Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

# Лабораторная работа №3

по «Вычислительной математике»

«Интегрирование»

Выполнил:

Студент группы P32312

Лебедев В.В.

Преподаватель:

Перл О.В.

Санкт-Петербург

2023

# Описание метода

Метод прямоугольников - численный метод для приближенного вычисления определенного интеграла

Отрезок интегрирования $[a,\ b]$ делится на $n$ равных отрезков $\Delta x\ = \frac{b-a}{n}$

В соответствие точкам $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ ставится в соответствие $y_0,\ y_1,\ ...,\ y_n$, где $y_i = f(x_i)$

Тогда приближенное значение интеграла $\sum_0^n \Delta x y_i$, что и соответствует интегральным суммам. При стремлении $n \to \infty$ точность будет увеличиваться и в пределе равна самому значению интеграла.

Но для численных методов мы используем конечное число вычислений, поэтому $n$ тоже должно быть конечным.

Используя правило Рунге можно подобрать необходимое число разбиений $n$ для требуемой погрешности ε

Согласно правилу, необходимо чтобы $\Theta|I_{2n} - I_n| <\ \varepsilon$, где $I_{2n}$ - значение интеграла на текущей итерации и $I_n$ - значение интеграла на предыдущей итерации, а $\Theta$ соответствует применяемому методу: $\Theta\ =\ 1$ - для левых и правых прямоугольников и $\Theta\ = \frac{1}{3}$ - для средних.

Как уже сказано, в зависимости от выбранного метода, может достигаться разная точность.

Метод прямоугольников делится на: метод средних прямоугольников, метод правых прямоугольников и метод левых прямоугольников.

Отличие заключается в разном выборе точек $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$

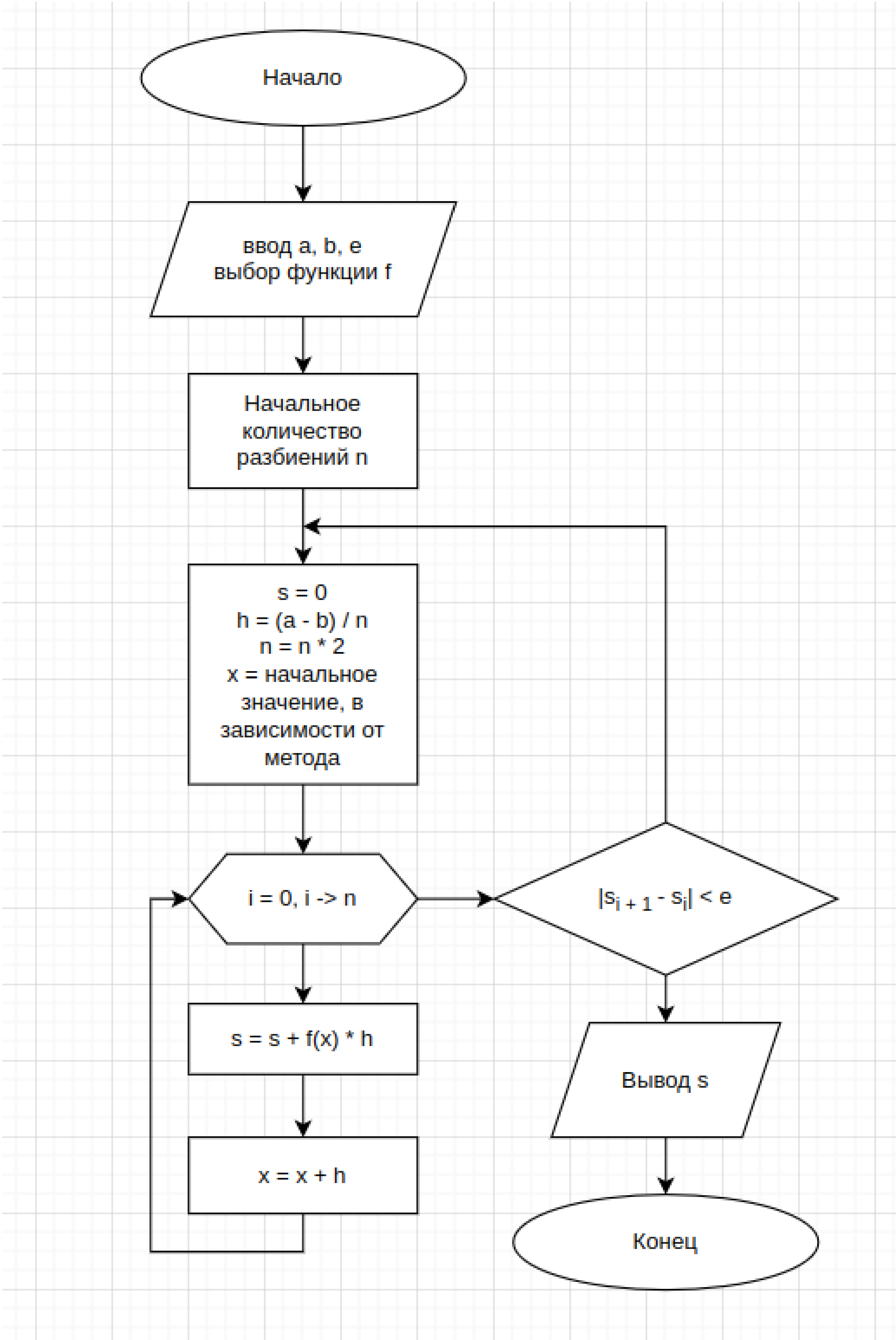
Для средних прямоугольников: $x_i = a\ + \frac{\Delta x}{2}\ +\ i\Delta x$

Для правых прямоугольников: $x_i = a\ +\ (i\ +\ 1)\Delta x$

Для левых прямоугольников: $x_i = a\ +\ i\Delta x$

Где $i\ \in\ [0...n]$

# Блок схема численного метода



# Листинг программы

```python
def rectangular_integration(
        function: Callable[[float], float],
        integration_rule: Callable[[float, float, int], float],
        lower_bound: float, upper_bound: float,
        epsilon: float = 1e-6, max_iter: int = 1000,
        start_iter: int = 2, reverse: bool = False
) -> float:
    n = start_iter
    result = 0
    for _ in range(max_iter):
        tmp = integrate_with_rule(function, integration_rule, lower_bound, upper_bound, n)
        if abs(result - tmp) < epsilon:
            break
        result = tmp
        n *= 2
    if reverse:
        return -1 * result
    return result
```

```python
def middle_rule(start_point: float, dx: float, iteration: int) -> float:
    return start_point + dx / 2 + iteration * dx


def left_rule(start_point: float, dx: float, iteration: int) -> float:
    return start_point + iteration * dx


def right_rule(start_point: float, dx: float, iteration: int) -> float:
    return start_point + (iteration + 1) * dx


def integrate_with_rule(
        function: Callable[[float], float], rule: Callable[[float, float, int], float],
        lower_bound: float, upper_bound: float, n: int
) -> float:
    sm = 0
    dx = (upper_bound - lower_bound) / n
    for i in range(n):
        sm += function(rule(lower_bound, dx, i))
    return sm * dx
```

# Примеры

```
Functions:
1) 1 / x
2) sin(x) / x
3) x^2
Enter function number [1 ... 3]: 1
Enter lower bound of integration interval [-1000 ... 1000]: -100
Enter upper bound of integration interval [-1000 ... 1000]: -10
Enter desirable integration precision [1e-12 ... 1000.0]: 0.00001

Results:
Middle rule result: -2.3025723478327955, error: 3.82271373040588e-05
Right rule result: -2.302600542615217б, error: 1.5449815670809386e-05
Left rule result: -2.302569643567366, error: 1.5449232180220207e-05
```

Definite integral

$$\int_{-100}^{-10} \frac{1}{x}\, dx = -\log(10) \approx -2.3026$$

```
Functions:
1) 1 / x
2) sin(x) / x
3) x^2
Enter function number [1 ... 3]: 2
Enter lower bound of integration interval [-1000 ... 1000]: -10
Enter upper bound of integration interval [-1000 ... 1000]: 10
Enter desirable integration precision [1e-12 ... 1000.0]: 0.00001

Results:
Middle rule result: 3.3167351044821842, error: 0.00011981649209236167
Right rule result: 3.31669019961852, error: 1.4966762678536583e-05
Left rule result: 3.31669019961852, error: 1.4966762678536583e-05
```

Definite integral

$$\int_{-10}^{10} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = 2\,\mathrm{Si}(10) \approx 3.3167$$

# Вывод

Асимптотическая сложность:
Заранее число итераций для подбора необходимого числа разбиений неизвестно, но оно зависит от требуемой точности. При заранее известном числе разбиений n алгоритм будет работать O(n) времени. Так как каждый шаг число разбиений увеличивается вдвое, то для L шагов сложность будет $\Theta(2^{(L+1)})$. Само же L зависит неявным

Сравнение:
Методы левых и правых прямоугольников имеют низкую точность, которая медленно растет с увеличением разбиения. Метод средних прямоугольников же имеет более высокий порядок аппроксимации. Поэтому методы левых и правых прямоугольников не используются на практике.