Complexe Analyse thuistoets kwartiel 2

Wietse Vaes

1. Bewijs dat de vergelijking, met $a_n \neq 0$, en $n \in \{1, 2 \dots\}$,

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

n nulpunten heeft in $\mathbb{C}$.

Oplossing:

We weten dat $\forall k \geq 1 : \lim_{|z| \to \infty} |\frac{a}{z^k}| = 0, \ \forall a \in \mathbb{C}$. Neem nu functie $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|$ met $g(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$ en $f(z) = a_n z^n$. Nu is $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n} \frac{1}{z^k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n} \frac{1}{z^k}\right| \overset{|z| \to \infty}{\to} 0$. Hieruit weten we dat $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ zo dat: $|z| > N \Rightarrow \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < \varepsilon$. Kies nu $\tilde{N}$ die hoort bij $\varepsilon = 1$, dan geldt: Zij $|z| > \tilde{N}$, dan is $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ oftewel:

$$\text{Zij } |z| > \tilde{N}, \text{ dan is } |g(z)| < |f(z)|$$

Kies nu $D := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < \tilde{N} + 1\} \subset \mathbb{C}$ begrensd en samenhangend met $\partial D := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = \tilde{N} + 1\} \subset \mathbb{C}$ duidelijk een kring. f en g zijn overal analytisch en we weten dat $\forall z \in \partial D : |g(z)| < |f(z)|$. Uit de stelling van Rouche weten we dan dat f en $f + g$ (de originele functie in de vergelijking) evenveel nulpunten hebben in D. In conclusie: aangezien f n nulpunten heeft (0 met orde n), heeft $g + f = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ook n nulpunten in $D \subset \mathbb{C}$.

De functie heeft niet meer nulpunten in $\mathbb{C} \backslash D$. Dit kan makkelijk gezien worden via contradictie: Stel er zijn $n + 1$ nulpunten, dan kan de functie ontbonden worden in $a_n \prod_{i=1}^{n+1} (z - b_i)$ met b_i de nulpunten. Hierdoor zou de functie van graad $n + 1$ zijn ($a_n \neq 0$), dit is een contradictie.

2. (a) Laat zien dat de vergelijking

$$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

alle wortels heeft binnen de ring $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$.

(b) Bereken de integraal

$$\oint_{|z|=2} \frac{7z^6 - 15z^2}{z^7 - 5z^3 + 12} dz$$

Oplossing:

(a) Beschouw eerst $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 2\}$. Neem $f(z) = z^7$ en $g(z) = -5z^3 + 12$, op $\partial D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 2\}$ geldt $|f(z)| = 128 > 52 = 5|z|^3 + 12 \geq |g(z)|$. Dus $\forall z \in \partial D : |g(z)| < |f(z)|$. Dus heeft f evenveel nulpunten als $f + g$. z^7 heeft 7 nulpunten (7 keren 0 als nulpunt) dus heeft de vergelijking ook 7 nulpunten in D.

Beschouw nu $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ neem hierbij $f(z) = 12$ en $g(z) = z^7 - 5z^3$. Voor $z \in \partial \tilde{D}$ is $|f(z)| = 12 > 6 = |z|^7 + 5|z|^3 \geq |g(z)|$. Dus: Voor $z \in \partial \tilde{D}$: $|f(z)| > |g(z)|$. Hieruit weten we dat in $\tilde{D}$ de vergelijking 0 oplossingen heeft.
In conclusie: de vergelijking heeft 7 oplossingen in $D \backslash \tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$, wat alle oplossingen zijn (volgens 1).

(b) Zij $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ (overal analytisch), we weten dat $N = 7$ (nulpunten van f in D) en $P = 0$ (polen van f in D) dan is

$$\oint_{|z|=2} \frac{7z^6 - 15z^2}{z^7 - 5z^3 + 12} dz = \oint_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P) = 14\pi i.$$

3. (a) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1 + x^6} dx$$

(b) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2 + x + 1} dx$$

Oplossing:

(a) $1 + x^6$ heeft geen reële nulpunten en graad$(x^6 + 1) \geq$graad(x^4)+2. Hieruit volgt dat $f(x) = \frac{x^4}{x^6+1}$ integreerbaar is. Kies verder R groot genoeg ($R > 1$) zodat een halve cirkel met straal R over het positieve imaginaire deel alle polen omvat met een positief imaginair deel. Hiervoor is de functie gedefinieerd en continu op $\{z \in \mathbb{C}|\ |z| \geq R\}$ en $\lim_{|z|\to\infty} \frac{z^5}{z^6+1} = 0$. De belangrijke polen zijn: $z_0 = i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Deze hebben allen orde 1. Dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) + \text{Res}(f, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) \right)$$

Omdat $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^4}{z^6+1}$ met $P(z)$ en $Q(z)$ analytisch in de polen van f, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ en $Q'(z_0) = 6z_0^5 \neq 0$, volgt dat $\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{z_0^4}{6z_0^5} = \frac{1}{6z_0}$. Dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \left(\frac{2\pi}{6}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}i + \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6}i + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{6} = \frac{2}{3\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1 + x^6} dx = \frac{2\pi}{3}$$

(b) Beschouw $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx$, hierbij heeft x^2+x+1 geen reële nulpunten ($z_0 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ & $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$). graad$(x^2 + x + 1) \geq$graad$(1) + 2$, dus is $\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}$ integreerbaar. Neem nu een $R > 1$ zodat een halve cirkel met straal R over het positieve imaginaire deel alle polen omvat met positieve imaginaire delen. Dan weten we dat $\frac{1}{x^2+x+1}$ erop gedefinieerd is, continu is en dat $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z^2+z+1} = 0$. Hieruit volgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + x + 1} dx = \int_{\Gamma(R)} \frac{e^{2iz}}{z^2 + z + 1} dz = 2\pi i \text{Res}(f, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2})$$

Wederom geldt: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}$ met $P(z)$ en $Q(z)$ analytisch in de polen, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ en $Q'(z_0) = 2z_0 + 1 \neq 0$. Hieruit volgt: $\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{e^{2iz_0}}{2z_0+1}$. Dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} e^{-\sqrt{3}-i} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} e^{-\sqrt{3}}(\cos(1) - i\sin(1))$$

Nu geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) + i\sin(2x)}{x^2 + x + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} e^{-\sqrt{3}} \cos(1) - i\frac{2\sqrt{3}\pi}{3} e^{-\sqrt{3}} \sin(1)$$

Dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2 + x + 1} dx = -\frac{2\sqrt{3}\pi}{3} e^{-\sqrt{3}} \sin(1)$$

4. We beschouwen een natuurkundige toepassing van complexe analyse in de vorm van de lift van een draaiende bal in een wrijvingsloze (potentiaal) stroming. Denk aan het effect dat een tafeltennisser gebruikt bij het spel. De draaiende bal wordt benaderd door een draaiende cirkel in het platte vlak (natuurkundig gezien zit ik jullie te bedriegen en bekijken we natuurlijk een oneindig lange draaiende staaf, maar dat zeg ik er even niet bij). De draaiing levert een (lijn)wervel en we nemen aan dat de cirkel draait om de oorsprong. We beschouwen een cirkel met straal a gecentreerd in de oorsprong van het complexe vlak, met andere woorden: $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}| \ |z|= a\}$. De cirkel wordt in zijn vlak aangestroomd (met andere woorden de stroming staat loodrecht op de as van de cylinder/staaf) middels een parallelstroming en een dipoolstroming (om stroming rond cirkel te waarborgen; de cirkelrand is een stroomlijn). Verder beschouwen de wervel ten gevolge van de draaiing van de cirkel, die dan in positieve richting draait (dus tegen de wijzers van de klok in). Voor de eenvoud nemen we aan dat de cirkel wordt aangestroomd evenwijdig aan de reële as in negatieve richting (naar links) zodat de complexe potentiaal gegeven wordt

$$w = -Uz - U\frac{a^2}{z} - \frac{i\kappa}{2\pi}Log(\frac{z}{a}),$$

waarbij U (stroomsnelheid), $\kappa \in \mathbb{R}$. De parameter κ geeft de sterkte van de wervel (circulatie) en wordt dus bepaald door de hoeksnelheid van de draaiing. Gebruik makend van natuurkundige beginselen, komt men uit op het Theorema van Blasius, voor de aanstroming van een lichaam dat begrensd wordt door $\mathcal{C}$. Dit Blasius theorema geeft de kracht ($\mathbf{F} = [F_x \ F_y]^T$) die de stroming uitoefent op dit lichaam:

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$$

waarbij ρ de dichtheid van de vloeistof is.

(a) Laat $z_1, \dots, z_n$ de residuen zijn van $(\frac{dw}{dz})^2$. Laat zien dat het Blasius Theorema het volgende levert:

$$F_x - iF_y = -\pi\rho \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} Res((\frac{dw}{dz})^2, z_j).$$

(b) Beschouw eerst $\kappa = 0$ (geen draaiing), laat zien dat $\mathbf{F} = 0$. Dit fenomeen staat onder natuurkundigen bekend als het paradox van d'Alembert: De bol wordt aangestroomd en ondervindt geen netto kracht (we bekeken een wrijvingsloze stroming).

(c) Beschouw $\kappa > 0$ (er is nu dus een wervel door de draaiing van de bol), bereken de liftkracht (dus loodrecht op de aanstromingsrichting) F_y en laat zien dat $F_x = 0$ (ondanks de stroming in de x-richting). Deze kracht staat bekend als het Magnus effect en beschrijft het lift effect dat een draaiende bal ondervindt in een stroming.

Oplossing:

(a) Zij $f = (\frac{dw}{dz})^2$, dan zijn $z_1, \dots z_n$ de residuen van f. Dus uit de residuenstelling geldt,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} Res(f, z_j)$$

Hieruit volgt duidelijk:

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho 2\pi i \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} Res((\frac{dw}{dz})^2, z_j) = -\pi\rho \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} Res((\frac{dw}{dz})^2, z_j)$$

(b) Hier is $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \left(-U + U\left(\frac{a}{z}\right)^2\right)^2 = U^2\left(\left(\frac{a}{z}\right)^2 - 1\right)^2$. $z = 0$ is hier een pool in $\mathring{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}$ is een cirkel rond de oorsprong). Verder is $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = U^2 - 2U^2\left(\frac{a}{z}\right)^2 + U^2\left(\frac{a}{z}\right)^4$. hieruit leiden we af dat Res$(\left(\frac{dw}{dz}\right)^2, 0) = 0$. Dus: $F_x - iF_y = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = 0$

(c) Hier is

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \left(-U + U\left(\frac{a}{z}\right)^2 - \frac{i\kappa}{2\pi}\frac{1}{z}\right)^2 = U^2 + U^2\left(\frac{a}{z}\right)^4 - \frac{\kappa}{2\pi}^2\frac{1}{z}^2 - 2U^2\left(\frac{a}{z}\right)^2 + i\frac{2U\kappa}{2\pi}\frac{1}{z} - 2\frac{iU\kappa}{2\pi}\frac{a^2}{z^3}$$

Wederom is enkel $z = 0$ een pool in $\mathring{\mathcal{C}}$. Het is duidelijk dat $\text{Res}((\frac{dw}{dz})^2, 0) = i\frac{U\kappa}{\pi}$. Vandaar is $F_x - iF_y = -i\rho\kappa U$. Hieruit volgt:

$$F_x = 0 \qquad F_y = \rho\kappa U$$

5. De verzamling Möbius transformaties uitgerust met vermenigvuldiging (samenstellen / compositie) vormen een groep. Als notatie voor vermenigvuldiging of samenstellen schrijven we $f_1 \circ f_2(z) := f_1(f_2(z))$. Laat $\mathcal{M}$ de verzameling Möbius transformaties vormen, dan vormt $\mathcal{M}$ in algebraısche zin een groep onder vermenigvuldiging als voor iedere $f_1,\ f_2,\ f_3 \in \mathcal{M}$:

   - $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{M}$;
   - $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$;
   - $\forall f \in \mathcal{M}$ is er een f^{-1} waarvoor $f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z$;
   - Er bestaat een $u \in \mathcal{M}$ waarvoor $f \circ u(z) = u \circ f(z) = f(z)$ met $u(z) = z$ voor alle $f \in \mathcal{M}$

   Omdat het tijdrovende en weinig spannende operaties (het kan iets slimmer door de Möbius transformatie te karakteriseren met hulp van een matrix) zijn om te bewijzen dat deze Möbius transformaties een groep vormen, mag je aannemen dat aan al deze eisen voldaan is. We beschouwen in deze opgave een deelverzameling van $\mathcal{M}$, zegge $\mathcal{M}_0 := \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, waarin

$$f_1 = z,\ f_2 = \frac{1}{z},\ f_3(z) = 1 - z,\ f_4(z) = \frac{1}{1-z},\ f_5(z) = \frac{z-1}{z},\ f_6(z) = \frac{z}{z-1}$$

   Laat zien dat $\mathcal{M}_0$ onder vermenigvuldiging een groep vormt (We zeggen dat algebraisch $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ een subgroep vormt van $\mathcal{M}$ onder vermenigvuldigen).

Oplossing:

- In (c) en (d) vinden we al een aantal producten en dus zijn ze elementen van $\mathcal{M}_0$. Verder is:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_6	f_5	f_1	f_2
f_5	f_5	f_6	f_2	f_1	f_4	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

  $\mathcal{M}_0$ is dus multiplicatief gesloten.
- Aangezien $f_i \in \mathcal{M},\ \forall i \in \{1, \ldots, 6\}$ weten we dat $\forall i, j, k \in \{1 \ldots 6\} : f_i \circ (f_j \circ f_k) = (f_i \circ f_j) \circ f_k$.
- Het is duidelijk dat $f_1 \circ f_1 = z$, $f_2 \circ f_2 = z$, $f_3 \circ f_3 = z$, $f_6 \circ f_6 = z$ en $f_4 \circ f_5 = f_5 \circ f_4 = z$
- Het is duidelijk dat $f_1(z)$ deze functie $u(z)$ is.

6. Gegeven de volgende möbius (bilineaire) transformatie

$$w = f(z) = \frac{i2z - 2}{2z - i}$$

   (a) Laat zien dat deze transformatie conform is op $\mathbb{C}\backslash\{\frac{i}{2}\}$
   (b) Bereken $\lim_{z\to\infty} f(z)$.
   (c) Laat zien dat deze transformatie de imaginaire as op zichzelf afbeeldt. (f is een automorphisme op de imaginaire as)

(d) Bereken en teken het beeld van de cirkelschijf $C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$.

Oplossing:

(a) $f'(z) = \frac{2i(2z-i)-2(i2z-2)}{(2z-i)^2} = \frac{-2}{(2z-i)^2}$. De functie is alvast niet analytisch op $\{\frac{i}{2}\}$, verder is $f'(z) \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{i}{2}\}$. f is dus een conforme transformatie op $\mathbb{C}\backslash\{\frac{i}{2}\}$

(b) De stelling van l'Hopital kan gebruikt worden, daarom is $\lim_{z\to\infty} \frac{i2z-2}{2z-i} = i$.

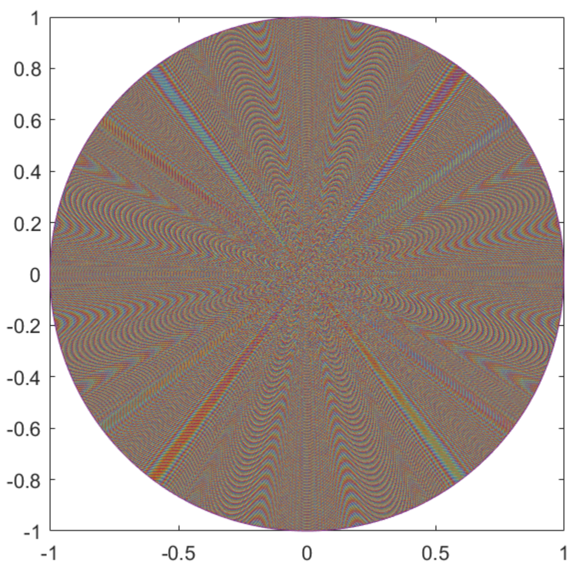
(c) Neem $z = bi,\ b \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, dan geldt: $w = \frac{-2b-2}{(2b-1)i} = \frac{2b+2}{2b-1}i$. Nu is, omdat $b \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, $\frac{2b+2}{2b-1} \in \mathbb{R}$. Hieruit lijden we af dat $w = f(z)$ ook op de imaginaire as ligt, aangezien het van de vorm ci met $c \in \mathbb{R}$ is ($c = \frac{2b+2}{2b-1}$). Merk op dat $\lim_{b\to>\frac{1}{2}} \frac{2b+2}{2b-1} = +\infty$ en $\lim_{b\to<\frac{1}{2}} \frac{2b+2}{2b-1} = -\infty$

(d) Zij $\omega = \frac{i2z-2}{2z-i}$, dan kunnen we het herschrijven tot $\omega(2z-i) = i2z-2 \Rightarrow z(2\omega-2i) = \omega i - 2 \Rightarrow z = \frac{\omega i-2}{2\omega-2i}$. Hieruit volg, als $|z| < 1$, $|\frac{\omega i-2}{2\omega-2i}| < 1 \Rightarrow |\omega i - 2|^2 < |2\omega - 2i|^2 \Rightarrow (\overline{\omega i} - 2)(\omega i - 2) < (\overline{2\omega - 2i})(2\omega - 2i) \Rightarrow \overline{w}w + 2\overline{w}i - 2\omega i + 4 < 4\omega\overline{\omega} - 4\overline{\omega}i + 4\omega i + 4 \Rightarrow 3\omega\overline{\omega} - 6\overline{\omega}i + 6\omega i > 0$. Dit is van de vorm $A\overline{\omega}\omega + \overline{E}\omega + E\overline{\omega} + D$ met $D = 0,\ A = 3$ en $E = -6i$, dus ($A > 0$, dus de ongelijkheid blijft):

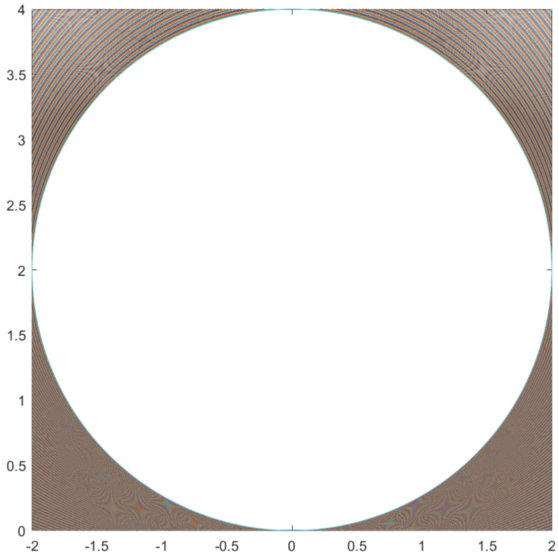
$$(\omega + \frac{-6i}{3})(\overline{\omega} + 2i) > \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow |\omega - 2i|^2 > 2^2$$

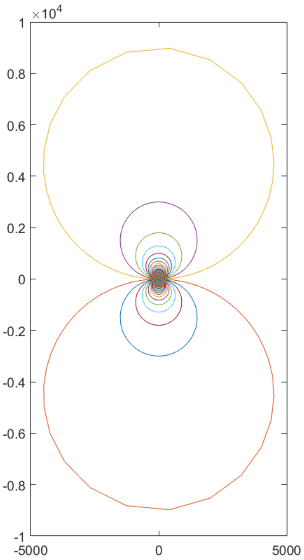
Hieruit volgt dat $f(C) = \{z \in \tilde{\mathbb{C}} |\ |z - 2i| > 2\}$

Met MATLAB krijgen we een beter idee van de cirkelschijf en het beeld:



Dit wordt (links een ingezoomde foto, rechts alles):





7. Gegeven $f(x) = e^x$, voor $x \in \mathbb{R}$. Motiveer waarom $F(z) = e^z = e^x e^{iy}$ voor $z \in \mathbb{C}$ de enige analytische verderzetting is van $f(x)$ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$.

Oplossing:

Veronderstel dat $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, de vorm hiervan is onbekend we weten enkel dat $f|_{\mathbb{R}} = e^x$. We weten ook dat $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ en zij nu $z = x + yi$ en $y = 0$ dan is $F(z) = e^x = f(x)$. Dit laatste geldt dus voor alle waardes van z waar $y = 0$, dus $z \in \mathbb{R}$. Hier concluderen we dat $\{z \in \mathbb{C} | f(z) = F(z)\} = \mathbb{R}$, ook heeft $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ een verdichtingspunt, dus is $f(z) = F(z)$ op $\mathbb{C}$ (Gevolg 7.1.9.). Verder is dit de enige analytische verderzetting, want stel $f \neq g$ en $g(z) = F(z)$ op heel $\mathbb{C}$, dus $g(z) = f(z)$.