

Trabalho II - Filtros Ativos Analógicos

Processamento Digital de Sinais

Widmark Kauê Silva Cardoso

Universidade Federal de Santa Catarina

Engenharia Aeroespacial

Joinville, SC

widmarkkaue.s.c@gmail.com

I. INTRODUÇÃO

Este trabalho busca projetar e implementar um filtro analógico passa-altas e passa-banda para a disciplina de Processamento Digital de Sinais, a fim de avaliar a segunda etapa da matéria.

Para tal, adotou-se o filtro de Butterworth tendo em vista a característica de banda plana na região de interesse e a simplicidade das equações.

II. DADOS DE ENTRADA

As frequências de corte e de passagem foram definidas com base na matrícula do aluno: 18202772. Desse modo, para o filtro passa-altas, a frequência de corte é ditada pelos quatro últimos dígitos ao passo que a frequência da banda de transição está 500 Hz abaixo da mesma. A frequência de corte em rad/s foi calculada conforme a equação 1, os dados para o projeto do filtro passa-altas estão resumidos na tabela I.

$$\omega_0 = 2\pi f_{pass} \quad (1)$$

TABLE I
INPUTS PARA O PROJETO DO FILTRO PASSA-ALTAS

Parâmetro	valor
f_{pass}	2772 Hz
f_{stop}	2272 Hz
ω_0	17416.99 rad/s

Para o filtro passa-banda as frequências de passagem foram definidas como os quatro primeiros e os quatro últimos dígitos da matrícula e as frequências de início e término da transição foram definidas como 500 Hz abaixo e acima das frequências de passagens. Todos os dados estão resumidos na tabela II, as frequências de corte e a *Bandwidth (BW)* foram calculados conforme as equações 2 e 3 respectivamente.

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{pass,1} \cdot \omega_{pass,2}} \quad (2)$$

$$BW = \omega_{pass,2} - \omega_{pass,1} \quad (3)$$

TABLE II
INPUTS PARA O PROJETO DO FILTRO PASSA-BANDA

Parâmetro	valor
$f_{pass,1}$	1820 Hz
$f_{pass,2}$	2772 Hz
$f_{stop,1}$	1320 Hz
$f_{stop,2}$	3272 Hz
ω_0	14112.767 rad/s
<i>BW</i>	5981.592 rad/s

Além dos parâmetros específicos de cada filtro, foi definido ainda pelo professor as atenuações máximas e mínimas em decibéis e o valor máximo da ordem dos filtros projetados. Os dados estão resumidos na tabela III.

TABLE III
ATENUAÇÕES DOS FILTROS

Parâmetro	valor
a_{pass}	-3 dB
a_{stop}	-18 dB
n	≤ 4

III. PROJETO FILTRO PASSA-ALTAS

A. Passa-baixa normalizado

Para determinar a função de transferência do passa-baixa normalizado, inicialmente foi calculado seu fator de ajuste (ε) pela equação 4.

$$\varepsilon = \sqrt{10^{-0.1a_{pass}} - 1} = 0.995 \quad (4)$$

Em seguida, utilizou-se a equação 5 para determinar a ordem do filtro necessário para atender os requisitos estabelecidos. Em que o parâmetro Ω_r depende do tipo de filtro projetado, para o filtro passa-alta $\Omega_rH = f_{pass}/f_{stop} = 1.22$.

$$n = \frac{\log_{10} \left[\frac{10^{-0.1a_{stop}} - 1}{10^{-0.1a_{pass}} - 1} \right]}{2 \log_{10} (\Omega_r)} = 10.39th \approx 11th \quad (5)$$

Tendo em vista a limitação de ordem dos filtros, utilizou-se esse valor para $n = 4$ nos cálculos seguintes para montar a função de transferência.

Definido a ordem do filtro, buscou-se a alocação dos polos no plano s. Primeiramente foi calculado o raio do círculo onde os polos estão alocados pela equação 6.

$$R = \varepsilon^{\frac{-1}{n_B}} = 1.001 \quad (6)$$

Em seguida, foi calculado a alocação angular dos polos por meio da equação 7 para n polos pares, com $m = 0, 1, \dots, (n/2) - 1$, ou seja, $m = 0$ e 1.

$$\theta_m = \frac{\pi(2m + n + 1)}{2n} = [112.5 \ 157.5] \ deg \quad (7)$$

Desse modo, é possível calcular a parte real e parte imaginária dos polos por meio da equação 8. Note que, como n é par, todos os polos são complexos conjugados. Abaixo são apresentados apenas os polos no segundo quadrante.

$$\begin{aligned} \sigma_m &= R\cos(\theta_m) = [-0.383 \ -0.925] \\ \omega_m &= R\sin(\theta_m) = [0.924 \ 0.383] \end{aligned} \quad (8)$$

Assim, a função de transferência para um filtro com ordem par é dado pela expressão 9 abaixo, em que os coeficientes B são calculados como mostra a equação 10.

$$H_{B,n}(\bar{s}) = \frac{\Pi_m(B_{2m})}{\Pi_m(\bar{s}^2 + B_{1m}\bar{s} + B_{2m})} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_{1m} &= -2\sigma_m = [0.766 \ 1.850] \\ B_{2m} &= \sigma_m^2 + \omega_m^2 = [1.002 \ 1.002] \end{aligned} \quad (10)$$

Por fim, realizando os devidos cálculos, a função de transferência para o passa-baixa normalizado fica:

$$H_B = \frac{1.005}{1.005\bar{s}^4 + 2.622\bar{s}^3 + 3.422\bar{s}^2 + 2.616\bar{s} + 1}$$

O diagrama de bode com o gráfico de fase e de ganho está representado na figura 1. As atenuações definidas pelo professor podem ser visualizado na figura 2.

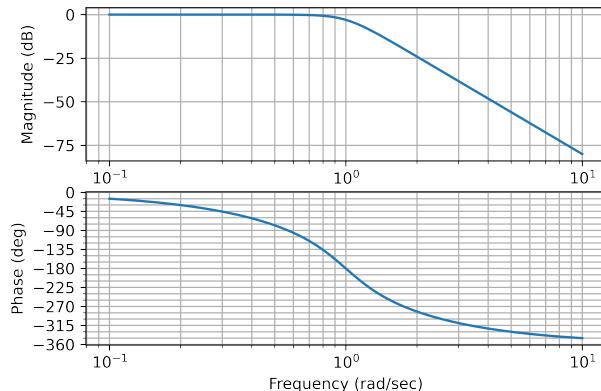


Fig. 1. Diagrama de Bode Passa-baixa normalizado (Fonte: Autor.)

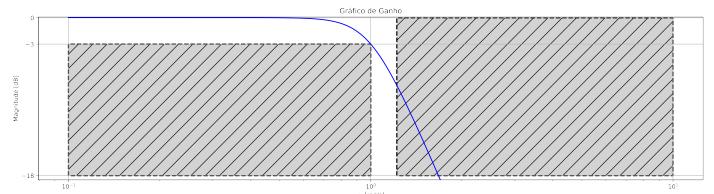


Fig. 2. Gabarito do filtro (Fonte: Autor.)

B. Reajuste do gabarito

Nota-se pela figura 2 que o filtro projetado não atendeu os requisitos de atenuação estabelecidos por conta da utilização de uma ordem menor do que a calculado para os parâmetros de projeto.

Nessa perspectiva, o valor a_{stop} foi recalculado a fim de determinar o novo gabarito para o filtro projetado. Isso foi feito isolando a variável de interesse na equação 5 e usando $n = 4$. Desse modo, chegou-se num novo valor de atenuação a partir da equação 11.

$$\begin{aligned} a_{stop} &= -10\log_{10} [\Omega_{rH}^{2n_B} (10^{-0.1a_{pass}} - 1)] \\ &= -7.699dB \end{aligned} \quad (11)$$

A figura 3 mostra o gráfico de ganho com o novo gabarito calculado.

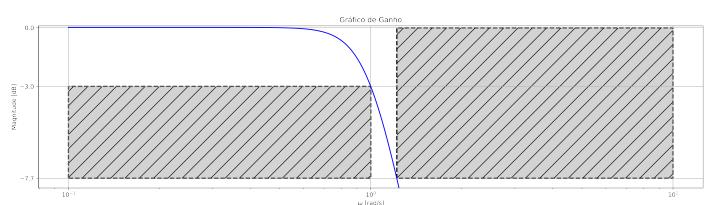


Fig. 3. Gabarito do filtro reajustado (Fonte: Autor.)

C. Conversão para filtro passa-alta

Com o filtro passa-baixas normalizado calculado, para realizar a conversão basta substituir os termos \bar{s} na expressão 9 por $\bar{s} = \frac{\omega_0}{s}$, onde ω_0 é a frequência de corte do filtro passa-altas.

Assim, realizando a substituição e fazendo as devidas simplificações chega-se na equação 12 abaixo.

$$\begin{aligned} H_{B,H}(s) &= \\ &\frac{1.005s^4}{s^4 + 4.557 \cdot 10^4 s^3 + 1.038 \cdot 10^9 s^2 + 1.386 \cdot 10^{13} s + 9.246 \cdot 10^{16}} \end{aligned} \quad (12)$$

O gráfico de lugar das raízes da função de transferência na expressão acima é apresentado na figura 4 abaixo. Como esperado, há 4 polos (complexos conjugados) e um zero na origem.

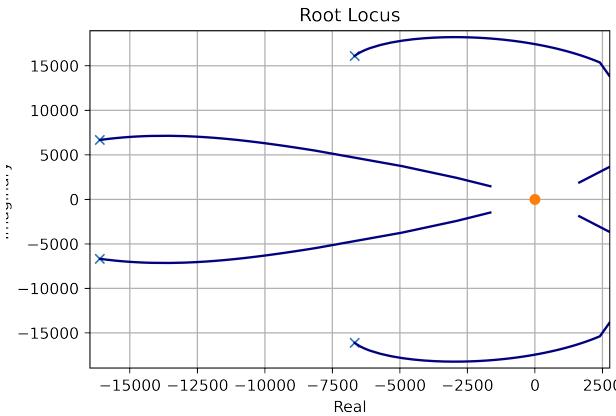


Fig. 4. Root Locus do filtro passa-altas (Fonte: Autor.)

Na figura 5 são apresentadas as respostas em frequência, de fase e ganho, do filtro projetado. Mais abaixo, na figura 6 é mostrado com mais detalhes o gráfico de ganho em conjunto com o gabarito determinado, comprovando que o projeto atende aos requisitos.

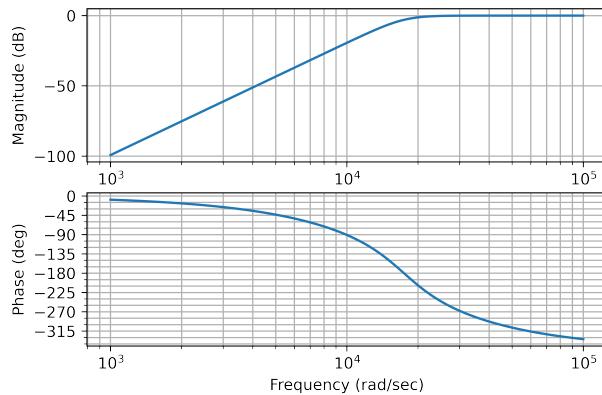


Fig. 5. Diagrama de Bode do filtro passa-altas (Fonte: Autor.)

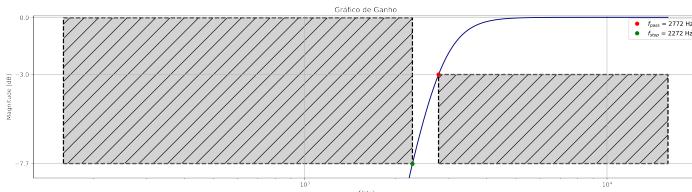


Fig. 6. Gráfico de ganho do filtro passa-altas (Fonte: Autor.)

D. Implementação analógica

Para realizar a implementação analógica utilizou-se o modelo de filtro passa-altas de 2º ordem com amplificadores operacionais apresentado na literatura, como mostra a figura 13. Para este modelo, considerando $R_1 = R_2 = R$ e $C_1 = C_2 = C$, a sua função de transferência é dada pela expressão 13, em que $K = 1 + R_B/R_A$.

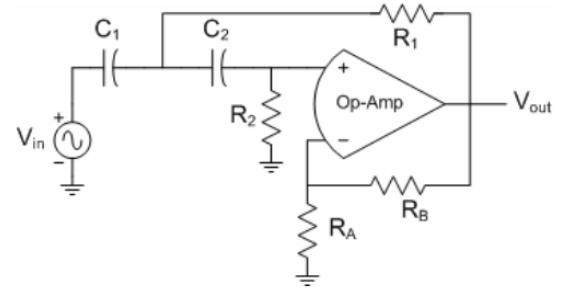


Fig. 7. Filtro passa-altas com amplificador operacional (Fonte: Thede, 2004.)

$$H_{c,H}(s) = \frac{K s^2}{s^2 + [(3 - K)/RC] s + 1/R^2 C^2} \quad (13)$$

Assim, tendo em vista que foi projetado um filtro de 4º ordem, o circuito será dividido em dois subdomínios, cada um com sua respectiva função de segunda ordem. Para determinar os valores dos componentes, a expressão anterior é comparada com uma expressão genérica de um filtro passa-altas de segunda ordem (14) e assim é retirada as relações necessárias apresentadas na expressão 15.

$$H_{a,H} = \frac{G s^2}{s^2 + b_1 s + b_2} \quad (14)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{b_2 C^2}} \quad \text{e} \quad \frac{R_B}{R_A} = 2 - \frac{b_1}{\sqrt{b_2}} \quad (15)$$

Desse modo, assumindo os valores de $C = 10 \text{ nF}$, $R_A = 100 \text{ k}\Omega$ e a função de transferência fatorada em duas expressões de segunda ordem como mostra a expressão 16, chega-se nos valores da tabela IV.

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1.0025 s^2}{s^2 + 1.335 \cdot 10^4 s + 3.041 \cdot 10^8} \\ H_1 &= \frac{1.0025 s^2}{s^2 + 2.278 \cdot 10^4 s + 2.15 \cdot 10^8} \end{aligned} \quad (16)$$

TABLE IV
PARÂMETROS DE IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO PASSA-ALTA

m	R_m	R_B/R_A	R_{Bm}	K_m
0	$5.735 \text{ k}\Omega$	1.235	$123.463 \text{ k}\Omega$	2.235
1	$6.82 \text{ k}\Omega$	0.446	$44.623 \text{ k}\Omega$	1.446

Além disso, é necessário adicionar um divisor de tensão na saída do circuito visto que o ganho é diferente de 1 agora.

Para modelar os resistores do divisor de tensão é utilizado o parâmetro que multiplica o termo s^4 na função de transferência do filtro (G_{Tot}) e os valores de K's para cada circuito. Dado esses valores é possível utilizar a equação 17

$$GA = \frac{K_{Tot}}{G_{Tot}} = \frac{3.232}{1.005} = 3.216 \quad (17)$$

com $K_{Tot} = \Pi_m K_m$.

O valor dos resistores pode ser calculado então conforme as equações 18 e 19.

$$R_x = GA \cdot R_A = 321.647 \text{ k}\Omega \quad (18)$$

$$R_y = \frac{R_x}{GA - 1} = 145.117 \text{ k}\Omega \quad (19)$$

Um imagem do circuito completo e da simulação no *LtSpice* podem ser vistas nas imagens 8 e 9. Percebe-se que as atenuações de projeto ocorreram em frequências um pouco menos do que o esperado, provavelmente por conta de arredondamentos nos valores do resistores e por conta de perdas inerentes do circuito.

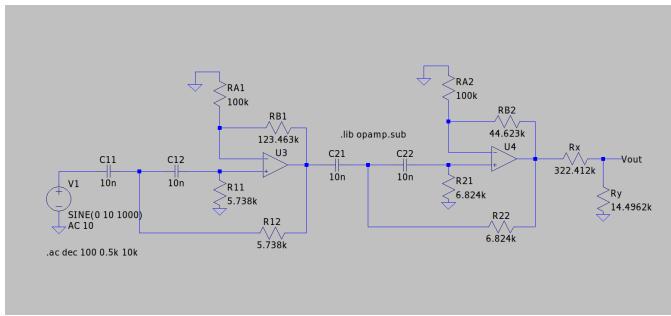


Fig. 8. Circuito analógico filtro passa-altas (Fonte: Autor.)



Fig. 9. Resposta em frequência filtro passa-altas (*LtSpice*) (Fonte: Autor.)

IV. PROJETO DO FILTRO PASSA-BANDA

A. Passa-baixas normalizado

Para realizar o projeto do filtro passa-banda primeiro foi feito uma verificação da possibilidade desse filtro por meio da equação 20 abaixo.

$$\frac{f_{pass,1}}{f_{stop,1}} = \frac{f_{pass,2}}{f_{stop,2}} \Rightarrow 1.379 \neq 0.847 \quad (20)$$

Como a relação não foi atendida o valor de $f_{stop,1}$ foi redefinido isolando o mesmo na equação anterior como mostra a equação 21.

$$f_{stop,1} = \frac{f_{pass,1}}{f_{pass,2}} f_{stop,2} = 1541 \text{ Hz} \quad (21)$$

Com isso pode-se calcular a razão entre as frequências por meio da equação 22.

$$\Omega_{rP} = \frac{f_{stop,2} - f_{stop,1}}{f_{pass,2} - f_{pass,1}} = 1.818 \quad (22)$$

Aplicando esse valor na equação 5, chega-se em $n = 3.457$, o que implica em filtro de quarta ordem. Em seguida, aloca-se os polos no plano s por meio das equações 7 e 8. O resultado é apresentado abaixo.

$$\begin{cases} \sigma_m = [-0.383 \ -0.925] \\ \omega_m = [0.925 \ -0.925] \\ \theta_m = [112.5 \ 157.5] \text{ deg} \end{cases}$$

Note que, como a ordem do filtro normalizado continuou igual a quatro, os valores de R e ε se mantém 1.001 e 0.995 respectivamente.

Por fim, calcula-se os coeficientes B_m (equação 10) e a função de transferência é montada por meio da equação 9. Novamente, como a ordem continuou igual, tanto os coeficientes quanto a função de transferência continuaram iguais

$$H_B = \frac{1.005}{1.005\bar{s}^4 + 2.622\bar{s}^3 + 3.422\bar{s}^2 + 2.616\bar{s} + 1}$$

B. Conversão para Passa-faixas

Para realizar a conversão para o para passa-faixas basta realizar a substituição

$$\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{BW \cdot s}$$

na expressão anterior.

Assim, fazendo os devidos cálculos chega-se na expressão 23.

$$H_{B,P}(s) = \frac{1.28 \cdot 10^{15}s^4}{s^8 + 1.561 \cdot 10^4 s^7 + 9.185 \cdot 10^8 s^6 + 9.886 \cdot 10^{12} s^5 + 2.878 \cdot 10^{17} s^4 \cdots} \cdots + 1.969 \cdot 10^{21} s^3 + 3.644 \cdot 10^{25} s^2 + 1.233 \cdot 10^{29} s + 1.574 \cdot 10^{33} \quad (23)$$

Os gráficos de lugar das raízes 10 da função de transferência acima pode ser observado na figura 10. Como esperado, há oito polos em dois grupos de quatro na região do semi-plano esquerdo.

É interessante perceber que cada grupo de quatro polos realiza um semi-circunferência semelhante a disposição de um filtro passa-baixa/passa-alta. Indicando que um filtro passa-banda é uma composição desses dois filtros.

A figura 11 apresenta o diagrama de bode na magnitude e na fase do filtro passa-banda projetado, na figura 12 as frequências de corte e de atenuação são evidenciadas. Percebe-se principalmente a característica plana da resposta na banda de passagem particularidade do filtro de Butterworth.

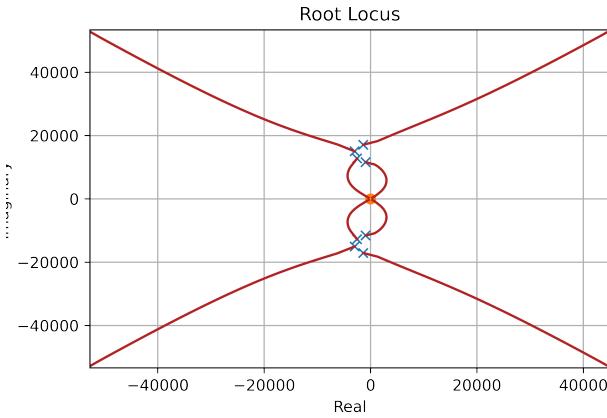


Fig. 10. Root-locus passa-faixas (Autor.)

Outra aspecto importante de ressaltar é que as frequências de transição estão com atenuações menores que as requisitadas, isso ocorre pelo fato de que a ordem do filtro foi aproximada para cima para atender os requisitos.

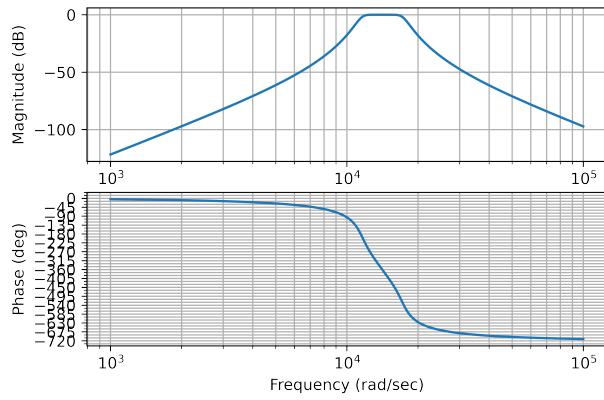


Fig. 11. Digrama de Bode passa-faixas (Autor.)

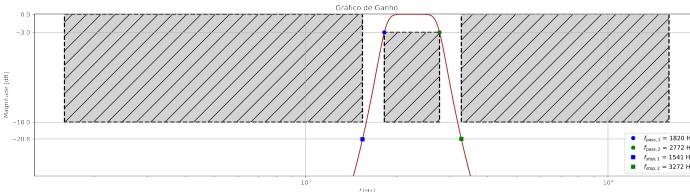


Fig. 12. Gráfico de ganho do filtro passa-banda (Autor.)

C. Implementação analógica

De modo semelhante a implementação para o filtro passa-altas, o filtro passa-banda será implementado com a utilização de amplificadores operacionais (figura ??) em que cada sub-domínio representa uma função de segunda ordem como a

equação 24. Onde $K = 1 + R_B/R_A$, $R_1 = R_2 = R_3 = R$ e $C_1 = C_2 = C$.

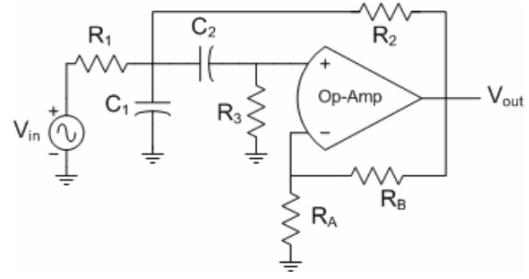


Fig. 13. Filtro passa-banda com amplificador operacional (Fonte: Thede, 2004.)

$$H_{c,P} = \frac{K \cdot s / RC}{s^2 + [(4 - K) / RC] \cdot s + 2 / R^2 C^2} \quad (24)$$

As relações para os resistores, expressões em 26, são retiradas comparando a função de transferência acima com uma função genérica como a mostrada na equação 25.

$$H_{aH} = \frac{a_1 s^2}{s^2 + b_1 s + b_2} \quad (25)$$

$$R = \sqrt{\frac{2}{b_2 C^2}} \quad \text{e} \quad \frac{R_B}{R_A} = 3 - \sqrt{\frac{2b_1^2}{b_2}} \quad (26)$$

Desse modo, assumindo os valores de $C = 10 \text{ nF}$, $R_A = 100 \text{ k}\Omega$ e a função de transferência fatorada em quatro expressões de segunda ordem como mostra as equações em 27, chega-se nos valores da tabela V.

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{5982s^2}{s^2 + 2726 \cdot s + 2.941 \cdot 10^8} \\ H_1 &= \frac{5982s^2}{s^2 + 4350 \cdot s + 2.611 \cdot 10^8} \\ H_2 &= \frac{5982s^2}{s^2 + 5974 \cdot s + 2.349 \cdot 10^8} \\ H_3 &= \frac{5982s^2}{s^2 + 5520 \cdot s + 1.992 \cdot 10^8} \end{aligned} \quad (27)$$

TABLE V
PARÂMETROS DE IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO PASSA-BANDA

m	R_m	R_B/R_A	R_{Bm}	K_m
0	8.245 $\text{k}\Omega$	2.775	277.505 $\text{k}\Omega$	3.775
1	8.752 $\text{k}\Omega$	2.619	261.902 $\text{k}\Omega$	3.619
2	9.227 $\text{k}\Omega$	2.448	244.843 $\text{k}\Omega$	3.448
3	10.021 $\text{k}\Omega$	2.447	244.655 $\text{k}\Omega$	3.447

Para modelar os resistores do divisor de tensão na saída do circuito, para o caso do passa-banda, o ajuste ganho foi calculado conforme a equação 28 proposta por Thede (2004), em que os valores com subíndice m estão relacionados com

cada estágio do filtro. Dado esses valores é possível utilizar as equação 18 e 19 para calcular os resistores.

$$GA = \Pi_m \frac{K_m}{a_{1m} R_m C_m} = 1901.55 \quad (28)$$

Desse modo, o divisor de tensão fica $R_x = 190.108 M\Omega$ e $R_y = 100.053 k\Omega$. O circuito montado para o passa-banda e sua resposta em frequência simulada no *LtSpice* podem ser observadas nas figuras 14 e 15.

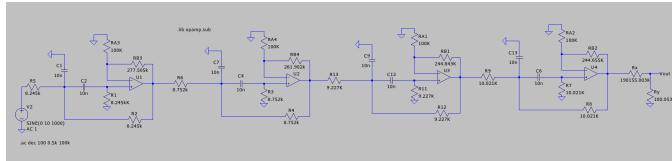


Fig. 14. Circuito analógico filtro passa-banda (Fonte: Autor.)

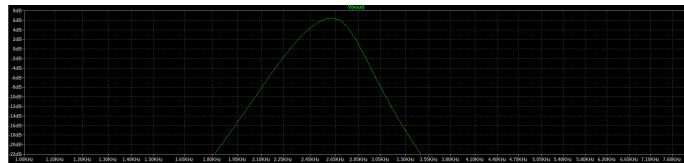


Fig. 15. Resposta em frequência filtro passa-banda (*LtSpice*) (Fonte: Autor.)

No caso do passa-banda as frequências de corte e suas respectivas atenuações foram mais respeitadas do que no caso do passa-altas, entretanto, na banda de passagem houve uma amplificação inesperada do sinal.

V. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível compreender mais a fundo a metodologia de projeto de um filtro analógico e as nuances relacionadas ao processo analítico e de implementação do filtro.

Apesar das repostas simuladas do circuito divergirem das respostas simuladas com modelos em softwares, garantiu-se um comportamento semelhante dos resultados e agregou-se bastante conhecimento relacionado a teoria de filtros analógicos e suas principais ferramentas de projeto.

REFERENCES

- [1] Les Thede, Practical Analog and Digital Filter Design. Inc: Artech House, 2004.
- [2] “Python Control Systems Library”. [Online]. Available: <https://python-control.readthedocs.io/en/latest/intro.html>. [Accessed: 14-dez-2022].