 的球面 $\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ 的第一, 二基本形式和 *Gauss* 曲率. (提示:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \begin{pmatrix} a \cos u \cos v & , & a \cos u \sin v & , & a \sin u \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}_u &= \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v & , & -a \sin u \sin v & , & a \cos u \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}_v &= \begin{pmatrix} -a \cos u \sin v & , & a \cos u \cos v & , & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故

$$I = a^2 du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2$$

且

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & , & \cos u \sin v & , & \sin u \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \mathbf{r}$$

故

$$II = a du^2 + a \cos^2 u dv^2$$

故根据 (2.18) 过程中得到 $\det \mathcal{W}$ 的表达式 $K = \frac{\det \mathbb{I}}{\det \mathbb{I}}$, 故 Gauss 曲率是 $\frac{1}{a^2}$, 这根据 (2.34) 也是不难刻画的.)

习题 9 求球面上的所有测地线. (提示: 根据 (2.39), 可以验证, 所有大圆 (球面上圆心在球心的圆) 都是测地线, 因为球面 \mathbf{r} 的法向量 (不必单位) 就是 \mathbf{r} 自身. 而根据 (2.41), 任何测地线都是他们的一部分.)

第二部分

微分几何

第三章 光滑流形

3.1 光滑流形和光滑映射

I. 光滑流形 所谓流形直观来说, 就是由欧式空间粘合而来的拓扑空间.

定义 3.1 (拓扑流形) 对于拓扑空间 M , 称其是一个 n 维 **拓扑流形 (topological manifold)**, 如果 M 是 *Hausdorff* 的, 且任意 $p \in M$, 都存在 p 开邻域 U 使得 U 同胚于 \mathbb{R}^n 的某个非空开集.

评注 3.2 以下是一些评注

- 根据代数拓扑部分切除定理的推论 (??), 一个拓扑流形的维数是唯一确定的, 记为 $\dim M$.
- 可以将定义中的条件减弱为 U 同胚于 \mathbb{R}^n , 因为任何一个 \mathbb{R}^n 的开集都在一点附近可以缩小为一个开球, 而开球和 \mathbb{R}^n 是同胚的. 所以其实定义还可以增强为在 p 点有同胚于 \mathbb{R}^n 的邻域基.
- *Hausdorff* 空间的条件是不能删去的, 考虑如下 **双点实数轴**

$$\mathbb{R} \times \{\pm 1\} / \sim: (x, \pm 1) \sim (y, \pm 1) \iff x = y \neq 0$$

即将两根实数轴原点以外的点粘起来. 他符合除了 *Hausdorff* 之外的定义, 但是不是 *Hausdorff* 的.

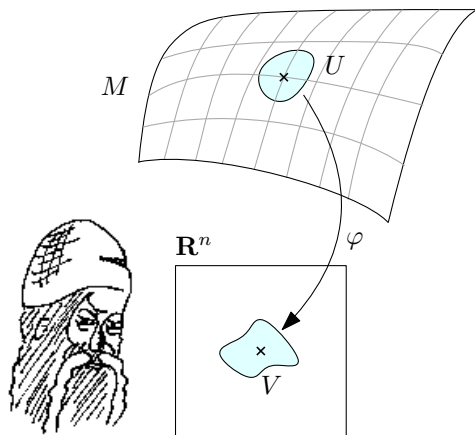


图 3.1: 流形与 Euclid 的凝视

称之为拓扑流形是因为其不过是欧式空间 \mathbb{R}^n 按照拓扑意义粘黏而来的. 而为了将微分结构搬到拓扑流形中, 我们还需要更多附加的结构.

以分析学的经验来看, 想要谈论微分, 仅仅有导数定义出现的极限, 减法, 除法结构是不够的. 我们必须在欧式空间的开集上谈论微分才能得到干净的结论. 采取分析学的记号, 用 \mathcal{C}^k 表示 k 次连续可微, \mathcal{C}^∞ 表示无穷次可微, \mathcal{C}^ω 表示解析.

定义 3.3 (微分流形) 对于 n 维拓扑流形 M , 一个 \mathcal{C}^k -微分结构 \mathfrak{F} 是

- $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$, 其中 U 是 M 的开集, $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq_{\text{开}} \mathbb{R}^n$ 是同胚. 称 (U, φ) 为 **坐标卡 (cart)**, φ 是 U 的 **局部坐标**.
- $\{U: (U, \varphi) \in \mathfrak{F}\}$ 是 M 的开覆盖.
- $\{\varphi: (U, \varphi) \in \mathfrak{F}\}$ 是相容的.

即对于 $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathfrak{F}$, 在有定义的区域, $\psi \circ \varphi^{-1}$ 和 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 是 \mathcal{C}^k 的.

- \mathfrak{F} 是满足上述性质极大的集合.

一张拓扑流形配上 \mathcal{C}^k -微分结构就称为一个 \mathcal{C}^k -微分流形. 我们更经常称 \mathcal{C}^∞ -微分流形为 **光滑 (smooth) 流形**, \mathcal{C}^ω -微分流形为 **解析 (analytic) 流形**.

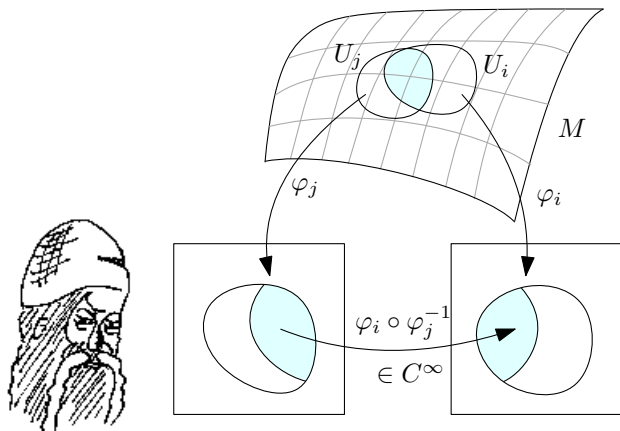


图 3.2: 相容性

评注 3.4 不难验证的是, 如果删去上述定义中满足极大性的条件, 只满足前三条, 那么一定可以唯一地扩充为一个微分结构. 要求极大性只是为了在技术上避免“本质相同”的微分结构. 具体来说, 对于 \mathfrak{F}' , 定义其生成的微分结构是

$$\left\{ (U, \varphi) : \begin{array}{l} U \subseteq M \\ \forall (V, \psi) \in \mathfrak{F}', \varphi \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^k, \psi^{-1} \circ \varphi \in \mathcal{C}^k \end{array} \right\}$$

上述定义不妨说是将所有“可能的参数变换”都收集在一起了.

约定 3.5 之后为了方便起见, 流形皆假设第二可数, 即存在可数拓扑基. 此时, 流形可以被可数个同胚于欧式空间的开集覆盖.

例 3.6 (欧式空间) 对于欧式空间 \mathbb{R}^m , 取坐标卡 $(\mathbb{R}^m, \text{id})$. 这唯一决定了其上的微分结构.

例 3.7 (开集与乘积) 任意一张流形 M , 开集 $U \subseteq M$. 那么 U 具有自然的微分结构, 因为总可以缩小 M 的坐标卡使得其落入 U 内.

对于两个流形 M, N , 那么 $M \times N$ 具有自然的微分的结构, 因为假如有 M 的坐标卡 (U, φ) , N 的坐标卡 (V, ψ) , 那么 $(U \times V, \varphi \times \psi)$ 决定了 $M \times N$ 的微分结构.

例 3.8 (经典曲线曲面) 我们称 1 维流形为 **曲线**. 回忆经典的曲线论 (2.1). 对于经典的正则简单曲线 $\gamma: [(a, b) \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}^3]$, 滥用记号记 γ 是 \mathbf{r} 的像, 因为 \mathbf{r} 是单射, 可以按照 (a, b) 的拓扑结构赋予 γ 以拓扑结构和微分结构, 这无疑是一个曲线.

称 2 维流形为 **曲面**. 同样回忆 (2.7), 可以对单曲面类似上面赋予拓扑结构和微分结构, 这无疑是一个曲面.

但是, 和 \mathbb{R}^3 上诱导的拓扑有可能不同, 例如下面的卧倒的 ρ 型.

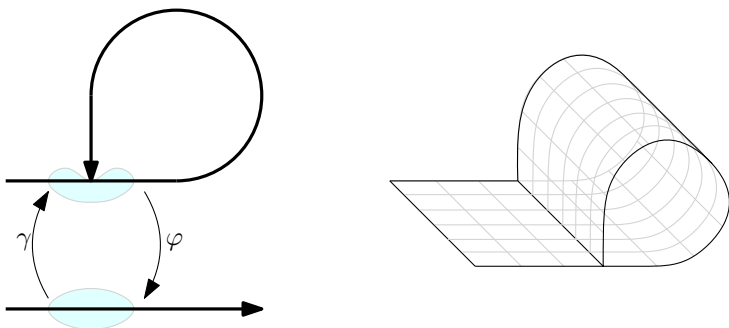


图 3.3: 卧倒的 ρ 型

例 3.9 (n 维球面 \mathbb{S}^n) 在 \mathbb{R}^{n+1} 空间中考虑单位球面

$$\mathbb{S}^n = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

我们可以取 $2(n+1)$ 个坐标卡

$$\begin{cases} U^i = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^m : x^i > 0\} & \varphi^i = (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}) \\ V^i = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^m : x^i < 0\} & \psi^i = (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}) \end{cases}$$

其中 $\hat{*}$ 表示跳过, 即按照坐标将 \mathbb{S}^m 分成 2 半, 每一半都投影到切面上. 容易验证, 在 $U^i \cap U^j$ 上,

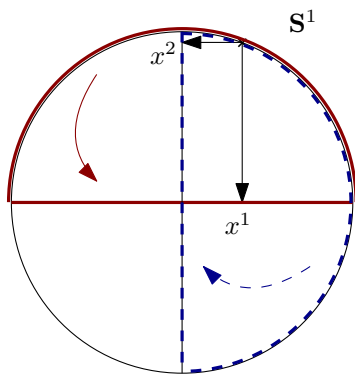


图 3.4: \mathbb{S}^1

$$x^i = \sqrt{1 - (x^1)^2 - \dots - \widehat{(x^i)^2} - (x^{m+1})^2} \quad \hat{*} \text{ 表示跳过}$$

这是 \mathcal{C}^∞ 函数, 类似地, 可以得到任何 $U^i \cap V^j, V^i \cap V^j$ 的情形. 故这给出了 \mathbb{S}^n 的一个微分结构.

例 3.10 (n 维射影空间 \mathbb{P}^n) 在 \mathbb{R}^{n+1} 的全体一维子空间构成了 n 维射影空间 \mathbb{P}^n . 射影空间中任何一个点都是 \mathbb{R}^{n+1} 的一个 1 维子空间, 其由这个子空间中的一个非零向量唯一决定, 故可以约定射影坐标,

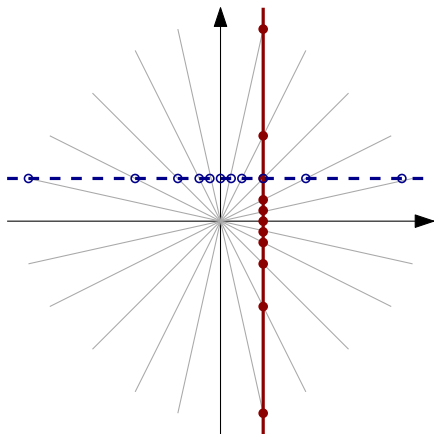
$$[(x^1, \dots, x^{n+1})] \leftrightarrow \{(\lambda x^1, \dots, \lambda x^{n+1}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

其中 x^1, \dots, x^{n+1} 不全为 0. 容易验证

$$[(x^1, \dots, x^{n+1})] = [(y^1, \dots, y^{n+1})] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ s. t. } x^i = \lambda y^i$$

例如, \mathbb{P}^1 可以看做 $\mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$, 具体来说,

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow [(x, 1)] \quad \infty \leftrightarrow [(1, 0)]$$

图 3.5: \mathbb{P}^1

\mathbb{P}^2 可以看做给 \mathbb{R}^2 给每一组平行直线添加一个“无穷远处交点”，具体来说，

$$(x, y) \in \mathbb{R} \leftrightarrow [(x, y, 1)] \quad \text{平行于过 } (0, 0), (x, y) \text{ 的直线交于 } \{(x, y, 0)\}$$

受此启发，我们可以作 $n+1$ 个坐标卡

$$U_i = \{[(x^1, \dots, x^{n+1})] : x^i \neq 0\}$$

$$\varphi_i : [(x^1, \dots, x^{n+1})] \mapsto \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \widehat{\frac{x^i}{x^i}}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \in \mathbb{R}^m \quad * \text{ 表示跳过}$$

这 $n+1$ 个坐标卡覆盖了 \mathbb{P}^n . 且容易验证，其成为一个微分结构.

II. 光滑映射 如同几乎所有数学结构，我们要研究流形间的映射. 下面我们称的流形都是光滑流形.

定义 3.11 对于流形的开子集到流形的映射 $M \supseteq S \xrightarrow{f} N$, 称其在 $p \in S$ 处**光滑**, 如果存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 和 $f(p)$ 附近的坐标卡 (V, ψ) 使得 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是光滑的. 定义

$$\mathcal{C}^\infty(S, N) = \{U \xrightarrow{f} N : f \text{ 在 } U \text{ 每一点光滑}\}$$

特别地, 对于 $M \xrightarrow{f} N$, f 被称为 **光滑映射** 如果 f 在 M 的每一点光滑.

定义 3.12 对于光滑映射 $M \xrightarrow{f} N$, 称 f 是 **微分同胚或微分态射 (diffeomorphism)**, 如果存在光滑映射 $g: N \rightarrow M$ 使得 $f \circ g = \text{id}_N, g \circ f = \text{id}_M$.

评注 3.13 有如下评注

- 显然, 上述定义对于欧式空间都是成立的. 因为他们的坐标卡都可以取作 id .
- 因为相容性, 实际上上述定义中挑选的坐标卡可以是任意的.
- 显然, f 光滑当且仅当 M 有某个坐标卡覆盖 $\{(U_i, \varphi_i)\}$, N 有某个坐标卡覆盖 $\{(V_j, \psi_j)\}$, 使得任意 i, j , 映射 $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ 是光滑的.

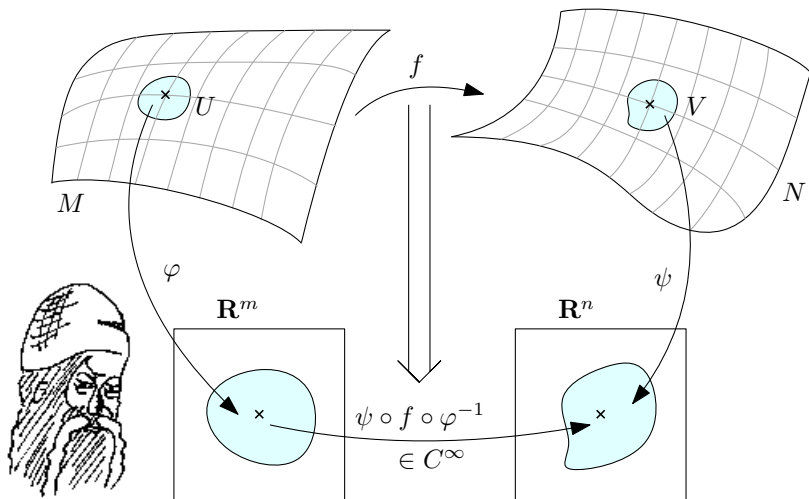


图 3.6: 光滑映射

鉴于点集拓扑学中连续函数环 (1.9) 所具备的良好代数结构, 我们定义如下的光滑函数环.

定义 3.14 (光滑函数环) 对于流形的开集 $M \supseteq U$, 记 $\mathcal{C}^\infty(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$, 其中 \mathbb{R} 作为流形就是通常的微分结构 (3.6). 这是一个 \mathbb{R} -代数, 其中零元是常函数 0, 单位元是常函数 1, 加法和乘法都是逐点的

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad (kf)(x) = kf(x)$$

评注 3.15 (单位分拆存在定理, 光滑版本) 在定义了流形上的光滑性之后, 我们可以对流形谈光滑单位分拆. 事实上, 流形上的任意开覆盖都存在光滑单位分拆. 因为根据 (3.5), 流形都被假设是第二可数的, 证明可以照搬 (1.7).

以分析的直觉, 可微性是局部性质, 换言之, 某点处的可微性之后附近的性质有关, 所以我们迫不及待定义如下的函数芽. 将“附近”的概念从流形本身推广到函数环上.

定义 3.16 (函数芽) 对于流形 M , $p \in M$, 定义这一点的 **函数芽 (germ)**

$$\mathcal{C}_p^\infty = \left\{ (U, f) : \begin{array}{l} U \text{ 是包含 } p \text{ 的开集} \\ f \in \mathcal{C}^\infty(U) \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{l} (U, f) \sim (V, g) \iff \\ \text{存在包含 } p \text{ 的开集 } W \\ W \subseteq U \cap V, \quad f|_W = g|_W \end{array} \right.$$

换句话说 \mathcal{C}_p^∞ 是 $\mathcal{C}^\infty(U)$ 的余极限, 其中 U 是包含 p 的开集, 按照包含关系. 当强调是在流形 M 上构造时, 会记作 $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.

方便起见, 对于含 p 的开集 U , 对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, 记 $f|_p$ 为 (f, U) 在 \mathcal{C}_p^∞ 中的像. 反之, 任何 $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ 的元素也形如 $f|_p$. 不难验证, \mathcal{C}_p^∞ 具有自然的环结构, 假如 $f|_p, g|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$, 假设 f 活在 U 上, g 活在 V 上, 定义

$$f|_p + g|_p = ((f + g)|_{U \cap V})|_p \quad f|_p \cdot g|_p = ((fg)|_{U \cap V})|_p \quad k(f|_p) = (kf)|_p$$

例 3.17 对于流形 M , $p \in M$, 选定 p 点附近的坐标卡 (U, φ) , 假设 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 则 $x^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, 从而 $x^i|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$.

评注 3.18 有如下评注

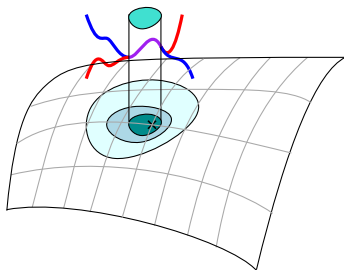


图 3.7: 函数芽

- 上述定义的 \mathcal{C}_p^∞ 可以解释为所有定义域含 p 的函数, 而两个函数相同当且仅当在某个含 p 的开集 U 上相同, 换言之, 在 p 附近的表现相同.
- 不难验证, 如果有 p 的开邻域基 \mathcal{U} , 那么定义中 U 可以改为取 \mathcal{U} 中的成员, 而不必取所有含 p 的开集.
- 因为流形局部上都是欧式空间, \mathcal{C}_p^∞ 在同构意义下只和维数有关.
- 对于光滑函数, 因为总存在单位分拆 (3.15), 所以任何 $f|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$, 都存在 $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 使得 $g|_p = f|_p$.

或许令人疑惑, 既然上述的 \mathcal{C}_p^∞ 在同构意义下只和维数有关, 其存在是否必要? 下面我们会看到, 这实际上提供了一种回到欧式空间的手段.

3.2 切空间和切映射

I. 切空间 下面我们来推广切空间的概念, 回顾古典的 (2.2), (2.8). 想要直接进行推广, 一大困难就是我们并不知道在一个抽象的流形上如何“求导”, 更无法把流形典范地嵌入欧式空间, 使得切空间在经典意义下和流形“相切”.

定义 3.19 (切空间) 对于流形 M , $p \in M$, 一个 \mathbb{R} -线性映射 $\partial: \mathcal{C}_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, 是一个 p 点的 **导数** 如果满足如下 p 点的 **Leibniz 律**

$$\partial(f|_p \cdot g|_p) = \partial(f|_p) \cdot [g(p)] + [f(p)] \cdot \partial(g|_p)$$

将所有这样的导数收集起来构成一个向量空间, 称为 p 点的 **切空间 (tangent space)**, 记为 Tan_p . 如果为了强调是在 M 上构造的, 记为 $\text{Tan}_p(M)$. 显然, 切空间是一个 \mathbb{R} -线性空间.

方便起见, 对某个含 p 的开集 U , 对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, 直接记 $\partial f = \partial(f|_p)$.

命题 3.20 对于流形 M , $p \in M$, $\partial \in \text{Tan}_p(M)$, 有

- 如果 $f|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$ 是常函数, 则 $\partial f = 0$.
- 如果 $f|_p, g|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$ 满足 $f(p) = g(p) = 0$, 则 $\partial(fg) = 0$.

证明 对于前者, 只需要考虑常数 1 的导数, 因为

$$\partial(1|_p) = 1 \cdot \partial(1|_p) + \partial(1|_p) \cdot 1 = 2\partial(1|_p)$$

故 $\partial(1|_p) = 0$. 对于后者, 直接验证

$$\partial(fg) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g = 0$$

命题得证. □

换言之, 我们希望用切向量的方向导数 (2.27) 模拟 “切向量”, 问题在于这是否能够包含所有的切向量? 我们将从维数上论证这件事.

定义 3.21 对于流形 M , $p \in M$, 选定 p 点附近的坐标卡 (U, φ) , 假设 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 不难验证

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : \mathcal{C}_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R} \quad f|_p \longmapsto \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

是 p 点的导数.

定理 3.22 对于流形 M , $p \in M$, 选定 p 点附近的坐标卡 (U, φ) , 假设坐标卡的分量 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 则

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : i = 1, \dots, n \right\}$$

是 Tan_p 的一组基. 作为推论, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Tan}_p = \dim M$.

证明 不妨假设 $\varphi(p) = 0$. 任意取 $\partial \in \text{Tan}_p$, 对任意 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, 考虑函数 $f \circ \varphi^{-1}$, 这是定义在 0 附近的光滑函数, 考虑其 Taylor 展开

$$(f \circ \varphi^{-1})(x) = (f \circ \varphi^{-1})(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(0)x^i + r(x)$$

再复合 φ 回到流形上得到

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(0)x^i + r(\varphi(x)) \\ &= f(p) + \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f + r(\varphi(x)) \end{aligned}$$

注意: 上式的 x^i 已经是一个映射了. 这样

$$\partial(f) = 0 + \sum_{i=1}^n \partial(x^i) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f + 0$$

首尾两项得 0, 是因为 (3.20), 注意到 $r(x)$ 是 $x^i g(x)$, 且 $g(0) = 0$ 这样函数的线性组合. 因为 f 是任意的, 这就说明

$$\partial = \sum_{i=1}^n \partial(x^i) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

这说明 Tan_p 由 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$ 张成. 为了看到其是线性无关的, 只需注意到

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p x^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

这就很容易地可以说明线性无关. □

例 3.23 对于欧式空间 \mathbb{R}^n , 不妨选择坐标卡就是 $(\mathbb{R}^n, \text{id})$, 这样对于点 $p \in \mathbb{R}^n$, 可以作同构

$$\sigma : \text{Tan}_p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \mapsto e_i$$

其中 e_i 是 \mathbb{R}^n 的标准基. 写得更明确就是

$$\sigma : \text{Tan}_p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \quad \partial \mapsto (\partial x^1, \dots, \partial x^n)$$

其中 $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的投影, 也是坐标卡的分量. 此时, 如果 ∂ 对应于 $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$, 则其中 $a^i = \partial x^i$. 那么对于 $f|_p \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R})$, 其作用是

$$\partial f = a^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) + \dots + a^n \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = f \text{ 在 } p \text{ 处对 } \mathbf{a} \text{ 的方向导数}$$

所以一种构造 \mathbb{R}^n 切空间的直观方法就是形式地对每一个点指定一个 \mathbb{R}^n .

现在我们或许需要改变一下对于切空间的看法, 与其将切空间晦涩地理解为抽象的切线切面, 不如说一个切向量就是代表曲面上一种“延展趋势”, 或者说就是我们在分析学中苦苦寻求的那个实实在在的“无穷小变化”, 在光滑函数环 \mathcal{C}_p^∞ 的作用无非是因自变量的变化引起因变量变化而产生的变化率. 故切空间反映了某一点的局部的行为.

以此之见, 切空间如果“画出来”, 应该是微缩于某一点的 \mathbb{R} -线性空间. 这或许就是佛家“一花一世界”的数学原理.

定义 3.24 (余切空间) 以后见之明, 我们需要定义如下两个和切空间密切相关的概念, 对于流形 M , $p \in M$,

- 记 $\text{Cot}_p = \text{Tan}_p^\vee$, 即切空间的对偶空间, 称为 **余切空间**.
- 记 $\text{Cot}_p^k = \wedge^k \text{Tan}_p^\vee$, 即余切空间的外代数的 k 次部分. 故

$$\text{Cot}_p^0 = \mathbb{R} \quad \text{Cot}_p^1 = \text{Cot}_p^k \quad m > \dim M \Rightarrow \text{Cot}_p^m = 0$$

关于外代数, 本质上与本书所讨论内容无关, 相关知识请移步 [6] P10 至 15 或 [3] P269 §7.6.

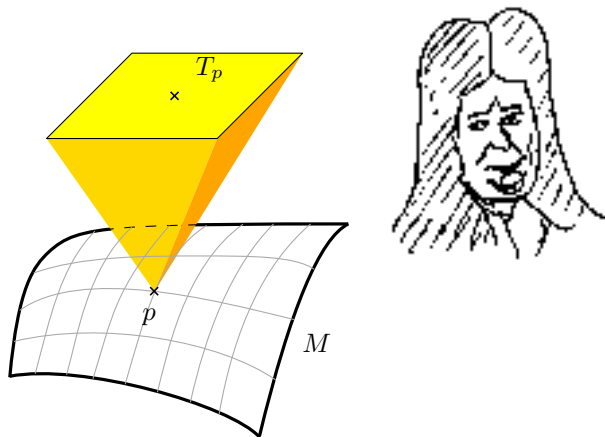


图 3.8: 切空间和 Leibniz 的微笑

定义 3.25 对于流形 M , $p \in M$, 对于 $\partial \in \text{Tan}_p$, 以及 $f|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$, 定义其微分

$$df|_p : \text{Tan}_p \longrightarrow \mathbb{R} \quad \partial \longmapsto \partial f$$

不难验证, $df|_p$ 是线性的, 从而 $df|_p \in \text{Tan}_p^\vee = \text{Cot}_p$, 这被称为 f 的微分.

定理 3.26 选定 p 点附近的坐标卡 (U, φ) , 假设坐标卡的分量 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 那么

$$\{dx^i|_p : i = 1, \dots, n\}$$

是 Cot_p 关于 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$ 的对偶基.

证明 因为

$$(dx^i|_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p x^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

从而是对偶基.

□

推论 3.27 选定 p 点附近的坐标卡 (U, φ) , 假设坐标卡的分量 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 那么

$$\{dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

是 Cot_p^k 的一组基.

II. 切映射 既然介绍了切空间, 光滑映射必然会诱导出切空间的映射. 以多元微积分学的哲学, 光滑映射在某一点都近似是线性映射, 那么作为曲面极限状态的切空间之上必定也是线性映射.

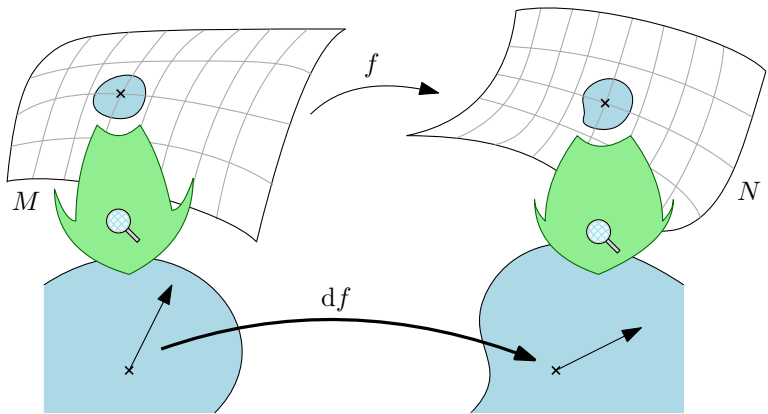


图 3.9: 切映射

定义 3.28 对于流形的开子集到流形的映射 $M \supseteq S \xrightarrow{f} N$, 如果 f 在 $p \in S$ 处光滑, 定义

$$df|_p : \text{Tan}_p M \longrightarrow \text{Tan}_{f(p)} N \quad \partial \longmapsto [\varphi|_p \mapsto \partial(\varphi \circ f)]$$

这被称为 **切映射**. 显然, 这是 \mathbb{R} -线性的. 当然, 还由之自然诱导了 **余切映射**

$$\circ f : \text{Cot}_{f(p)}^k \longrightarrow \text{Cot}_p^k \quad \omega \longmapsto \omega \circ f$$

评注 3.29 以下是一些评注.

- 上述定义的 $df|_p$ 和 (3.25) 的 $df|_p$ 实际上是一致的. 具体来说, 对于 $f \in \mathcal{C}_p^\infty$, 假如将 \mathbb{R} 在 $f(p)$ 点的切空间按照 (3.23) 等同于 \mathbb{R} , 那么作为 f 的微分的 $df|_p$ 的作用是

$$(df|_p)\partial = \partial f$$

而作为切映射的 $df|_p$ 的作用是

$$(df|_p)\partial = [\varphi \mapsto \partial(f \circ \varphi)] \quad \text{对应于} \quad \partial(f \circ x^1) = \partial(f \circ \text{id}) = \partial f$$

- 假如在 p 附近有坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$, $f(p)$ 附近有坐标卡 $(V, \psi = (y^1, \dots, y^m))$. 那么

$$\left[(df|_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \right] (y^j|_{f(p)}) = \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) := c_i^j$$

故

$$\sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \xrightarrow{df|_p} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i^j a^i \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m c_i^j a^i \right) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}$$

其中 $\left(\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) \right)_i^j$ 就是传说中的 *Jacobi* 矩阵, 其本质是链式法则.

- 不难验证对于光滑映射 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$, $d_{f(p)}g \circ d_p f = d_p(gf)$.
- 余切映射的记号是合理的, 因为根据定义余切映射 $dg|_{f(p)} \mapsto d(g \circ f)|_p$, 具体来说

$$dg|_{f(p)} \mapsto [\partial \mapsto (dg|_{f(p)})(df|_p \partial) = (df|_p \partial)(g) = \partial(g \circ f)] = d(g \circ f)|_p$$

例 3.30 回忆经典的曲线 (2.1) 的定义, 对于光滑曲线 $\gamma: [I \xrightarrow{r(t)} \mathbb{R}^3]$, 对于 $t_0 \in I$, r 诱导了 $d\mathbf{r}|_{t_0}: \text{Tan}_{t_0} \rightarrow \text{Tan}_{f(t_0)}$, 满足

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \mapsto \left[f \mapsto \frac{d(f \circ r)}{dt}(t_0) = \sum_x x'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(r(t_0)) \right] = \sum_x x'(t_0) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{r(t_0)}$$

按照 (3.23) 等同下来就成为 $1 \mapsto \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$. 这就是经典的切向量 (2.2), 其像就是切线. 关于曲面也有一样的结论.

例 3.31 一般地, 对于可微映射 $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, 假如 $f = (y^1, \dots, y^m)$, 在 $p \in U$, 则按照 (3.23) 等同下切映射就是

$$(a^1, \dots, a^n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y^1}{\partial x^i} a^i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^m}{\partial x^i} a^i \right)$$

换句话说, 这是方向导数

$$\mathbf{a} \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\mathbf{a}) - f(p)}{t}$$

定义 3.32 (曲线, 道路) 对于流形 M , 如果有光滑映射 $s: I \rightarrow M$, 其中 I 是 \mathbb{R} 上某个开区间, 称 s 为 M 上的 **曲线**. 这在每一点 $t_0 \in I$, 诱导了切映射 $ds|_p: \text{Tan}_{t_0}\mathbb{R} \rightarrow \text{Tan}_{s(t_0)}M$, 称 $ds|_p \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) \in \text{Tan}_{s(t_0)}M$ 为这条曲线在 t_0 处的 **切向量**, 记为 $\dot{s}(t_0)$.

对于流形 M , 对于映射 $I \xrightarrow{p} M$, 其中 I 是 \mathbb{R} 上某个闭区间, 如果 p 在 I 上连续, 在 I 内部是光滑的, 则称 p 是 M 上的 **道路**. 假如闭区间 $I = [a, b]$, 称 $p(a)$ 为 **起点**, $p(b)$ 为 **终点**.

评注 3.33 根据 (3.30), \dot{s} 的记号和其作为导数的记号是一致的. 更加具体地说, 如果在 $s(t_0)$ 附近的坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, 则

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \mapsto \dot{s}(t_0) \mapsto d\varphi|_{s(t_0)}(\dot{s}(t_0)) \quad \text{假设对应到} \quad (a^1, \dots, a^n)$$

那么 $\varphi \circ s: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 根据 (3.31) 将有

$$(a^1, \dots, a^n) = \frac{d(\varphi \circ s)}{dt}(t_0)$$

一般地, 这样还可以得到更为实用的 **链式法则**, 如果有 $I \xrightarrow{s} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, 不妨假设 $0 \mapsto p$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ s)}{dt}(0) &= \frac{d(f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ s)}{dt}(0) && \text{选取局部坐标 } \varphi = (x^1, \dots, x^n) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \frac{d(\varphi \circ s)}{dt}(0) && \because \text{链式法则} \\ &= \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f \\ &= (\dot{s}(0))(f) \end{aligned}$$

定理 3.34 关于流形 M 上, $p \in M$, 任何一个切向量 $\partial \in \text{Tan}_p M$ 都存在一条过 p 的 M 上的曲线 $s: I \rightarrow M$, 以及 $t_0 \in I$ 使得 $s(t_0) = p$ 且 $\dot{s}(t_0) = \partial$.

证明 通过找 p 附近的坐标卡, 将问题转化到欧式空间中, 这样问题就化成了一个经典的常微分方程的问题, 甚至可以选择直线段. \square

鉴于上面的刻画, 一种构造切空间的方法就是将曲线的等价类找出来, 这将在下小节介绍.

III. 切空间的其他构造方法 下面我们介绍一下切空间的其他构造途径. 详细可见于 [14] P71.

评注 3.35 (曲线的等价类) 对于流形 M , $p \in M$, 考虑所有过 p 点的 M 上的曲线 $I \rightarrow M$, 为了标准化, 假设 $0 \mapsto p$. 认为两条曲线 $[I \xrightarrow{f(t)} M], [I' \xrightarrow{g(t)} M]$ 是等价的, 当且仅当在 p 的附近的某个坐标卡 (U, φ) 下,

$$\frac{d(\varphi \circ f)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ g)}{dt}(0)$$

实际上, 因为相容性和链式法则, 坐标卡的选择可以是任意的. 根据 (3.34), 这样构造的空间同构于 Tan_p .

以上的构造来自于几何直观, 实际上是“相切曲线”的等价类.

评注 3.36 (余切空间) 对于流形 M , $p \in M$, 记

$$\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathcal{C}_p^\infty : f(p) = 0\} \quad \mathfrak{m}_p^2 = \left\{ \sum_i f_i g_i : f_i, g_i \in \mathfrak{m}_p \right\}$$

注意到任何一个 $\partial \in \text{Tan}_p$, 根据 (3.20), $\partial(\mathfrak{m}_p^2) = 0$, 故自然诱导了映射

$$\partial : \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f|_p \bmod \mathfrak{m}_p^2 \longmapsto \partial f$$

这样实际上 $f \in \mathcal{C}_p^\infty$ 可以作用在 Tan_p 上通过

$$f \cdot \partial = \partial \left[(f - f(p))|_p \bmod \mathfrak{m}_p^2 \right] = \partial f - \partial(f(p)) = \partial f = df(\partial)$$

这个作用和余切空间的作用是一致的. 利用和 (3.22) 证明本质相同的论证, 可以得到 $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2$ 在一个坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ 的一组基就是

$$x^1 \bmod \mathfrak{m}_p^2, \dots, x^n \bmod \mathfrak{m}_p^2$$

这就说明上述构造的 $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \cong \text{Cot}_p$. 想要得到切空间再取一次对偶即可回到.

评注 3.37 以上的构造实际上来自 *Taylor* 展开. 我们可以一直将 $\{\mathfrak{m}_p^i\}$ 构造下去. 令 U 是 \mathbb{R}^n 中含 0 的开集, 一个光滑函数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, 如果按照 *Taylor* 展开展到 k 次项

$$f(x) = f(0) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)x^i + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(0)x^{i_1} \dots x^{i_k} + \underbrace{\dots}_{\in \mathfrak{m}_p^{k+1}}}_{\in \mathfrak{m}_p^k}$$

代数地, 总有如下的裂正合列

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_p^{i+1} \rightarrow \mathfrak{m}_p^i \rightarrow \mathfrak{m}_p^i / \mathfrak{m}_p^{i+1} \rightarrow 0 \quad \mathfrak{m}_p^i / \mathfrak{m}_p^{i+1} \xrightarrow{\text{"n 次型逼近"}} \mathfrak{m}_p^i$$

这样我们得到

$$\mathcal{C}_p^\infty \cong \underbrace{\mathcal{C}_p^\infty / \mathfrak{m}_p}_{=\mathbb{R}} \oplus \underbrace{\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2}_{=\text{Cot}_p} \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_p^k / \mathfrak{m}_p^{k+1} \oplus \mathfrak{m}^{k+1}$$

之后那些项可以用来构造高阶的切向量. 如果把切向量看成是“一阶无穷小”, 那么高阶就是“高阶无穷小”, 但是我们并不需要这些.

评注 3.38 (坐标卡切向量的选取) 我们曾经指出 (3.23) 欧式空间的切空间可以看做形式地在指定一个线性空间, 因此, 如果在每个点 p 附近的坐标卡 (U, φ) 都配以一个 $\varphi(U)$ 上 $\varphi(p)$ 的切向量, 然后在坐标变换下不变. 这也是一种构造方法.

3.3 浸入, 淹没和子流形

I. 浸入, 淹没和常秩映射 我们之前提到, 切空间反映了局部的行为, 但是这种局部是一种“趋势”, 为了让其回到“大千世界”, 我们需要一些他们之间关系的刻画.

定义 3.39 (浸入, 淹没) 对于流形的开子集到流形的光滑映射 $M \supseteq S \xrightarrow{f} N$, $p \in S$, 定义

- f 在 p 处是 **浸入 (immersion)**, 如果 $df|_p$ 是单射.
- f 在 p 处是 **淹没 (submersion)**, 如果 $df|_p$ 是满射.
- f 在 p 处是 **平展的 (étale)**, 如果 $df|_p$ 是同构.
- f 在 p 处是 **常秩的 (constant rank)**, 如果 $\text{rank } df|_x$ 是在 p 附近是和 x 无关的常数.

称 $f: M \rightarrow N$ 是浸入, 淹没, 平展或常秩如果在每一点处如此.

例 3.40 对于流形 M , 任意开集 $U \subseteq M$, 回忆 (3.7), 其具有微分结构. 此时包含映射 $\iota: U \rightarrow M$ 诱导的切映射 $d\iota = \text{id}$, 故既是浸入也是淹没.

下面的一系列刻画摘自 [19] P83 §10.

定理 3.41 (反函数定理) 对于流形的开子集到流形的光滑映射 $M \supseteq S \xrightarrow{f} N$, $p \in S$, 如果 f 在 p 处是平展的, 即 $df|_p$ 是同构, 那么存在含 p 开集 U , 含 $f(p)$ 开集 V 使得 $f: U \rightarrow V$ 是微分同胚.

证明 这个问题是局部的, 通过选定坐标卡, 问题变到欧式空间中, 在欧式空间中, 这就是反函数定理. □

反函数定理的证明可见 [17] P221 9.24.

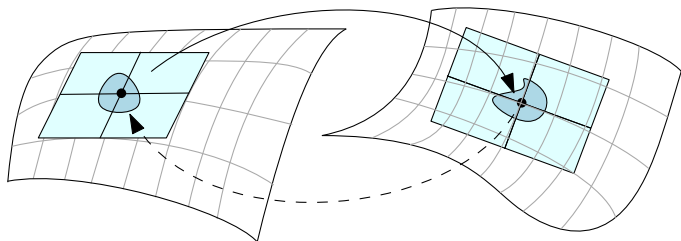


图 3.10: 反函数定理

推论 3.42 对于 m 维流形 M , 假设 $p \in M$, $f^1|_p, \dots, f^k|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$,

- (1) 假如 $\{df^i|_p\}$ 是 Cot_p 的一组基, 则 $k = m$, 在某个充分小的含 p 开集 U 上, (U, f^1, \dots, f^m) 是一个坐标卡.
- (2) 假如 $\{df^i|_p\}$ 是线性无关的, 那么 $k \leq m$, 可以添加一些 $f^{k+1}|_p, \dots, f^m|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$, 在某个充分小的含 p 开集 U 上, (U, f^1, \dots, f^m) 是一个坐标卡.
- (3) 假如 $\{df^i|_p\}$ 张成了 Cot_p , 那么 $k \geq m$, 可以删去一些 $f^i|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$, 使得在某个充分小的含 p 开集 U 上, $(U, f^{i_1}, \dots, f^{i_m})$ 是一个坐标卡.

证明 (1) 选择 f^i 们共同生活的含 p 开集 U , 考虑

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad x \longmapsto (f^1(x), \dots, f^m(x))$$

则 $d\varphi$ 是同构, 因为选择 $\text{Tan}_p U$ 的一组基 $\partial_1, \dots, \partial_k$, 根据 $\{df^i|_p\}$ 线性无关, $\{\partial_i, f^j\}$ 是非退化的, 即 $d\varphi(\partial)$ 是一组基.

(2) 和 (3) 是线性代数, 注意到任意 Cot_p 的元素都形如 $df|_p$. □

定理 3.43 对于流形的开子集到流形的光滑映射 $M \supseteq S \xrightarrow{f} N$, $p \in S$, 其中 $\dim M = m, \dim N = n$, 下列条件是等价的,

(1) f 在 p 处是浸入, 即 $df|_p$ 是单射.

(2) 存在含 p 开集 U , 含 $f(p)$ 的开集 V , 满足 $f(U) \subseteq V$, \mathbb{R}^{n-m} 中含 0 开集 W , 以及 g 是 $U \times W$ 到 V 微分同胚. 使得 f 局部上分裂为

$$U \xrightarrow{* \times \{0\}} U \times W \xrightarrow{g} V \subseteq N$$

(3) 存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) , $f(p)$ 的坐标卡 (V, ψ) , 使得在有定义的地方, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是单的线性映射.

(4) 存在 p 附近的局部坐标 x^1, \dots, x^m 和 $f(p)$ 附近的局部坐标 y^1, \dots, y^n 使得

$$y^i \circ f = \begin{cases} x^i & 1 \leq i \leq m \\ 0 & m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

(5) 存在含 p 开集 U , 含 $f(p)$ 开集 V , 满足 $f(U) \subseteq V$, 以及光滑映射 $g: V \rightarrow U$ 使得 $g \circ f|_U = \text{id}_U$

证明 (1) \Rightarrow (2). 由于这个问题是局部的, 通过选定坐标卡, 问题变到欧式空间中, 此时 $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n$, 考虑

$$g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (u, w) \longmapsto f(u) + w$$

直接计算知道 $dg|_{(p,0)}$ 非退化, 根据反函数定理, 知 (2) 成立.

(2) \Rightarrow (3) 是因为上述的 $dg: \text{Tan}_{(p,0)}(U \times W) = \text{Tan}_p U \times \text{Tan}_0 W \rightarrow \text{Tan}_{f(p)} N$ 是同构, 根据 (3.42), 其像可以扩充为一个局部坐标, 这样在这组坐标下成为了单线性映射.

(3) \Rightarrow (4) 只需要对坐标卡再复合一个线性同构即可.

(4) \Rightarrow (5) 转化到欧式空间是显然的.

(5) \Rightarrow (1) 说明对应的切映射有左逆, 自然切映射是单射. □

定理 3.44 对于流形的开子集到流形的光滑映射 $M \supseteq S \xrightarrow{f} N$, $p \in S$, 其中 $\dim M = m, \dim N = n$, 下列条件是等价的,

- (1) f 在 p 处是淹没, 即 $df|_p$ 是满射.
- (2) 存在含 p 开集 U , 含 $f(p)$ 的开集 V , 满足 $f(U) \subseteq V$, \mathbb{R}^{n-m} 中含 0 开集 W , 以及 g 是 U 到 $V \times W$ 微分同胚. 使得 f 局部上分裂为

$$U \rightarrow V \times W \xrightarrow{\text{投影}} V \subseteq N$$

- (3) 存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) , $f(p)$ 的坐标卡 (V, ψ) , 使得在有定义的地方, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是满的线性映射.
- (4) 存在 p 附近的局部坐标 x^1, \dots, x^m 和 $f(p)$ 附近的局部坐标 y^1, \dots, y^n 使得

$$y^i \circ f = x^i \quad i = 1, \dots, m$$

- (5) 存在含 p 开集 U , 含 $f(p)$ 开集 V , 满足 $f(U) \subseteq V$, 以及光滑映射 $g: V \rightarrow U$ 使得 $f \circ g = \text{id}_V$

证明 和上面的证明是类似的. □

推论 3.45 淹没必是开映射.

定理 3.46 (秩定理) 对于流形的开子集到流形的光滑映射 $M \supseteq S \xrightarrow{f} N$, $p \in S$, 其中 $\dim M = m, \dim N = n$, 下列条件是等价的,

- (1) f 是常秩的, 即 $\text{rank } df|_x$ 是在 p 附近是和 x 无关的常数.
- (2) 存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) , $f(p)$ 的坐标卡 (V, ψ) , 使得在有定义的地方, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是线性映射.
- (3) 存在含 p 开集 U , \mathbb{R}^r 中含 0 的开集 W , 以及 0 处的浸入 $g: W \rightarrow N$, p 处的淹没 $h: U \rightarrow W$, 满足 $h(p) = 0$, 使得, $f = g \circ h$.

(4) 存在 p 附近的局部坐标 x^1, \dots, x^m 和 $f(p)$ 附近的局部坐标 y^1, \dots, y^n 使得

$$y^i \circ f = \begin{cases} x^i & 1 \leq i \leq r \\ 0 & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

证明 (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) 是显然的. 下面说明 (1) \Rightarrow (2). 假设 $r = \text{rank } df|_p$. 同样, 因为问题是局部的, 所以不妨 $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n, p = 0, f(p) = 0$. 还可以假设 $\text{im } df|_p$ 的像就是 \mathbb{R}^n 的前 r 位, 通过复合投影 $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^r$ 可知 $\pi \circ f$ 是淹没, 根据 (3.44) 的刻画, 可以重新调整 M 的坐标, 复合之后, f 在 0 附近具有形式

$$f(x_1, x_2) = (x_1, \hat{f}(x_1, x_2))$$

不难根据 Jacobi 矩阵发现常秩的条件迫使 \hat{f} 对 x_2 各分量的导数为 0, 这就意味着 \hat{f} 和 x_2 无关, 故

$$f(x_1, x_2) = (x_1, \hat{f}(x_1))$$

再重新调整 N 的后 $n - r$ 位的坐标, 具体来说, 假如原来的坐标卡是 (y_1, y_2) , 那么新的坐标卡就是 $(y_1, y_2 - \hat{f}(y_1))$. 复合之后, 在 0 附近

$$f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

这是一个线性映射, 命题得证. □

上述过程是无非是利用矩阵化到对角形的抽象化表述, 上述命题无非是说浸入 \iff “局部如同单线性映射” \iff 存在局部左逆; 淹没 \iff “局部如同满线性映射” \iff 存在局部右逆; 常秩 \iff “局部如同线性映射” \iff 局部是浸入和淹没的复合.

推论 3.47 如果光滑映射 $f: M \rightarrow N$,

- 如果 f 是浸入, 对于 $g: L \rightarrow M$, 如果 g 连续, 则

$$g \text{ 光滑} \iff f \circ g \text{ 光滑}$$

- 如果光 f 是淹没, 对于 $g: N \rightarrow L$, 如果 $f(M) = N$, 则

$$g \text{ 光滑} \iff g \circ f \text{ 光滑}$$

证明 取左/右逆即可, 连续性和满射性结合 (3.45) 用在寻找开集上. \square

II. 子流形, 嵌入 或许有些迟, 我们下面提子流形的概念.

定义 3.48 (子流形, 嵌入) 令 $f: M \rightarrow N$ 是流形间的光滑映射. 定义

- f 是 **子流形 (submanifold)**, 如果 f 是浸入且是单射.
- f 是 **嵌入 (imbedding)**, 如果 f 是浸入且是拓扑嵌入.

有时为了强调会将嵌入说成 **嵌入子流形**.

例 3.49 考虑覆叠映射

$$\pi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \quad x \longmapsto e^{2\pi i x}$$

这显然是浸入, 但显然不是单射, 从而不是子流形.

例 3.50 如图

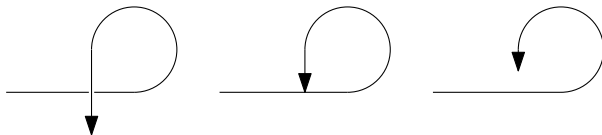


图 3.11: 浸入但不是子流形, 子流形但不嵌入, 嵌入

例 3.51 对于轮胎面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, 考虑映射

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2 \quad t \longmapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \gamma t})$$

其中 γ 是一个无理数. 这是一个子流形, 但不是嵌入. 假如视 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, 那么画出来将是如此.

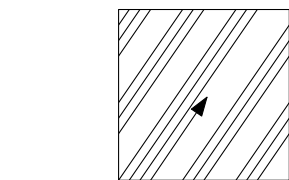


图 3.12: 轮胎纹

命题 3.52 对于嵌入 $M \hookrightarrow N$, 不妨假设 $M \subseteq N$, $\dim M = m, \dim N = n$, 那么任意一点 $p \in M$, 存在 p 附近 N 的坐标卡 $(U, (x^1, \dots, x^n))$ 使得 $(U \cap M, (x^1, \dots, x^m))$ 是 M 的坐标卡.

证明 根据 (3.43) 之 (4), 存在 M 的坐标卡 $(V, (x^1, \dots, x^m))$, N 的坐标卡 $(U, (y^1, \dots, y^n))$ 使得 $y^i|_M = \begin{cases} x^i & 1 \leq i \leq m \\ 0 & m < i \leq n \end{cases}$. 因为是嵌入, 可以将 U 缩小一点使得恰好 $U \cap M = V$. □

命题 3.53 对于光滑映射 $M \xrightarrow{f} N$, 如果 $P \subseteq M, Q \subseteq N$ 具有微分结构使得包含映射 $P \hookrightarrow M$ 是子流形, $Q \hookrightarrow N$ 是嵌入, 且 $f(P) \subseteq Q$, 则集合论上诱导的 $P \xrightarrow{\hat{f}} Q$ 也是光滑的.

证明 用 P 代替 M , $f \circ i$ 代替 f . 然后注意到嵌入意味着 \hat{f} 是连续的, 根据 (3.47), 说明这是光滑的. □

推论 3.54 对于流形 M , $S \subseteq M$, 如果 S 具有微分结构使得包含映射是嵌入, 则这种微分结构是唯一的.

评注 3.55 但是子流形结构却并不唯一, 考虑下图. 这同时还给出 (3.53) 的反例.

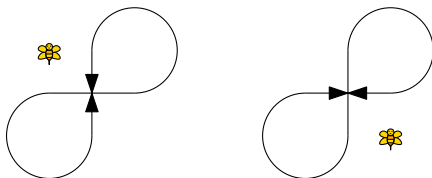


图 3.13: 两个微分结构不同的子流形和两只小蜜蜂

定理 3.56 假如光滑映射 $M \xrightarrow{f} N$ 是常秩的, 如果 M 是连通的, 对于 $q \in N$, 如果 $f^{-1}(q)$ 非空, 则 $f^{-1}(q)$ 具有唯一光滑结构使得包含映射 $f^{-1}(q) \rightarrow M$ 是嵌入. 假设 $df|_p$ 的秩为常数 r , 那么

$$\dim f^{-1}(q) + r = \dim M$$

证明 秩定理 (3.46) 断言, 在任意一点 $p \in f^{-1}(q)$, p 和 q 附近分别存在局部坐标 $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ 和 $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ 使得

$$y^i \circ f = \begin{cases} x^i & 1 \leq i \leq r \\ 0 & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

换言之, $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. 假设 $\psi(m) = (a_1, 0)$, 则 $f^{-1}(q)$ 形如 $\{a_1\} \times U$, 其中 U 是 $\mathbb{R}^{\dim M - r}$ 的开集, 通过投影到 U 上, 这就给出了一个坐标卡, 不难根据原本的相容性得到现在的相容性. \square

例 3.57 回忆球面 (3.9), 我们可以利用上面的定理构造得更加简单一些, 考虑映射

$$f: \mathbb{R}^n \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x^1, \dots, x^n) \longmapsto (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$$

显然, 因为 df 不消失, 故秩始终为 1, 这样, $f^{-1}(1)$ 就具有唯一的微分结构, 这个结构就是球面.

评注 3.58 有的作者喜欢用“切片 (slice)”的语言来表述一些微分几何问题. 对于流形 M , $p \in M$, 假设附近有坐标卡 (U, φ) , 不妨假设 $\varphi(p) = 0$,

那么一个切片就是

$$\{x \in U : \varphi(x) \in W\}$$

其中 $W \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个线性子空间. 当然, 等价地, 这个线性子空间本质上只和维数有关, 那么可以取 W 是后 k 位, 此时如果删去 $\varphi(p) = 0$ 的条件, 即后 k 位为 p 后 k 位的那些点.

3.4 向量丛和向量场

I. 切向量场与 k -形式 下面我们要来看一些切向量的整体行为.

定义 3.59 (切丛) 对于 n 维流形 M , 定义

$$\text{Tan}M = \bigsqcup_{p \in M} \text{Tan}_p M$$

如果 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ 是坐标卡, 那么作

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : \bigsqcup_{p \in U} \text{Tan}_p M &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (q, \partial \in \text{Tan}_p) &\longmapsto (x^1(q), \dots, x^n(q), dx^1(\partial), \dots, dx^n(\partial)) \end{aligned}$$

实际上就是把坐标和 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$ 的坐标并在一起. 这是一个到 \mathbb{R}^{2n} 开集的同胚, 他们, 诱导了 $\text{Tan}M$ 上的拓扑和微分结构. 这样得到的 $2n$ 维流形被称为 **切丛 (tangent bundle)**.

类似地, 可以定义 **余切丛 (cotangent bundle)** $\text{Cot}M = \bigsqcup_{p \in M} \text{Cot}_p M$, **外 k 丛 (exterior k bundle)** $\text{Cot}^k M = \bigsqcup_{p \in M} \text{Cot}_p^k M$. 他们所具有的流形结构类似上面.

简单来说, $\text{Tan}M$ 就是在局部赋予乘积流形的结构.

定义 3.60 (切向量场) 对于 n 维流形 M , 一个开集 $S \subseteq M$, 映射 $X : S \rightarrow \text{Tan}M$ 被称为 S 上的 **切向量场 (field)**, 如果

- 对任意 $p \in S$, $X_p \in \text{Tan}_p$.
- 任意 S 里的坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ 之下, $p \in U$, X_p 写成 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^n \Big|_p$ 的系数是关于 p 光滑的. 等价地, 根据上面 $\text{Tan}M$ 坐标卡的选取, X 本身作为映射是光滑的.

将全体切向量场记为 $\text{Vec}(S)$. 任意 $X \in \text{Vec}(S)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$, 显然, 逐点的数乘

$$fX : S \longrightarrow \text{Tan}M \quad p \longmapsto f(p)X_p$$

仍然还是切向量场, 即 $fX \in \text{Vec}(S)$, 这使得 $\text{Vec}(S)$ 成为一个 $\mathcal{C}^\infty(S)$ -模. 还可以定义方向导数,

$$Xf : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad p \longmapsto X_p f$$

仍然还是光滑函数, 即 $Xf \in \mathcal{C}^\infty(S)$. 这样, 换句话说 $(Xf)(p) = X_p f$.

切向量场等价地, 就是 S 的每个点光滑地指定一个切向量.

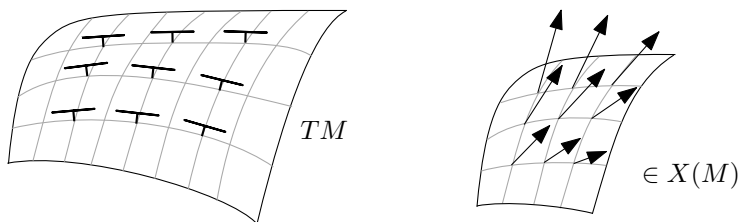


图 3.14: 向量丛和向量场

定义 3.61 (k -形式) 对于 n 维流形 M , 一个开集 $S \subseteq M$, 类似地, 映射 $\omega : S \rightarrow \text{Cot}^k M$ 被称为 S 上的 k -形式 (k -form), 如果

- 对任意 $p \in S$, $\omega_p \in \text{Cot}_p$.

- 任意 S 里的坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ 之下, $p \in U$, ω_p 写成

$$\{dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

的系数是关于 p 光滑的. 等价地, ω 本身作为映射是光滑的.

将全体 k 形式记为 $\text{Diff}^k(S)$. 他们也是 $\mathcal{C}^\infty(S)$ -模. 显然, $\text{Diff}^0(S) = \mathcal{C}^\infty(S)$.

定义 3.62 对于 n 维流形 M , 坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, 定义

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \longrightarrow \text{Tan}M \quad p \longmapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

不难验证 $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \text{Vec}(U)$. 对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, 定义

$$df : U \longrightarrow \text{Cot}M \quad p \longmapsto df|_p$$

不难验证 $df \in \text{Diff}(U)$. 对于 $f^1, \dots, f^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$, 逐点定义

$$df^1 \wedge \dots \wedge df^k : U \longrightarrow \text{Cot}^kM \quad p \longmapsto df^1|_p \wedge \dots \wedge df^k|_p$$

不难验证 $df^1 \wedge \dots \wedge df^k \in \text{Diff}^k(U)$.

定理 3.63 对于 n 维流形 M , 坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, 那么 $\text{Vec}(U)$ 是自由 $\mathcal{C}^\infty(U)$ -模, 其基是

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^n$$

$\text{Diff}(U)$ 是自由 $\mathcal{C}^\infty(U)$ -模, 其基是

$$\{dx^i\}_{i=1}^n$$

$\text{Diff}^k(U)$ 是自由 $\mathcal{C}^\infty(U)$ -模, 其基是

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}_{i=1}^n$$

定义 3.64 (Lie 括号) 对流形 M , 开集 $S \subseteq M$, $X, Y \in \text{Vec}(S)$, 记

$$[X, Y] : S \longrightarrow \text{Tan}M \quad p \longmapsto [f]_p \mapsto X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

不难验证, $[X, Y]_p \in \text{Tan}_p$, 加之不难验证的光滑性, 这定义了一个切向量场, 这被称为 **Lie 括号** 或 **Poisson 括号**.

换言之, $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$. 自然有

$$[X, X] = 0 \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

最后一个恒等式被称为 **Jacobi 恒等式**.

例 3.65 假如在 \mathbb{R}^2 中有切向量场

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} \quad Y = xy \frac{\partial}{\partial x}$$

那么

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(xy \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(xy \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \because \text{定义} \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(xy \frac{\partial}{\partial x} \right) + \dots \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} (xy) \frac{\partial}{\partial x} + x(xy) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \dots \quad \because \text{Leibniz 律} \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} (xy) \frac{\partial}{\partial x} + \dots \quad \because \text{二阶导必抵消} \\ &= xy \frac{\partial}{\partial x} + x^3 \frac{\partial}{\partial x} - xy \frac{\partial}{\partial x} - 2x^2 y \frac{\partial}{\partial y} \\ &= (x^3 - 2x^2 y) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

命题 3.66 对于流形 M , 切向量场 $X \in \text{Vec}(M)$, 如果点 $p \in M$ 使得 $X_p \neq 0$, 则 p 附近存在局部坐标 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 使得

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} \quad (\text{在 } p \text{ 附近})$$

证明 先取一个坐标卡 (x^1, \dots, x^n) , 此时将 X 在 p 附近写出来

$$X = f^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + f^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

不妨假设 $f^1(p) \neq 0$. 想要更换 x^1 为 y^1 , 使得 $X = \frac{\partial}{\partial y^1}$. 设

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n) \quad y^2 = x^2 \quad \dots \quad y^n = x^n$$

此时根据链式法则

$$\frac{\partial}{\partial y^1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^1} \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial y^1} = f^i$$

这看似是一个偏微分方程, 由于 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \right)$ 非退化, 根据反函数定理, 实际上可以将各 x^i 看做是 y^i 的函数, 这样因为只对一个变量进行了微分, 将 y^2, \dots, y^n 视作参量, 这就是一个常微分方程, 根据常微分方程的光滑依赖性, 那么带入初值可以解出光滑的

$$x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$$

再次根据 Jacobi 矩阵非退化的条件, 用反函数定理反过来确定 $y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n)$. 这样命题就得证了. □

关于光滑依赖性的证明, 可见 [4] P74 定理 8.3.

II. 流动 切向量场相当于在每一点指定一个“运动趋势”, 那么按着切向量的标识的运动趋势走, 会如何?

定义 3.67 对于流形 M , 切向量场 $X \in \text{Vec}(M)$, 称曲线 $I \xrightarrow{s} M$ 是 X 的 **积分曲线** 如果

$$\forall t \in I \quad \dot{s}(t) = X_{s(t)}$$

定理 3.68 对于流形 M , 切向量场 $X \in \text{Vec}(M)$, 任意点 $p \in M$, 都存在过 p 的曲线 $I \xrightarrow{s} M$ 满足 s 是 X 的积分曲线. 且如果技术性地要求 $0 \in I, s(0) = p$, 这样的曲线在 p 附近是唯一的.

证明 根据 (3.33), 选取 p 点的坐标卡, 通过复合并替代 s , 问题转化到欧式空间上, 此时 $\dot{s} = s'$, X 变为二维光滑映射, 这根据常微分方程的理论可以唯一地解出 s . □

当然, 根据 (3.66), 和下面 (3.73) 的计算, 上述定理是不言自明的.

定义 3.69 对于流形 M , 切向量场 $X \in \text{Vec}(M)$, 任意点 p , 如果在其附近有 p 的积分曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 满足 $0 \in I, s(0) = p$. 那么对于任意 $t \in I$, 定义 **流动 (flow)** 或称为 **单参数变换群**

$$p + tX = s(t)$$

显然, $p + 0X = p$.

称之为单参数变换群是因为如果在离散的情况, 切向量作为“运动趋势”应该类比一个“运动”, 运动到下一个又有下一个点的运动, 一直下去就好像是“生成子群”的概念.

命题 3.70 对于流形 M , 切向量场 $X \in \text{Vec}(M)$, 在有定义的前提下,

$$(p + tX) + sX = p + (t + s)X$$

证明 根据常微分方程的唯一性, 曲线 $[s \mapsto p + (t + s)X]$ 和 $[s \mapsto (p + tX) + sX]$ 具有相同的方程和初值条件. □

定理 3.71 对于流形 M , 切向量场 $X \in \text{Vec}(M)$, 定义映射

$$\mathcal{F}_t(X) : D \longrightarrow M \quad (p, t) \longmapsto p + tX$$

其中 $D = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} : p + tX \text{ 得以定义}\}$. 则 D 是一个含 $M \times \{0\}$ 的开集, $\mathcal{F}_t(X)$ 是一个光滑映射.

证明 根据常微分方程的光滑依赖性, 这是容易的. □

定义 3.72 (整体流动) 上述定理 (3.71) 定义的 $\mathcal{F}_t(X)$ 被称为 **整体流动**, 对于定义域中的 (p, t) , 记 $f: [p \mapsto p + tX]$ 是 p 附近的光滑映射, 这自然诱导了

$$[+tX]: \text{Tan}_p \longrightarrow \text{Tan}_{p+tX} \quad \partial \longmapsto \partial[+tX] := \text{d}f|_p(\partial)$$

如果 $S \times (-\epsilon, \epsilon)$ 在定义域中, 那么对于向量场 $Y \in \text{Vec}(S)$, $|t| < \epsilon$ 那么也逐点定义了

$$\begin{aligned} Y[+tX]: S + tX = \{s + tX : s \in S\} &\longrightarrow \text{Tan}M \\ p + tX &\longmapsto Y_p + tX \end{aligned}$$

类似地, 也自然诱导了 $[-tX]: \text{Cot}_{p+tX} \rightarrow \text{Cot}_p$, 对于 k -形式 $\omega \in \text{Diff}^k(S)$, 也定义了 $\omega[-tX] \in \text{Diff}^k(S - tX)$. 特别地, 对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(S) = \text{Cot}^0(S)$, $f[-tX]: p \mapsto f(p + tX)$.

例 3.73 对于欧式空间 \mathbb{R}^n , 如果有切向量场 $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, 那么对于点 p , 那么过 p 点的积分曲线 $I \xrightarrow{s} \mathbb{R}^n$ 若 $0 \in I, s(0) = p$ 根据 (3.33) 需要满足

$$\frac{\text{d}s}{\text{d}t} = (1, 0, \dots, 0)$$

这说明 $s(t) = p + (t, 0, \dots, 0)$, 换言之,

$$p + t \frac{\partial}{\partial x^1} = p + (t, 0, \dots, 0) = p + t(1, 0, \dots, 0)$$

故实际上整体流动就是平移. 因为平移的 *Jacobi* 矩阵是单位阵, 故在切向量上的作用是

$$\left(a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right) \left[+t \frac{\partial}{\partial x^1} \right] = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{p+tX} + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{p+tX}$$

从而在切向量场上的作用是

$$\begin{aligned} \left(\sum f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left[+t \frac{\partial}{\partial x^1} \right] : & \left[p + tX \mapsto \sum f^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{p+tX} \right] \\ & = \left[p \mapsto \sum f^i(p - tX) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right] \end{aligned}$$

定义 3.74 (Lie 导数) 注意到我们可以赋予对偶空间, 外代数以自然的拓扑结构. 对于流形 M , 切向量场 $X \in \text{Vec}(M)$, 对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, 定义

$$\left[L_X f : p \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f(p + tX)) - f(p)}{t} \right] \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

对于 $Y \in \text{Vec}(M)$, 定义

$$\left[L_X Y : p \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y_{p+tX}[-tX]) - Y_p}{t} \right] \in \text{Vec}(M)$$

这里导数都是线性空间上的极限. 对于 $\omega \in \text{Diff}^k(M)$, 对于 $(X_i \in \text{Vec}(M))_i$ 定义

$$\left[L_X \omega : p \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\omega_{p+tX}[-tX]) - \omega_p}{t} \right] \in \text{Diff}^k(M)$$

这里导数都是线性空间上的极限. 以上分别被称为 f, Y, ω 的 **Lie 导数**. 需要注意的是, 如果将 $\text{Diff}^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, 上述定义是相合的, 因为一个数平移不会发生改变, 故 $f(p + tX)[-tX] = f(p + tX)$.

例 3.75 对于欧式空间 \mathbb{R}^n , 如果有切向量场 $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, 那么根据 (3.73) 以及定义, 任意 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有

$$L_X f = \frac{\partial f}{\partial x^1}$$

再假如 $Y = f^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + f^n \frac{\partial}{\partial x^n} \in \text{Vec}(\mathbb{R}^n)$, 那么根据 (3.73) 以及定义

$$L_X Y = \frac{\partial f^1}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial f^n}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1}$$

同样,

$$L_X(df) = L_X \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x^i} dx^i$$

一般地, 根据 (3.66), 任意 M 上的向量场 X 在局部都是 $\frac{\partial}{\partial x^1}$, 这对于计算非常好处.

定理 3.76 对于流形 M , 切向量场 $X \in \text{Vec}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $Y \in \text{Vec}(M)$, 则

$$L_X f = Xf \quad L_X Y = [X, Y] \quad L_X df = d(Xf)$$

证明 根据 (3.66), X 在局部都是 $\frac{\partial}{\partial x^1}$, 根据 (3.75), 在局部验证即可. \square

换句话说, 所谓的 Poisson 括号或者 Lie 括号就是希望将方向导数推广到向量场上面, 其几何意义就是沿着 X 方向, Y 的变化率, 定义就是将 $p + tX$ 处的 X “拉回” p 处作差求变化率.

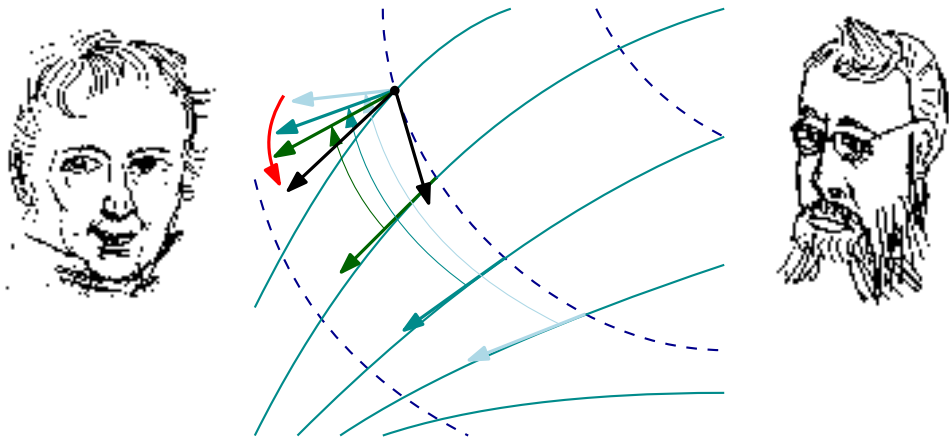


图 3.15: Lie 导数和 Poisson 与 Lie 深沉

关于 Lie 括号另外的解释, 参见习题17.

III. Frobinus 定理 回顾 (3.66), 我们发现这一定理在使用中将大大简化问题. 问题是这能否推广到高维?

定义 3.77 (分布) 对于流形 M , 一个 k 维 **分布 (distribution)** \mathcal{D} 是在每个 $p \in M$ 指定一个 Tan_p 的 k 维线性子空间 \mathcal{D}_p , 且局部上看, 存在切向量场 X_1, \dots, X_k 在每点张成了他们. 记向量场 $X \in \mathcal{D}$ 如果 $X_p \in \mathcal{D}_p$.

以上这就是高维“切向量场”的样本.

定理 3.78 (Frobenius) 对于流形 M , k 维分布 \mathcal{D} , 任意点 $p \in M$ 附近存在局部坐标 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 使得

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \quad (\text{在 } p \text{ 附近})$$

当且仅当

$$\forall X, Y \in \mathcal{D}, \quad [X, Y] \in \mathcal{D}$$

证明 必要性是显然的, 因为

$$\left[f \frac{\partial}{\partial x^i}, g \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = f \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - g \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{D}$$

先取一个坐标卡 (x^1, \dots, x^n) , 假设 \mathcal{D} 由 X_1, \dots, X_k 张成, 此时将 X_i 在 p 附近写出来

$$X_i = f_i^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + f_i^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

因为线性无关, 不妨假设“左上角” $(f_i^j)_{1 \leq i, j \leq k}$ 非退化, 通过复合逆矩阵不妨假设

$$f_i^j = \begin{cases} 1 & 1 \leq i = j \leq k \\ 0 & i \neq j, 1 \leq i, j \leq k \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^n f_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

想要更换 x^1, \dots, x^k 为 y^1, \dots, y^k , 使得 $X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, X_k = \frac{\partial}{\partial y^k}$. 设

$$1 \leq i \leq k \Rightarrow y^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \quad k+1 \leq i \leq n \Rightarrow y^i = x^i$$

此时根据链式法则

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \Rightarrow \frac{\partial x^j}{\partial y^i} = f_i^j$$

这看似是一个偏微分方程, 其实确实是一个偏微分方程, 由于 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p)\right)$ 非退化, 根据反函数定理, 实际上可以将各 x^i 看做是 y^i 的函数. 将 y^{k+1}, \dots, y^n 视作参量, 这就是一个一次偏微分方程. 计算知道

$$[X_i, X_j] = \sum_{s=k+1}^n \left[\frac{\partial f_j^s}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i^s}{\partial x^j} + \sum_{t=k+1}^n \left(f_i^t \frac{\partial f_j^s}{\partial x^t} - f_j^t \frac{\partial f_i^s}{\partial x^t} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x^s}$$

根据对 Lie 括号封闭的条件得到

$$\left[\frac{\partial f_j^s}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i^s}{\partial x^j} + \sum_{t=k+1}^n \left(f_i^t \frac{\partial f_j^s}{\partial x^t} - f_j^t \frac{\partial f_i^s}{\partial x^t} \right) \right] = 0$$

根据偏微分方程的理论这确保原方程总有解, 然后再次根据 Jacobi 矩阵非退化的条件, 用反函数定理反过来确定 $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$. 这样命题就得证了. □

实际上 Frobenius 断言的就是这个偏微分方程的可解性定理, 参见 [2] 定理 4.4. 另有归纳的证明, 参见 [1] P36 4.4 或 [20] P42 1.60.

定义 3.79 (积分流形) 对于流形 M , k 维分布 \mathcal{D} , 如果子流形 $N \xrightarrow{f} M$ 使得

$$\forall p \in N \quad df|_p(\text{Tan}_p) = \mathcal{D}_{f(p)}$$

作为 Frobenius 定理的推论, 自动有如下的存在定理.

推论 3.80 对于流形 M , k 维分布 \mathcal{D} , 如果

$$\forall X, Y \in \mathcal{D}, \quad [X, Y] \in \mathcal{D}$$

则任意点 $p \in M$, 都存在过 p 的子流形 $I \xrightarrow{f} M$ 满足 f 是 \mathcal{D} 的积分流形.

3.5 在流形上积分

I. 微分形式 作为本章的主要目的, 我们下面开始介绍如何在流形上积分. 如数学分析所介绍, 我们要对“微分形式”作积分. 他们就是我们之前

定义的 k -形式 Diff^k . 显然, Diff^k 不是简简单单的线性空间而已, 下面我们来回顾一些线性代数.

定义 3.81 对于 n 维流形 M , 定义 $\text{Diff}(M) = \bigoplus_{k=1}^n \text{Diff}^k(M)$, 这是一个分次代数, 当中元素被称为微分形式.

定义 3.82 下面将一系列外代数的运算搬运到 k -形式上, 对于流形 M

- 对于 $\omega_1 \in \text{Diff}^k(M), \omega_2 \in \text{Diff}^\ell(M)$, 逐点定义 **外积**

$$[\omega_1 \wedge \omega_2 : p \mapsto (\omega_1)_p \wedge (\omega_2)_p] \in \text{Diff}^{k+\ell}$$

特别地, 如果将 Diff^0 视作 \mathcal{C}^∞ , 那么 $f \wedge \omega = f\omega$. 这一乘法延拓到 $\text{Diff}(M)$ 上, 使之成为一个环.

- 对于 $\omega \in \text{Diff}^k(M), X_1, \dots, X_k \in \text{Vec}(M)$, 逐点定义 **配合**

$$[\omega(X_1, \dots, X_k) : p \mapsto \omega_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p)] \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

如果 $\omega = df^1 \wedge \dots \wedge df^k$, 那么配合将是

$$\omega(X_1, \dots, X_k) = \det(X^j f_i)$$

- 对于 $\omega \in \text{Diff}^k(M), X \in \text{Vec}(M)$, 逐点定义 **内乘**

$$[X \lrcorner \omega : p \mapsto X_p \lrcorner \omega_p] \in \text{Diff}^{k-1}(M)$$

具体来说, 如果将 $(X \lrcorner \omega)_p$ 视作 $k-1$ 元反对称函数, 那么

$$X_p \lrcorner \omega_p : (\partial_1, \dots, \partial_{n-1}) \mapsto \omega_p(X_p, \partial_1, \dots, \partial_{n-1})$$

如果 $\omega = df$, 那么 $X \lrcorner df = Xf$.

- 对于光滑映射 $M \xrightarrow{f} N$, $\omega \in \text{Diff}^k(N)$, 可以定义其 **原像**

$$\begin{aligned} \omega \circ f : M &\longrightarrow \text{Cot}^k(M) \\ p &\longmapsto (\omega_{f(p)}) \circ f \end{aligned}$$

其中 $\circ f$ 是 f 诱导的余切映射 $\text{Cot}_{f(p)}^k(N) \rightarrow \text{Cot}_p^k(M)$.

如果 $k=0$, $\omega = g$, 那么根据定义 $g \circ f = g \circ f$.

如果 $k=1$, $\omega = dg$, 那么根据 (3.29), $dg \circ f = d(g \circ f)$.

一般地, 根据线性代数诱导外代数的方法, $(\omega_1 \wedge \omega_2) \circ f = (\omega_1 \circ f) \wedge (\omega_2 \circ f)$.

命题 3.83 对于流形 M , $X \in \text{Vec}(M)$, $\omega_1 \in \text{Diff}^k$, $\omega_2 \in \text{Diff}^h$, 有

$$X \lrcorner (\omega_1 \wedge \omega_2) = (X \lrcorner \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (X \lrcorner \omega_2)$$

证明 根据线性代数代数余子式有如下结果 $X \lrcorner (df^1 \wedge \dots \wedge df^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i (Xf_i) df^1 \wedge \dots \wedge \widehat{df^i} \wedge \dots \wedge df^k$, 其中 $\hat{*}$ 表示跳过. \square

定义 3.84 (微分) 对于流形 M , $\omega \in \text{Diff}^k$, 可以定义其 **微分** $d\omega \in \text{Diff}^{k+1}$, 满足如果在局部坐标 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ 下, $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, 则

$$d\omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

不难用线性代数验证, 这是坐标卡相容的, 从而是良定义的. 特别地, 如果 Diff^0 视作 \mathcal{C}^∞ , 那么 $df = df$. 不难交换求微分顺序知道, $d \circ d = 0$.

命题 3.85 对于流形 M , $\omega_1 \in \text{Diff}^k$, $\omega_2 \in \text{Diff}^h$, 有

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (d\omega_2)$$

证明 局部在

$$\omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \omega_2 = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_h}$$

处逐项验证即可, 后面的 $(-1)^h$ 是为了将 dx 交换放到后方. \square

再回顾之前介绍的 Lie 导数 (3.74).

命题 3.86 对于流形 M , $X \in \text{Vec}(M)$, $\omega_1 \in \text{Diff}^k$, $\omega_2 \in \text{Diff}^h$, 有

$$L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L_X \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L_X \omega_2)$$

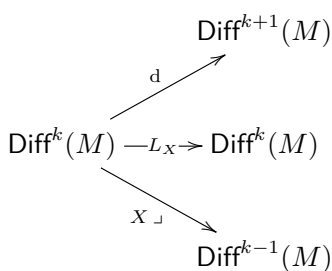
证明 根据 (3.66), X 在局部都是 $\frac{\partial}{\partial x^1}$, 从而 Lie 导数就是对系数的 x^1 求导, 然后局部在

$$\omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \omega_2 = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_h}$$

验证. □

注意到

d 满足带符号的 Leibniz 律
 L_X 满足 Leibniz 律
 $X \lrcorner$ 满足带符号的 Leibniz 律
 $L_X df = d(Xf)$
 $L_X f = X \lrcorner df = Xf$



定理 3.87 (Cartan 魔术公式) 对于流形 M , $X \in \text{Vec}(M)$, $\omega \in \text{Diff}^k$, 那么

$$L_X \omega = X \lrcorner (d\omega) + d(X \lrcorner \omega)$$

证明 对于 $k = 0$ 时, 上式变为

$$L_X f = X \lrcorner df + 0$$

这根据 (3.76) 和 (3.82) 是显然的. 然后开始归纳, 对于

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

不妨假设 $i_1 = 1, \dots, i_k = k$. 设 $\beta = f dx^2 \wedge \dots \wedge dx^k$ 此时

$$\begin{aligned} L_X \omega &= L_X(dx^1 \wedge \beta) && \because \text{定义} \\ &= L_X(dx^1) \wedge \beta + dx^1 \wedge L_X \beta && \because \text{Leibniz 律} \\ &= d(Xx^1) \wedge \beta + dx^1 \wedge [X \lrcorner (d\beta) + d(X \lrcorner \beta)] && \because \text{归纳假设} \end{aligned}$$

另一反面

$$\begin{aligned}
 & X \lrcorner (d\omega) + d(X \lrcorner \omega) \\
 &= X \lrcorner (d(dx^1 \wedge \beta)) + d(X \lrcorner (dx^1 \wedge \beta)) \quad \because \text{定义} \\
 &= X \lrcorner (0 - dx^1 \wedge d\beta) + d((Xx^1) \wedge \beta - dx^1 \wedge (X \lrcorner \beta)) \quad \because \text{Leibniz 律} \\
 &= -(Xx^1) \wedge d\beta + dx^1 \wedge (X \lrcorner d\beta) \\
 &\quad + d(Xx^1) \wedge \beta + (Xx^1) \wedge d\beta \\
 &\quad + dx^1 \wedge d(X \lrcorner \beta) \quad \because \text{Leibniz 律} \\
 &= d(Xx^1) \wedge \beta + dx^1 \wedge [X \lrcorner (d\beta) + d(X \lrcorner \beta)] \quad \because \text{消元}
 \end{aligned}$$

这就完成了证明. □

推论 3.88 对于流形 M , $X \in \text{Vec}(M)$, Lie 导数 L_X 和微分 d 可以交换;
 Lie 导数 L_X 和内乘 $X \lrcorner$ 可以交换;

证明 根据 (3.87), 带入验证, 利用 $d \circ d = 0$, 以及根据定义不难验证的
 $X \lrcorner (X \lrcorner \omega) = 0$. □

当然, 根据 (3.66), X 在局部都是 $\frac{\partial}{\partial x^1}$, 根据 (3.75), 在局部验证即可
 得到 L_X 和 d 可以交换.

II. 积分 下面我们来定义积分.

定义 3.89 (可定向) 对于 n 维连通光滑流形 M 称为 **可定向的**, 如果将
 $\text{Cot}^n(M)$ 在每点的 0 都删去, 有两个连通分支. 一个 **定向的选择** 是连通
 分支的选择.

命题 3.90 对于 n 维连通光滑流形 M , 则下列命题是等价的

(1) M 可以定向.

(2) 在 M 上存在处处 n -形式 $\omega \in \text{Diff}^n$ 满足对所有 $p \in M$, $\omega_p \neq 0$.

(3) M 存在 **同向坐标卡覆盖**. 即存在坐标卡覆盖, 使得在任意两个其中成员 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ 和 $(V, \psi = (x^1, \dots, x^n))$ 相交处,

$$\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) > 0$$

且 M 微分结构按照是否同向划分为两个部分, 选择了 M 的一个定向, 就选择了其中一个部分.

证明 论证方便起见, 记删去之后的从未 $\text{Cot}^n \setminus 0$. (2) \Rightarrow (1). 选取在每点都不消失的 ω , 作 $\text{Cot}^+ = \bigsqcup_{p \in M} \{a\omega_p : a > 0\}$. 不难通过局部坐标验证这是连通开集, 同理其补集也是连通开集, 从而有两个连通分支. (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2). 选择一个连通分支, 在每个局部坐标卡上选择连通分支内的 n -形式, 再通过单位分解加起来. \square

在数学分析中使用了“法向量”来定义可定向, 我们的目的就是利用 n -形式来模拟“法向量”. 因为在局部坐标下 n -形式都形如 $f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, 因为外积的几何意义, 这在每一点是“垂直”于 M 的余切空间的.

更为拓扑地看法是将流形像双面胶一样撕开 (两面分别是 Cot 的正负半轴), 看是否还连通, 如果还连通说明只要一个面, 如果撕成了两个连通分支, 那么当然可以区分正反面.

定义 3.91 (流形上的积分) 对于 n 维可定向流形 M , n -形式 ω , 假设具有紧 **支集 (support)** 即 $\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}}$ 紧致. 可以选择有限, 同向的坐标卡覆盖 $\{(U_j, \varphi_j = (x_j^1, \dots, x_j^n))\}_{j=1}^m$, 假设在 U_j 上, $\omega = f_j dx_j^1 \wedge \dots \wedge dx_j^n$. 再寻找对应的光滑的单位分解 $\{u_j : j = 1, \dots, m\}$ 满足

$$\text{supp } u_j \subseteq U_j \quad \sum_{j=1}^m u_j = 1$$

这样把问题化到局部, 定义 ω 的 **积分** 为

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^m \int (u_j f_j) (\varphi_j^{-1}(t^1, \dots, t^n)) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n$$

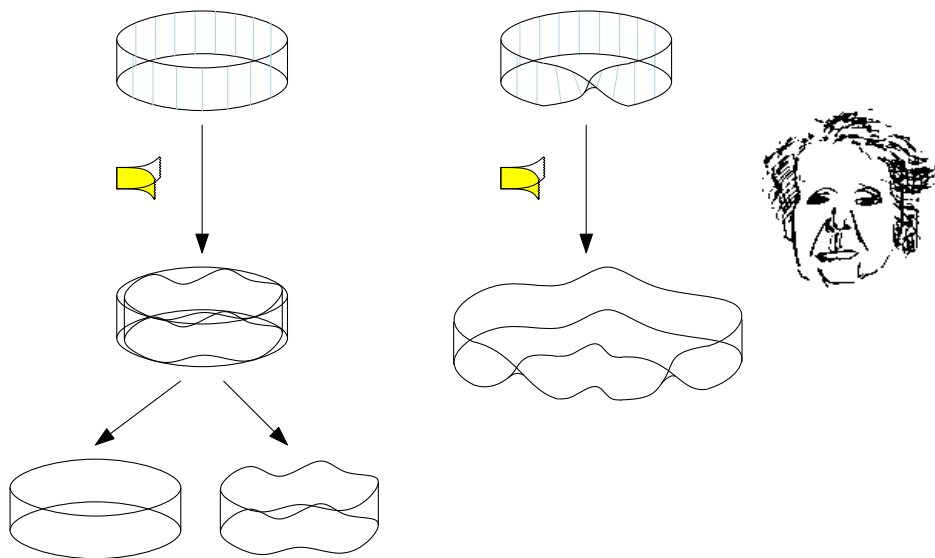


图 3.16: Möbius 带和 Möbius 的睿智

因为右边是欧式空间的重积分, 因为右侧函数具有紧支集, 故得以定义. 下面还要验证, 这一定义和坐标卡选择无关. 证明分几步

在同一个开集上两个不同的坐标卡结果相同. 这来自变量替换公式. 具体来说, 不妨首先用 $u_j \omega$ 代替 ω 在某一个开集上验证. 如果 U 上有 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ 和 $\psi(y^1, \dots, y^n)$ 两副同向的坐标卡, 假设在 U 上

$$f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = g dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

这样, 记 *Jacobi* 矩阵 $J = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)$, 那么根据外代数, $f = g \det J$. 因为同向, $\det J = |\det J|$, 根据变元替换定理

$$\int f(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)) dx^1 \dots dx^n = \int g(\psi^{-1}(y^1, \dots, y^n)) dy^1 \dots dy^n$$

不同覆盖结果相同. 如果另有覆盖, 将覆盖合并加细 (即两两相交) 得到更精细的有限覆盖, 将单位分拆两两相乘得到对应的单位分拆, 因此验

证相等,无非是交换求和交换顺序,以及在欧式空间中的积分可加性.

最后,注意到定向如果相反,则积分值相差一个负号.

上述方法无非是欧式空间的积分局部地搬到流形上,对每个函数用单位分拆将其分散到各个局部上,求出局部的积分,最后加起来粘合成整体的积分.

定理 3.92 对于 n 维可定向流形 M , n -形式 $\omega_1, \omega_2, c \in \mathbb{R}$, 则

$$\int_M \omega_1 + c\omega_2 = \int_M \omega_1 + c \int_M \omega_2$$

III. Stokes 公式 我们想要在流形上推广 Stokes 公式. 其断言对于有光滑边界的区域 Ω , 有 $\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$. 但是这涉及一个边界的概念, 但一般不便谈论其微分结构, 为此我们需要专门指定其边界的微分结构, 这一部分的处理借鉴的是 [1].

定义 3.93 (带边区域) 令 M 是 n 维光滑流形, $D \subseteq M$ 被称为一个 **带边区域**, 如果任意 $p \in \partial D$, 都存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) 使得

$$\begin{aligned}\varphi(U \cap D) &\subseteq \{(x^1, \dots, x^n) : x^n \geq 0\} \\ \varphi(U \cap \partial D) &\subseteq \{(x^1, \dots, x^n) : x^n = 0\}\end{aligned}$$

这样的坐标卡被称为 **适用坐标卡**.

例 3.94 (上半空间) 欧式空间 \mathbb{R}^n 中最典型的带边区域莫过于 **闭上半空间**

$$\overline{\mathbb{H}}^n = \{(x^1, \dots, x^n) : x^n \geq 0\}$$

$\partial\overline{\mathbb{H}}^n = \{(x^1, \dots, x^n) : x^n = 0\}$, 内部 $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) : x^n > 0\}$ 是 **上半空间**.

评注 3.95 注意到在 $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) : x^n \geq 0\}$ 中任意一点 p , 要么存在同胚于 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 的邻域基, 要么存在同胚于 \mathbb{R}^n 的邻域基. 前者位于 $\partial\overline{\mathbb{H}}^n$

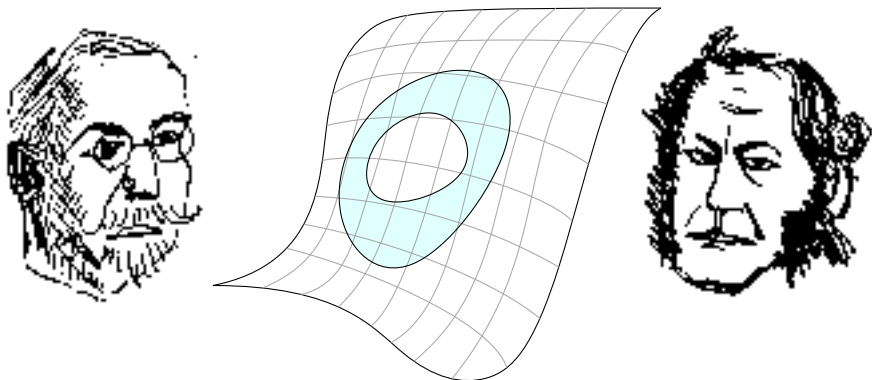


图 3.17: 带边区域与 Cartan 和 Stokes 的微愠

上, 后者位于 \mathbb{H}^n 内部. 否则可以找 $U \subseteq V \subseteq W$ 使得 U, W 同胚于 \mathbb{R}^n , V 同胚于 \mathbb{H}^n , 包含映射诱导

$$H_n(U, U \setminus \{p\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{p\}) \rightarrow H_n(W, W \setminus \{p\})$$

根据切除定理他们的复合是同构, 但是中间的同调群消失了, 矛盾!

故上述定义的第二条是多余的, 因为

$$U \cap (D \setminus \partial D) = \varphi^{-1}(\mathbb{H}^n \setminus \partial \mathbb{H}^n)$$

定理 3.96 令 M 是 n 维光滑流形, D 是带边区域, 则 ∂D 具有微分流形使成为 $n-1$ 维光滑流形, 使得包含映射 $\partial D \rightarrow M$ 是嵌入.

证明 选取适用坐标卡, 剔除最后一位, 不难验证相容性, 从而得到一个微分结构. 根据构造其是拓扑嵌入. 为了看到是嵌入, 只需注意到在每个局部 $\partial \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是嵌入. □

定义 3.97 对于可定向光滑流形 M , 带边区域 D , 则 ∂M 也可定向¹, 我们自然地赋予 ∂M 的定向如下: 选定 M 的同向坐标卡覆盖, 对于 $p \in \partial M$,

¹ 因为我们没有假设其连通, 因此, 我们是在每个连通分支上指定定向.

选择包含 p 的同向坐标卡

$$(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$$

则 p 在 ∂M 上的坐标卡选作

$$(U \cap \partial M, ((-1)^n x^1, \dots, x^{n-1}))$$

等价地, 根据 (3.90) 如果 U 上选择的 n 形式是

$$f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

那么 $U \cap \partial D$ 选择的 $n-1$ 形式是

$$(-1)^n f|_{U \cap \partial D} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

上述选择 $(-1)^n$ 只是为了后文 Stokes 表述的简洁.

定理 3.98 (Stokes 公式) 对于 n 维可定向光滑流形的带边区域 D , U 是包含 D 的开集, ω 是 U 上具有紧支集的 $n-1$ 形式, 则

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

关于上述记号, 左侧 \int_D 可以类似 (3.91) 的方法定义, 是将定义 (3.91) 中拉回欧式空间积分的积分区域换为 D 的像. 右侧的 ω 则是 ω 在包含映射下的原像 (3.82).

证明 根据定义 (3.91), 通过找单位分拆, 问题可以化到局部, 问题变成如下. 对于 n 维欧式空间 \mathbb{R}^n , ω 是包含 \mathbb{R}^n 的开集, ω 是 U 上具有紧支集的 $n-1$ 形式, 则

$$\int_{x_n \geq 0} d\omega = \int_{x_n=0} \omega$$

假设

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

其中 $\hat{*}$ 表示跳过. 则

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

则

$$\begin{aligned} & \int_{x_n \geq 0} d\omega \\ &= \int_{\{x_n \geq 0\}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i} (x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n \quad \because \text{定义} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\{(x_1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x_n): x_n \geq 0\}} \left(\int \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \dots d\widehat{x^i} \dots dx^n \quad \because \text{重积分换序} \\ &= \int -f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1} \quad \because \begin{cases} \text{具有紧支集} \\ \text{Newton-Leibniz 公式} \end{cases} \end{aligned}$$

先考虑赋予 ∂D 的坐标卡 (x^1, \dots, x^{n-1}) , 设包含映射为 ι 根据 (3.82),

$$\omega \circ \iota = (-1)^{n-1} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

但是选取的定向下的坐标卡是 $((-1)^n dx^1, \dots, dx^{n-1})$, 故因此

$$\begin{aligned} & \int_{x_n=0} \omega \\ &= (-1)^n \int (-1)^{n-1} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1} \quad \because \text{定向} \\ &= \int -f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1} \end{aligned}$$

命题得证. □

当然, Stokes 公式有很多版本, 我们证明的版本是最为简单的, 注意到在此情形下, 我们甚至不能要求边界“分段可微”. 我们甚至可以定义“带边流形”, 将其边界指定出来, 具体来说, 我们允许有的点附近是同胚于 \mathbb{H}^n 的, 且该点落在 $\partial\mathbb{H}^n$. 想要继续展布上面的理论, 需要再次定义边界处的微分形式, 这并不困难, 但很繁琐. 更多请参见 [20] P144 4.7, P148 4.8, 以及 P151 上方的正文.

3.6 De Rham 理论 (未完成)

引理 3.99 (Poincaré) 对于欧式空间 \mathbb{R}^n , 则 $\omega \in \text{Diff}^k(\mathbb{R}^n)$, 则

$$d\omega = 0 \iff \exists \beta \in \text{Diff}^{k+1}(\mathbb{R}^n) \text{ s.t. } d\beta = \omega$$

更具体来说, 存在同伦 $S_k : \text{Diff}^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Diff}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$S_{k+1} \circ d + d \circ S_k = \text{id}$$

证明 充分性是显然的. 第一个论断是具体论断的推论, 只需要取 $\beta = S_k \omega$. 下面说明必要性, 物理的想法是证明积分与路径无关. 考虑在每点都指向自己的切向量场

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

满足 $L_X dx^i = d(Xx^i) = dx^i$. 作

$$\begin{aligned} I_k : \quad \text{Diff}^k(\mathbb{R}^\times) &\longrightarrow \text{Diff}^k(\mathbb{R}^\times) \\ f(*) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} &\longmapsto \left(\int_0^1 t^{k-1} f(t*) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

我们断言, $I_k \circ L_X = \text{id}$. 因为

$$\begin{aligned} &L_X (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= (L_X f) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge (L_X dx^{i_j}) \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \because (3.86) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + kf \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

再作用 I_k 得到

$$\begin{aligned}
 & (I_k \circ L_X)(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 &= \left[\int_0^1 t^{k-1} \left(\sum_{i=1}^k x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t*) + k f(t*) \right) dt \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
 &= \left[\int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k f(t*)) dt \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
 &= f(*) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}
 \end{aligned}$$

得证.

我们再断言 $I_{k+1} \circ d = d \circ I_k$. 因为

$$\begin{aligned}
 & (I_k \circ d)(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 &= I_i \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \quad \because \text{定义} \\
 &= \left(\int_0^1 t^k \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(t*) dt \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \because \text{定义} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int_0^1 t^{k-1} \sum_{i=1}^n f(t*) dt \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \because \frac{\partial f(t*)}{\partial x^i} = t \frac{\partial f}{\partial x^i}(t*) \\
 &= d \left(\int_0^1 t^{k-1} \sum_{i=1}^n f(t*) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
 &= (d \circ I_k)(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})
 \end{aligned}$$

我们断言 $S_k = I_{k-1} \circ (X \lrcorner)$ 满足条件. 此时将带入 $I_k \circ L_X = \text{id}$ 得到

$$\begin{aligned}
 \text{id} &= I_k \circ L_X \quad \because \text{第一段} \\
 &= I_k \circ (X \lrcorner) \circ d + I_k \circ d \circ (X \lrcorner) \quad \because \text{Cartan 魔术公式 (3.87)} \\
 &= I_k \circ (X \lrcorner) \circ d + d \circ I_{k-1} \circ (X \lrcorner) \quad \because \text{第二段} \\
 &= S_{k+1} \circ d + d S_k
 \end{aligned}$$

命题得证. □

(有关同调的内容将和代数拓扑部分一同完成)

记号表

记号	解释	位置
$\dim M$	流形 M 的维数	(3.2)
\mathbb{R}^n	n 维欧氏空间	(3.6)
\mathbb{S}^n	n 维球面	(3.9)
\mathbb{P}^n	n 维射影空间	(3.10)
$\mathcal{C}^\infty(U)$	定义在 U 上的光滑函数	(3.16)
\mathcal{C}_p^∞	p 点的函数芽	(3.16)
Tan_p	p 点的切空间	(3.19)
$\text{Tan}_p(M)$	p 点的切空间	(3.19)
∂f	$\partial f _p$ 的简记	(3.19)
$f _p$	p 点的一个函数芽	(3.16)
$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right _p$	p 点的一个切向量	(3.21)
Cot_p	p 点的余切空间	(3.24)
Cot_p^k	p 点的余切空间的外代数的 k 次部分	(3.24)
\wedge	外代数的外积	
$\text{d}f _p$	p 点的一个余切向量	(3.25)
$\text{d}f _p$	p 点的切映射	(3.28)
$\circ f$	p 点的余切映射	(3.28)
$\dot{s}(t_0)$	曲线 s 在 t_0 处的切向量	(3.32)
$\text{Tan}M$	流形 M 的切丛	(3.59)
$\text{Cot}M$	流形 M 的余切丛	(3.59)
$\text{Cot}^k M$	流形 M 的外 k 丛	(3.59)

$\text{Vec}(U)$	U 上的向量场	(3.60)
fX	f 和 X 的逐点数乘	(3.60)
Xf	X 在 f 上的逐点作用	(3.60)
$\text{Diff}^k(U)$	U 上的 k 形式	(3.61)
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	一个切向量场	(3.62)
df	一个 1-形式	(3.62)
$[X, Y]$	Lie 括号或 Poisson 括号	(3.64)
$p + tX$	p 沿着向量场 X 流动	(3.69)
$[+tX]$	场的沿着 X 的流动	(3.72)
L_X	X 的 Lie 导数	(3.74)
$X \in \mathcal{D}$	场 X 含于分布 \mathcal{D}	(3.77)
$\omega_1 \wedge \omega_2$	微分形式的外积	(3.82)
$\omega(X_1, \dots, X_k)$	微分形式和切向量场的配合	(3.82)
$X \lrcorner \omega$	切向量到微分形式的内乘	(3.82)
$\omega \circ f$	ω 在光滑映射 f 下的原像	(3.82)
$d\omega$	ω 的微分	(3.84)
$\int_M \omega$	流形上的积分	(3.91)
∂D	带边区域 D 的边界	(3.93)
$\overline{\mathbb{H}}^n$	闭上半空间	(3.94)
\mathbb{H}^n	上半空间	(3.94)

习题

习题 10 证明: 对于流形而言, 连通等价于道路连通. (提示: 因为流形是局部道路连通的, 类欧式空间开集连通等价于道路连通的证明.)

习题 11 对于流形间的光滑映射 $M \xrightarrow{f} N$, $\omega \in \text{Diff}^k(N)$, 求证:

$$d\omega \circ f = d(\omega \circ f)$$

(提示: 选取坐标卡局部验证. 具体来说, 不妨直接置于欧式空间, 假设 $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n$, 假设 $f = (f^1, \dots, f^n)$, 这样

$$\begin{aligned} & d((g \circ f)d(y^1 \circ f) \wedge \dots \wedge d(y^k \circ f)) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^i} \right) dx^i \wedge d(y^1 \circ f) \wedge \dots \wedge d(y^k \circ f) \quad \because d \text{ 的 Leibniz 律} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \left(\frac{\partial g}{\partial y^j} \circ f \right) \right] dx^i \wedge (\dots) \quad \because \text{链式法则} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y^j} \circ f \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge (\dots) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y^j} \circ f \right) d(y^j \circ f) \wedge (\dots) \quad \because f^j = y^j \circ f \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y^j} dy^j \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k \right) \circ f \end{aligned}$$

上述过程实际上也适用于 (3.84) 的“不难验证”.)

习题 12 (Grassman 流形) 记欧式空间 \mathbb{R}^n 全体 k 维子空间为 $G(k, n)$, 注意到根据 (3.10), $G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$. 我们希望任意 k , $G(k, n)$ 上也有流形的结构, 这被称为 **Grassman 流形**. 考虑

$$\psi: \mathbb{M}_{n \times k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \{\mathbb{R}^n \text{ 的子空间}\} \quad A \longmapsto A \text{ 列向量生成的子空间}$$

则

$$\psi(A) \in G(k, n) \iff \text{rank } A = k$$

$$\psi(A) = \psi(B) \iff \exists U \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}), \text{ s.t. } A = BU$$

故可以赋予 $G(k, n)$ 以 $\mathbb{M}_{n \times k} \cong \mathbb{R}^{n \times k}$ 的子拓扑的商拓扑. 设重指标

$$I = (i_1, \dots, i_k) \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

记 A_I 为抽取矩阵 A 的 i_1, \dots, i_k 行得到的方阵, A_I^c 为剩余行组成的矩阵, 记

$$U_I = \{A \in \mathbb{M}_{n \times k}(\mathbb{R}) : \det A_I \neq 0\}$$

可以作

$$\begin{aligned} \varphi_I : \mathbb{M}_{(n-k) \times k}(\mathbb{R}) &\longrightarrow U_I \\ X &\longmapsto \varphi_I(X) \text{ s.t. } \begin{cases} [\varphi_I(X)]_I = \text{单位阵 } I_k \\ [\varphi_I(X)]_I^c = X \end{cases} \end{aligned}$$

证明 $\psi \circ \varphi_I : \mathbb{M}_{(n-k) \times k}(\mathbb{R}) \rightarrow \psi(U_I)$ 是同胚. 这就赋予了 $G(k, n)$ 以 $k(n-k)$ 维流形的结构. (提示: 不难验证 $\psi \circ \varphi_I$ 单满连续, 再验证逆映射是连续的.)

习题 13 对于流形 M , $\mathcal{C}^\infty(M)$ 能否还原出 M 的拓扑结构? 给出类似 (1.15) 的命题, 并证明. 再问能否还原出 M 的微分结构? (提示: 可能会在最后用到习题 1. 对于后者先通过局部化找到 \mathcal{C}_p^∞ , 再根据 (3.36), (3.42).)

习题 14 我们想要对流形的任意子集提光滑的概念.

定义. 对于流形 M, N , 子集 $S \subseteq M$, 如果 $f : S \rightarrow N$ 满足任意一点 $p \in S$, 都存在 p 的开邻域 U 和光滑函数 $f_p : U \rightarrow N$ 使得 $f_p|_{S \cap U} = f|_{S \cap U}$, 则称 f **光滑**. 换言之, 称在一个子集上光滑如果在任意点附近都可以延拓为光滑函数.

(1) 求证: 如果 $S \subseteq M$ 是紧致的, $f : S \rightarrow N$ 是光滑的, 当且仅当存在 S 的邻域 U 和光滑函数 $\tilde{f} : U \rightarrow N$ 使得 $\tilde{f}|_S = f$. (提示: 使用单位分解.)

(2) 求证: 对于流形 M , 嵌入 $N \rightarrow M$, 视作 $N \subseteq M$. 对于任何 $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, 将其视为 M 子集上的函数, 证明在此意义下 f 也是光滑的. (提示: 根据 (3.52), 可以选择 M 的坐标卡使得 N 的坐标卡是前 n 位, 然后延拓将是自然的.)

问题 15 (Borel 引理) 令 $U \subseteq_{\pi} \mathbb{R}^n$, 给一系列上面的光滑函数 $\{f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}$, 则存在光滑函数 $F(t, *) : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\frac{\partial^k F}{\partial t^k}(0, x) = f_k(x)$$

(提示: 不妨假设 f_1, \dots, f_n 仅仅生活在一个紧致集中. 作一个光滑函数 χ 在 $(-1, 1)$ 外为 0, 在 0 附近为 1, 作

$$F_m(t, x) = \frac{t^m}{m!} \chi\left(\frac{t}{\epsilon_m}\right) f_m(x) \quad F(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(t, x)$$

取 ϵ_m 充分小使得 (注意此时 $t^{m-k} \leq \epsilon_m^{m-k}$)

$$\forall k \leq m \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial^k F_m}{\partial t^k} \right\|_{\infty} < \frac{1}{2^m}$$

这样确保 F 收敛并且可以逐项求导.)

习题 16 利用 Borel 引理 (问题 15) 证明: 函数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的 (在习题 14 意义下) 当且仅当 f 在 $(0, 1)$ 光滑, 在 0 处有任意阶右导数, 在 1 处有任意阶左导数. (提示: 利用 Borel 引理做出在 0 处 k 阶导数恰好是那些右导数的函数, 然后将左半边直接“黏”上 f .)

问题 17 回忆广义的链式法则 (3.33), 对于流形 M , 切向量场 $X, Y \in \text{Vec}(M)$, 光滑函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, 求证:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p + tX) = (Xf)(p + tX)$$

并证明

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f((p + xX) + yY) \Big|_{t=s=0} = X(Yf)$$

并证明

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{f(((p+xX)+yY)-xX)-yY)}{xy} = ([X,Y]f)(p)$$

这是 *Lie* 括号的另一种解释. (提示: 前两者的计算需要仔细, 第二个公式的证明时需要注意)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(p+xX+yY) = [X(f(*+yX))](p+xX) \neq (Xf)(p+xX+yY)$$

对于最后的公式构造

$$H(u, v, s, t) = f(((p+uX)+vY)+sX)+tY)$$

则欲求的结果等于

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial v} + \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t} \right) \Big|_{u=v=s=t=0}$$

利用第二个公式逐项计算即可.)

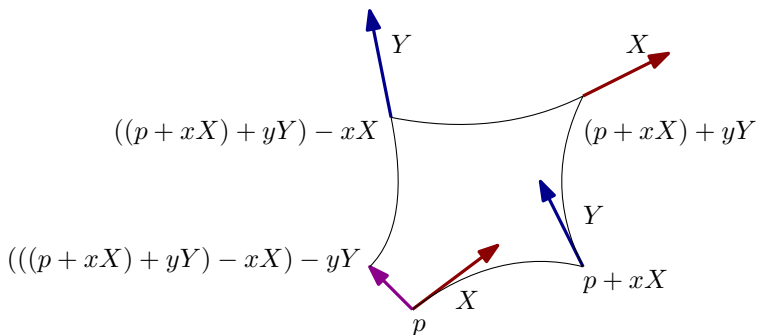


图 3.18: Lie 导数

问题 18 对于流形 M , $\omega \in \text{Diff}^k(M)$ 是 k -形式, $X, X_1, \dots, X_k \in \text{Vec}(M)$ 是切向量场, 求证:

$$L_X[\omega(X_1, \dots, X_k)] = (L_X \omega)(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_k)$$

从而根据 *Cartan* 魔术公式 (3.87) 有

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k) \end{aligned}$$

这里 $\widehat{}$ 表示跳过. (提示: 第一个等式可以用和 (3.76) 一样的证明技巧. 第二个等式则需要归纳, $k = 1$ 时,

$$L_X(\omega(X_1)) = (L_X \omega)(X_1) + \omega[X, X_1]$$

带入魔术公式

$$\begin{aligned} X(\omega(X_1)) &= [((X \lrcorner) \circ d + d \circ (X \lrcorner))\omega](X_1) + \omega[X, X_1] \\ &= ((X \lrcorner)d\omega)(X_1) + (d(X \lrcorner \omega))(X_1) + \omega[X, X_1] \\ &= d\omega(X, X_1) + X_1\omega(X) + \omega[X, X_1] \end{aligned}$$

之后, 任意的 k , 带入魔术公式

$$\begin{aligned} &X[\omega(X_1, \dots, X_k)] \\ &= (L_X \omega)(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_k) \\ &= [((X \lrcorner) \circ d + d \circ (X \lrcorner))\omega](X_1, \dots, X_k) + (\dots) \\ &= d\omega(X, X_1, \dots, X_k) + [d(X \lrcorner \omega)](X_1, \dots, X_k) + (\dots) \\ &= d\omega(X, X_1, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} X_i \omega(X, X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega(X, [X_i, X_j], \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k) \end{aligned}$$

然后利用反对性整理即得.)

问题 19 (微分理想) 对于 n 维流形 M , 熟知 $\text{Diff}(M) = \bigoplus_{k=0}^n \text{Diff}^k(M)$ 以外积 \wedge 为乘法构成一个环, 实际上这是一个 $\mathcal{C}^\infty(M)$ -代数. 如果一个理想 $\mathfrak{I} \subseteq \text{Diff}(M)$ 满足

$$d\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}$$

则称 \mathfrak{I} 为 **微分理想 (differential ideal)**. 对于分布 \mathcal{D} , 定义

$$\mathfrak{I}(\mathcal{D}) = \sum_{k=0}^n \left\{ \omega \in \text{Diff}^k(M) : \begin{array}{l} \forall X_1, \dots, X_k \in \text{Vec}(M), \\ \omega(X_1, \dots, X_k) = 0 \end{array} \right\}$$

求证: \mathcal{D} 满足条件 $X, Y \in \mathcal{D} \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{D}$ 当且仅当 $\mathfrak{I}(\mathcal{D})$ 是微分理想.
(提示: 利用恒等式

$$\omega[X, Y] = -d\omega(X, Y) + X(\omega(Y)) - Y(\omega(X))$$

这样可以证明必要性. 为了看到充分性, 注意到, 在局部上, $\mathfrak{I}(\mathcal{D})$ 能反过来决定 \mathcal{D} , 这只需要在每一点查看维数.)

习题 20 对于流形间的光滑映射 $M \xrightarrow{f} N$, 如果切向量场 $X \in \text{Vec}(M), Y \in \text{Vec}(N)$ 满足

$$\forall p \in M, \quad (df|_p)X_p = Y_{f(p)}$$

则称 X, Y 是 **f -相关** 的. 求证: 如果 X 和 X' 相关, 对于 $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X'g \circ f = X(g \circ f)$. 如果 X 和 X' 相关, Y 和 Y' 相关, 则 $[X, Y]$ 和 $[X', Y']$ 相关. (提示: 直接计算, 第一条

$$X'g \circ f(p) = X'_{f(p)}g = (df|_p X_p)g = X_p(f \circ g) = (X(f \circ g))(p)$$

对于第二条, 任意 $g \in \mathcal{C}_{f(p)}^\infty(N)$,

$$\begin{aligned} ((df|_p)[X, Y]_p)g &= [X, Y]_p(g \circ f) && \because \text{定义} \\ &= X_p(Y(g \circ f)) - Y_p(X(g \circ f)) && \because \text{定义} \\ [X', Y']_{f(p)}g &= X'_{f(p)}(Y'g) - Y'_{f(p)}(X'g) && \because \text{定义} \\ &= [(df|_p)X_p](Y'g) - [(df|_p)Y_p](X'g) && \because \text{定义} \\ &= X_p(Y'g \circ f) - Y_p(X'g \circ f) \end{aligned}$$

然后把第一条带进去.)

问题 21 对于连通的流形 M , 证明任意两个点 $x, y \in M$, 存在微分同胚 $\varphi: M \rightarrow M$ 使得 $\varphi(x) = y$ 且 φ 和 id 同伦. 本习题采自 [15] P22 *Homogeneity Lemma*. (提示: 不难发现, 只需要对局部作, 证明在 \mathbb{R}^n 中, 存在 0 附近某个开集 $U \subseteq [-1, 1]^n$, 任意 $x \in U$, 可以作 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 φ 在 $[-1, 1]^n$ 外是 id , 且 $\varphi(0) = x$. 考虑光滑函数 $0 \leq \chi \leq 1$ 使得在 $[-1, 1]^n$ 外为 0, 在 0 附近 $[-1/2, 1/2]^n$ 上恒取 1. 对于任意 $c = (c^1, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^n$, 记 $X_c = \sum_{i=1}^n c^i \chi \frac{\partial}{\partial x^i}$, 每一个点 $p \in \mathbb{R}^n$, 证明 $p + tX_c$ 对所有 t 都得以定义, 因为 $s: t \mapsto p + tX_c$ 的方程是

$$\frac{dx^i}{dt} = c^i \chi(x^1, \dots, x^n)$$

不难发现, 不可能出现趋于无穷的情况, 故这个方程的最大存在区间是 \mathbb{R} . 根据 (3.73), 不难验证, 开集 U 可以取作 $(-1/2, 1/2)^n$.)

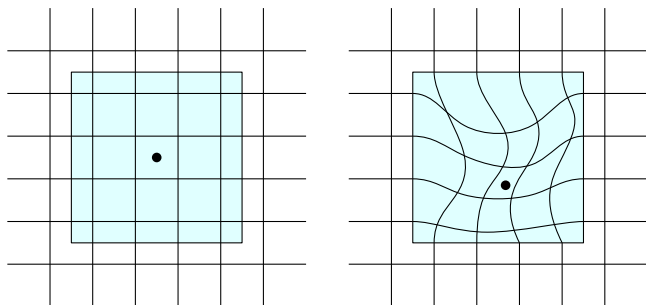


图 3.19: 是空间的扭曲还是切空间的沦丧?

第四章 Riemann 流形

4.1 Riemann 流形与等距映射

I. Riemann 流形 下面, 我们为了推广第二章所陈述的 \mathbb{R}^3 中的曲线曲面的几何, 我们引入 Riemann 流形.

记号 4.1 不过在此之前, 我们先回顾 (3.59) 和 (3.60) 的构造, 我们可以类似造出

$$(\text{Tan} \otimes \text{Tan})_p = \text{Tan}_p \otimes_{\mathbb{R}} \text{Tan}_p \quad (\text{Tan} \otimes \text{Tan})(M) = \bigsqcup_{p \in M} \text{Tan}_p \otimes_{\mathbb{R}} \text{Tan}_p$$

对于开集 $S \subseteq M$,

$$(\text{Vec} \otimes \text{Vec})(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{全体 } X : S \rightarrow (\text{Tan} \otimes \text{Tan})(S) \text{ 使得} \\ \bullet \forall p \in S, X_p \in \text{Tan}_p \otimes \text{Tan}_p, \\ \bullet \text{ 在 } S \text{ 内的任何坐标卡 } (U, \varphi = (x^1, \dots, x^n)) \\ \text{上, } p \in U, X_p \text{ 写成 } \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\} \text{ 的系数} \\ \text{关于 } p \text{ 是光滑的.} \end{array} \right\}$$

类似地 $(\text{Tan} \otimes \text{Cot})_p, (\text{Tan} \otimes \text{Cot})(M), (\text{Vec} \otimes \text{Diff})(S)$ 一类记号也被自然地定义, 这样一类的构造分别统称作 p 点的张量空间, 张量丛, 张量场.

特别地, 记

$$\begin{aligned}
 (\mathrm{Tan}^{\otimes r} \otimes \mathrm{Cot}^{\otimes s})_p &= \underbrace{\mathrm{Tan}_p \otimes \dots \otimes \mathrm{Tan}_p}_r \otimes \overbrace{\mathrm{Cot}_p \otimes \dots \otimes \mathrm{Cot}_p}^s \\
 (\mathrm{Tan}^{\otimes r} \otimes \mathrm{Cot}^{\otimes s})(M) &= (\underbrace{\mathrm{Tan} \otimes \dots \otimes \mathrm{Tan}}_r \otimes \overbrace{\mathrm{Cot} \otimes \dots \otimes \mathrm{Cot}}^s)(M) \\
 (\mathrm{Vec}^{\otimes r} \otimes \mathrm{Diff}^{\otimes s})(S) &= (\underbrace{\mathrm{Vec} \otimes \dots \otimes \mathrm{Vec}}_r \otimes \overbrace{\mathrm{Diff} \otimes \dots \otimes \mathrm{Diff}}^s)(M)
 \end{aligned}$$

另外, 诸如张量, 配合等线性代数概念也被逐点定义, 具体来说, 对于 $X \in \mathrm{Vec}(M), Y \in \mathrm{Vec}(M), \omega \in \mathrm{Diff}(M)$, 那么

$$X \otimes Y : [p \mapsto X_p \otimes Y_p] \in (\mathrm{Vec} \otimes \mathrm{Vec})(M) \quad \langle \omega, X \rangle : [p \mapsto \langle \omega_p, X_p \rangle] \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

定义 4.2 (Riemann 流形) 一张光滑流形 M , 一个映射 $g : M \rightarrow \mathrm{Cot}^{\otimes 2}(M)$ 被称为是 **Riemann 度量 (Riemannian metric)**, 如果

- 在每个点 $p \in M$, g_p 是切空间 Tan_p 上的正定二次型.
- 任何坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ 上, $p \in U$, g_p 关于 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ 的系数都是关于 p 光滑的.

等价地, 等价于说 $g \in \mathrm{Diff}^{\otimes 2}(M)$, 且 g_p 都是正定的. 一张流形指定一个 *Riemann 度量* 就被称为 **Riemann 流形**.

之后, 除非特别声明 g 都用来指代 *Riemann 度量*. 同时对于 $\partial, \bar{\partial} \in \mathrm{Tan}_p$, 简单记

$$g(\partial, \bar{\partial}) = g_p(\partial, \bar{\partial})$$

对于切向量场 $X, Y \in \mathrm{Vec}(U)$, 记

$$[g(X, Y) : p \mapsto g_p(X_p, Y_p)] \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

例 4.3 回顾 (3.8), 我们赋予了经典曲线曲面流形的意义. 此时, 对于单曲面 $M: [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 我们赋予了 U 以流行的结构. 考虑 M 的第一基本形式

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

就成为一个 *Riemann* 度量, 具体来说, 例如在 $p \in U$ 点, 根据 (2.30) 的法则,

$$I\left(f\frac{\partial}{\partial u} + g\frac{\partial}{\partial v}, h\frac{\partial}{\partial u} + k\frac{\partial}{\partial v}\right) = (f, g) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

或者用微分流形的语言,

$$dx dy : (\partial, \bar{\partial}) \mapsto \partial(x)\bar{\partial}(y) \quad x, y \in \{u, v\}, \partial, \bar{\partial} \in \text{Tan}_p$$

I 定义了一个二次型, 由于 $EG - F^2 = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle - \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle^2 \geq 0$, 加之 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 不共线, 故第一基本形式是正定二次型.

例 4.4 对于欧式空间 \mathbb{R}^n , 因为 (3.23), 每点的切空间都可以等同于 \mathbb{R}^n , 可以赋予通常内积如下,

$$g\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

这令 \mathbb{R}^n 称为 *Riemann* 流形.

例 4.5 一般地, 对于欧式空间的子流形 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, 因为 \mathbb{R}^n 每点的切空间都可以等同于 \mathbb{R}^n , 可以将其限制在 $\text{Tan}_p(M)$ 上得到新的内积. 具体来说, 对于 $p \in M$, 任意 $\partial, \bar{\partial} \in \text{Tan}_p(M)$, 可以定义 *Riemann* 度量

$$g(\partial, \eta) = g_{\mathbb{R}^n}(df(\partial), df(\bar{\partial}))$$

于是球面 S^n 一类的 *Riemann* 度量均可被自然地赋予.

II. 距离 有了度量我们就可以谈论距离了.

定义 4.6 (长度) 对于一张 Riemann 流形 M , 如果上面有道路 $I \xrightarrow{s} M$, 其中 I 是闭区间则可以定义这条道路的 **长度** 为

$$\text{length}(s) = \int_I \sqrt{g(\dot{s}(t), \dot{s}(t))} dt$$

评注 4.7 任何曲线都可以更换为弧长参数使之成为单位速率的. 这点的论证和 (2.4) 如出一辙.

例 4.8 在欧式空间 \mathbb{R}^n 中的一条道路 $I \xrightarrow{s} \mathbb{R}$, 假设 $s = (s^1(t), \dots, s^n(t))$, 那么根据 (3.33),

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^n (s^i)' \frac{\partial}{\partial x^i} \quad g(\dot{s}, \dot{s}) = \sum_{i=1}^n [(s^i)']^2$$

故

$$\text{length}(s) = \int_I \sqrt{\sum_{i=1}^n [(s^i)'(t)]^2} dt$$

这正是我们通常定义的道路长度.

定义 4.9 对于 Riemann 流形 M , 任意两点 $p, q \in M$, 可以定义之间的曲线距离

$$d(p, q) = \inf\{\text{length}(s) : \text{曲线 } I \xrightarrow{s} M \text{ 以 } p \text{ 为起点 } q \text{ 为终点}\}$$

不难验证这是一个距离, 这让 M 形成一个距离空间, 根据下面的结论, 其上诱导的拓扑和流形上的拓扑是一致的.

定理 4.10 上述 (4.9) 定义的 d 诱导的拓扑和流形上的拓扑是一致的.

证明 我们只需要证明邻域基互相包含即可, 故这是一个局部问题. 对于 $0 \in \mathbb{R}^n$, 因为 g 在 0 处正定, 利用矩阵的方法, 可以作用一个线性变换, 不妨假设 g 具有如下形式

$$g\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = f_1 a^1 b^1 + \dots + f_n a^n b^n$$

其中 $f_i \in \mathcal{C}_p^\infty$ 满足 $f(0) > 0$. 取充分小的邻域 U 使得 $0 < a \leq f_i(U) \leq b$, 假如记欧式空间通常 Riemann 度量为 g' , 则在 U 上

$$ag'(X, Y) \leq g(X, Y) \leq bg'(X, Y)$$

这样, U 内部任意一点 p , 任意曲线 s 连接 $0, p$ 都有

$$a \text{length}'(s) \leq \text{length}(s) \leq b \text{length}'(s)$$

假如记欧式空间的通常距离为 d' , 则

$$a \text{length}'(s) \leq \text{length}(s) \leq d(p, 0) \quad \text{length}(s) \leq b \text{length}'(s) \leq bd'(p, 0)$$

取下确界得到估计

$$ad'(p, 0) \leq d(p, 0) \leq bd'(p, 0)$$

于是不难得到邻域基互相包含. □

下面我们定义保持 Riemann 度量的映射.

定义 4.11 (等距映射) 两张黎曼曲面 M, N , 如果光滑映射 $f: M \rightarrow N$ 满足在任何点 $p \in M$, $\partial, \bar{\partial} \in \text{Tan}_p$, 都有

$$g(\partial, \bar{\partial}) = g(df(\partial), df(\bar{\partial}))$$

则称 f 为 **等距映射**. 如果仅仅保持两个切向量的夹角, 我们称为 **共形映射 (conformal)**, 显然, f 是共形映射当且仅当存在光滑函数 h 使得任何点 $p \in M$, $\partial, \bar{\partial} \in \text{Tan}_p$, 都有

$$g(\partial, \bar{\partial}) = h(p)g(df(\partial), df(\bar{\partial}))$$

评注 4.12 在此意义下, 例如下图, 两张流形虽然是微分同胚, 但不是等距映射. 而共形映射最为典范的例子就在复变函数之中, 如果一个全纯函数 $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, 且 f' 在 U 内不为 0, 那么 f 就是一个共形映射. 因为复可导意味着各个方向的变化率是在一阶无穷小下是相同的 (当然, 严格的论证是使用 *Cauchy-Riemann* 方程). 既然角度不发生变化这意味着互相垂直的曲线被映射为互相垂直的, 所以经常用下述网格来描述共形映射,

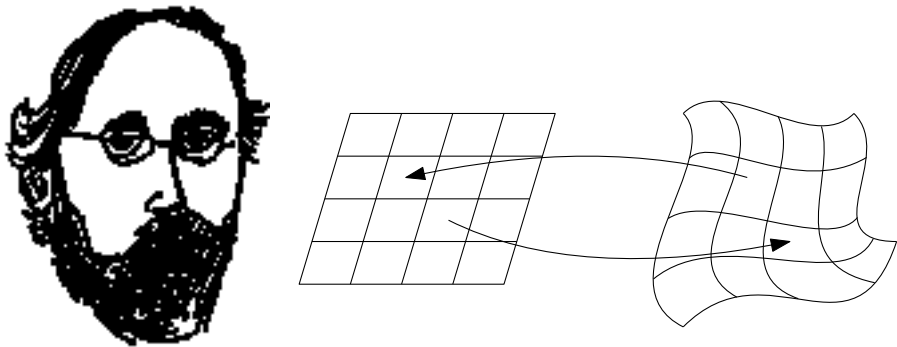


图 4.1: 微分同胚, 但不是等距映射与 Riemann 的智慧

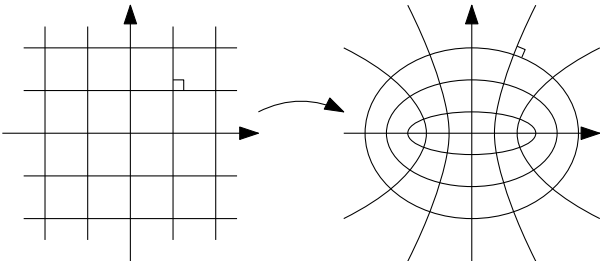


图 4.2: 共形映射

4.2 联络, 第二基本形式, 协变导数

I. 联络 回顾 (2.19), 我们不难发觉微分 d 的重要性, 尽管我们在 (3.62) 已经定义了对连续函数的 d , 但是尚未定义对向量场的 d . 实际上, 在微分流形的框架下, 无法做到微分的自然. 且我们的证明高度依赖于如下恒等式

$$d(fv) = (df)v + f dv \qquad d\langle v, w \rangle = \langle dv, w \rangle + \langle v, dw \rangle$$

下面我们来制造这样一个“微分”.

定义 4.13 (联络) 对于流形 M , 一个 **联络 (connection)** 是一个映射 $\nabla : \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Diff}(M) \otimes \text{Vec}(M)$ 满足

- 对任意 $X, Y \in \text{Vec}(M)$, $\nabla(X + Y) = \nabla X + \nabla Y$.
- 对任意 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \text{Vec}(M)$, $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X$.

对于点 $p \in M$, 对于 $\partial \in \text{Tan}_p$, 可以定义

$$\nabla_\partial : \text{Vec}(M) \longrightarrow \text{Tan}_p \quad Y \longmapsto \nabla_\partial Y = \langle \partial, \nabla Y|_p \rangle$$

其中 $\langle *, * \rangle$ 是 Tan_p 和 Cot 之间的配合. 对于 $X \in \text{Vec}(M)$, 可以定义

$$\nabla_X : \text{Vec}(M) \longrightarrow \text{Vec}(M) \quad Y \longmapsto \nabla_X Y = \langle X, \nabla Y \rangle$$

其中 $\langle *, * \rangle$ 是 $\text{Vec}(M)$ 和 $\text{Diff}(M)$ 之间的配合.

评注 4.14 通过局部取一组基可知, 只要对每个 $X \in \text{Vec}(M)$ 指定了 ∇_X , 就完全确定了 ∇ . 这样定义下, 联络的定义变成了

- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
- $\nabla_X(fY) = \nabla_X f + (Xf)Y$.
- $\nabla_{(fX+Y)}Z = f \cdot \nabla_X Z + \nabla_Y Z$.

另外注意到, 这样定义出来的 $\nabla_X Y$ 在 p 点的取值只取决于 Y 在 p 附近的取值和 X_p .

例 4.15 对于欧式空间 \mathbb{R}^n , 定义联络

$$\begin{aligned} \nabla : \quad \text{Vec}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \text{Diff}(M) \otimes \text{Vec}(M) \\ \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i} &\longmapsto \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j \right) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

这就是我们在 (2.19) 用的微分, 只不过那时没有写张量记号. 对于 $p \in M$ 处的切向量 $\partial = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, 有

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial} \left(\sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) dx^j, \sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right\rangle \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a^i \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

按照 (3.23) 的等同, 这相当于

$$\nabla_a(f^1, \dots, f^n) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial a}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial a} \right)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial a} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 是方向导数.

定义 4.16 (无挠联络) 对于流形 M , 一个联络 ∇ 被称为是 **无挠的 (torsion-free)**, 如果对于任何切向量场 $X, Y \in \text{Vec}(M)$, 都有

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

定理 4.17 对于 Riemman 流形 M , 存在唯一的无挠联络 ∇ 使得任何切向量场 $X, Y, Z \in \text{Vec}(M)$, 都有

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

证明 先证明唯一性. 此时, 有

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]) \\ Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y, X]) \\ Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X, [Z, Y]) \end{aligned}$$

将前两式相加减去第三式得到

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = \\ 2g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(Z, [Y, X]) - g(X, [Z, Y]) \end{aligned}$$

故

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ -g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y]) \end{pmatrix}$$

右边的表达式和 ∇ 无关, 故 $g(\nabla_X Y, Z)$ 和 ∇ 无关, 局部取一组基加之 g 非退化, 可知这令 ∇ 是唯一的. 反之, 我们就按上式定义 ∇ , 这样, 线性不难验证,

$$g(\nabla_Z(X + Y), W) = \dots = g(\nabla_Z X, W) + g(\nabla_Z Y, W)$$

故 $\nabla(X + Y) = \nabla X + \nabla Y$. 注意到, 对于 $X, Y \in \text{Vec}(S), f \in \mathcal{C}^\infty(S)$,

$$\begin{aligned} [X, fY]_p g &= X_p(fYg) - f(p)(Y_p(Xg)) \\ &= X_p f Y_p g + f(p) X_p Y_g - f(p)(Y_p(Xg)) \\ &= X_p f Y_p g + f(p)[X, Y]_p g \\ \Rightarrow [X, fY] &= (Xf)Y + f[X, Y] \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &2g(\nabla_Y(fX), Z) \\ &= Yg(fX, Z) + f(Xg(Z, Y)) - Zg(Y, fX) \\ &\quad - g(fX, [Y, Z]) - g(Z, [fX, Y]) + g(Y, [Z, fX]) && \because \text{定义} \\ &= Y(fg(X, Z)) + f(Xg(Z, Y)) - Z(fg(Y, X)) \\ &\quad - fg(X, [Y, Z]) - fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) && \because g \text{ 是 } \mathcal{C}^\infty\text{-线性的} \\ &\quad + (Yf)g(Z, X) + (Zf)g(Y, X) && \because \text{关于 Lie 括号的计算} \\ &= f(Yg(X, Z)) + f(Xg(Z, Y)) + f(Zg(Y, X)) \\ &\quad - f(g(X, [Y, Z])) - f(g(Z, [X, Y])) + f(g(Y, [Z, X])) \\ &\quad + 2(Yf)g(Z, X) && \because \text{Leibniz 法则} \\ &= 2g(\nabla_Y X, Z) + 2g((Yf)X, Z) \end{aligned}$$

不难验证 $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X$ 成立. □

定义 4.18 (Riemann 联络) 上述 (4.17) 通过

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ -g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y]) \end{pmatrix}$$

确定的联络被称为 **Levi-Civita 联络**, 或被称为 **Riemann 联络**.

换言之, 实际上联络就是“生活在 Riemann 流形上生物”发明的微分算子和方向导数.

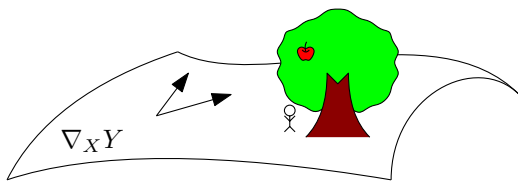


图 4.3: Riemann 流形上的联络和苹果树

II. 子流形上的联络 下面, 我们来研究子流形上的 Riemann 联络, 并由此得到第二基本形式.

定义 4.19 考虑 Riemann 流形 M , 考虑嵌入子流形 $S \rightarrow M$, 不妨假设 $S \subseteq M$, 对于任何 $p \in S \subseteq M$, 那么可以认为 $\text{Tan}_p(S) \subseteq \text{Tan}_p(M)$, 将 Riemann 度量限制在上面, 使得 S 也成为 Riemann 流形, 这被称为 **Riemann 嵌入子流形**, 下面我们简称嵌入子流形. 定义 **法空间** $N_p = N_p(S) = \text{Tan}_p(S)^\perp$, 故

$$\text{Tan}_p(M) \cong \text{Tan}_p(S) \oplus N_p(S)$$

这定义了两个映射 $*^\top, *^\perp$, 使得 $\partial = \underbrace{\partial^\top}_{\in \text{Tan}_p(S)} + \underbrace{\partial^\perp}_{\in N_p(S)}$.

同时这还定义了 **法从**

$$NM = \bigsqcup_{p \in M} N_p(M)$$

类似的 S 上的 **法向量场** 也被类似地定义, 记为 $\text{Vec}^\perp(S)$.

引理 4.20 对于流形 M , 嵌入子流形 $S \rightarrow M$, 任意 S 的光滑函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$, 切向量场 $X \in \text{Vec}(S)$ 都存在局部延拓, 即任意 $p \in S$, 存在 p 的开邻域 U 和 $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\hat{X} \in \text{Vec}(U)$ 使得

$$\forall q \in S \cap U \quad \hat{f}(p) = f(p) \quad \hat{X}_q = X_q$$

其中 \hat{f}, \hat{X} 被称为在 f, X 在 p 处的 **局部延拓**.

证明 根据 (3.52), 局部上, 嵌入子流形的坐标卡可以取作坐标卡的前几位, 所以延拓很容易. 实际上这就是上一章习题14. □

引理 4.21 对于流形 M , 嵌入子流形 $S \hookrightarrow M$, 如果在某个点 $* \in S$ 附近, $X, Y \in \text{Vec}(U)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ 局部延拓到 $\hat{X}, \hat{Y} \in \text{Vec}(U)$, $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, 那么

$$[\hat{X}, \hat{Y}] \text{ 是 } [X, Y] \text{ 的局部延拓} \quad \hat{X}\hat{f} \text{ 是 } Xf \text{ 的局部延拓}$$

证明 直接计算

$$(\hat{X}\hat{f})(p) = \hat{X}_p\hat{f} = (d\iota(X_p))\hat{f} = X_p\hat{f}|_{U \cap S} = X_p f = (Xf)(p)$$

那么对于 $g|_p \in \mathcal{C}_p^\infty$,

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{Y}]_p g &= \hat{X}_p(\hat{Y}g) - \hat{Y}_p(\hat{X}g) && \because \text{定义} \\ &= X_p[(\hat{Y}g)|_{S \cap U}] - Y_p[(\hat{X}g)|_{S \cap U}] && \because \text{条件} \\ &= X_p[Y(g)|_{S \cap U}] - Y_p[X(g)|_{S \cap U}] && \because \text{延拓条件} \\ &= [X, Y]_p(g|_{S \cap U}) && \because \text{延拓条件} \end{aligned}$$

故 $[\hat{X}, \hat{Y}]$ 在 S 的任何点上都有 $[\hat{X}, \hat{Y}]_* = [X, Y]_*$, 这就说明 $[\hat{X}, \hat{Y}]$ 是 $[X, Y]$ 的局部延拓, 这实际上就是上一章习题20. □

定理 4.22 考虑 *Riemann* 流形 M , 假设其上的 *Riemann* 联络是 ∇ , 考虑嵌入子流形 $S \subseteq M$. 则

$$\nabla : \text{Vec}(S) \times \text{Vec}(S) \longrightarrow \text{Vec}(S) \quad (X, Y) \longmapsto \left[p \mapsto (\nabla_{\hat{X}} \hat{Y}) \right]$$

其中 \hat{X}, \hat{Y} 分别是 X, Y 在 p 处的局部延拓, 上述定义是良定义的. 之后, 将直接记 $\nabla_{\hat{X}} \hat{Y}$ 之为 $\nabla_X Y$.

证明 为了看到良定义性, 只需要注意到 (4.17) 的过程, ∇ 的确定只出现了 Lie 括号和 Riemman 度量, 而出现的切向量都落在 $\text{Tan}_p(S)$ 上, 根据 (4.21). 故可以在 S 上计算, 于是是良定义的. \square

定理 4.23 考虑 *Riemann* 流形 M , 假设其上的 *Riemann* 联络是 ∇ , 考虑嵌入子流形 $S \subseteq M$. 则定义了如下两个映射

$$\hat{\nabla} : \text{Vec}(S) \times \text{Vec}(S) \longrightarrow \text{Vec}(S) \quad (X, Y) \longmapsto (\nabla_X Y)^\top \quad (*)$$

$$B : \text{Vec}(S) \times \text{Vec}(S) \longrightarrow \text{Vec}^\perp(S) \quad (X, Y) \longmapsto (\nabla_X Y)^\perp \quad (**)$$

按照 (*) 给出了 S 上的 *Riemman* 联络, 而 (**) 则是对称且是 $\mathcal{C}^\infty(M)$ -线性的.

证明 下面我们首先论证对称性, 因为

$$\begin{aligned} B(X, Y) - B(Y, X) &= (\nabla_{\hat{X}} \hat{Y})^\perp - (\nabla_{\hat{Y}} \hat{X})^\perp \\ &= (\nabla_{\hat{X}} \hat{Y} - \nabla_{\hat{Y}} \hat{X})^\perp \\ &= [\hat{X}, \hat{Y}]^\perp && \because \text{无挠假设} \\ &= [X, Y]^\perp && \because \text{前段论证} \\ &= 0 && \because [X, Y] \in \text{Tan}_p(S) \end{aligned}$$

因为 $\nabla_X Y$ 关于 Y 线性, 结合对称性知道对两个分量都是线性的. 类似地

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X &= [\nabla_{\hat{X}} \hat{Y}]^\top - [\nabla_{\hat{Y}} \hat{X}]^\top \\ &= [\nabla_{\hat{X}} \hat{Y} - \nabla_{\hat{Y}} \hat{X}]^\top \\ &= [\hat{X}, \hat{Y}]^\top \\ &= [X, Y] && \because [X, Y] \in \text{Tan}_p(S) \end{aligned}$$

命题得证. □

定义 4.24 (第二基本形式) 上述 (4.23) 定义的 $B: \text{Vec}(S) \times \text{Vec}(S) \rightarrow \text{Vec}^\perp(X)$, 被称为 S 的 **第二基本形式**.

推论 4.25 考虑 Riemann 流形 M , 考虑嵌入子流形 $S \subseteq M$, 假设其上的 Riemann 联络分别是 $\nabla, \hat{\nabla}$, S 的第二基本形式是 B , 则在任意点,

$$\nabla_{\hat{X}}(\hat{Y}) = \hat{\nabla}_X Y + B(X, Y)$$

\hat{X}, \hat{Y} 是 X, Y 在该点的局部延拓.

例 4.26 考虑经典 (2.7) 的单正则曲面 $M: [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 假如 $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)(u, v)$ 是嵌入, 根据 (4.19), 这使得 U 成为一个 Riemann 嵌入子流形. 令

$$U = \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad V = \frac{\partial}{\partial u^h} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial u^h} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

当然, 在 (3.23) 的等下同下, $U = \mathbf{r}_u, V = \mathbf{r}_v$. 只需要任意延拓 $\frac{\partial x^j}{\partial u^j}$, 即可得到延拓 \hat{U}, \hat{V} , 方便起见仍然记为 $\frac{\partial x^j}{\partial u^j}, U, V$. 那么

- 其上的 Riemann 度量是

$$g(X, Y) = \langle \hat{X}, \hat{Y} \rangle$$

正是经典意义下的内积, 换言之, 第一基本形式.

- 而 $N_p(M)$ 正是法向量 $\mathbf{n}(u, v)$ 张成的, 当然, 在 (3.23) 的等下同下.
- 回忆 (4.15) 赋予了欧式空间以自然的联络, 为了看到 M 上的联络, 我们在局部 U 光滑地选取单位正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, 使得 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Vec}(U), \mathbf{e}_3 = \mathbf{n} \in \text{Vec}^\perp(U)$. 这样欧式空间 \mathbb{R}^3 的联络在局

部上可以由在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 上的作用决定, 实际上,

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{e}_1 = & \omega_{12} \mathbf{e}_2 + \omega_{13} \mathbf{e}_3 \\ \nabla \mathbf{e}_2 = & \omega_{21} \mathbf{e}_1 + \omega_{23} \mathbf{e}_3 \\ \nabla \mathbf{e}_3 = & \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

和 (2.19) 是一致的, 不难验证, M 的联络就是

$$\begin{cases} \hat{\nabla} \mathbf{e}_1 = & \omega_{12} \mathbf{e}_2 \\ \hat{\nabla} \mathbf{e}_2 = & \omega_{21} \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

对应的第二基本形式就是

$$\begin{cases} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \langle \omega_{13}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{n} \\ B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \langle \omega_{13}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{n} \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \langle \omega_{23}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{n} \end{cases}$$

而原本的第二基本形式是

$$g(d\mathbf{r}, d\mathbf{e}_3) = \omega_1 \omega_{31} + \omega_2 \omega_{32}$$

而 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 的对偶基. 这就说明了上式右边和经典的第二基本形式相吻合.

- 假如联络用自然标架法写, 则复杂很多, 计算

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{U}} \hat{V} &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial u^h} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial u^h} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial u^k \partial u^h} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

在 (3.23) 的等同下, 上述就是 \mathbf{r}_{hk} , 根据 (2.13), M 上的联络为

$$\hat{\nabla}_U V = \sum_{i=1}^2 \Gamma_{kh}^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

第二基本形式为

$$B(U, V) = b_{kh} \mathbf{n}$$

这和经典的第二基本形式相契合, 实际上, $B(U, V) = \mathbb{I}(U, V) \mathbf{n}$.

III. 协变导数 下面我们研究 Riemann 曲面上的曲线. 回忆流形上的曲线 (3.32).

定义 4.27 考虑流形 M , 考虑曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 其中 I 是一个开区间, 一个 s 上的 **切向量场** 是一个映射 $X : I \rightarrow \text{Tan}(M)$ 使得

- 对任意 $t \in I$, $X_t \in \text{Tan}_{s(t)}$.
- 对 $t \in I$, 在 $s(t)$ 附近的坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ 之下, X_t 写成 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{s(t)} \right\}_{i=1}^n$ 的系数是关于 t 光滑的. 等价地, X 本身作为映射是光滑的.

将全体 s 上的切向量场记为 $\text{Vec}(s; M)$.

引理 4.28 考虑流形 M , 考虑曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 其中 I 是一个开区间, s 是嵌入, $X \in \text{Vec}(s; M)$, 对于 $t_0 \in I$, 总存在 $s(t_0)$ 附近的开集 U , 和 $\hat{X} \in \text{Vec}(U)$, 使得

$$\forall t \in s^{-1}(U) \quad \hat{X}_{s(t)} = X_t$$

这被称为 t_0 处的 **局部延拓**.

证明 类似 (4.20). □

定理 4.29 考虑流形 M , 考虑曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 其中 I 是一个开区间, s 是嵌入. 则

$$\nabla : \text{Vec}(s; M) \times \text{Vec}(s; M) \longrightarrow \text{Vec}(s; M) \quad (X, Y) \longmapsto \left[t \mapsto (\nabla_{\hat{X}} \hat{Y}) \right]$$

其中 \hat{X}, \hat{Y} 分别是 X, Y 在 t 处的局部延拓, 上述定义是良定义的. 之后, 将直接记 $\nabla_{\hat{X}} \hat{Y}$ 之为 $\nabla_X Y$.

证明 根据联络的定义以及之后的评注, (4.14), 和 \hat{X} 的选取是无关的. 为了看到和 \hat{Y} 的选取是无关的, 通过做差, 只需要证明 $Y = 0$ 的情形, 但是这样 $Y \in \text{Vec}(I)$, 这已经在 (4.22) 论证过. □

定义 4.30 (协变导数) 考虑 Riemann 流形 M , 考虑曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 其中 I 是一个开区间, s 是嵌入, 此时定义如下的 **协变导数**

$$\frac{\nabla}{dt} : \text{Vec}(s; M) \longrightarrow \text{Vec}(s; M) \quad X \longmapsto \nabla_{\dot{s}} X$$

例 4.31 对于欧式空间 \mathbb{R}^n , 简单正则曲线 $\gamma : [I \xrightarrow{r(t)} \mathbb{R}^n]$, 那么, 例如取

$$X(t) = \sum_{i=1}^n f^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{s(t)} \in \text{Vec}(\gamma; \mathbb{R}^n)$$

延拓之后不妨保留记号. 这样根据 (4.15)

$$\nabla X = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i \right) \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

假如 $r = (x^1, \dots, x^n)$, 那么 $\dot{r} = \sum_{j=1}^n \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j}$, 故

$$\frac{\nabla X}{dt} = \nabla_{\dot{r}} X = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{df^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

换言之, $\frac{\nabla X}{dt}$ 就是 X 各点关于切向量的方向导数.

例 4.32 对于欧式空间的正则单曲面 $M : [U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3]$, 如果有曲线 $\gamma : [I \rightarrow \mathbb{R}^3]$ 分裂成 $I \xrightarrow{s} U \xrightarrow{r(u,v)} \mathbb{R}^3$. 假如在局部上选取正交标架 $\{e_1, e_2\}$, 假设

$$X(t) = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2$$

延拓之后不妨保留记号. 我们已经在 (4.26) 计算过其联络了. 那么

$$\nabla X = (df^1 + \omega_{21}) \otimes e_1 + (df^2 + \omega_{12}) \otimes e_2$$

于是

$$\nabla_{\dot{s}} X = \frac{df^1 + \omega_{21}}{dt} e_1 + \frac{df^2 + \omega_{12}}{dt} e_2$$

这和我们在 (2.38) 计算的结果是相同的. 类似地, 用自然标架法也可以计算得到类似的结果, 见习题 23.

命题 4.33 考虑 *Riemann* 流形 M , 考虑曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 其中 I 是一个开区间, s 是嵌入, 对于 $X, Y \in \text{Vec}(s; M)$, 有

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{\nabla(X+Y)}{dt} = \frac{\nabla X}{dt} + \frac{\nabla Y}{dt}. \\ \bullet \quad & \frac{\nabla(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f \frac{\nabla X}{dt}. \\ \bullet \quad & \frac{dg(X, Y)}{dt} = g\left(\frac{\nabla X}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{\nabla Y}{dt}\right). \end{aligned}$$

证明 根据定义不难得到. □

4.3 测地线, 指数映射

I. 测地线 回顾经典的测地线 (2.39).

定义 4.34 (测地线) 对于 *Riemann* 流形 M , 考虑曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 其中 I 是一个开区间, s 是嵌入, 称 s 是 **测地线**, 如果

$$\frac{\nabla \dot{s}}{dt} = \nabla_{\dot{s}} \dot{s} = 0$$

这个记号的意义已经在 (4.29) 和 (4.30) 阐明.

一条道路 $I \xrightarrow{p} M$ 被称为测地线如果限制在 I 内部是测地线.

我们在定义经典的测地线的时候假设了弧长参数 (2.39), 实际上这有些自缚手脚, 实际上有如下的刻画.

命题 4.35 测地线都是匀速率的, 即任何测地线 $s : I \rightarrow M$, 其速率 $\sqrt{g(\dot{s}, \dot{s})}$ 是常数.

证明 因为根据 (4.33),

$$\frac{dg(\dot{s}, \dot{s})}{ds} = 2g\left(\frac{\nabla \dot{s}}{dt}, \dot{s}\right) = 0$$

故 $g(\dot{s}, \dot{s})$ 是常数, 从而 \dot{s} 的长度 $\sqrt{g(\dot{s}, \dot{s})}$ 是常数. □

定理 4.36 对于 *Riemann* 曲面上任何一点 p , 任意一个非零切向量 $\partial \in \text{Tan}_p$, 在 p 点附近总存在唯一的经过 p 点, 在 p 点切向量是 ∂ 的测地线.

证明轮廓 假如选定局部坐标 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, 那么根据联络的定义, 联络 ∇ 完全由在 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 上的作用决定, 将其系数确定出来, 假设 $\varphi \circ s = (u^1(t), \dots, u^n(t))$ 是测地线, 那么可以计算 $\nabla_{\dot{s}} \dot{s}$, 这是关于 t 的 $\frac{d}{dt}(u^1, \dots, u^n)$ 的一阶线性常微分方程组, 初值是 $d\varphi(\dot{s})$, 根据常微分方程组的理论, $\frac{d}{dt}(u^1, \dots, u^n)$ 在 $\varphi(p)$ 附近总存在唯一解. 再按照初值是 $\varphi(p)$ 解出 (u^1, \dots, u^n) . 为了看到局部这是嵌入, 只需要注意任何点的浸入局部上都是嵌入 (3.43). □

实际上, 联络的系数就是 Christoffel 符号, 参见习题22, 具体的测地线方程将在习题23给出.

定义 4.37 (指数映射) 对于 *Riemann* 曲面 M , 点 $p \in M$, 可以定义 **指数映射** \exp , 对于 $\partial \in \text{Tan}_p$, 使得

$$s : I \longrightarrow M \quad t \longmapsto \exp(t\partial)$$

是在 p 点切向量是 ∂ 的测地线.

命题 4.38 记号承上 (4.37), 则

- \exp 定义在 $0 \in \text{Tan}_p$ 的开邻域上.
- \exp 是光滑的.
- $d\exp|_0 = \text{id}$.

这里通过 (3.23), 认为 $\text{Tan}_0(\text{Tan}_p(M)) = \text{Tan}_p(M)$.

证明 证明可以类比 (2.42). 考虑

$$\widehat{\exp} : \text{Tan}_p \times \mathbb{R} \longrightarrow M \quad (\partial, t) \longmapsto s(t)$$

其中 $s : I \rightarrow M$ 是满足 $\begin{cases} s(0) = p \\ \dot{s}(0) = \partial \end{cases}$ 的测地线, 并约定 $(0, t) \mapsto p$. 结合

常微分方程的光滑依赖性, 不难得到 $\widehat{\exp}$ 是定义在一个开集上的光滑函数, 而 $\exp(\partial) = \widehat{\exp}(\partial, 1)$, 故 \exp 是定义在 $0 \in \text{Tan}_p$ 的开邻域上的光滑函数. 之后, 注意根据测地线的唯一性, 以及协变导数的链式法则 (不难直接验证), 有

$$\widehat{\exp}(\partial, xt) = \widehat{\exp}(x\partial, t) \quad (**)$$

为了看到 $d\exp|_0$, 选取 M 的坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, 以及 Tan_p 的坐标卡 $(\text{Tan}_p, \psi = (x_*^1, \dots, x_*^n))$, 使得 ψ 是线性的, 且

$$x_*^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (**)$$

这就是按照 (3.23) 所做的等同. 注意到根据 \dot{s} 的计算,

$$\frac{\partial}{\partial t} x^i(\widehat{\exp}(\partial, t)) \Big|_{t=0} = \partial x^i \quad (***)$$

故 Jacobi 矩阵, 根据 (3.29)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x^i \circ \exp)}{\partial x_*^j}(\psi(0)) &= \frac{\partial(x^i \circ \exp \circ \psi^{-1})}{\partial x_*^j}(0) && \because \text{定义} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} x^i \left(\widehat{\exp} \left(t \frac{\partial}{\partial x^j}, 1 \right) \right) \Big|_{t=0} && \because \text{带入 } (**) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} x^i \left(\widehat{\exp} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, t \right) \right) \Big|_{t=0} && \because \text{带入 } (*) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^j} && \because \text{前段 } (***) \end{aligned}$$

这就说明 Jacobi 矩阵是单位阵. □

实际上指数映射就是把切空间“等距”地“掰”下来, 如下图.

推论 4.39 对于 Riemann 曲面 M , 点 $p \in M$, 存在开邻域 U , 任意 $q \in U$, p, q 之间都有测地线相连.

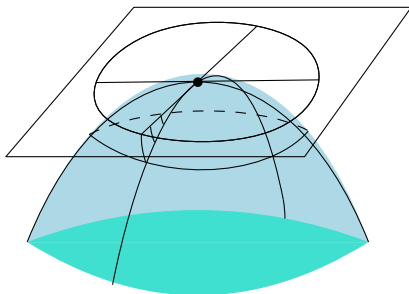


图 4.4: 指数映射

证明 同 (2.42), 因为 $d\exp$ 是恒等映射, 根据反函数定理即可找到 U . \square

引理 4.40 (Gauss) 对于欧式空间 \mathbb{R}^n 原点附近的开集 U , 如果 Riemann 度量 g 使得所有过原点的直线都是测地线, 那么对于任何 $v \in U, w \in \mathbb{R}^n$

$$g_v(v, w) = g_0(v, w)$$

这里通过 (3.23), 左侧视作 $v, w \in \text{Tan}_v U = \mathbb{R}^n$, 右侧视作 $v, w \in \text{Tan}_0 U = \mathbb{R}^n$.

证明 考虑连接 $0, v$ 的直线 s , 此时 $\dot{s}(t) = v$, 作

$$f(t) = g_{s(t)}(v, w) \quad v, w \in \text{Tan}_{s(t)} U = \mathbb{R}^n$$

我们要证明 $f(t)$ 和 t 无关.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} g_{s(t)}(v, w) && \because \text{定义} \\ &= g(\nabla_{\dot{s}} \dot{s}, w) + g(\dot{s}, \nabla_{\dot{s}} w) && \because \text{联络无挠} \\ &= 0 + g(\dot{s}, \nabla_{\dot{s}} w) && \because \text{测地线} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} vg(w, v) + wg(v, v) - vg(v, w) \\ -g(w, [v, v]) - g(v, [w, v]) + g(v, [v, w]) \end{pmatrix} && \because (4.18) \end{aligned}$$

这里 v, w 都可以看做 U 上的常向量场 $[x \mapsto v \in \text{Tan}_x]$ 和 $[x \mapsto w \in \text{Tan}_x]$, 那么容易直接选取坐标卡验证知道 $[v, w] = 0$. 由于 $g(v, v) = g(\dot{s}, \dot{s})$ 是常数 (4.35), 这意味着 $wg(v, v) = 0$. 带入得到 $\frac{df}{dt}(t) = 0$. \square

推论 4.41 对于 Riemann 曲面 M , 点 $p \in M$, 存在开邻域 U , 任意 $q \in U$, 测地线是连接 p, q 之间最短的道路.

证明 这是一个局部问题, 通过 \exp^{-1} 转化到欧式空间的开集 U 上. 任意的曲线 s 连接 $p = 0, q \in U$. 考虑 s 切向量在 s 方向上的投影

$$s'_{\perp}(t) = \frac{g_0(s'(t), s(t))}{g_0(s(t), s(t))} s(t) = \frac{g_{s(t)}(s'(t), s(t))}{g_{s(t)}(s(t), s(t))} s(t)$$

根据 (4.40), 这既是 $\text{Tan}_{s(t)}$ 上的投影, 也是 Tan_0 的投影. 记 $|\ast|_p = \sqrt{g_p(\ast, \ast)}$, 计算知

$$\frac{d}{dt}|s(t)|_0 = \frac{d}{dt}\sqrt{g_0(s(t), s(t))} = \frac{g_0(s'(t), s(t))}{\sqrt{g_0(s(t), s(t))}}$$

于是

$$|s'_{\perp}(t)|_{s(t)} = |s'_{\perp}(t)|_0 = \frac{d}{dt}|s(t)|_0$$

这样

$$\begin{aligned} \text{length}(s) &= \int_I |s'(t)|_{s(t)} dt \geq \int_I |s'_{\perp}(t)|_{s(t)} dt \\ &= \int_I |s'_{\perp}(t)|_0 dt = \int_I \frac{d}{dt}|s(t)|_0 dt \\ &= |q|_0 \end{aligned}$$

而 $|q|_0$ 就是连接 $0, q$ 的测地线的长度. □

尽管在局部上测地线是最短的线, 但是整体上则有可能不是, 例如球面上的测地线就是大圆 (见习题9), 在一个大圆上任意选择两个点, 连接两者较大的弧虽然是测地线但是距离反而是最远的.

4.4 曲率与 Gauss-Bonnet 公式 (未完成)

I. Riemann 曲率 下面我们来建立曲率的理论.

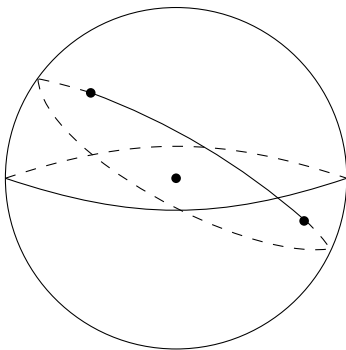


图 4.5: 球面的测地线

定义 4.42 (Riemann 曲率) 对于 Riemann 流形 M , 向量场 $X, Y, Z, W \in \text{Vec}(M)$, 记 **Riemann 曲率算子**

$$\text{Vec}(M) \ni R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

以及 **Riemann 曲率张量**

$$\mathcal{C}^\infty(M) \ni R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

例 4.43 回顾 (4.26) 以及记号, 考虑 $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, 那么

$$\begin{aligned} \nabla_{X_\alpha}(\nabla_{X_\beta} X_\gamma) &= \nabla_{X_\alpha} \left(\sum_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\delta X_\delta \right) \\ &= \sum_\delta \left(X_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\delta \right) X_\delta + \sum_{\delta, \xi} \Gamma_{\beta\gamma}^\delta \Gamma_{\alpha\delta}^\xi X_\xi \\ &= \sum_\xi \left(X_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\xi + \sum_\eta \Gamma_{\beta\gamma}^\eta \Gamma_{\alpha\eta}^\xi \right) X_\xi \end{aligned}$$

从而

$$R(X_\alpha, X_\beta)X_\gamma = \sum_\xi \left(X_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\xi - X_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi + \sum_\eta \left(\Gamma_{\beta\gamma}^\eta \Gamma_{\alpha\eta}^\xi - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\beta\eta}^\xi \right) \right) X_\xi$$

这样假如 $g(X_\alpha, X_\beta) = g_{\alpha\beta}$, 那么

$$R(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta) = \sum_\xi g(X_\xi, X_\delta) \left(X_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\xi - X_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi + \sum_\eta \left(\Gamma_{\beta\gamma}^\eta \Gamma_{\alpha\eta}^\xi - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\beta\eta}^\xi \right) \right)$$

回忆经典的 *Riemann* 记号 (2.16), 故

$$R(X_\gamma, X_\beta, X_\alpha, X_\delta) = R_{\delta\alpha\beta\gamma}$$

定理 4.44 对于 *Riemann* 流形 M , 向量场 $X, Y, Z, W \in \text{Vec}(M)$, 上述 (4.42) 定义的 *Riemann* 曲率张量 $R(W, X, Y, Z)$ 关于 X, Y, Z, W 都是 \mathcal{C}^∞ -线性的, 且有如下恒等式

- $R(W, X, Y, Z) = -R(X, W, Y, Z)$.
- $R(W, Z, Y, Z) = -R(W, X, Z, Y)$.
- $R(W, X, Y, Z) = R(Y, Z, W, X)$.
- $R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) = 0$. **Bianchi 恒等式**

证明 我们只要验证 $R(X, Y)Z$ 对各自是线性的, 先证明关于 Z 线性,

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= \nabla_X(\nabla_Y fZ) - \nabla_Y(\nabla_X fZ) - \nabla_{[X, Y]}fZ && \because \text{定义} \\ &= \nabla_X[f(\nabla_Y Z)] - \nabla_Y[f(\nabla_X Z)] - f\nabla_{[X, Y]}Z \\ &\quad + \nabla_X((Yf)Z) - \nabla_Y((Xf)Z) - ([X, Y]f)Z && \because \text{定义} \\ &= f\nabla_X(\nabla_Y Z) - f\nabla_Y(\nabla_X Z) - f\nabla_{[X, Y]}Z \\ &\quad + (Xf)\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z \\ &\quad + (Yf)\nabla_X Z - (Xf)\nabla_Y Z \\ &\quad + [X(Yf)]Z - [Y(Xf)]Z - ([X, Y]f)Z && \because \text{定义} \\ &= fR(X, Y)Z \end{aligned}$$

回忆在 (4.17) 证明的 $[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]$, 那么

$$\begin{aligned} R(X, fY)Z &= \nabla_X(\nabla_{fY} Z) - \nabla_{fY}(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, fY]}Z && \because \text{定义} \\ &= \nabla_X(f\nabla_Y Z) - f\nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{f[X, Y] + (Xf)Y}Z \\ &= Xf\nabla_X(\nabla_Y Z) + f\nabla_X(\nabla_Y Z) - f\nabla_Y(\nabla_X Z) \\ &\quad - f\nabla_{[X, Y]}Z - (Xf)\nabla_Y Z && \because \text{定义} \\ &= fR(X, Y)Z \end{aligned}$$

类似可得关于 X 线性. 第一个恒等式直接根据定义. 对于第二条, 只需要验证 $R(W, X, Y, Y) = 0$, 然后展开 $R(W, X, Y + Z, Y + Z)$ 即可. 先做一些计算

$$\begin{aligned} WXg(Y, Y) &= 2Wg(\nabla_X Y, Y) = 2g(\nabla_W(\nabla_X), Y) + 2g(\nabla_X Y, \nabla_W Y) \\ XWg(X, Y) &= 2Xg(\nabla_W Y, Y) = 2g(\nabla_X(\nabla_W), Y) + 2g(\nabla_W Y, \nabla_X Y) \\ [W, X]g(Y, Y) &= 2g(\nabla_{[W, X]} Y, Y) \end{aligned}$$

第一式减去后两式得到

$$\begin{aligned} 0 &= 2g(\nabla_W(\nabla_X), Y) - 2g(\nabla_X(\nabla_W), Y) - 2g(\nabla_{[W, X]} Y, Y) \\ &= 2g(\nabla_W(\nabla_X) - \nabla_X(\nabla_W) - \nabla_{[W, X]} Y, Y) \\ &= 2R(W, X, Y, Y) \end{aligned}$$

得证. 下面我们来证明最后一个恒等式, 实际上只需要验证

$$R(W, X)Y + R(X, Y)W + R(Y, W)X = 0$$

下面开始计算

$$\begin{aligned} &R(W, X)Y + R(X, Y)W + R(Y, W)X \\ &= \nabla_W(\nabla_X Y) - \nabla_X(\nabla_W Y) - \nabla_{[W, X]} Y \\ &\quad + \nabla_X(\nabla_Y W) - \nabla_Y(\nabla_X W) - \nabla_{[X, Y]} W \\ &\quad + \nabla_Y(\nabla_W X) - \nabla_W(\nabla_Y X) - \nabla_{[Y, W]} X \\ &= \nabla_W(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[W, X]} Y \\ &\quad + \nabla_X(\nabla_Y W - \nabla_W Y) - \nabla_{[X, Y]} W \\ &\quad + \nabla_Y(\nabla_W X - \nabla_X W) - \nabla_{[Y, W]} X \\ &= \nabla_W[X, Y] - \nabla_{[X, Y]} W + \nabla_X[Y, W] - \nabla_{[Y, W]} X + \nabla_Y[W, X] - \nabla_{[W, X]} Y \\ &= [W, [X, Y]] + [X, [Y, W]] + [Y, [W, X]] = 0 \end{aligned}$$

再将最后一个恒等式写四遍, 利用前两个恒等式

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{R(W, X, Y, Z)}_{\heartsuit} + \underbrace{R(X, Y, W, Z)}_{\diamond} + \underbrace{R(Y, W, X, Z)}_{\square} = 0 \\ \underbrace{R(X, Y, Z, W)}_{-\diamond} + \underbrace{R(Y, Z, X, W)}_{\triangle} + \underbrace{R(Z, X, Y, W)}_{\dagger} = 0 \\ \underbrace{R(Y, Z, W, X)}_{-\triangle} + \underbrace{R(Z, W, Y, X)}_{\ddagger} + \underbrace{R(W, Y, Z, X)}_{\square} = 0 \\ \underbrace{R(Z, W, X, Y)}_{-\ddagger} + \underbrace{R(W, X, Z, Y)}_{-\heartsuit} + \underbrace{R(X, Z, W, Y)}_{\dagger} = 0 \end{array} \right.$$

故

$$R(Y, W, X, Z) + R(X, Z, Y, W) = 0$$

这就证明了第三个恒等式. □

定义 4.45 Riemann 流形 M , 点 $p \in M$, 对于二维子空间 $\Pi \subseteq \text{Tan}_p$, 对 Π 的一组基 $\{X, Y\}$, 定义 **截面 (sectional) 曲率**

$$K(\Pi) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

不难验证 (见习题26) 这和基的选取是无关的.

例 4.46 根据 (4.43), 以及 Gauss 绝妙定理 (2.18), 经典曲线唯一的截面曲率就是 Gauss 曲率.

定义 4.47 对于 Riemann 流形 M , 曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 不妨假设是弧长参数, 此时 $g(\dot{s}, \dot{s}) = 1$. 和 Frenet 标架 (2.5) 中一样, 定义 s 的 **测地曲率** 为

$$\kappa_s = \left| \frac{\nabla \dot{s}}{dt} \right| \quad |*| = \sqrt{g(*, *)}$$

更一般地, 任何 1 维嵌入子流形 $L \rightarrow M$ 通过选取局部坐标卡在局部上成为曲线, 这样也可以定义 $\kappa_L \in \mathcal{C}^\infty(L)$.

II. Gauss-Bonnet 公式 下面我们介绍大名鼎鼎的 Gauss-Bonnet 公式. 为了能在 Riemann 曲面上计算微积分, 我们还需要定义一些更多的东西. 下面, 我们将目光放在 2 维 Riemann 流形上.

定义 4.48 (弧长微元与面积微元) 对于 1 维可定向 Riemann 流形 L , 选取相容坐标卡 $(U, \varphi = t)$, $T = \frac{\partial}{\partial t}$ 定义 **弧长微元** 为

$$ds = \sqrt{g(T, T)} dt$$

对于 2 维可定向 Riemann 流形 M , 选取相容坐标卡 $(U, \varphi = (x, y))$, 记 $X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = \frac{\partial}{\partial y}$, 定义 **面积微元** 为

$$dA = \sqrt{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} dx \wedge dy$$

不难验证上述两个微分形式在相容坐标卡上定义的结果是相同的, 故 $ds \in \text{Diff}(L), dA \in \text{Diff}^2(M)$.

定理 4.49 (Gauss-Bonnet 公式) 对于 2 维 Riemann 流形, 假设 $K \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 是唯一的截面曲率, D 是一个紧致单连通带边区域, $\kappa \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$ 是 ∂D 的符号测地曲率, 其绝对值等于测地曲率, 但当 ∂D 靠近 D 时取正, 反之取负, 那么

$$\int_D K dA + \int_{\partial D} \kappa ds = 2\pi$$

证明 通过选坐标卡, Schmit 正交化, 适当地旋转, 利用紧致性, 存在 D 的某个开集 U 上的正交标架 $X, Y \in \text{Vec}(U)$, 在每一点

$$g(X, X) = g(Y, Y) = 1 \quad g(X, Y) = 0$$

假设在局部上 X, Y 的对偶基为 dx, dy , 不妨假设 $dx \wedge dy$ 与定向相容. 因为

$$\begin{aligned} g(Y, Y) = 1 &\Rightarrow g(\nabla_{\partial} Y, Y) = 0 \\ g(X, Y) = 0 &\Rightarrow g(\nabla_{\partial} Y, X) = -g(Y, \nabla_{\partial} X) \end{aligned}$$

可以假设有 $\omega \in \text{Diff}^1(U)$, 使得

$$\nabla X = \omega \otimes Y \quad \nabla Y = -\omega \otimes X$$

这样在每个点 p , 选取对偶基 $dx|_p, dy|_p$, 这样得到局部坐标 (x, y) , 那么在 p 点, 因为 $g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y) = 1$, 故

$$\begin{aligned} KdA &= R(X, Y, Y, X)dx \wedge dy && \because \text{定义} \\ &= g(\nabla_X(\nabla_Y Y) - \nabla_Y(\nabla_X Y) - \nabla_{[X, Y]}Y, X)dx \wedge dy \\ &= g\left(\nabla_X(-(\omega(Y)X) - \nabla_Y(-\omega(X)X) + \omega([X, Y])X, X)\right)dx \wedge dy \\ &= (-X(\omega(Y)) + Y(\omega(X)) + \omega([X, Y]))dx \wedge dy \\ &= -d\omega(X, Y)dx \wedge dy && \because \begin{cases} X(\omega(Y)) = L_X(\omega(Y)) \\ \text{Cantan 魔术公式(3.87)} \end{cases} \\ &= -d\omega \end{aligned}$$

实际上就是使用了习题18. 如果对 ∂D 选取弧长参数 t , 假设 $s: I \rightarrow \partial D$ 是对应的边界, 那么 $\kappa ds = \pm \left| \frac{\nabla \dot{s}}{dt} \right| ds = \pm |\nabla_{\dot{s}} \dot{s}| ds$. 为了计算, 假设 $\dot{s} = \cos \theta X + \sin \theta Y$, 且使得 $-\sin \theta X + \cos \theta Y$ 向 D 内部, 其中 θ 定义在 ∂D 任意极大一个单连通区域上, 例如 $\partial D \setminus \{p\}$, 其中 $p \in \partial D$,

$$\begin{aligned} \nabla \dot{s} &= d(\cos \theta) \otimes X + d(\sin \theta) \otimes Y + \cos \theta \omega \otimes Y - \sin \theta \omega \otimes X \\ &= -\sin \theta (d\theta + \omega) \otimes X + \cos \theta (d\theta + \omega) \otimes Y \end{aligned}$$

这就说明

$$\kappa ds = (d\theta + \omega)(\dot{s})ds = d\theta + \omega$$

因为

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} d\theta &= \int_{\partial D \setminus \{p\}} d\theta = 2\pi \\ \int_D KdA &= - \int_D d\omega \\ \int_{\partial D} \kappa ds &= \int_{\partial D} \omega + \int_{\partial D} d\theta \end{aligned}$$

故根据 Stokes 公式 (3.98),

$$\int_D K dA + \int_{\partial D} \kappa ds = 2\pi$$

命题得证. □

实际上 Gauss-Bonnet 公式可以看做是“多边形外角和”是 2π 的推广, 注意到其实角度的变化率就是上述定理的 κ . 当然, 如果允许 ∂D 分段光滑, 自然还需要补充上分段产生的“折角”.

$$\int_D K dA + \int_{\partial D} \kappa ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$$

这则需要更多概念 (而不是新的证明), 相信读者已经能够理解.

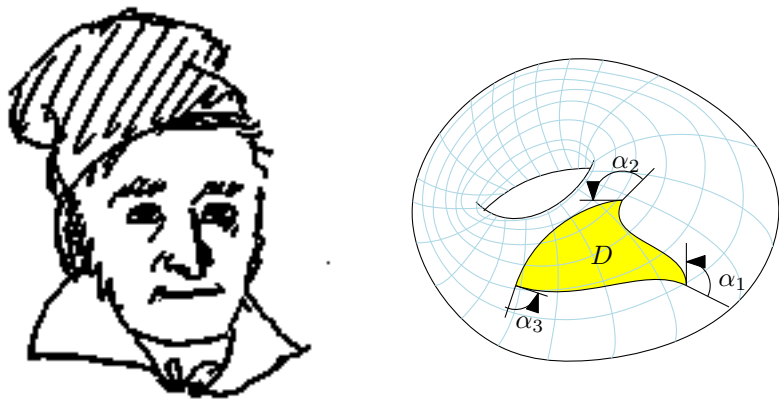


图 4.6: Gauss-Bonnet 公式与 Gauss 的微笑

(有关同调的内容将和代数拓扑部分一同完成)

记号表

记号	解释	位置
$(\text{Tan} \otimes \text{Tan})_p$	p 点的一个张量空间	(4.1)
$(\text{Tan} \otimes \text{Tan})(\mathbb{M})$	\mathbb{M} 的一个张量从	(4.1)
$(\text{Vec} \otimes \text{Vec})(S)$	一个 S 上的张量场	(4.1)
$(\text{Tan}^{\otimes r} \otimes \text{Cot}^{\otimes s})_p$	p 点的一个张量空间	(4.1)
$(\text{Tan}^{\otimes r} \otimes \text{Cot}^{\otimes s})(\mathbb{M})$	\mathbb{M} 的一个张量从	(4.1)
$(\text{Vec}^{\otimes r} \otimes \text{Diff}^{\otimes s})$	一个 S 上的张量场	(4.1)
$X \otimes Y$	两个切向量场的张量	(4.1)
$\langle \omega, X \rangle$	切向量场和 1 形式的配合	(4.1)
g	Riemann 度量	(4.2)
$g(\partial, \partial)$	Riemann 度量在切向量上的作用	(4.2)
$g(X, Y)$	Riemann 度量在切向量场上的作用	(4.2)
$\text{length}(s)$	曲线 s 的长度	(4.6)
∇	联络	(4.13)
∇_X	联络	(4.13)
\mathbf{N}_p	法空间	(4.19)
$\mathbf{N}_p(M)$	法空间	(4.19)
$\mathbf{N}(M)$	法从	(4.19)
$\text{Vec}^\perp(S)$	S 上的法向量场	(4.19)
∂^\top	切向量在切空间的投影	(4.19)
∂^\perp	切向量在法空间的投影	(4.19)
$\nabla_X Y$	联络	(4.22)

$$B(X, Y) \quad \text{第二基本形式} \quad (4.24)$$

$$\text{Vec}(s; M) \quad \text{曲线 } s \text{ 上的切向量场} \quad (4.27)$$

$$\nabla_X Y \quad \text{联络} \quad (4.29)$$

$$\frac{\nabla}{dt} \quad \text{协变导数} \quad (4.30)$$

$$\exp \quad \text{指数映射} \quad (4.37)$$

$$R(X, Y)Z \quad \text{Riemann 曲率算子} \quad (4.42)$$

$$R(X, Y, Z, W) \quad \text{Riemann 曲率张量} \quad (4.42)$$

$$K(\Pi) \quad \text{截面曲率} \quad (4.45)$$

$$\kappa_s \quad \text{曲线 } s \text{ 的测地曲率} \quad (4.47)$$

$$\kappa_L \quad \text{一维子流形 } L \text{ 的测地曲率} \quad (4.47)$$

$$ds \quad \text{弧长微元} \quad (4.48)$$

$$dA \quad \text{面积微元} \quad (4.48)$$

习题

习题 22 (Christoffel 符号) 回忆 (4.26) 中对自然标架的计算, 我们自然地想到可以给 *Riemann* 流形都配上 *Christoffel* 符号. 在 *Riemann* 流形上选取局部坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, 记 $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, 定义 *Christoffel* 符号为

$$\nabla_{X_\alpha} X_\beta = \sum_{\gamma=1}^n \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$$

再记

$$g(X_\alpha, X_\beta) = g_{\alpha\beta} \quad g^{\gamma\delta} \text{ 是 } g_{\alpha\beta} \text{ 的逆矩阵}$$

求证:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{\delta=1}^n g(\nabla_{X_\alpha} X_\beta, X_\delta) g^{\delta\gamma}$$

以及 *Gauss* 公式

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\delta=1}^n g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right)$$

习题 23 (协变导数) 记号承上, 再证明, 对于曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 之后的协变导数 (4.30), 对于

$$X(t) = \sum_{\alpha=1}^n f^\alpha(t) (X_\alpha)_{s(t)}$$

协变导数是

$$\frac{\nabla X}{dt} = \sum_{\gamma} \left(\frac{df^\gamma}{dt} + \sum_{\alpha, \beta} f^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\beta}{dt} \right) X_\gamma$$

其中 u^β 是 s 的 β 分量. 实际上这给出了协变导数的表达式, 但是此时不要求 s 是嵌入, 因此这种定义更广泛.

再证明测地线满足的方程是

$$\frac{d^2 u^\gamma}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} = 0$$

习题 24 (平行移动) 考虑 *Riemann* 流形 M , 考虑曲线 $I \xrightarrow{s} M$, 其中 I 是一个开区间, s 是嵌入, 对于 $X \in \text{Vec}(s; M)$, 如果

$$\frac{\nabla X}{dt} = 0$$

则称 X 关于 s **Levi-Civita 平行**, 简称 **平行 (parallel)**. 证明: 对于平行的 X , X 的长度 (即 $\sqrt{g(X, X)}$) 不变, 对于两个平行的 X, Y , 在每一点夹角不变. (提示: 因为 $\frac{dg(X, Y)}{dt} = 0$. 故 $g(X, Y)$ 在 t 上是常数.)

习题 25 我们会发现指数映射有些类似 (3.69) 的概念. 我们可以把一个点朝某个切向量的方向“推出去”, 在流形中我们选择是积分曲线, 在欧氏空间则可以选择测地线. 而这有无关系呢? 对于 *Riemann* 流形 M , 考虑切从 $\text{Tan}M$, 如果 M 有坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, 那么考虑 $\text{Tan}M$ 的局部 $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$, 定义向量场

$$G = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \sum_{i,j,k} v^i v^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial v^k} \in \text{Vec}(\text{Tan}M)$$

证明: G 的积分曲线投影到 M 上就是测地线. (提示: 对应的方程是

$$\frac{dx^h}{dt} = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial x^h}{\partial x^k} \quad \frac{dv^h}{dt} = - \sum_{i,j,k} v^i v^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial v^h}{\partial v^k}$$

即

$$\frac{dx^h}{dt} = v^h \quad \frac{dv^h}{dt} = - \sum_{i,j} v^i v^j \Gamma_{ij}^k$$

这当然解出测地线.)

习题 26 证明 (4.45) 的不难验证. (提示: 我们验证初等变换不改变 K , 数乘和交换是容易的, 而假设 $Z = Y + \lambda X$, 那么

$$\begin{aligned} R(X, Z, Z, X) &= R(X, Y + \lambda X, Y + \lambda X, X) \quad \because \text{定义} \\ &= R(X, Y, Y, X) \quad \because R(X, X, *, *) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g(X, X)g(Z, Z) - g(X, Z)^2 \\
&= g(X, X)g(Y + \lambda X, Y + \lambda X) - g(X, Y + \lambda X)^2 \\
&= g(X, X)g(Y, Y) + 2\lambda g(X, X)g(X, Y) + \lambda^2 g(X, X)^2 \\
&\quad - g(X, Y)^2 - 2\lambda g(X, Y)g(X, X) - \lambda^2 g(X, X)^2 \\
&= g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2
\end{aligned}$$

故 $K(\Pi)$ 与基的选择无关.)

问题 27 对于 Riemann 流形 M , 嵌入子流形 $N \rightarrow M$, 假设 $\nabla, \hat{\nabla}, B$ 是 M, N 的 Riemann 联络, 和 N 的第二基本形式, 证明如下的 **Weingarten 方程**, 对于 $X, Y \in \text{Vec}(N), N \in \text{Vec}^\perp(N)$,

$$g(\nabla_X N, Y) = -g(N, B(X, Y))$$

对于点 $p \in N, X, Y, Z, W \in \text{Tan}_p N$, 假设 R_N, R_M 分别是 N, M 上的 Riemann 曲率张量, 那么有 **Gauss 方程**

$$R_N(X, Y, Z, W) - R_M(X, Y, Z, W) = g(B(Y, Z), B(X, W)) - g(B(X, Z), B(Y, W))$$

(提示: 第一条注意到

$$\begin{aligned}
0 &= Xg(N, Y) \\
&= g(\nabla_X N, Y) + g(N, \nabla_X Y) \\
&= g(\nabla_X N, Y) + g(N, B(X, Y)) \quad \because \nabla_X Y \perp N
\end{aligned}$$

第二条注意到

$$\begin{aligned}
R_N(X, Y, Z, W) &= g\left((\nabla_Y(\nabla_X Z)^\top)^\top - (\nabla_X(\nabla_Y Z)^\top)^\top - (\nabla_{[X, Y]} Z)^\top, W\right) \\
&= g\left(\nabla_Y(\nabla_X Z)^\top - \nabla_X(\nabla_Y Z)^\top - \nabla_{[X, Y]} Z, W\right) \\
&= g\left(\nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{[X, Y]} Z, W\right) \\
&\quad + g\left(\nabla_Y(B(X, Z)), W\right) - g\left(\nabla_X(B(Y, Z)), W\right) \\
&= R_M(X, Y, Z, W) - g(B(X, Z), B(Y, W)) + g(B(Y, Z), B(X, W))
\end{aligned}$$

命题得证.)

问题 28 正如 d 可以作用到各个微分形式上一眼, 如果流形 M 上有联络 ∇ , 加上 $X \in \text{Vec}(M)$, 也可作用在各个向量场上使之满足

- $\forall f \in \text{Vec}^{\otimes 0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M), \nabla_X f = df.$
- $\forall Y \in \text{Vec}(M), \nabla_X Y$ 不变.
- $\forall Y \in \text{Vec}^{\otimes a}(M), Z \in \text{Vec}^{\otimes b}(M), \nabla_X(Y \otimes Z) = \nabla_X Y \otimes Z + Y \otimes \nabla_X Z.$
- $\forall Y \in \text{Vec}^{\otimes r}(M), \omega \in \text{Diff}^r(M), \nabla(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(X) + \omega(\nabla_X Y).$
- $\forall Y \in \text{Vec}^{\otimes r}(M), \omega \in \text{Diff}^{\otimes r}(M), \nabla \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, X \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle.$
- 以此类推.

证明: 对于 Riemann 流形 M , $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \iff \nabla g = 0$. (提示: 因为

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= \nabla_X g(Y, Z) \\ &= (\nabla g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

得证.)

第五章 Lie 群

5.1 Lie 群及其基本语言

I. Lie 群 所谓 Lie 群就是具有微分结构的群. 如果将离散和连续 (光滑) 作为数学研究的两个世界, 那么 Lie 群就对应着离散群. 离散群如果用以描述离散对象的对称性, 那么 Lie 群就用以描述连续 (光滑) 对象的对称性.

定义 5.1 (Lie 群) 一个 Lie 群 G 是一个光滑流形同时是一个群, 使得

$$\left[\begin{array}{ccc} \mu: & G \times G & \longrightarrow G \\ & (x, y) & \longmapsto xy \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc} \nu: & G & \longrightarrow G \\ & x & \longmapsto x^{-1} \end{array} \right]$$

是光滑映射. 其中 $G \times G$ 的微分结构在 (3.7) 已经交待.

定义 5.2 对于 Lie 群 G , 对于 $x \in G$, 定义 **左平移作用** 和 **右平移作用**

$$\left[\begin{array}{ccc} \ell_x: & G & \longrightarrow G \\ & y & \longmapsto xy \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc} r_x: & G & \longrightarrow G \\ & y & \longmapsto yx \end{array} \right]$$

方便起见, 有时也会记 $\ell_x = x \cdot$, $r_x = \cdot x$. 显然, ℓ_x, r_x 都是微分同胚.

再定义 **伴随 (adjoint) 作用**

$$\text{Ad}_x: G \longrightarrow G \quad y \longmapsto xyx^{-1}$$

即 $\text{Ad}_x = \ell_x \circ r_{x^{-1}} = r_{x^{-1}} \circ \ell_x$. 显然, 伴随作用也是微分同胚.

例 5.3 欧式空间 \mathbb{R}^n 关于加法构成一个 Lie 群.

例 5.4 非零实数 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 关于乘法构成一个 Lie 群. 类似地, 正实数 $\mathbb{R}_{>0}$ 关于乘法构成一个 Lie 群.

例 5.5 单位圆周 \mathbb{S}^1 , 如果将其视作 \mathbb{C} 的子集, 那么关于复数的乘法构成一个 Lie 群. 其 n 重直积 n 维 **轮胎面** $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_n$ 自然地也成为

一个 Lie 群.

例 5.6 (一般线性群) 实一般线性群

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \text{ 上的 } n \text{ 阶可逆方阵}\} \subseteq_{\#} \mathbb{R}^{n^2}$$

关于矩阵乘法构成一个 Lie 群, 其微分结构已在 (3.7) 已经交待.

复一般线性群

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C} \text{ 上的 } n \text{ 阶可逆方阵}\} \subseteq_{\#} \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$$

关于矩阵乘法构成一个 Lie 群.

例 5.7 (特殊线性群) 实特殊线性群

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

关于矩阵乘法构成一个 Lie 群, 其微分结构根据 (3.56) 决定, 其维数为 \mathbb{R}^{n^2-1} .

具体来说, 注意到假如选取 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的坐标卡为 矩阵 $(a_{ij}) \mapsto$ 数串 $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, 那么直接根据行列式的定义计算知 $\frac{\partial \det}{\partial a_{kh}}(A) = \pm \det A_{kh}$. 其中 A_{kh} 是 A 删去 k 行 h 列得到的矩阵. 不难发现, 数串 $\left(\frac{\partial \det}{\partial a_{kh}}\right)$ 在 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 上恒不为 0, 故是常秩的.

类似地, **复特殊线性群**

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \det A = 1\}$$

关于矩阵乘法构成一个 Lie 群, 其维数为 \mathbb{R}^{2n^2-2} .

之后我们会看到正交群等一般线性群的子群也是 Lie 群.

定理 5.8 对于 Lie 群 G , 乘法 $\mu: G \times G \rightarrow G$ 在 $(1, 1)$ 处的切映射

$$d\mu|_{(1,1)}: \text{Tan}_1 G \times \text{Tan}_1 G \longrightarrow \text{Tan}_1 G \quad (\partial, \bar{\partial}) \longmapsto \partial + \bar{\partial}$$

逆映射 $\nu: G \rightarrow G$ 在 $(1, 1)$ 处的切映射

$$d\nu: \text{Tan}_1 G \longrightarrow \text{Tan}_1 G \quad \partial \longmapsto -\partial$$

证明 取光滑函数 $f|_1 \in \mathcal{C}_1^\infty$, 这样

$$\begin{aligned} d\mu(\partial, \bar{\partial})f &= (\partial, \bar{\partial})f \circ \mu && \because \text{定义} \\ &= \partial[f(* \cdot y)]|_{y=1} + \bar{\partial}[f(x \cdot *)]|_{x=1} && \because \text{Tan}_{(1,1)} G \times G \cong \text{Tan}_1 G \times \text{Tan}_1 G \\ &= \partial f + \bar{\partial} f && \because \text{只对一个分量求导} \end{aligned}$$

故 $d\mu(\partial, \bar{\partial}) = \partial + \bar{\partial}$. 而后者是因为 $\mu \circ (\nu \times \text{id}) = \text{常函数} 1$, 故 $\bar{\partial} + d\nu(\bar{\partial}) = 0$, 即 $d\nu(\partial) = -\partial$. □

II. 群同态, 子群 下面我们补充完整关于群的更多术语.

定义 5.9 (群同态) 对于 Lie 群 G, H , 一个映射 $\varphi: G \rightarrow H$ 被称为是 **Lie 群同态**, 如果 φ 是光滑的群同态.

定义 5.10 (子群) 对于 Lie 群 G , 如果 H 是 G 的子群, 且 H 可以被赋予微分结构使得包含映射是子流形 $H \xrightarrow{\subseteq} G$, 那么称 H 是 **Lie 子群**. 如果包含映射是嵌入, 那么称 H 为 **闭 Lie 子群**.

例 5.11 在 (3.51) 定义的是轮胎面 \mathbb{T}^2 上的 Lie 子群, 但不是闭 Lie 子群.

例 5.12 显然, $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ 是 $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ 的 Lie 子群, $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ 是 $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ 的 Lie 子群.

命题 5.13 对于 Lie 群 G , 闭 Lie 子群 H 是闭集.

证明 因为是嵌入, 所以“局部是闭集”, 而 H 局部性质都是相同的, 故 H 是闭集. 具体来说, 根据 (3.52), 存在 1 附近的邻域 $U \subseteq_{\text{开}} G$ 以及局部坐标使得 H 的局部坐标就是前 m 位, 那么, $H \cap U$ 是 U 中闭集, 即

$$U \cap H = U \cap \overline{H}$$

下面证明 H 是闭集, 任意取 $y \in \overline{H}$, 那么根据定义 $yU \cap H \neq \emptyset$, 假设 $yu = h$ 其中 $u \in U, h \in H$, 这样 $u = y^{-1}h \in U \cap \overline{H} = U \cap H$, 这样就迫使 $y^{-1} = uh^{-1} \in H$, 故 $y \in H$. \square

实际上反过来, 任何闭的子群都是 Lie 子群, 参见 [20] P110, §3.42.

命题 5.14 对于 Lie 群 G , 则单位元 1 的连通分支是 G 的正规子群, 此时 G/G_0 具有离散拓扑.

证明 记 1 的连通分支为 G_0 . 首先, 先证明 G_0 是子群. 对于 $a, b \in G_0$, 则存在连通集 A, B 使得 $1, a \in A, 1, b \in B$, 因为左平移作用是微分同胚 aB 还是连通的, 故 $A \cup aB$ 是含 $1, ab$ 的连通集. 再证明 G_0 是正规的, 假设 $a \in G_0, x \in G$, 假设连通集 $A \ni 1, a$, 那么因为伴随作用是微分同胚 xAx^{-1} 还是连通的, 这样 xAx^{-1} 是含 $1, xax^{-1}$ 的连通集. 为了看到离散, 这是因为对于流形来说, 因为局部是连通的, 这说明 G_0 是开集, 从而 G/G_0 是离散的. \square

换言之, 我们之后就可以把目光转移到连通 Lie 群上.

命题 5.15 对于连通 Lie 群 G , U 是单位元 1 的邻域, 那么 U 生成了 G .

证明 不妨假设 U 是开集. 令 H 是 U 生成的子群. 则

$$H = \bigcup_{n=0}^{\infty} U^n \quad U^n = \underbrace{U \cdot \dots \cdot U}_n$$

故 H 是一些 xU 的并, 因为左平移作用是同胚 xU 都是开集, 故 H 是开集. 同理 H 的各个陪集都是开集, 但是根据连通性, 这样的陪集只能有一个, 故 $H = G$. \square

命题 5.16 对于 *Lie* 群 G , 如果闭 *Lie* 子群 K 是正规的, 那么 G/K 具有自然的微分结构使之成为 $\dim G - \dim K$ 维 *Lie* 群.

证明 记自然同态 $\pi: G \rightarrow G/K$, $n = \dim G, k = \dim K$. 选取 1 附近的坐标卡, 使得前 k 位成为 K 的坐标卡, 可以找到嵌入子流形 $M \subseteq G$ 使得 $\text{Tan}_1 G = \text{Tan}_1 K \oplus \text{Tan}_1 M$. 再找 M 足够小的 1 的邻域 $U \subseteq M$ 使得乘法映射

$$\mu: U \times K \longrightarrow G \quad (u, k) \longmapsto uk$$

是开的嵌入. 此时 $\pi(U)$ 是开集, 因为 $\pi^{-1}(\pi(U)) = UK$ 是开集, 且此时 $\pi: U \rightarrow \pi(U)$ 是同胚, 故 U 的坐标卡给出了 G/K 单位元处的坐标卡. 然后通过平移作用可以覆盖整个 G/K .

- 使得 G/K 成为微分流形.

为了验证相容性, 根据上面的构造, 只需要选取 K 的某个坐标卡, 将其和 G/K 的坐标卡相乘得到 G 的坐标卡, 回到 G 上验证.

- 从而 G/K 成为 *Lie* 群.

为了验证乘法和取逆的光滑性, 只需要根据 (3.47), 因为 π 是淹没, $G \times G \rightarrow G/K \times G/K$ 也是淹没.

下面开始论证可以取 U 使得 μ 是开的嵌入.

- 首先, 因为 $\mu(*, 1), \mu(1, *)$ 就是包含映射, 故 $d\mu|_{(1,1)}$ 就是 id , 根据反函数定理, 这说明存在含 1 的 $U' \subseteq_{\text{开}} M, V' \subseteq_{\text{开}} K$, 以及 $W' = U'V' \subseteq_{\text{开}} G$ 使得 $U' \times V' \rightarrow U'V'$ 是微分同胚.
- 下面再保证 μ 单射, 因为乘法和取逆连续, 存在含 1 的

$$U \subseteq_{\text{开}} M \quad V \subseteq_{\text{开}} K \quad W \subseteq_{\text{开}} G$$

使得

$$U \subseteq U' \cap W \quad W^{-1} \cdot W \subseteq U'V \quad V \subseteq (V')^{-1} \cap V'$$

根据 M 的构造有 $U'V \cap K \subseteq V$. 如果 $u_1, u_2 \in U, k_1, k_2 \in K$, 使得

$$\mu(u_1, k_1) = u_1 k_1 = u_2 k_2 = \mu(u_2, k_2)$$

那么 $k_2 k_1^{-1} = u_2^{-1} u_1 \in U^{-1} \cdot U \subseteq W^{-1} W \subseteq U'V$, 这样 $k_1 k_2^{-1} \in V$, 换言之

$$\mu(u_1, k_1 k_2^{-1}) = \mu(u_2, 1)$$

而 μ 在 $U \times V \subseteq U \times V$ 上是单的, 故 $u_1 = u_2, k_1 = k_2$, 从而单射得以满足.

此时 UV 仍然是开集, 显然, 这样 $UK = \bigcup_{x \in K} UVx$ 是开集. □

5.2 Lie 代数和指数映射

I. Lie 代数 我们会发现实际上 Lie 群各个点的性质实际上是一样的, 这诱使我们定义“齐性”的切向量场等概念, 这样可以得到 Lie 代数的概念.

定义 5.17 (不变切向量场) 对于 Lie 群 G , 切向量场 $X \in \text{Vec}(G)$, 如果

$$\forall x, p \in G, \quad d\ell_x|_p(X_p) = X_{\ell_x p}$$

换言之, $d\ell_x X = X$. 这样的 X 被称为 **左不变切向量场**. 类似地, 如果

$$\forall x, p \in G, \quad dr_x|_p(X_p) = X_{r_x p}$$

换言之, $dr_x X = X$. 这样的 X 被称为 **右不变切向量场**.

定理 5.18 对于 Lie 群 G , 全体左/右不变向量场都和 $\text{Tan}_1 G$ 同构, 其中 $1 \in G$ 是单位元. 具体来说

- 对于左不变向量场 $X \in \text{Vec}(G)$, 定义 1 处的切向量 $X_1 \in \text{Tan}_1 G$.
- 对于 $\partial \in \text{Tan}_1 G$, 定义左不变向量场 $[p \mapsto d\ell_p(\partial)]$.

右不变向量场是类似的.

证明 上述定义的根据定义当然是可逆的. 我们下面验证良定义性, 即 $[p \mapsto d\ell_p(\partial)]$ 是左不变向量场. 这是光滑的, 因为乘法 $[(x, y) \mapsto xy]$ 是光滑的, 具体来说, 选取坐标卡 $d\ell_p$ 的 Jacobi 矩阵关于 p 是光滑的. 而左不变是显然的. \square

引理 5.19 对于 Lie 群 G , 如果 $X, Y \in \text{Vec}(G)$ 都是左不变向量场, 则 $[X, Y]$ 也是左不变向量场.

证明 对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, 注意到

$$[(d\ell_x X)f \circ \ell_x](p) = (d\ell_x X)_{\ell_x p} f = X_p(f \circ \ell_x) = [X(f \circ \ell_x)](p)$$

从而 $(d\ell_x X)f \circ \ell_x = X(f \circ \ell_x)$.

$$\begin{aligned} ((d\ell_x|_p)[X, Y]_p)g &= [X, Y]_p(g \circ \ell_x) && \because \text{定义} \\ &= X_p(Y(g \circ \ell_x)) - Y_p(X(g \circ \ell_x)) && \because \text{定义} \\ [d\ell_x X, d\ell_x Y]_{\ell_x p} g &= (d\ell_x X)_{\ell_x p}((d\ell_x Y)g) - (d\ell_x Y)_{\ell_x p}((d\ell_x X)g) && \because \text{定义} \\ &= [(d\ell_x|_p)X_p]((d\ell_x Y)g) - [(d\ell_x|_p)Y_p]((d\ell_x X)g) && \because \text{定义} \\ &= X_p((d\ell_x Y)g \circ \ell_x) - Y_p((d\ell_x X)g \circ \ell_x) \end{aligned}$$

故 $(d\ell_x|_p)[X, Y]_p = [d\ell_x X, d\ell_x Y]_{\ell_x p}$, 是左不变向量场. 此即习题20. \square

定义 5.20 (Lie 代数) 对于 Lie 群 G , 记所有左不变向量场构成的线性空间为 \mathfrak{g} , 这被称为 G 的 **Lie 代数**.

根据 (5.18) 这是一个有限维线性空间, 其维数为 $\dim G$. 且其上有二元线性运算 **Lie 括号**

$$[\ast, \ast] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

显然, 根据 (3.64),

$$[X, X] = 0 \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

评注 5.21 (抽象 Lie 代数) 更为抽象地, 一个域 k 上的线性空间 \mathfrak{g} 如果配以一个二元线性运算 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 满足

$$[x, y] = -[y, x] \quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

则称 \mathfrak{g} 是一个域 k 上的 **Lie 代数**.

命题 5.22 假如 Lie 群 G, H 的 Lie 代数是 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, 对于 Lie 群同态 $\varphi: G \rightarrow H$, 则

$$d\varphi|_x = d\ell_{\varphi(x)}|_1 \circ d\varphi|_1 \circ d\ell_{x^{-1}}|_x$$

则 $d\varphi|_1: \text{Tan}_1 G \rightarrow \text{Tan}_1 H$ 诱导了 $d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, 这个记号是合理的, 因为

$$\forall p \in G, X \in \mathfrak{g}, [d\varphi(X)]_{\varphi(p)} = d\varphi|_p(X_p)$$

$d\varphi$ 是 Lie 代数同态, 即满足

$$[d\varphi X, d\varphi Y] = d\varphi[X, Y]$$

$d\varphi$ 被称为 φ 诱导的 **Lie 代数同态**.

证明 前者是因为

$$\ell_{\varphi(x)} \circ \varphi \circ \ell_{x^{-1}} = \ell_{\varphi(x)} \circ \varphi \circ \ell_{x^{-1}} = [y \mapsto \varphi(x)\varphi(x^{-1}y) = \varphi(y)] = \varphi$$

这样 $[d\varphi(X)]_{\varphi(p)} = d\varphi|_p(X_p)$ 根据 (5.18) 自动满足. 对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(H)$, 注意到

$$[(d\varphi X)f \circ \varphi](p) = (d\varphi X)_{\varphi(p)}f = X_p(f \circ \varphi) = [X(f \circ \varphi)](p)$$

从而 $(d\varphi X)f \circ \varphi = X(f \circ \varphi)$. 验证相等只需要在 1 处验证即可,

$$\begin{aligned} ((d\varphi|_1)[X, Y]_1)g &= [X, Y]_1(g \circ \varphi) && \because \text{定义} \\ &= X_1(Y(g \circ \varphi)) - Y_1(X(g \circ \varphi)) && \because \text{定义} \\ [d\varphi X, d\varphi Y]_1 g &= (d\varphi X)_1((d\varphi Y)g) - (d\varphi Y)_1((d\varphi X)g) && \because \text{定义} \\ &= X_1((d\varphi Y)g \circ \varphi) - Y_1((d\varphi X)g \circ \varphi) && \because \text{定义} \end{aligned}$$

即习题20. □

例 5.23 回顾一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (5.6), 我们来计算其对应的 Lie 代数. 首先, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 是 \mathbb{R}^{n^2} 的开集, 故任何一点的切空间自然是 \mathbb{R}^{n^2} . 为了看到平移作用, 选取坐标卡 矩阵 $(x_{ij}) \mapsto$ 数串 (x_{ij}) , 对于矩阵 $A = (a_{ij})$, 左平移作用对应的坐标下写出来是 $x_{kh} \circ \ell_A = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_{ih}$, 故 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial x_{kh}}{\partial x_{rs}} = \begin{cases} a_{kr} & h = s \\ 0 & h \neq s \end{cases}. \text{ 故}$$

$$d\ell_A : \sum_{r,s} b_{rs} \frac{\partial}{\partial x_{rs}} \mapsto \sum_{r,s,k,h} b_{rs} \frac{\partial x_{kh}}{\partial x_{rs}} \frac{\partial}{\partial x_{kh}} = \sum_{k,h} \left(\sum_{r=1}^n b_{rh} a_{kr} \right) \frac{\partial}{\partial x_{kh}}$$

在 (3.23) 的等同下, 即 $[B \mapsto AB]$, 换言之也是矩阵的左乘作用. 这样对于 $X \in \mathrm{Tan}_1$, 对应的左不变向量场就是 $[Y \mapsto YX \in \mathrm{Tan}_Y]$.

下面来计算 Lie 括号. 对于左不变向量场 A, B , 如果 $A_1 = (a_{ij}), B_1 = (b_{ij}) \in \mathrm{Tan}_1$, 在 $X = (x_{ij})$ 处分别对应着 XA_1, XB_1 , 故

$$A = \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n x_{ik} a_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \quad B = \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n x_{ik} b_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

这样

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= \sum_{r,s,h} x_{rh} a_{hs} \frac{\partial}{\partial x_{rs}} \left(\sum_{i,j,k} x_{ik} b_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right) && \because \text{定义} \\ &\quad - \sum_{i,j,k} x_{ik} b_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum_{r,s,h} x_{rh} a_{hs} \frac{\partial}{\partial x_{rs}} \right) && \because \text{定义} \\ &= \sum_{r,s,h,j} x_{rh} a_{hs} b_{sj} \frac{\partial}{\partial x_{rj}} - \sum_{i,j,k,s} x_{ik} b_{kj} a_{js} \frac{\partial}{\partial x_{is}} && \because \text{二次项一定抵消} \end{aligned}$$

在 (3.23) 的等同下, 在 $X = (x_{ij})$ 处正对应着 $X(AB - BA)$, 故 $[A, B]_1 = A_1 B_1 - B_1 A_1$.

记 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 为全体实 n 阶方阵, 并且带有 Lie 括号 $[A, B] = AB - BA$, 这被称为 **实一般线性 Lie 代数**. 上面的讨论说明 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的 Lie 代数.

类似地, 可以定义 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 为全体复 n 阶方阵, 并且带有 Lie 括号 $[A, B] = AB - BA$, 这被称为 **复一般线性 Lie 代数**. 类似的讨论说明 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的 Lie 代数.

II. 指数映射 我们可以定义类比 Riemann 流形定义指数映射, 把切空间“掰下来”. 如果 Riemann 曲面利用的是测地线, 那 Lie 群自然利用的是积分曲线. 回顾单参数变换群/流动 (3.69) 及其记号.

评注 5.24 注意到对于 Lie 群 G , 对应的 Lie 代数 \mathfrak{g} . $p \in G, X \in \mathfrak{g}, p+tX$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义, 因为如果 $p+tX$ 有定义, 那么 $\ell_{p+tX}(p+tX) = \ell_{p+tX}p + t\ell_{p+tX}X = p+tX+tX$ 也有定义, 更具体地说, 因为积分曲线的方程在左平移作用下是不变的. 这样积分曲线

$$s: \mathbb{R} \longrightarrow G \quad t \longmapsto 1+tX$$

实际上称为一个 Lie 群同态, 故被称为 X 生成的 **单参数变换群**. 反之, 任何一个 $\mathbb{R} \rightarrow G$ 的 Lie 同态当然也都是这样的一条积分曲线.

这类比的是离散群中一个元素生成的循环群的概念, 这里的 \mathbb{R} 就相当于群论里的 \mathbb{Z} .

定义 5.25 (指数映射) 对于 Lie 群 G , 对应的李代数 \mathfrak{g} , 可以定义

$$\exp: \mathfrak{g} \longrightarrow G \quad X \longmapsto 1+tX|_{t=1}$$

其中 $1 \in G$ 是 Lie 群的单位元. 这称为 **指数映射**.

命题 5.26 对于 Lie 群 G , 对应的李代数 \mathfrak{g} , 指数映射 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ 满足

- 对于 $X \in \mathfrak{g}$, $t \mapsto \exp(tX)$ 是 X 生成的单参数变换群.
- \exp 是光滑的.
- $d\exp|_0 = \mathrm{id}$.

这里通过 (3.23), 认为 $\mathrm{Tan}_0(\mathrm{Tan}_1(G)) = \mathrm{Tan}_1(G)$.

证明 这和 (4.38) 的证明如出一辙. 具体来说, 光滑是因为微分方程的光滑依赖性. 第二点只需构造

$$\widehat{\exp}: \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \longrightarrow G \quad (X, t) \longmapsto 1 + tX$$

然后注意到 $1 + t(sX) = 1 + (ts)X$, 即

$$\widehat{\exp}(X, xt) = \widehat{\exp}(xX, t) \quad (*)$$

为了看到 $d\exp|_0$, 选取 G 的坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, 以及 Tan_1 的坐标卡 $(\text{Tan}_1, \psi = (x_*^1, \dots, x_*^n))$, 使得 ψ 是线性的, 且

$$x_*^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (**)$$

这就是按照 (3.23) 所做的等同. 注意到,

$$\frac{\partial}{\partial t} x^i(\widehat{\exp}(X, t)) \Big|_{t=0} = X_1 x^i \quad (***)$$

故 Jacobi 矩阵, 根据 (3.29)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x^i \circ \exp)}{\partial x_*^j}(\psi(0)) &= \frac{\partial(x^i \circ \exp \circ \psi^{-1})}{\partial x_*^j}(0) && \because \text{定义} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} x^i \left(\widehat{\exp} \left(t \frac{\partial}{\partial x^j}, 1 \right) \right) \Big|_{t=0} && \because \text{带入 } (**) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} x^i \left(\widehat{\exp} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, t \right) \right) \Big|_{t=0} && \because \text{带入 } (*) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^j} && \because \text{前段 } (***) \end{aligned}$$

这里 $\frac{\partial}{\partial x^j}$ 是 $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_1$ 生成的左不变向量场, 这就说明 Jacobi 矩阵是单位阵, 从而 $d\exp|_0 = \text{id}$. □

命题 5.27 对于 Lie 群同态 $G \xrightarrow{\varphi} H$, 假如诱导了 Lie 代数的同态 $\mathfrak{g} \xrightarrow{d\varphi} \mathfrak{h}$, 那么

$$\exp \circ d\varphi = \varphi \circ \exp \quad \left| \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array} \right.$$

证明 对于 $X \in \mathfrak{g}$, 考虑曲线 $(\varphi \circ \exp)(tX)$, 注意到因为 φ 和左平移作用可以交换, 故这也是一条单参数变换群, 其在 1 处的切向量为 $d\varphi(X_1) = (d\varphi(X))_1$, 故这条曲线也是 $\exp(td\varphi(X)) = (\exp \circ \varphi)(tX)$, 命题得证. \square

命题 5.28 对于 Lie 群 G , 对应的李代数 \mathfrak{g} , $p \in G, X \in \mathfrak{g}$, 则

$$p + tX = p \exp(tX) = r_{\exp(tX)} p$$

对于 $Y \in \text{Vec}(G)$,

$$Y[+tX] = d r_{\exp(tX)} Y$$

证明 通过复合左平移作用 ℓ_p 即可, 后者就是定义 (3.72). \square

例 5.29 下面我们来计算一般线性群的指数映射. 我们已经在 (5.23) 计算过 $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ 的 Lie 代数是 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, 下面我们要来计算指数映射. 先计算流动, 对于 $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, 对应的左不变向量场是 $[B \mapsto BA \in \text{Tan}_B]$, 假如其生成单参数变换群 $\mathbb{R} \xrightarrow{s} \text{GL}_n(\mathbb{R})$, 还是选取坐标卡 矩阵 $(x_{ij}) \mapsto$ 数串 (x_{ij}) , 这样得到的方程就是

$$\frac{d(x_{ij} \circ s)}{dt}(t) = s(t)X \quad \text{i.e.} \quad \frac{dX}{dt} = sX$$

根据常微分方程的理论, 这样的微分方程的解是

$$s = ae^{tX} \quad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

加上 $s(0) = 1$ 的条件, 我们知道 $s = e^{tX}$. 故指数映射为 $X \mapsto e^X$. 这真的是一个指数映射.

指数映射建立起 Lie 代数和 Lie 群的桥梁.

III. 指数映射的交换性 一个直接的问题是指数映射是否是交换的, 即是否总有 $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y) = \exp(Y)\exp(X)$. 这在实数上这是正确的, 但在一般情况下 (例如矩阵) 是不正确的.

定理 5.30 对于 Lie 群 G , 对应的 Lie 代数 \mathfrak{g} , $X, Y \in \mathfrak{g}$, 则对于充分小的 t , 有

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + \mathcal{O}(t^3)\right)$$

证明 首先, 因为 $d\exp|_0 = \text{id}$, 故在充分小的 0 的邻域内, 可以定义 **对数映射** \log . 假如其 Taylor 展开是

$$\log(\exp(tX)\exp(tY)) = \mu_0(X, Y) + \mu_1(X, Y)t + \mu_2(X, Y)t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

带入 $t = 0$ 立刻得到 $\mu_0 = 0$, 其中 $\mu_1(X, Y), \mu_2(X, Y) \in \mathfrak{g}$. 对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ 考虑

$$\begin{aligned} H^i(t, s) &= f(\exp(tX)\exp(sY)) \\ &= f(\exp(tX) + sY) \\ &= f((1 + tX) + sY) \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^i}{\partial s}(t, s) &= Yf(\exp(tX) + sY) \\ \frac{\partial^2 H^i}{\partial s^2}(t, s) &= Y(Yf)(\exp(tX) + sY) \\ \frac{\partial^2 H^i}{\partial s \partial t}(t, 0) &= X(Yf)(1 + tX) \\ \frac{\partial H^i}{\partial t}(t, 0) &= Xf(1 + tX) \\ \frac{\partial^2 H^i}{\partial t^2}(t, 0) &= X(Xf)(1 + tX) \end{aligned}$$

从而根据 Taylor 定理,

$$\begin{aligned}
 & f(\exp(tX) \exp(sY)) \\
 = & f(0) + t \cdot (Xf)(1) + s \cdot (Yf)(1) \\
 & + \frac{1}{2} (t^2 \cdot (X(Xf))(1) + 2ts \cdot (X(Yf))(1) + s^2 \cdot (Y(Yf))(1)) \\
 & + \mathcal{O}((|t| + |s|)^3)
 \end{aligned}$$

注意到

$$\exp(tX) \exp(tX) = \exp \left(\mu_1(X, Y)t + \mu_2(X, Y)t^2 + \mathcal{O}(t^3) \right) \exp(0)$$

带入上面的公式进行两次计算

$$\begin{aligned}
 & f \left(\exp(tX) \exp(tX) \right) \\
 = & f(0) + t \cdot ((X + Y)f)(1) \\
 & + \frac{1}{2} t^2 \cdot ((XX + 2XY + YY)f)(1) + \mathcal{O}(t^3)
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 & f \left(\exp(\mu_1(X, Y)t + \mu_2(X, Y)t^2 + \mathcal{O}(t^3)) \right) \\
 = & f(0) + t \cdot \left((\mu_1(X, Y) + \mu_2(X, Y)t + \mathcal{O}(t^2))f \right)(1) \\
 & + \frac{1}{2} t^2 \cdot \left((\mu_1(X, Y) + \mu_2(X, Y)t + \mathcal{O}(t^2))^2 f \right)(1) \\
 & + \mathcal{O}(t^3) \\
 = & f(0) + t \cdot (\mu_1(X, Y)f)(1) \\
 & + \frac{1}{2} t^2 \cdot ((\mu_2(X, Y) + \mu_1(X, Y)^2)f)(1) + \mathcal{O}(t^3)
 \end{aligned}$$

相比之下, 因为 μ_1, μ_2 都是左不变的, 自然有

$$\mu_1(X, Y) = X + Y \quad \mu_2(X, Y) + \mu_1(X, Y)^2 = XX + 2XY + YY$$

于是

$$\mu_1(X, Y) = X + Y \quad \mu_2(X, Y) = XY - YX = [X, Y]$$

命题得证. □

更一般地, $\ln(\exp(tX)\exp(tY))$ 还可以更直接地用 Lie 括号和 X, Y 组成的式子写出来, 这被称为 **Campbell-Hausdorff 公式**. 详细的讨论请见 [19].

5.3 Lie 理论

I. Lie 子群和 Lie 子代数 考虑 Lie 群 G , 假设对应的 Lie 代数是 \mathfrak{g} , 如果有 Lie 子群 $H \subseteq G$, 对应的 Lie 代数是 \mathfrak{h} , 假如记 $H \subseteq G$ 的包含映射是 ι , 因为子流形的假定, 故 $d\iota: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ 是单射. 我们可以认为 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. 显然 \mathfrak{h} 是 \mathfrak{g} 一个对 Lie 括号封闭的子空间. 一个基本的问题是反之是否成立?

定义 5.31 (Lie 子代数) 对于 Lie 群 G , 假设对应的 Lie 代数是 \mathfrak{g} , 如果子空间 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 对 Lie 括号封闭, 则称之为 **Lie 子代数**.

定理 5.32 对于 Lie 群 G , 假设对应的 Lie 代数是 \mathfrak{g} , 任何一个 Lie 子群代数 \mathfrak{h} 都是某个 Lie 子群的 Lie 代数.

证明梗概 采用 [20]P94 3.19 的证明. 我们要用 Frobenius 定理 (3.78), 定义分布

$$\mathcal{D}: p \mapsto \text{span}(X_p : X \in \mathfrak{h})$$

显然, 这定义了一个对 Lie 括号封闭的分布, 于是在任意点存在积分流形. 令 H 是经过 1 的 \mathcal{D} 积分流形, 我们不加证明地指出, 我们可以取得这个积分流形是极大的, 这被称为整体 Frobenius 定理, 具体证明参见 [20]P48 1.64. 因为这个分布是左不变的, 故任何 $x \in H$, $\ell_{x^{-1}}H$ 仍然是经过 1 的积分流形, 故根据极大性 $\ell_{x^{-1}}H = H$, 这就已经说明 H 是子群. 因为局部上 H 的坐标卡是 G 坐标卡的前几位 (具体证明参见 [20]47 1.62), 这使得乘法和取逆仍然是光滑的. 这就构造了 Lie 子群. □

推论 5.33 对于 Lie 群 G , 假设对应的 Lie 代数是 \mathfrak{g} , 则如下映射是双射

$$\begin{aligned} \text{Lie} : \{G \text{ 的所有连通 Lie 子群}\} &\xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{g} \text{ 的所有 Lie 子代数}\} \\ H &\longmapsto \mathfrak{h} = H \text{ 的 Lie 代数} \end{aligned}$$

证明 满射已经验证完毕, 我们下面验证单射, 考虑 \mathfrak{h} 在指数映射下的像 $\exp(\mathfrak{h}) \subseteq H \subseteq G$, 因为 $d\exp|_0 = \text{id}$, 故发现 $\exp(\mathfrak{h})$ 包含 H 的单位元的一个邻域, 根据 (5.15), 其生成了 H . \square

利用这一点, 对任何一个有限维抽象 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} -Lie 代数都是某个 Lie 群的 Lie 代数, 这被称为 **Lie 第三定理**, 关键一步是证明 **Ado 定理**, 任何抽象有限维抽象 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} -Lie 代数都可以嵌入到某个 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 或 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 中去, 或者用表示论的语言, 任何抽象 Lie 代数都有忠实表示.

II. 单连通 Lie 群 一类重要的 Lie 群是单连通 Lie 群, 实际上任何连通 Lie 群都是单连通 Lie 群的覆盖.

定理 5.34 对于 Lie 群 G , 其万有覆盖空间 \tilde{G} 具有 Lie 群的结构. 且复叠映射 $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ 是同态, \tilde{G} 的 Lie 代数和 G 的 Lie 代数是相同的.

证明 其微分流形的结构根据复叠映射的定义是自动的. 根据提升性质, 可以把群结构的

$$1 : \{*\} \rightarrow G \quad \mu : G \times G \rightarrow G \quad \nu : G \rightarrow G$$

提升到

$$1 : \{*\} \rightarrow \tilde{G} \quad \tilde{\mu} : G \times G \rightarrow \tilde{G} \quad \tilde{\nu} : G \rightarrow \tilde{G}$$

使得 $\pi(1) = 1, \mu(1, 1) = 1, \nu(1) = 1$. 他们根据 G 的微分结构是光滑的, 再复合复叠映射得到

$$1 : \{*\} \rightarrow \tilde{G} \quad \mu : \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G} \quad \nu : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$$

因为复叠映射 π 是淹没且是满射, 从而根据 (3.47), 他们都是光滑的. 不难验证其满足群公理. \square

定义 5.35 (Lie 代数同态) 对于 Lie 群 G, H , 对应的 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, 如果线性映射 $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 满足 $[\psi(X), \psi(Y)] = \psi([X, Y])$, 则称 ψ 为 **Lie 代数同态**.

定理 5.36 对于 Lie 群 G, H , 对应的 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, 则

$$\begin{aligned} d: \operatorname{Hom}_{\text{Lie-Group}}(G, H) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\text{Lie-Algebra}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \\ \varphi &\longmapsto d\varphi \end{aligned}$$

如果 G 是连通的, 那么 d 是单射, 如果 G 还是单连通的, 那么 d 是双射.

证明 关于单射完全类似 (5.33) 根据 (5.27) 利用指数映射可以还原出 G 的一个邻域和 H 一个邻域之间的映射.

反之, 考虑 Lie 代数同态 $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, 考虑 Lie 群 $G \times H$, 其 Lie 代数是 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, 考虑 Lie 代数同态的“图像” $\mathfrak{f} = \{(x, y) : \varphi(x) = y\}$, 不难验证这是一个 Lie 子代数. 根据 (5.32), 存在 $F \subseteq G \times H$ 的 Lie 代数是 \mathfrak{f} , 我们说明这就是我们要求的同态的“图像”.

考虑 $\pi: F \rightarrow G$, 我们断言 π 是复叠映射, 从而因为 G 是单连通, 必定是同胚, 再根据 (3.47), 这还是微分同胚. 注意到 $d\pi: \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ 是同构. 故可以得到 F 单位元邻域 U 和 G 单位元邻域 V 之间的同胚, 可以根据乘法连续缩小 U, V 使得 UU^{-1} 和 VV^{-1} 也是同胚. 这样可以断言 $\{xV : \pi(x) = 1\}$ 是两两无交的, 具体来说如果 $xV \cap yV \neq \emptyset$, 假设 $xv_1 = yv_2$, 那么 $\pi(v_2v_1^{-1}) = \pi(y^{-1}x) = 1$, 但是 $y^{-1}x = v_2v_1^{-1} \in VV^{-1}$, π 局部是同胚, 故 $v_2 = v_1$, 进而 $x = y$. 类似地平移可以证明 π 是复叠映射.

这样得到了光滑 $\pi^{-1}: G \rightarrow F$, 然后容易复合得到 $[G \rightarrow F \rightarrow H] := \Psi$, 对应的 Lie 代数同态是 $[\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{h}] = \psi$, 故 $d\Psi = \psi$, 命题得证. \square

评注 5.37 通过上面的讨论我们知道, 对于 Lie 群 G, H , 假如对应的 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, 假如 G 的万有覆盖空间是 \tilde{G} , 那么

$$\operatorname{Hom}_{\text{Lie-Group}}(G, H) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\text{Lie-Algebra}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong \operatorname{Hom}_{\text{Lie-Group}}(\tilde{G}, H)$$

故可以认为

$$\operatorname{Hom}_{\text{Lie-Group}}(G, H) \subseteq \operatorname{Hom}_{\text{Lie-Group}}(\tilde{G}, H)$$

问题在于何种 $\tilde{G} \xrightarrow{\varphi} H$ 是复合自 $G \rightarrow H$, 当然, 经过一些验证, 这当且仅当 $\varphi(\ker[\tilde{G} \rightarrow G]) = 0$, 注意到 $\ker[\tilde{G} \rightarrow G] = \pi_1(G)$, 其中 $\pi_1(G)$ 是 G 的基本群. 不难发现 $\pi_1(G)$ 还是离散的. 换言之, 我们就是验证 φ 是否在 $\pi_1(G)$ 作用下是不变的.

III. Lie 群和 Lie 代数的表示 如果说群能够表征“对称性”, 那么表示就表征的是“线性对称性”. 那么而每一个 Lie 群的表示就对应为“连续线性对称性”. 这也是表示论的初衷. 在此我们不过多涉及这一概念, 希望深入抽象的 Lie 代数和 Lie 群及其表示, 可以参考 [19], [18], [13], [11], [8].

定义 5.38 (表示) 对于有限维 \mathbb{R} -线性空间 V , 全体 V 上的线性变换构成一个 \mathbb{R} -代数,

- 其中的单位即那些可逆线性变换成为一个群, 记为 $\mathrm{GL}(V)$, 这构成一个 Lie 群, 被称为 V 上的 **一般线性群**.
- 通过 $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ 定义了一个 Lie 代数, 记为 $\mathfrak{gl}(V)$, 这被称为 **一般线性 Lie 代数**.

根据 (5.23), $\mathfrak{gl}(V)$ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的 Lie 代数.

对于 Lie 群 G , 对应的 Lie 代数 \mathfrak{g} , 如果有 Lie 同态 $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, 这被称为 **Lie 群表示 (representation)**, 诱导的 $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 被称为诱导的 **Lie 代数表示**.

引理 5.39 对于 Lie 群的表示 $G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{GL}(V)$,

$$\varphi(\exp(tX)) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{[\mathrm{d}\varphi(X)_1]^n}{n!}$$

故

$$\mathrm{d}\varphi(X)_1 = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} \varphi(\exp(tX))$$

这里的导数是线性空间的导数, 视 $\varphi(\exp(tX)) \in \mathrm{GL}(V) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$.

证明 根据 \exp 和 φ 交换 (5.27). 后者是平凡的. □

定义 5.40 (伴随表示) 对于 Lie 群 G , 对应的 Lie 代数 \mathfrak{g} , $\text{Ad}_x : G \rightarrow G$ 诱导了 $d\text{Ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, 换言之, 诱导了 $d\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$, 从而再诱导了 $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. 这被称为 **伴随表示**.

定理 5.41 对于 Lie 群 G , 对应的 Lie 代数 \mathfrak{g} , 则伴随表示

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \quad X \longmapsto [Y \mapsto [X, Y]]$$

证明 对于 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 则

$$\begin{aligned} (\text{ad}_X Y)_1 &= (d(d\text{Ad})_X)_1 Y && \because \text{定义} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\text{Ad}_{(\exp(tX))} Y && \because (5.39) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\mathbf{r}_{\exp(-tX)} \circ d\ell_{\exp(tX)}) Y \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\mathbf{r}_{\exp(-tX)} Y_{\exp(tX)} && \because Y \text{ 左不变} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\mathbf{r}_{\exp(-tX)} Y_{\exp(tX)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y_{1+tX}[-tX] && \because (5.28) \\ &= (L_X Y)_1 && \because \text{Lie 导数的定义 (3.74)} \\ &= [X, Y]_1 && \because (3.76) \end{aligned}$$

命题得证. □

IV. Lie 群上的积分 回忆 (5.17) 我们定义了左不变切向量场, 我们自然可以定义左不变微分形式.

定义 5.42 对于 Lie 群 G , 一个 $\omega \in \text{Diff}^k(G)$ 被称为是 **左不变 k -形式** 如果

$$\forall x, p \in G, \quad (\omega \circ \ell_x)_p = \omega_p$$

其中 $\omega \circ \ell_x$ 的记号见 (3.82). 或者更简单地记为 $\omega \circ \ell_x = \omega$. 一个 $\omega \in \text{Diff}^k(G)$ 被称为是 **右不变 k -形式** 如果

$$\forall x, p \in G, \quad (\omega \circ r_x)_p = \omega_p$$

类似 (5.18), 左不变 k 形式等同于 $\text{Cot}_1^k(G)$.

定理 5.43 对于 Lie 群 G , 全体左/右不变 k 形式都和 $\text{Cot}_1^k(G)$ 同构, 其中 $1 \in G$ 是单位元. 具体来说

- 对于左不变 k -形式 $\omega \in \text{Diff}^k(G)$, 定义 1 处的切向量 $\omega_1 \in \text{Cot}_1^k(G)$.
- 对于 $\varpi \in \text{Tan}_1 G$, 定义左不变向量场 $[p \mapsto \varpi \circ \ell_{p^{-1}}]$.

右不变向量场是类似的.

定理 5.44 对于 n 维紧致 Lie 群 G , G 总可以定向, 且在此定向下存在唯一的 $\omega \in \text{Diff}^k(G)$ 使得

$$\forall x \in G, f \in \mathcal{C}^\infty(G), \quad \int_G f \omega = \int_G (f \circ \ell_x) \omega$$

且 $\int_G \omega = 1$.

证明 可定向根据 (3.90) 是显然的, 只需要取非零的左不变 n -形式 ω 即可. 不难从积分的定义和换元公式得到

$$\int_G (f \circ \ell_x) \omega = \int_{\ell_x G} f(\omega \circ \ell_{x^{-1}})$$

如果条件成立, 通过单位分拆转化到欧式空间, 这意味着 $\omega \circ \ell_{x^{-1}} = \omega$, 换言之 ω 左不变. 再调整系数可以得到 $\int_G \omega = 1$. 反之, 因为左不变 n -形式是 $\dim \text{Cot}_1^n = 1$ 维的, 故是唯一的. □

定义 5.45 上述 (5.44) 确定的 ω 被称为 **体积元**, 而泛函 $f \mapsto \int_G f \omega$ 被称为 **左不变积分**, 根据 Riesz 表示定理诱导的测度则被称为 **Haar 测度**. 有时为了方便起见, 会记成

$$\int_G f \omega = \int_G f(g) dg$$

实际上 Harr 测度还可以在更一般的拓扑群上定义, 例如参见 [10]P339. Riesz 表示定理断言这样的泛函一定对应一个测度, 可见 [10] 第 7 章.

例 5.46 对于 \mathbb{R} , 取坐标卡 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 左不变 n -形式就是 dx . 类似地, \mathbb{S} 的左不变 n -形式可以取作弧长微元 ds , 此时 $\int_{\mathbb{S}} ds = 2\pi$, 故 $\frac{ds}{2\pi}$ 是 \mathbb{S} 的体积元. 一般地, \mathbb{S}^n 的体积元也是如此.

例 5.47 对于乘法 Lie 群 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, 取坐标卡 $x: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, 那么 $\ell_a: f(x)dx \mapsto f(ax)d(ax) = f(ax)adx$, 故左不变 n -形式应该为 $\frac{dx}{x}$.

例 5.48 对于 $GL_n(\mathbb{R})$, 取坐标卡 矩阵 $(x_{ij}) \mapsto$ 数串 (x_{ij}) , 那么

$$\ell_A: f(X) \bigwedge_{i,j} dx_{ij} \mapsto f(AX) \bigwedge_{i,j} d\left(\sum_k a_{ik}x_{kj}\right) = f(AX) \det A \bigwedge_{i,j} dx_{ij}$$

故左不变 n -形式应该为 $\frac{\bigwedge_{i,j} dx_{ij}}{\det(x_{ij})}$.

定理 5.49 (Fubini 定理) 令 G 是紧致 Lie 群, 闭 Lie 子群 K 是正规的, 根据 (5.16), G/K 也是 Lie 群. 假设 $G, K, G/K$ 的体积元分别是 $dg, dk, d(gK)$, 那么

$$\int_G f(g)dg = \int_{G/K} \left(\int_K f(gk)dk \right) d(gK)$$

这里 $(\int_K f(gk)dk)$ 是关于 g 的函数, 因为复合 ℓ_x 不改变, 从而实际上成为 G/K 上的函数, 从而外层积分有意义.

证明 考虑 $f \mapsto \int_{G/K} (\int_K f(gk)dk) d(gK)$, 不难验证这是左不变的. 再对 $f = \text{常数}1$ 积分, 两边都是 1, 同样不难运用单位分拆得到右边必定是左不变积分, 从而命题得证. □

5.4 典型群

I. 典型群及其拓扑性质 最后我们来交代典型群, 他们都是一般线性群的子群. 这里原则上不会用到上一节的结论.

定义 5.50 (典型群) 下面我们来定义 **典型 (classical) 群**, 方便记 $\{*\}^\top$ 为矩阵转置, $\{*\}^H$ 为共轭转置, 1 为矩阵单位元, 用 \mathbb{K} 代表 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} ,

- 一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 已经在 (5.6) 定义.
- 特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ 已经在 (5.7) 定义.
- **正交 (orthogonal) 群** $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : AA^\top = 1\}$$

- **特殊正交群** $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$$

- **辛 (symplectic) 群** $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : AJA^\top = J\}$$

其中 $J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

- **酉 (unitary) 群** U_n

$$\mathrm{U}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : AA^H = 1\}$$

- **特殊酉群** SU_n

$$\mathrm{SU}_n = \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$$

- **紧致辛群** Sp_n

$$\mathrm{Sp}_n = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}_n$$

定理 5.51 (典型群的拓扑性质) 典型群的基本拓扑性质

典型群	紧致	连通
$GL_n(\mathbb{R})$	否	两个连通分支
$GL_n(\mathbb{C})$	否	连通
$SL_n(\mathbb{R})$	否	连通
$SL_n(\mathbb{C})$	否	连通
$O_n(\mathbb{R})$	是	两个连通分支
$SO_n(\mathbb{R})$	是	连通
$Sp_n(\mathbb{R})$	否	连通
U_n	是	两个连通分支
SU_n	是	连通
Sp_n	是	连通

证明 紧致性不难验证 (因为是欧式空间的子集). 对于连通性,

- 对于 $GL_n(\mathbb{R})$, 两个分支是 \det 的正负两部分. 直接证明任何行列式为正的矩阵 A 都和 1 有道路相连, 利用极分解 $A = PR$, 其中 P 正定, R 正交, 这样 $R \in SO_n(\mathbb{R})$, 这样 $t \mapsto ((1-t)I + tP)R$ 给出连接 R 和 A 的道路, 问题转化到 $SO_n(\mathbb{R})$ 的连通性上.
- 对于 $GL_n(\mathbb{C})$, 直接证明任何矩阵 A 都和 1 有道路相连, 利用 Jordan 标准型, 分解 PAP^{-1} , 其中 A 是上三角矩阵, 假设 B 是 A 的对角线, C 是 B 的绝对值, 通过连接道路消去严格上三角的部分, 可以连接 PAP^{-1} 和 PBP^{-1} , 然后, 通过旋转, 可以连接 PBP^{-1} 和 PCP^{-1} , 最后通过伸缩可以连接 PCP^{-1} 和 $P1P^{-1} = 1$.
- $SL_n(\mathbb{K})$ 讨论是类似的, 需要注意到 Jordan 标准型可以假设过渡矩阵 $\in SL_n(\mathbb{C})$.
- $O_n(\mathbb{R})$ 有两个分支转化到 $SO_n(\mathbb{R})$ 是连通的.
- $SO_n(\mathbb{R})$ 当中的矩阵可以正交相似到一些对角线上是 1 和块 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 上, 通过变动 θ , 可以旋转到 1.

- $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, 总存在辛矩阵将其化为一些对角线上是块 $\begin{pmatrix} d & \\ & d^{-1} \end{pmatrix}$, 其中 $d > 0$. 这被称为 **Bloch-Messiah 分解**, 参见 Wiki-Symplectic matrix.
- U_n 有两个分支转化到 SU_n 是连通的上.
- SU_n 是因为总可以酉相似到对角阵.
- Sp_n , 总存在辛矩阵将其化为一些对角线上是块 $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ 上, 通过调整 θ 即可. 参见 [12]P14 1.6.

命题得证. □

评注 5.52 实际上, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SU}_n, \mathrm{Sp}_n$ 是单连通的, 这来自于基本群的计算. 实际上,

典型群	紧致	连通	$\pi_1(*, 1)$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	否	两个连通分支	$\mathbb{Z}_2 (n \geq 3)$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	否	连通	\mathbb{Z}
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	否	连通	$\mathbb{Z}_2 (n \geq 3)$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	否	连通	1
$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$	是	两个连通分支	$\mathbb{Z}_2 (n \geq 3)$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$	是	连通	$\mathbb{Z}_2 (n \geq 3)$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$	否	连通	\mathbb{Z}
U_n	是	两个连通分支	\mathbb{Z}
SU_n	是	连通	1
Sp_n	是	连通	1

II. 典型群的 Lie 代数 一个迟迟没有解决的问题是上述典型群是否是 Lie 群? 我们需要如下的引理.

引理 5.53 对于 Lie 群 G , 对应的 Lie 代数 \mathfrak{g} , 如果闭子群 $H \subseteq G$ 和 Lie 子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 满足存在 G 的 1 的邻域 U 和 \mathfrak{g} 的 0 的邻域 V 使得

$$\exp : U \cap H \rightarrow V \cap \mathfrak{h} \quad U \cap H \xleftarrow{\log} V \cap \mathfrak{h} : \log$$

是互逆的, 那么 H 是闭 Lie 子群, \mathfrak{h} 是其 Lie 代数.

证明 实际上这给出 H 在单位元处的坐标卡, 然后平移到各个位置, 不难验证相容性. 嵌入子流形是显然的. □

定理 5.54 典型群都是 Lie 群.

证明 我们已经证明了 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 是 Lie 群了, 并且求出了指数映射 (5.23). 下面我们开始论证.

- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, 注意到 $\det e^A = e^{\mathrm{tr} A}$, 故

$$\exp A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{tr} A = 0$$

- $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$, 注意到在 1 附近,

$$\exp A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{K}) \iff A + A^\top = 0$$

其中利用了 A, A^\top 以及 $\exp A, (\exp A)^\top = \exp(A^\top)$ 交换性.

- $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$,

$$\exp A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{K}) \iff A + A^\top = 0, \mathrm{tr} A = 0 \iff A + A^\top = 0$$

- $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$,

$$\exp A \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{K}) \iff A + J^{-1}A^\top J = 0$$

其中 $J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$.

- U_n ,

$$\exp A \in \mathrm{U}_n \iff A + A^H = 0$$

- SU_n ,

$$\exp A \in SU_n \iff A + A^H = 0, \operatorname{tr} A = 0$$

- Sp_n ,

$$\exp A \in Sp_n \iff A + J^{-1}A^T J = 0, A + A^H = 0$$

上述不难验证, \iff 右边定义了 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ 的子代数, 根据 (5.53), 这说明他们都是 Lie 群. □

评注 5.55 上面证明中关于矩阵指数的事实都不难证明.

- $A = PBP^{-1} \Rightarrow e^A = Pe^BP^{-1}$. 利用定义.
- $AB = BA \Rightarrow e^Ae^B = e^Be^A = e^{A+B}$. 利用定义.
- 在 1 附近, $e^Ae^B = e^Be^A \Rightarrow AB = BA$. 利用 \log 的 *Taylor* 展开.
- $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$. 根据第一条, 只需证明对 *Jordan* 块成立, 根据第二条 $e^J = e^{\lambda + (\text{严格上三角矩阵})} = e^\lambda e^{(\text{严格上三角矩阵})} = e^\lambda (1 + (\text{严格上三角矩阵}))$
- $e^{(A^T)} = (e^A)^T$. 利用定义.

定义 5.56 下面将典型群的 *Lie* 代数记出来. 方便记 $\{*\}^T$ 为矩阵转置, $\{*\}^H$ 为共轭转置, 1 为矩阵单位元, 用 \mathbb{K} 代表 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} ,

- 一般线性 *Lie* 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ 已经在 (5.23) 定义.
- 特殊线性 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : \operatorname{tr} A = 0\}$$

- 特殊正交 Lie 代数 $\mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : A + A^T = 0\}$$

- 辛 Lie 代数 $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K})$

$$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : A + J^{-1}A^\top J = 0\}$$

其中 $J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

- 酉 Lie 代数 \mathfrak{u}_n

$$\mathfrak{u}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : A + A^\mathsf{H} = 0\}$$

- 特殊酉 Lie 代数 \mathfrak{su}_n

$$\mathfrak{su}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : A + A^\mathsf{H} = 0, \operatorname{tr} A = 0\}$$

- 紧致辛 Lie 代数 \mathfrak{sp}_n

$$\mathfrak{sp}_n = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}_n$$

他们分别是典型群的 *Lie* 代数, 对应是自明的. 特别地, $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ 的 *Lie* 代数同 $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$.

记号表

记号	解释	位置
\mathbb{R}^n	欧式空间	(5.3)
\mathbb{S}^1	单位圆周	(5.5)
\mathbb{T}^n	n 维轮胎面	(5.5)
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	实一般线性群	(5.6)
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	复一般线性群	(5.6)
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	实特殊线性群	(5.7)
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	复特殊线性群	(5.7)
ℓ_x	x 的左平移作用	(5.2)
r_x	x 的右平移作用	(5.2)
$d\varphi$	诱导的 Lie 代数同态	(5.22)
$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$	实一般线性 Lie 代数	(5.23)
$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$	复一般线性 Lie 代数	(5.23)
\exp	指数映射	(5.25)
e^X	矩阵的指数映射	(5.29)
\log	对数映射	(5.30)
$\mathrm{GL}(V)$	一般线性群	(5.38)
$\mathfrak{gl}(V)$	一般线性 Lie 代数	(5.38)
ad	伴随表示	(5.40)
$\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$	正交群	(5.50)
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$	特殊正交群	(5.50)
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$	辛群	(5.50)

U_n	酉群	(5.50)
SU_n	特殊酉群	(5.50)
Sp_n	紧致辛群	(5.50)
$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$	特殊线性 Lie 代数	(5.56)
$\mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$	特殊正交 Lie 代数	(5.56)
$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K})$	辛 Lie 代数	(5.56)
\mathfrak{u}_n	酉 Lie 代数	(5.56)
\mathfrak{su}_n	特殊酉 Lie 代数	(5.56)
\mathfrak{sp}_n	紧致辛 Lie 代数	(5.56)

习题

习题 29 对于 Lie 群同态 $\varphi: G \rightarrow H$, 如果 φ 在单位元 1 处是淹没, 证明 φ 是满射. (提示: 利用 (5.15).)

问题 30 对于 Lie 群 G , 对应的 Lie 代数 \mathfrak{g} , $X, Y \in \mathfrak{g}$, 证明 $s: t \mapsto \exp(tX)\exp(tY)$ 在 0 处的切向量是 $X + Y$. 从而进一步证明

$$[X, Y] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y)$$

(提示: 因为

$$\begin{aligned} \exp(X)\exp(Y)\exp(X)^{-1} &= \text{Ad}_{\exp(X)}\exp(Y) \\ &= \exp(\text{d Ad}_{\exp(X)}Y) \\ &= \exp(\exp(\text{ad}_X)Y) \\ &= \exp\left(Y + \text{ad}_X Y + \frac{1}{2}\text{ad}_X^2 Y + \dots\right) \\ &= \exp(Y) \end{aligned}$$

用 tX 替换 X , sY 替换 Y , 可得 $\exp(tX)\exp(sY) = \exp(sY)\exp(tX)$. 下面, 我们计算 $s: t \mapsto \exp(tX)\exp(tY)$ 的切向量, 对于光滑函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, 令

$$\begin{aligned} H(t, s) &= f(\exp(tX)\exp(sY)) = f(\exp(tX) + sY) \\ &= f(\exp(sY)\exp(tX)) = f(\exp(sY) + tX) \end{aligned}$$

则根据习题17,

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, s) = Xf(\exp(sY)\exp(tX)) \quad \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = Yf(\exp(tX)\exp(sY))$$

这样根据链式法则 (3.33), $\dot{s}f = (f \circ s)' = \frac{\partial H}{\partial t}(t, t) + \frac{\partial H}{\partial s}(t, t) = (Xf + Yf)(s)$, 故 $\dot{s} = X + Y$, 这说明 s 是单参数变换群, 即 $\exp(tX + tY)$.)

问题 31 证明:

$$\log(\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)) = tY + t^2[X, Y] + \mathcal{O}(t^3)$$

以及

$$\log(\exp(tX) \exp(tY) \exp(-tX) \exp(-tY)) = t[X, Y] + \mathcal{O}(t^2)$$

(提示: 类似 (5.30) 的手段.)

习题 32 验证 (5.34) 证明最后的“不难验证”满足群公理. (提示: 证明 $\mu \circ (\text{id} \times \nu)$ 是 1 的提升从而只能是 1, 再证明 $\mu \circ (\mu \times \text{id})$ 和 $\mu \circ (\text{id} \times \mu)$ 是同一个映射的提升, 从而相等. 这样就验证了结合律和逆映射存在.)

习题 33 验证典型群的紧致性 (5.51).

习题 34 对于矩阵 $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, 证明只有有限的 $\lambda \in \mathbb{K}$ 使得 $\lambda A + (1 - \lambda)B \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$, 从而证明 $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ 是连通的.

问题 35 下面我们构造四元数. 记

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

容易验证这对矩阵的加法和乘法作成环. 记

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

则任何 \mathbb{H} 中的元素都可以写成 $x + yi + zj + wk$. 且 i, j, k 的如下关系

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j$$

实际上完全决定了乘法. 证明: \mathbb{H} 是除环. (提示: 因为直接计算

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

得到 \mathbb{H} 是除环.) 还可以定义共轭 $\bar{\cdot}$, 使得 $\overline{x + yi + zj + wk} = x - yi - zj - wk$, 证明:

$$\omega \bar{\omega} \in \mathbb{R} \quad \overline{\omega \beta} = \bar{\omega} \bar{\beta}$$

(提示: 这实际上对应到矩阵的共轭转置.) 自由模 \mathbb{H}^n (视作右模) 上面可以定义 “一般线性群”

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) = \{\text{右 } \mathbb{H}\text{-线性变换 } A : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n\}$$

可以定义如下的一个二次型 $\langle *, * \rangle : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$

$$\langle (h_i), (h'_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{h_i} h'_i$$

这对第二个分量是线性的 (这样定义是为了右乘方便), 可以定义 “酉群”

$$\mathbf{U}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n : \forall \mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathbb{H}^n, \langle G\mathbf{h}, G\mathbf{h}' \rangle = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h}' \rangle\}$$

作等同

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{H} \quad (z, w) \longmapsto z + jw$$

使得 $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^{2n}$, 假设前 n 位排列 z_i , 后 n 位排列 w_i . 证明: $A \in \mathbf{U}_n \iff$ 等同下 $A \in \mathbf{Sp}_n$. (提示: 对于任何复数 $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $jz = \bar{z}j$, 故 $A \in \mathfrak{gl}_n$ 除了要满足 $A \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C})$, 还要满足

$$\varphi(z, w)j = (z + jw)j = (zj + jwj) = (-\bar{w} + j\bar{z}) = \varphi(-\bar{w}, \bar{z})$$

令 $J : (z, w) \mapsto (-\bar{w}, \bar{z})$, 故 $A \in \mathfrak{gl}_n$ 还需满足 $AJ = J\bar{A}$. 然后计算知道

$$\langle \varphi(z_i, w_i), \varphi(z'_i, w'_i) \rangle = \sum_{i=1}^n (\bar{z}_i z'_i - \bar{w}_i w'_i) + j \sum_{i=1}^n (w_i z'_i - z w'_i)$$

前者不变说明 $A \in \mathbf{U}_n$, 后者说明 $AJA^\top = J$.)

习题 36 如下两个典型群可以为我们所把握

- 验证 \mathbf{SU}_2 和球面 \mathbb{S}^3 微分同胚.
- 我们知道 $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ 可以表征三维空间的旋转, 通过寻找 “旋转轴”, 验证这定义了一个到摄影空间的微分同胚 $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^3$. (提示: 参见 [12]P19 §1.3.4.)

其间的作用可见 [7] P4.

问题 37 下面我们对交换 Lie 群作一些分类. 对于交换 Lie 群 G , 对应的 Lie 代数是 \mathfrak{g} ,

(1) 证明: 指数映射 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ 是满射. (提示: 利用 (5.15).)

(2) 证明: $\ker \exp$ 是离散的. (提示: 因为 \exp 局部是同胚.)

(3) 证明: 任何连通交换 Lie 群都同构于 $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^s$. (提示: 证明离散子群一定是“格”.)

(4) 证明: 任何紧致交换 Lie 群都同构于 $\mathbb{T}^k \times A$, 其中 A 是一个有限 Abel 群. (提示: 取连通分支 G_0 得到正合列

$$0 \rightarrow G_0 \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$$

因为 G_0 开, G 紧致, 从而 A 离散而紧致, 从而有限. 要说明是直和, 需说明正合列分裂, 这是因为 $\mathbb{S} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是可除的, 从而是内射的.)

附录

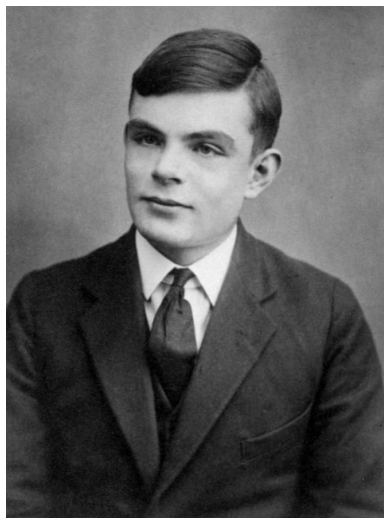


图 1: Turing



图 2: Euclid



图 3: Leibniz



图 4: Poisson



图 5: Lie



图 6: Möbius



图 7: Cartan



图 8: Stokes



图 9: Riemann



图 10: Gauss

参考文献

- [1] 陈维桓陈省身. 微分几何讲义第 2 版. 北京大学出版社, 2001.
- [2] 陈维桓. 微分流形初步 (第二版). 高等教育出版社, 2001.
- [3] 李文威. 代数学方法, 卷一. 北京, 高等教育出版社 (尚未出版), 2016. 在<http://www.wvli.url.tw>可以下载.
- [4] 熊锐. 常微分方程, volume 1. 2017. 可以在 www.cnblogs.com/XiongRuiMath/articles/8993040.html 下载.
- [5] 熊锐. 数学入门, volume 1 of 本科数学讲义. 2018. 可以在 www.cnblogs.com/XiongRuiMath/articles/8992691.html 下载.
- [6] 熊锐. 张量漫谈第二篇, 2018. 可以在 www.cnblogs.com/XiongRuiMath/p/9265197.html 下载.
- [7] A.N. 柯斯特利金 and 张英伯. 代数学引论: 基本结构. 高等教育出版社, 2006.
- [8] Theodor Bröcker and Tammo tom Dieck. *Representations of compact Lie groups*, volume 98 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Translated from the German manuscript, Corrected reprint of the 1985 translation.

- [9] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [10] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [11] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [12] Brian Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations*, volume 222 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, second edition, 2015. An elementary introduction.
- [13] Alexander Kirillov, Jr. *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, volume 113 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [14] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [15] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.
- [16] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

- [17] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [18] Jean-Pierre Serre. *Complex semisimple Lie algebras*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Translated from the French by G. A. Jones, Reprint of the 1987 edition.
- [19] Jean-Pierre Serre. *Lie algebras and Lie groups*, volume 1500 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 1964 lectures given at Harvard University, Corrected fifth printing of the second (1992) edition.
- [20] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.

索引

- Ado 定理, 154
- Bianchi 恒等式, 127
- Borel 引理, 100
- Campbell-Hausdorff 公式, 153
- Cartan 魔术公式, 86
- Christoffel 记号, 23
- Christoff 符号, 135
- Civita 联络, 114
- Euler, 35
- Frenet 标架, 18, 19, 42
- Frobenius, 82
- Gauss, 124
- Gauss 公式, 24
- Gauss 方程, 137
- Gauss 曲率, 22
- Gauss 绝妙定理, 27, 31
- Grassman 流形, 98
- Harr 测度, 158
- Jacobi 恒等式, 76
- Kronecker 的 δ , 23
- k 形式, 74
- Leibniz 律, 56
- Levi-Civita 平行, 136
- Levi-Civita 联络, 114
- Levi 联络, 114
- Lie 代数, 145, 146
- Lie 代数同态, 155
- Lie 代数表示, 156
- Lie 子代数, 153
- Lie 子群, 141
- Lie 导数, 80
- Lie 括号, 76, 145
- Lie 第三定理, 154
- Lie 群, 139
- Lie 群同态, 141
- Lie 群表示, 156
- Poisson 括号, 76
- Riemann 嵌入子流形, 114
- Riemann 度量, 106
- Riemann 曲率张量, 126

- Riemann 曲率算子, 126
Riemann 流形, 106
Riemann 联络, 114
Riemann 记号, 26
- u -曲线, 32
Urysohn, 2, 3
- v -曲线, 32
- Weingarten 方程, 137
Weingarten 变换, 22
- 一致拓扑, 7
一般线性 Lie 代数, 147, 156
一般线性群, 140, 156
上半空间, 90
主方向, 35
主曲率, 35
主法向量, 19
伴随作用, 139
伴随表示, 157
体积元, 158
余切丛, 73
余切映射, 60
余切空间, 58
- 光滑, 52, 99
光滑映射, 53
光滑曲线, 15
光滑曲面, 19
光滑流形, 49
- 共形映射, 109
典型群, 160
内蕴的, 22
函数芽, 54
分布, 81
切丛, 73
切向量, 15, 19, 62
切向量场, 73, 119
切平面, 20
切映射, 60
切片, 72
切空间, 20, 56
协变导数, 120
协变微分, 36
单位分拆, 5
单位速率, 17
单参数变换群, 78, 148
单曲面, 19
原像, 84
参数变换, 16, 21
双点实数轴, 47
反函数定理, 66
反向的, 16
可定向, 87
右不变 k -形式, 158
右不变切向量场, 144
同向的, 16
坐标卡, 48
复一般线性 Lie 代数, 148

复一般线性群, 140

复特殊线性群, 140

外 k 丛, 73

外积, 84

子流形, 70

实一般线性 Lie 代数, 147

实一般线性群, 140

实特殊线性群, 140

对数映射, 151

导数, 56

局部坐标, 48

局部延拓, 115, 119

局部有限, 5

嵌入, 70

嵌入子流形, 70

左不变 k -形式, 157

左不变切向量场, 144

左不变积分, 158

带边区域, 90

常秩的, 65

平展的, 65

平行, 136

张量丛, 105

张量场, 105

张量空间, 105

弧长参数, 17

弧长参数化, 17

弧长微元, 130

微分, 85

微分同胚, 53

微分态射, 53

微分理想, 103

微分结构, 48

截面曲率, 129

拓扑流形, 47

指数映射, 148

挠率, 19

支集, 5, 88

整体流动, 79

无挠的, 112

曲率, 19

曲线, 15, 31, 50, 62

曲面, 50

次法向量, 19

正交群, 160

正则, 15, 19

法从, 115

法向量, 20

法向量场, 115

法曲率, 33

法空间, 114

流动, 78

测地曲率, 33, 129

测地线, 38, 121

浸入, 65

淹没, 65

特殊正交 Lie 代数, 164

- 特殊正交群, 160
- 特殊线性 Lie 代数, 164
- 特殊线性群, 140
- 特殊酉 Lie 代数, 165
- 特殊酉群, 160
- 球面, 50
- 相关的, 103
- 积分, 88
- 积分曲线, 77
- 第一基本形式, 21
- 第二基本形式, 22, 117
- 等距映射, 109
- 简单曲线, 15
- 紧致辛 Lie 代数, 165
- 紧致辛群, 160
- 终点, 62

- 联络, 111
- 肿块函数, 4
- 解析流形, 49
- 计算同态, 8
- 谱, 8
- 起点, 62
- 辛 Lie 代数, 165
- 辛群, 160
- 连续函数环, 7

- 适用坐标卡, 90
- 道路, 62
- 酉 Lie 代数, 165
- 酉群, 160
- 配合, 84
- 链式法则, 63
- 长度, 108
- 闭上半空间, 90
- 闭子群, 141
- 面积微元, 130