TDMA Aplicado ao Problema de Condução Bidimensional numa Barra

Widmark Kauê Silva Cardoso
18202772

1. INTRODUÇÃO

TDMA (*Tri Diagonal Matrix Algorithm)* é um método numérico utilizado para a resolução de sistemas lineares em que a matriz global do problema possui valores apenas na diagonal principal e nas diagonais vizinhas imediatamente acima e abaixo (tri diagonal). Ele tem a vantagem de utilizar pouco espaço de memória e resolver rapidamente esse tipo de matriz (Versteeg e Malalasekera, 2007) . O método é direto para problemas unidimensionais, mas pode ser estendido para problemas 2D e 3D utilizando-o iterativamente linha a linha da malha.

Neste trabalho foi estudado a aplicação do TDMA para resolução do problema de condução de calor na seção transversal de uma barra retangular longa com W = 50 cm e L = 50 cm . Foi fixada na interface superior a temperatura de T2 = 100 ºC e nas demais superfícies T1 = 0º, como mostra a Figura 1 abaixo. Em seguida foram comparados os resultados obtidos pelo algoritmo com as soluções computadas através da inversão de matriz e a solução analítica apresentada por Incropera *et al*. (2003).

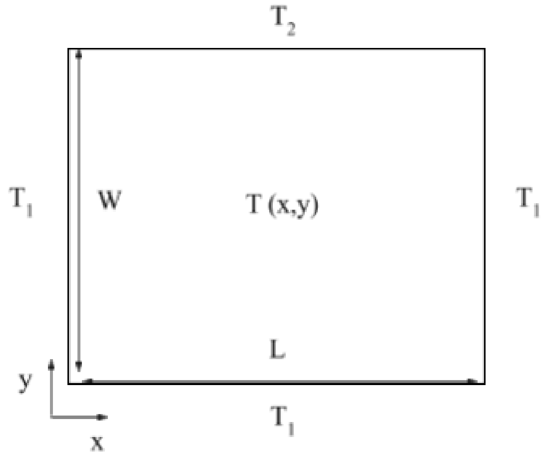

Figura 1: Seção transversal de uma barra longa

2. METODOLOGIA

Para a solução do problema, neste estudo foram assumidas algumas hipóteses quanto ao fenômeno regente:

1. Condução bidimensional;
2. Regime permanente;
3. Sem geração de calor;
4. Propriedades constantes.

Aplicando essas hipóteses na equação da difusão apresentada por Incropera *et al.* (2003), chega-se na equação (1) abaixo.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Para aplicar o método dos volumes finitos é necessário discretizar a equação governante para pontos do domínio em que as propriedades serão calculadas (Figura 2).

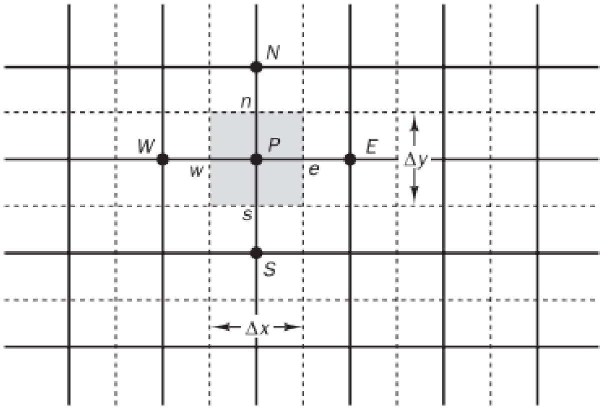

Figura 2: Malha Genérica

Integrando a equação anterior e interpolando linearmente a temperatura entre os volumes de controle, chega-se na equação (2).

$$\left[2\frac{\Delta y}{\Delta x} + 2\frac{\Delta x}{\Delta y}\right] T_p = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) T_E + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) T_W + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) T_N + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) T_S \qquad (2)$$

Note que, a temperatura no centro de cada volume de controle (P) depende dos seus vizinhos a oeste, leste, norte e sul. Nos casos em que o volume de controle pertence a linhas e colunas adjacentes às superfícies da barra, os vizinhos faltantes são substituídos pela influência das condições de contorno de temperatura fixadas.

Assim, a equação (3) abaixo representa esse problema no modelo padrão do TDMA. Onde o subíndice *nb* representa os vizinhos do volume de controle *p*, e *a* seus respectivos coeficientes. Por fim, *Su* é o termo fonte e só possui valor nas superfícies onde as temperaturas foram fixadas.

$$a_p T_p = \sum a_{nb} T_{nb} + Su \qquad (3)$$

Para percorrer a malha, foi adotado a varredura linha a linha no sentido de oeste para leste e norte para sul, portanto a expressão para resolução por meio do TDMA iterativo fica como a equação (4). Os termos relacionados aos vizinhos norte e sul são atualizados a cada linha para gerar o campo de temperatura naquela região.

$$-a_w T_W + a_p T_p - a_e T_E = Su + a_n T_N + a_s T_s \qquad (4)$$

Uma iteração é contada assim que toda a malha é percorrida, em seguida o processo é repetido com a nova estimativa do campo de temperatura que foi gerado da iteração anterior. Como condição de parada, foram calculados os resíduos locais a cada iteração, foi selecionado o resíduo com maior valor quadrático dentre eles e comparado com um valor de tolerância pré-definido.

Por fim, o campo de temperatura foi inicializado com todos os valores iguais a zero e a malha do problema foi discretizada com 50x50 elementos. O software Matlab foi utilizado para realizar a implementação dos métodos o o tempo de processamento utilizando a solução pela inversa e pelo TDMA foi computado utilizando a função *tic e toc*. Os resultados podem ser observados na seção abaixo.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

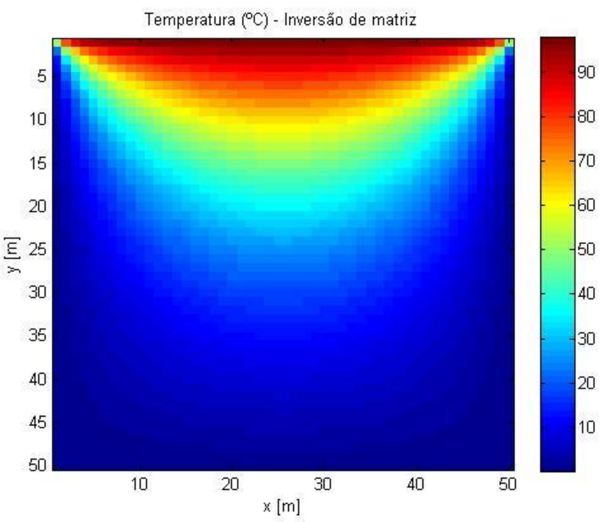

Figura 3: Solução pela Inversa

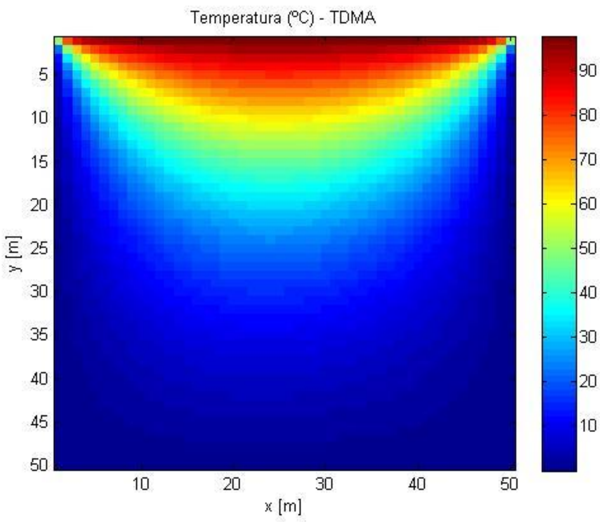

Figura 4: Solução TDMA

Percebe-se pelas Figuras 3 e 4 que os resultados da inversão de matriz e do TDMA ficaram bem próximos um do outro. O tempo de processamento do TDMA foi aproximadamente de 0.20 s mais rápido do que a inversão de matriz, demonstrando a sua vantagem na resolução de problemas mais refinados e complexos .

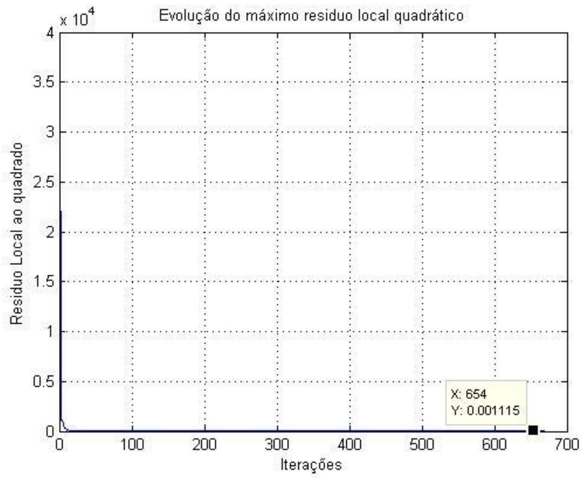

Figura 5: Evolução do resíduo local máximo ao quadrado.

Note pela Figura 5 que o resíduo cai muito rapidamente nas primeiras iterações do TDMA até convergir finalmente. Testes realizados tirando o valor absoluto no lugar de elevar ao quadrado o resíduo demonstraram que a velocidade de convergência diminui.

Por fim, a distribuição de erros do TDMA em comparação com a inversão de matriz e a solução analítica foram plotadas nas Figuras 6 e 7. Assim, percebe que o TDMA se aproximou mais da solução analítica do que da solução pela inversa.

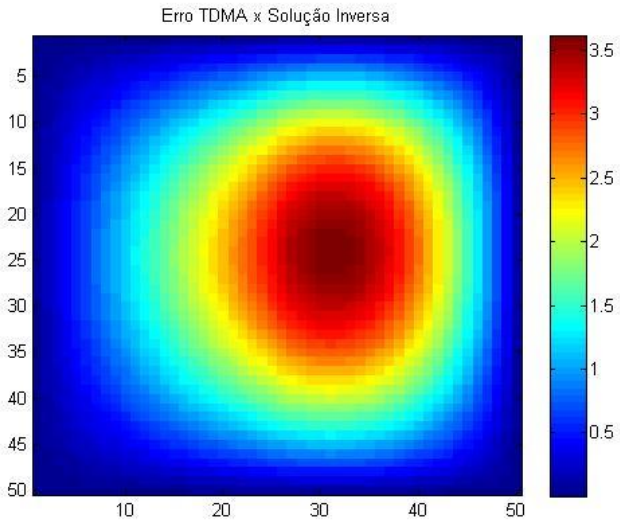

Figura 6: Erro TDMA x Solução Inversa

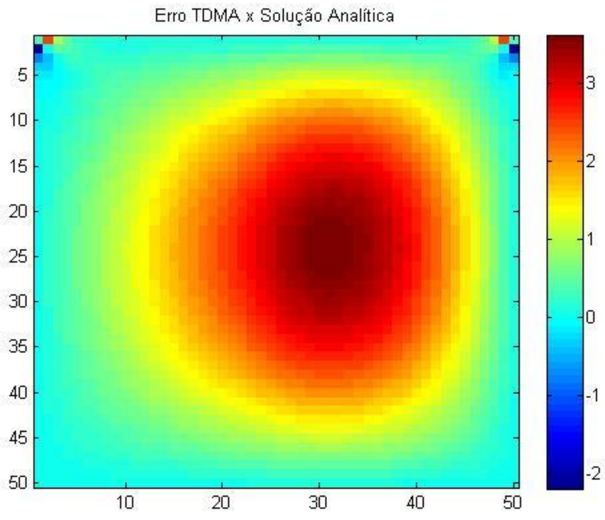

Figura 7: Erro TDMA x Solução Analítica

4. CONCLUSÕES

O método TDMA se mostrou muito eficaz na resolução do problema de condução bidimensional da barra e flexível para possíveis alterações no enunciado. Ademais, mostrou-se uma ótima alternativa para problema em que o custo computacional envolvido é significante e não é possível utilizar a inversão de matrizes como opção.

REFERÊNCIAS

VERSTEEG, H.K., MALALASEKERA, W., An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the Finite-Volume Method, 2a edição, Pearson, 2007.

Incropera, F. P., & DeWitt, D. P.. (2003). Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC;