

Simulação da Condução Transiente de Calor na Seção Transversal de uma Barra Utilizando FVM

Widmark Kauê Silva Cardoso

18202772

1 Introdução

Neste trabalho foi estudado a aplicação da discretização do FVM (*Finite Volume Method*) para resolução do problema de condução transiente de calor na seção transversal de uma barra retangular longa (Figura 1). Neste problema a altura e largura da barra são $W = L = 50 \text{ cm}$ e as temperaturas nas superfícies são mantidas constantes a $T_1 = 0 \text{ °C}$ e $T_2 = 100 \text{ °C}$.

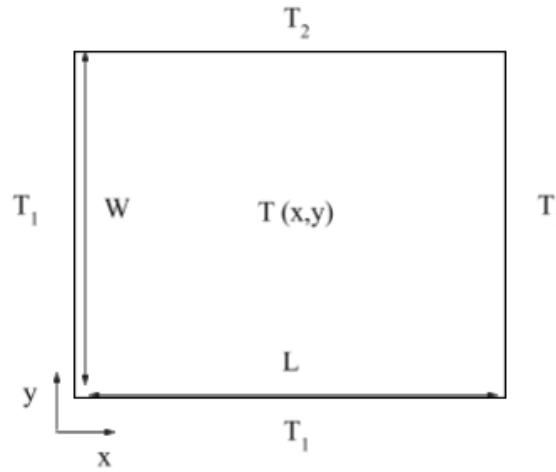


Figura 1: Seção transversão da barra

A distribuição de calor na barra é regida pela equação (1), em que α é a difusividade térmica da barra e é igual a $1 \text{ m}^2/\text{s}$. Note que, naturalmente, trata-se de um problema bidimensional com propriedades constantes e sem geração de calor.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

2 Metodologia

Para aplicar o método dos volumes finitos é necessário discretizar a equação governante para pontos do domínio em que as propriedades serão calculadas (Figura 2).

Desse modo, é necessário integrar no volume e no tempo a equação (1). Para tanto, foi utilizado o esquema CDS (*central difference schemes*) para a discretização dos termos difusivos e um esquema de primeira ordem (*backward difference schemes*) para o termo transiente, como apresentado por Versteeg e Malalasekera (2007).

A equação (2) mostra o sistema a ser resolvido após a aplicação dos esquemas citados,

$$a_p T_p = \sum (a_{nb} [\theta T_{NB} + (1 - \theta) T_{NB}^0]) + A_p^0 T_p^0 + S_u \quad (2)$$

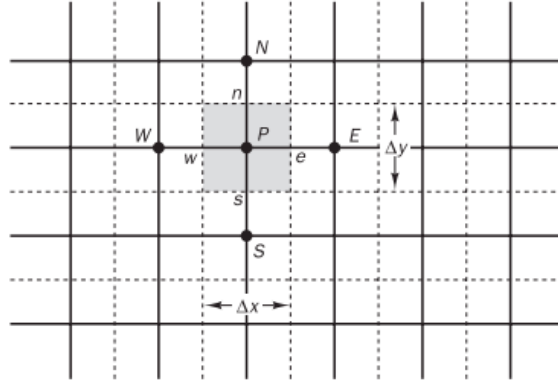


Figura 2: Malha genérica

em que o sobrescrito "0" indica o valor da temperatura no tempo imediatamente anterior. Os termos a_p e A_p^0 dependem dos coeficientes dos seus vizinhos de acordo com as equações (3) e (4).

$$a_p = (a_w + a_e + a_n + a_s - S_p)\theta + a_p^0 \quad (3)$$

$$A_p^0 = a_p^0 - (a_w + a_e + a_n + a_s - S_p)(1 - \theta) \quad (4)$$

As expressões dos coeficientes dos volumes vizinhos (temporais e espaciais) e das aplicações das condições de contorno no termo fonte e no termo S_p são apresentados na tabela 1. Note que, como a temperatura T_1 é igual a 0, o termo fonte só terá valor na interface norte da malha.

Tabela 1: Coeficientes da discretização

Região da malha	a_w	a_e	a_n	a_s	a_p^0	$-S_p$	S_u
Oeste	0	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{\Delta x \Delta y}{2\alpha \Delta t}$	$2\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$2T_1\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Leste	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	0	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{\Delta x \Delta y}{2\alpha \Delta t}$	$2\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$2T_1\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Norte	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	0	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{\Delta x \Delta y}{2\alpha \Delta t}$	$2\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$2T_2\frac{\Delta x}{\Delta y}$
Sul	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	0	$\frac{\Delta x \Delta y}{2\alpha \Delta t}$	$2\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$2T_1\frac{\Delta x}{\Delta y}$
Miolo	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{\Delta x \Delta y}{\alpha \Delta t}$	0	0

Por fim, o termo θ presente nas equações supracitadas varia de 0 a 1 e indica o tipo de esquema que será utilizado para interpolação temporal, onde são definidas diferentes formas de levar em consideração as informações do passo de tempo anterior como mostra a Figura 3. Para $\theta = 0$ e $\theta = 1$ dar-se o nome de esquema explícito e totalmente implícito, respectivamente.

O valor de $\theta = 0.5$ é especialmente chamado de esquema de Crank-Nicolson (Versteeg e Malalasekera, 2007). Com execução do esquema totalmente implícito, os outros esquemas de interpolação temporal possuem uma restrição de passo de tempo, equação (5), para evitar que o termo A_p^0 seja menor que zero.

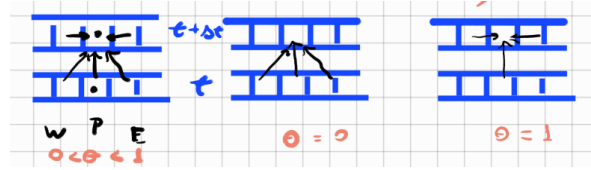


Figura 3: Esquemas de interpolação

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x \Delta y}{2\alpha \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) (1 - \theta)} \quad (5)$$

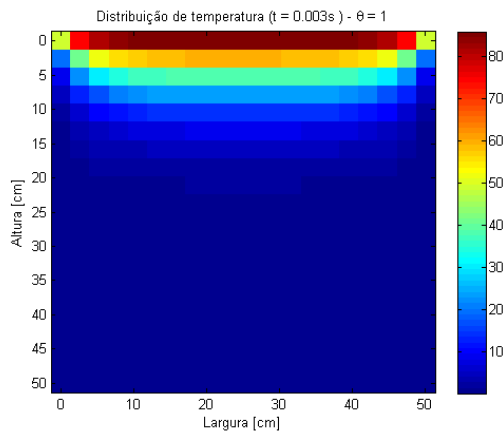
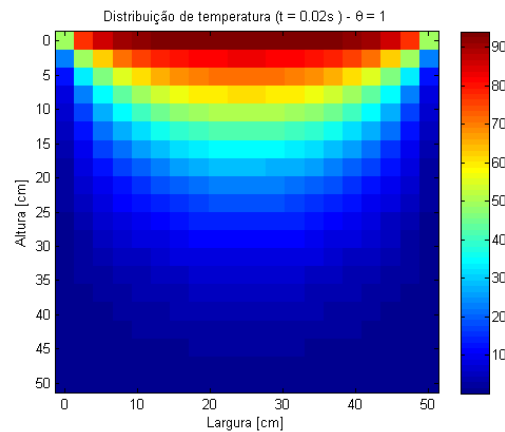
Foram realizados testes para avaliar se a simulação estava convergindo, desse modo, foi analisado a temperatura média na interface norte do domínio pelo tempo decorrido utilizando os três métodos citados. Além disso, foram plotados a distribuição de temperatura para visualizar a evolução do campo com o tempo e foi comparado o tempo de processamento para cada um dos métodos.

No MATLAB foi implementado o TDMA (*tri diagonal matrix algorithm*) iterativo para a resolução dos sistemas lineares. Quando utilizado os métodos explícito e de Crank-Nicolson foi utilizado um Δt de metade do valor calculado pela equação (5).

3 Resultados e Discussões

As Figuras 4, 5, 6 e 7 apresentam a variação do campo de temperatura com tempo utilizando o método totalmente implícito. Nota-se que nas duas últimas imagens já é pouco perceptível a variação do campo de temperatura.

Notou-se durante os testes que o transiente deste problema em questão ocorre muito rapidamente, em torno de 0.1 segundos, o que embasa a escolha de utilizar a simplificação de regime permanente comumente adotada nos livros de transferência de calor.

Figura 4: Campo de temperatura ($t = 0.003s$)Figura 5: Campo de temperatura ($t = 0.02s$)

Para comparar os métodos foi realizado uma média da temperatura na superfície superior da barra ao decorrer do tempo (Figura 8). Pode-se notar que os esquemas totalmente implícito e de Crank-Nicolson tiveram

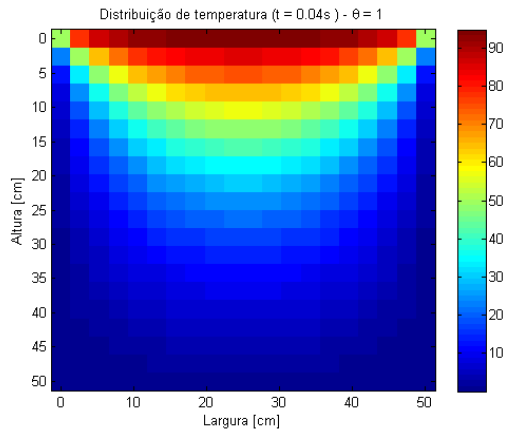


Figura 6: Campo de temperatura ($t = 0.04s$)

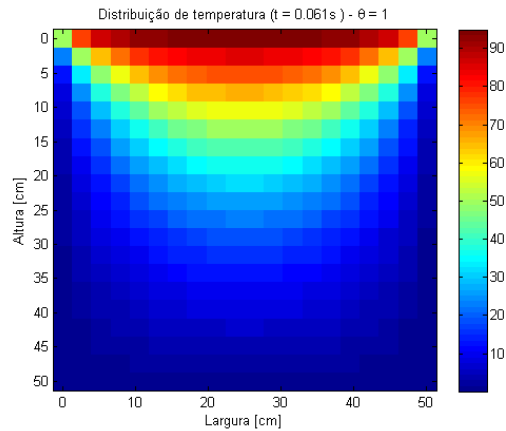


Figura 7: Campo de temperatura ($t = 0.061s$)

o comportamento esperado, no entanto, os valores obtidos para $\theta = 0.5$ estavam em faixas acima da condição de contorno estabelecida (em torno de $300\text{ }^{\circ}\text{C}$), indicando um má aplicação do método. O resultado para $\theta = 1$ (Figura 9) atingiu o regime permanente antes de completar todas a iterações e apresentou valores condizentes com a física do problema e os valores esperados pela solução analítica apresentada por Incropera *et al.* (2003).

Em contra partida, o esquema explícito não conseguiu convergir para o tamanho de malha utilizado e o passo de tempo adotado. Devido as limitações computacionais, não foram realizados mais testes com esse esquema.

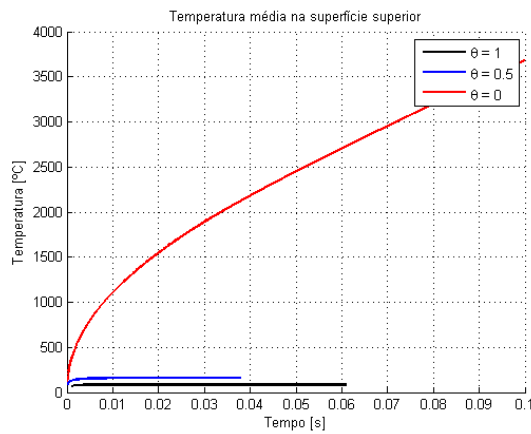


Figura 8: Comparação entre os esquemas

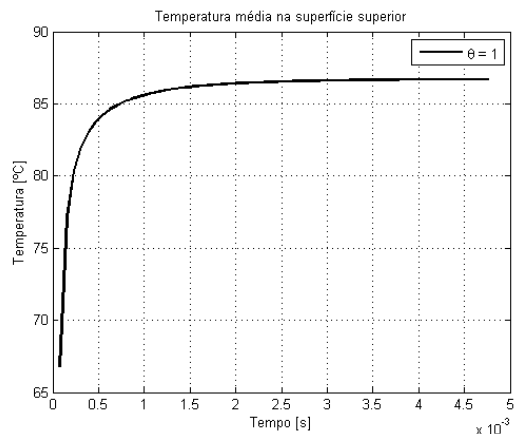


Figura 9: Evolução esquema totalmente implícito

Por fim, os Δt 's adotado para cada esquema, e seus respectivos tempos de execução, são apresentados na tabela 2. Como já mencionado, o tempo gasto para os esquemas explícito e de Crank-Nicolson são muito superiores ao esquema implícito e, para esse problema em específico com a metodologia utilizada, não obtiveram bons resultados da simulação.

Tabela 2: Tempos de execução e Δt 's			
θ	1	0.5	0
Δt [s]	1e-3	156.25e-6	78.12e-6
Tempo [s]	0.57	3664	14495

4 Conclusões

Por conseguinte, pode-se notar as diferentes abordagens entre os esquemas de interpolação temporal. O tempo de simulação para o método de Crank-Nilcoson e o método explícito é consideravelmente maior do que para o método totalmente implícito. Nessa perspectiva, é razoável afirmar que para esse problema é mais vantajoso utilizar o método implícito para obter uma solução.

Foi necessário limitar as iterações do TDMA em no máximo 10000 para realizar as análises em questão. Devido a isso, os resultados para $\theta = 0.5$ e $\theta = 0$ sofreram uma perda de acurácia significável que não está sendo considerada neste trabalho. Além disso, não foi realizado um estudo de refino de malha do problema.

Para estudos futuros é indicado aumentar o limite de iterações do TDMA e assim medir com mais eficiência a performance dos esquemas, além de utilizar malhas com diferentes refinamentos nos testes.

Referências

- [1] VERSTEEG, H.K., MALALASEKERA, W., An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the Finite-Volume Method, 2a edição, Pearson, 2007.
- [2] Incropera, F. P., & DeWitt, D. P.. (2003). Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, 5a edição. Rio de Janeiro: LTC;