

# Trabalho III - Filtros Ativos Digitais

## Processamento Digital de Sinais

Widmark Kauê Silva Cardoso  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Engenharia Aeroespacial  
Joinville, SC  
widmarkkaue.s.c@gmail.com

### I. INTRODUÇÃO

Este trabalho busca projetar e implementar um filtro digital passa-baixas para a disciplina de Processamento Digital de Sinais, a fim de avaliar a terceira etapa da matéria.

Para tal, adotou-se o filtro de Butterworth tendo em vista a característica de banda plana na região de interesse e a simplicidade das equações.

### II. DADOS DE ENTRADA

As frequência de corte e  $f_i$  definida com base na matrícula do aluno: 18202772. Desse modo, para o filtro em questão, a frequência de corte é ditada pela soma de todos os dígitos da matrícula dividido por quatro. A frequência de corte em  $rad/s$  foi calculada conforme a equação 1.

$$\omega_0 = 2\pi f_{pass} \quad (1)$$

A ordem do filtro foi definida igual a 5 pelo professor e a atenuação na banda passante utilizada foi  $-3 \text{ dB}$ , a mesma do trabalho 2. Os dados para o projeto do filtro passa-baixas estão resumidos na tabela I.

TABLE I  
INPUTS PARA O PROJETO DO FILTRO PASSA-BAIXAS

Parâmetro	valor
$f_{pass}$	7.25 Hz
$\omega_0$	45.553 rad/s
$a_{pass}$	-3 dB
$n^o$	5

### III. PROJETO FILTRO PASSA-BAIXAS DIGITAL

#### A. Passa-baixa normalizado

Para determinar a função de transferência do passa-baixa normalizado, inicialmente foi calculado seu fator de ajuste ( $\varepsilon$ ) pela equação 2.

$$\varepsilon = \sqrt{10^{-0.1a_{pass}} - 1} = 0.998 \quad (2)$$

Como a ordem do filtro é um parâmetro de entrada, pode-se ir diretamente para a etapa de alocação dos polos no plano  $s$ . Primeiramente foi calculado o raio do círculo onde os polos estão alocados pela equação 3.

$$R = \varepsilon^{\frac{-1}{n}} = 1.0 \quad (3)$$

Em seguida, foi calculado a alocação angular dos polos por meio da equação 4 para  $n$  polos ímpares, com  $m = 0, 1, \dots, [(n-1)/2] - 1$ , ou seja,  $m = 0$  e 1.

$$\theta_m = \frac{\pi(2m + n + 1)}{2n} = [108 \ 144] \text{ deg} \quad (4)$$

Desse modo, é possível calcular a parte real e parte imaginária dos polos por meio da equação 5. Note que, como  $n$  é ímpar, temos dois polos complexos conjugados e um polo puramente real. Abaixo são apresentados apenas os polos no segundo quadrante.

$$\begin{aligned} \sigma_m &= R \cos(\theta_m) = [-0.309 \ -0.809] \\ \omega_m &= R \sin(\theta_m) = [0.952 \ 0.588] \\ \sigma_R &= -R = -1.0 \end{aligned} \quad (5)$$

Assim, a função de transferência para um filtro com ordem ímpar é dado pela expressão 6 abaixo, em que os coeficientes  $B$  são calculados como mostra a equação 7.

$$H_{B,n}(\bar{s}) = \frac{R \cdot \Pi_m(B_{2m})}{(\bar{s} + R) \cdot \Pi_m(\bar{s}^2 + B_{1m}\bar{s} + B_{2m})} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_{1m} &= -2\sigma_m = [0.618 \ 1.619] \\ B_{2m} &= \sigma_m^2 + \omega_m^2 = [1.001 \ 1.001] \end{aligned} \quad (7)$$

Por fim, realizando os devidos cálculos, a função de transferência para o passa-baixa normalizado fica:

$$H_B = \frac{1.002}{1.002\bar{s}^5 + 3.242\bar{s}^4 + 5.243\bar{s}^3 + 5.241\bar{s}^2 + 3.238\bar{s} + 1}$$

O diagrama de bode com o gráfico de fase e de ganho está representado na figura 1. As atenuações definidas pelo professor podem ser visualizado na figura 2.

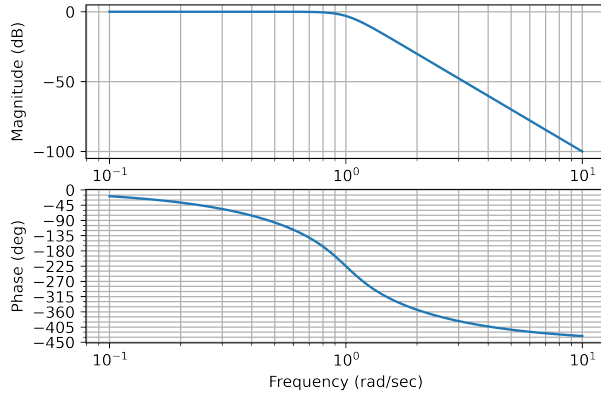


Fig. 1. Diagrama de Bode Passa-baixa normalizado (Fonte: Autor.)

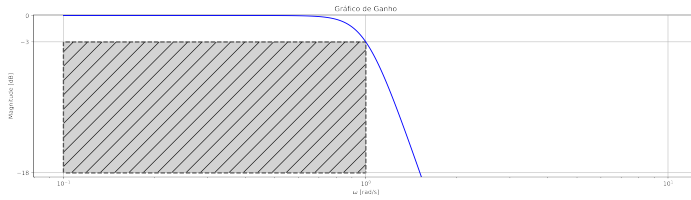


Fig. 2. Gabarito do filtro (Fonte: Autor.)

### B. Conversão para filtro passa-baixas não-normalizado

Com o filtro passa-baixas normalizado calculado, para realizar a conversão basta substituir os termos  $\bar{s}$  na expressão 6 por  $\bar{s} = \frac{s}{\omega_0}$ , onde  $\omega_0$  é a frequência de corte do filtro passa-baixas não-normalizado.

Assim, realizando a substituição e fazendo as devidas simplificações chega-se na equação 8 abaixo.

$$H_{B,L}(s) = \frac{1.962 \cdot 10^8}{s^5 + 147.4s^4 + 1.086 \cdot 10^4 s^3 + 4.945 \cdot 10^5 s^2 \cdots + 1.392 \cdot 10^7 s + 1.959 \cdot 10^8} \quad (8)$$

O gráfico de lugar das raízes da função de transferência na expressão acima é apresentado na figura 3 abaixo. Como esperado, há 4 polos (complexos conjugados) e um zero na origem.

Na figura 4 são apresentadas as respostas em frequência, de fase e ganho, do filtro projetado. Mais abaixo, na figura 5 é mostrado com mais detalhes o gráfico de ganho em conjunto com o gabarito determinado, comprovando que o projeto atende aos requisitos.

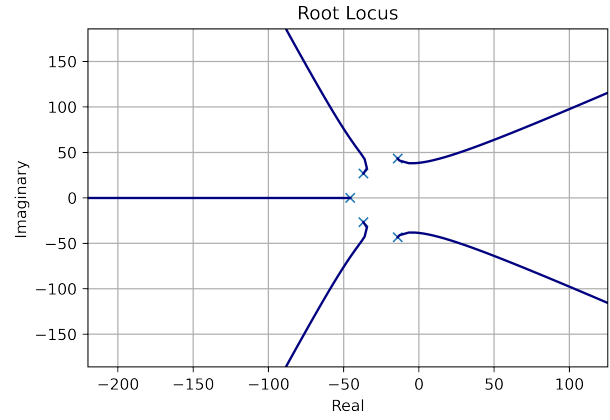


Fig. 3. Root Locus do filtro passa-altas (Fonte: Autor.)

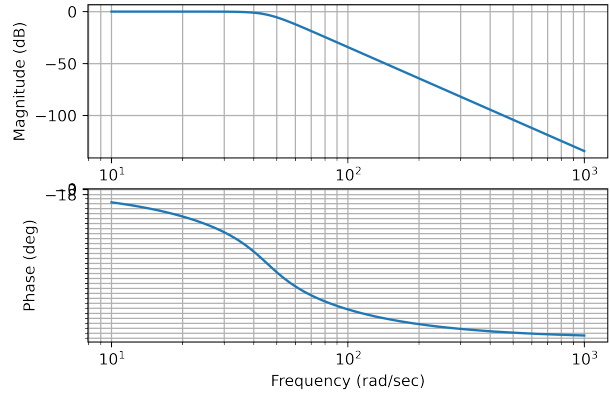


Fig. 4. Diagrama de Bode do filtro passa-baixas (Fonte: Autor.)

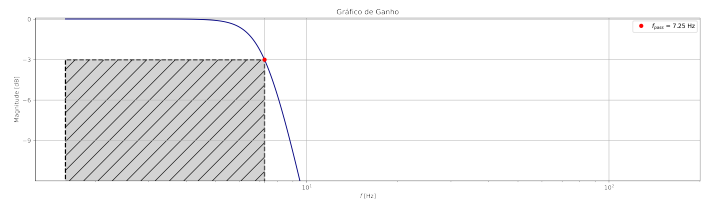


Fig. 5. Gráfico de ganho do filtro passa-baixas (Fonte: Autor.)

### C. Discretização do filtro

Para realizar a discretização do filtro passa-baixas projetado anteriormente foi utilizado a transformação bilinear, definida pela expressão 9, a fim de obter a função de transferência do filtro no domínio discreto.

$$s \approx \frac{2(z-1)}{T_s(z+1)} \quad (9)$$

O parâmetro  $T_s$  é o tempo de amostragem do filtro que, nesse caso foi definido como dez vezes menor que a frequência de referência do filtro projetado, ou seja:

$$T_s = \frac{1}{10f_{pass}} = 0.01379 \text{ s}$$

Assim, substituindo a expressão 9 na função de transferência em 8 chega-se na função de transferência do filtro digital na expressão 10.

$$H_{B,L}(z) = \frac{0.001122z^5 + 0.005608z^4 + 0.01122z^3 + 0.01122z^2}{z^5 - 3.038z^4 + 3.945z^3 - 2.671z^2} \dots \frac{0.005608z + 0.001122}{0.9342z - 0.1342} \dots \quad (10)$$

#### D. Estrutura Discreta Canônica

Na estrutura discreta canônica a função de transferência em 10 deve ser escrita como a expressão 11 abaixo.

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^n a_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^n b_j z^{-j}} \quad (11)$$

Desse modo, multiplicando a equação 10 no numerador e no denominador por  $z^{-5}$  chegamos na expressão 12 em que os coeficientes  $a_j$  e  $b_j$  podem ser extraídos facilmente como mostra a expressão 13.

$$H_{B,L}(z) = \frac{0.001122 + 0.005608z^{-1} + 0.01122z^{-2} + 0.01122z^{-3}}{1 - 3.038z^{-1} + 3.945z^{-2} - 2.671z^{-3}} \dots \frac{0.005608z^{-4} + 0.001122z^{-5}}{0.9342z^{-4} - 0.1342z^{-5}} \dots \quad (12)$$

$$a_j = [0.001122 \ 0.005608 \ 0.01122 \ 0.01122 \ 0.005608 \ 0.001122] \\ b_j = [1 \ -3.0384 \ 3.9451 \ -2.671 \ 0.9342 \ -0.1342] \quad (13)$$

O filtro implementado como uma estrutura discreta canônica pode ser observado na imagem 6 abaixo.

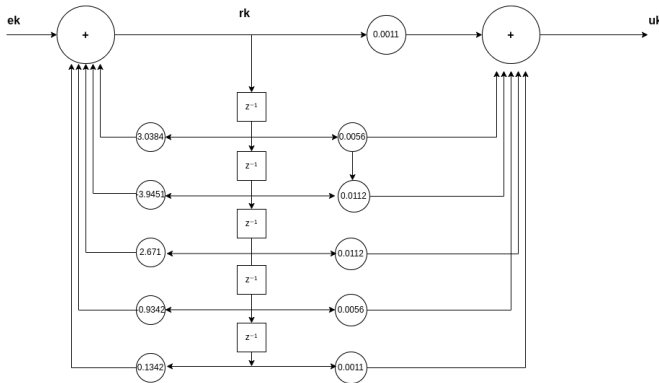


Fig. 6. Filtro implementado como estrutura canônica (Fonte: Autor.)

#### E. Simulação no Proteus

Para realizar a simulação no proteus abrir a equação 11 de modo que fosse possível separar o sinal de saída de um sinal intermediário e do sinal de entrada. Assim, chega-se nas expressões em 14.

$$u_k = \sum_{j=0}^n a_j r_{k-j} \\ r_k = e_k - \sum_{j=1}^n b_j r_{k-j} \quad (14)$$

A simulação no proteus foi realizada com três fontes com amplitude igual a 0.5 e frequências de 72.5 Hz, 60 Hz e 3 Hz. O esquemático no software pode ser observado na figura 7 abaixo.

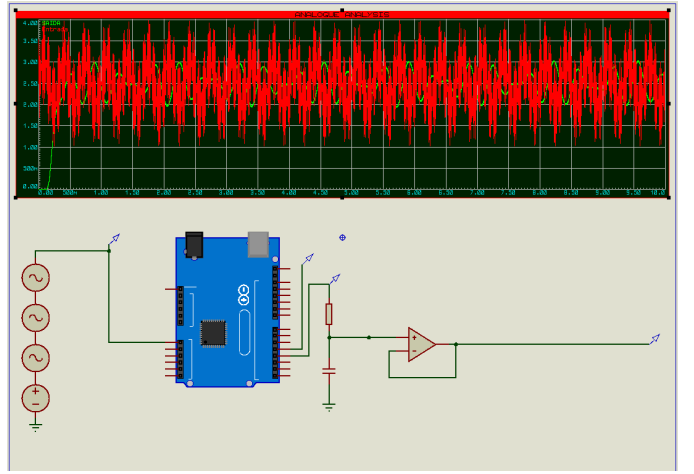


Fig. 7. Circuito no proteus (Fonte: Autor.)

Foram feitas medições na entrada e na saída do circuito a fim de analisar a característica do sinal. O gráfico 8 apresenta o resultado do filtro digital implementado. Percebe-se que houve claramente uma ação de filtragem do sinal mas que, no entanto, há algumas distorções no sinal de saída.

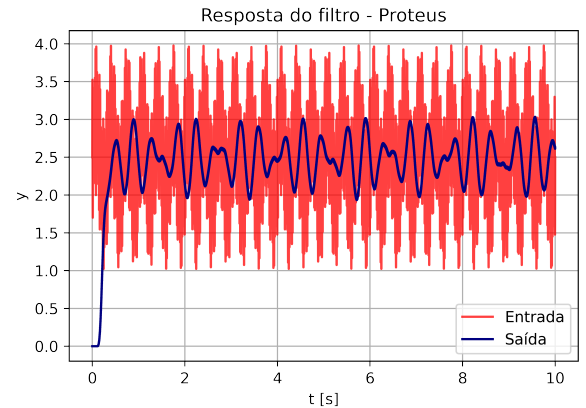


Fig. 8. Comparação sinal de entrada com sinal de saída (Fonte: Autor.)

#### IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível compreender mais a fundo a metodologia de projeto de um filtro digital e as nuances relacionadas ao processo analítico e de implementação do filtro.

Apesar das repostas simuladas do circuito apresentarem algumas distorções, garantiu-se no mínimo uma filtragem dos sinais de entrada e agregou-se bastante conhecimento relacionado a teoria de filtros digitais e suas principais ferramentas de projeto.

#### REFERENCES

- [1] Les Thede, Practical Analog and Digital Filter Design. Inc: Artech House, 2004.
- [2] “Python Control Systems Library”. [Online]. Available: <https://python-control.readthedocs.io/en/latest/intro.html>. [Accessed: 14-dez-2022].
- [3] Brito, Alexandro G., EMB5645 – Processamento Digital de Sinais. Material de aula, 2021.