

# Utilização do TDMA e UDS para Solução do Desenvolvimento da Camada Limite Térmica em um Tubo

Widmark Kauê Silva Cardoso

18202772

## 1 Introdução

TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) é um método numérico utilizado para a resolução de sistemas lineares em que a matriz global do problema possui valores apenas na diagonal principal e nas diagonais vizinhas imediatamente acima e abaixo (tri diagonal). Ele tem a vantagem de utilizar pouco espaço de memória e resolver rapidamente esse tipo de matriz (Versteeg e Malalasekera, 2007). O método é direto para problemas unidimensionais, mas pode ser estendido para problemas 2D e 3D utilizando-o iterativamente linha a linha da malha.

Este trabalho estudou a aplicação do TDMA para resolução do problema convectivo-difusivo do escoamento (com temperatura  $T_0$ ) em um tubo de seção transversal circular com fluxo de calor constante na sua superfície (Figura 1). Os dados do problema são apresentados na tabela 1.

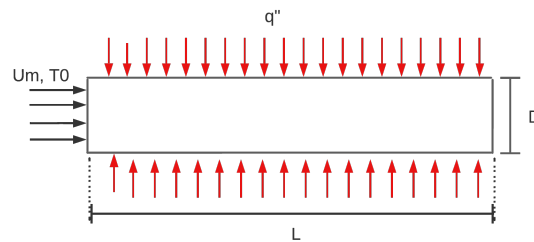


Figura 1: Tubo

Tabela 1: Dados

Parâmetro	Símbolo	Valor	Parâmetro	Símbolo	Valor
Diâmetro	$D$	1 mm	Cond. térmica	$k$	1 W/m.K
Comprimento	$L$	5 mm	Densidade	$\rho$	100 kg/m <sup>3</sup>
Temp. do fluido	$T_0$	30 °C	Viscosidade	$\mu$	0.1 Pa.s
Velocidade média	$U_m$	1 m/s	Calor específico	$c_p$	1000 J/kg.K
Fluxo de Calor	$q_s''$	1000 W/m <sup>2</sup>	Número de Prandtl	$Pr$	100

O objetivo principal é avaliar o desenvolvimento da camada limite térmica no tubo e comparar com as soluções analíticas apresentadas por Incropera *et al.* (2003).

## 2 Metodologia

### 2.1 Equações Governantes

Para a resolução do problema, foram assumidas as seguintes hipóteses:

- Escoamento Laminar
- Fluido incompressível
- Camada limite hidrodinâmica se desenvolve muito mais rapidamente que a camada limite térmica.
- Difusão ocorre somente no sentido radial (Problema 2D)

Aplicando essas hipóteses na equação energia em coordenadas cilíndricas, chega-se a expressão que rege o problema, como mostra a equação (1):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k}{c_p} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

Como a camada limite hidrodinâmica se desenvolve muito mais rápido, tem-se uma expressão para o perfil de velocidade no tubo de acordo com a equação (2).

$$\frac{u(r)}{U_m} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2)$$

onde  $R$  é o raio do tubo.

## 2.2 Discretização

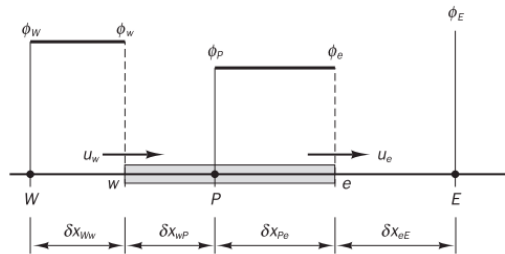
Integrando no volume a equação (1) e considerando as propriedades do fluidos constante chega-se na equação 3,

$$[(F(r)T)_e - (F(r)T)_w]G = \left[ \left( \frac{k}{c_p} r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_n - \left( \frac{kr}{c_p} \frac{\partial T}{\partial r} \right)_s \right] 2\pi \Delta x \quad (3)$$

em que  $G = 2\pi \left( \frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \right)$  é a área anelar do volume de controle e  $F(r) = \rho u(r)$ , o fluxo convectivo que atravessa esta área.

Para realizar a discretização, foi utilizado o esquema de interpolação UDS (*Upwind Difference Schemes*), em que não são consideradas as informações a jusante do escoamento, ou seja, para o escoamento positivo, o valor da temperatura na interface leste do volume de controle é aproximada para o valor no meio do volume de controle como mostra a figura (2) num caso unidimensional.

Figura 2: Representação Visual UDS unidimensional



Assim, chega-se na equação (4),

$$[F(r)G + D[2\pi r_s \Delta x] + D[2\pi r_n \Delta x]] T_P = [F(r)G] T_W + D[2\pi r_n \Delta x] T_N + D[2\pi r_s \Delta x] T_S \quad (4)$$

onde  $\Delta x$  e  $\Delta r$  são os comprimentos axial e radial do volume de controle,  $r_n$  e  $r_s$  as posições radiais das superfícies de controle e  $D = \frac{k}{c_p \Delta r}$  o fluxo difusivo.

Da equação anterior são obtidas as expressões para os coeficientes e, realizando a integração nas fronteiras do domínio (condições de contorno), também são obtidas expressões para o termo fonte e o  $S_p$  como mostra a tabela (2).

Tabela 2: Coeficientes TDMA

Face	$a_w$	$a_e$	$a_n$	$a_s$	$S_p$	$S_u$
Oeste	0	0	$D[2\pi r_n \Delta x]$	$D[2\pi r_s \Delta x]$	$-\rho U_m G$	$\rho U_m T_0 G$
Leste	$F(r)G$	0	$D[2\pi r_n \Delta x]$	$D[2\pi r_s \Delta x]$	0	0
Norte	$F(r)G$	0	0	$D[2\pi r_s \Delta x]$	0	$k R q_s'' 2\pi dx / c_p$
Sul	$F(r)G$	0	$D[2\pi r_n \Delta x]$	0	0	0

Note que, como a malha é simétrica, é necessário resolver apenas metade do domínio, por este motivo foi adotado a condição de isolado térmicamente ( $S_u = 0$  e  $S_p = 0$ ) na face sul. Por fim, pode-se montar a equação (5) no modelo padrão aplicável ao TDMA, onde  $a_p = a_w + a_e + a_s + a_n - S - p$  e o subíndice  $nb$  indica os vizinhos do volume de controle.

$$a_p T_p = \sum a_{nb} T_{nb} + S_u \quad (5)$$

## 2.3 Malhas e Testes

Foram montadas 4 malhas para os testes: 5x5, 10x10, 20x20 e 40x40. Para cada teste foi plotado a distribuição de temperatura, os valores no meio e na superfície do cilindro foram comparados com os valores analíticos calculados pelas equações (6) e (7) disponíveis na literatura.

$$T_m = T_0 + \frac{q_s'' \pi d}{\dot{m} c_p} L \quad (6)$$

$$T_s = T_m + \frac{11}{48} \frac{q_s'' d}{k} \quad (7)$$

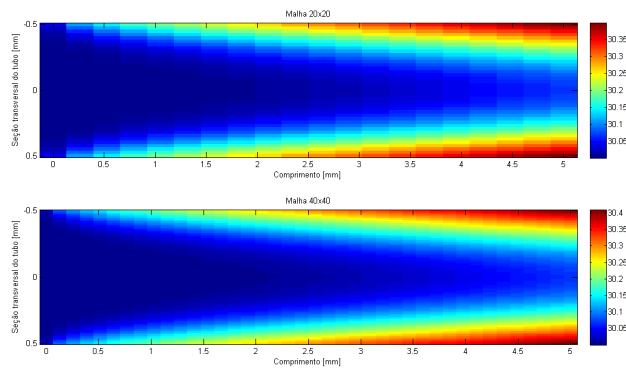
Por fim, para o caso mais refinado, os valores da última coluna do domínio foram utilizados para comparar com o perfil radial descrito pela equação 8 disponibilizada no livro do Incropera *et al.* (2003).

$$T(r) = T_s - \frac{2U_m \rho R^2}{k} \frac{q_s'' \pi d L}{\dot{m}} \left[ \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (8)$$

Para realizar as simulações e o pós-processamento dos dados foi utilizado o software MATLAB disponível no terminal remoto da UFSC.

## 3 Resultados e Discussões

Figura 3: Distribuição de temperaturas



Os resultados para as malhas 20x20 e 40x40 são apresentados nas figura 3. Pode-se se perceber claramente o desenvolvimento da camada limite térmica e o início dela na região de entrada. Os valores encontrados mostraram-se bem satisfatório, como pode ser observado na figura 4, os erros ficaram abaixo de 10% para todos os casos testados e, em especial a malha mais refinada, obteve erros abaixo de 3%.

Figura 4: Erros para cada uma das malhas.

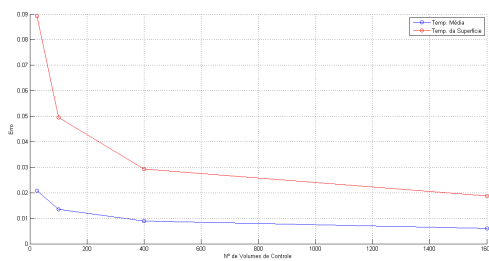
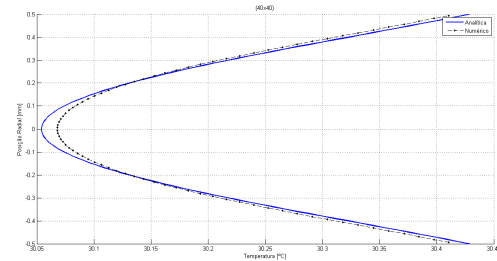


Figura 5: Perfil radial de temperatura



Foi utilizado os valores da malha mais refinada para realizar a comparação do perfil radial de temperatura. Como pode ser visto na figura 5, os valores ficaram muito próximos da solução analítica e o UDS se mostrou um esquema de interpolação satisfatório para os testes.

## 4 Conclusões

Desse modo, pode-se notar que o TDMA e o UDS se mostraram ferramentas bastante eficientes para a resolução do problema proposto. Com um custo computacional baixo, foi possível chegar em resultados bastantes precisos.

## Referências

- [1] VERSTEEG, H.K., MALALASEKERA, W., An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the Finite-Volume Method, 2a edição, Pearson, 2007.
- [b2] ncropera, F. P., DeWitt, D. P.. (2003). Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, 5a edição. Rio de Janeiro: LTC;