Topics in analyse en topologie: extra oefeningen

Wietse Vaes

1. Zij C de Cantor-verzamling, vind: $\overline{C}$, $\mathring{C}$ & ∂C

   Oplossing:
   De Cantor verzameling is gesloten, dus is $C = \overline{C}$.

   Stel dat $\mathring{C} \neq \emptyset$. Er bestaat dus een $x \in \mathring{C} \subset C$, dus bestaat er een $\delta > 0$ zodat $B = B(x, \delta) \subset C$. Hierbij is $\text{diam}(B) = 2\delta$. Verder weten we dat de cantor-verzameling de aftelbaar oneindige doorsnede is van verzamelingen F_n, wat de unie is van segmenten F_n^i $(i = 1, \ldots, 2^n)$ met lengte $\frac{1}{3^n}$. Dus $B \subset F_j,\ \forall j = 1, 2, 3, \ldots$. Echter $\lim_{n=\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ en aangezien B in alle F_i zit en hiervan in één F_i^j, zou $\text{diam}(B) = 0$, maar dit is een contradictie. $\Rightarrow \mathring{C} = \emptyset$

   $\partial C = \overline{C} \backslash \mathring{C} = C$

2. C de Cantor-verzameling, toon aan: C is overaftelbaar.

   Oplossing:
   We weten dat C niet eindig is. Stel dus dat C aftelbaar is. Dan kan C geschreven worden als $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. We weten dat $C = \{a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} | a_j =\in \{0, 2\} \forall j\}$. We kunnen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ voorstellen als iets van de vorm $0.a_1a_2a_3a_4\ldots$. Alle elementen $a \in C$ kunnen dus zo voorgesteld worden. Stel nu b_i voor als $0.b_{i1}b_{i2}b_{i3}\ldots$ met $b_{ij} \in \{0, 2\}$ (Zoals elk element in C kan voorgesteld worden). Neem nu een $\tilde{a} \in C$ met $\tilde{a}_i = \begin{cases} 0 & b_{ii} = 2 \\ 2 & b_{ii} = 0 \end{cases}$. Dan weten we dat $\tilde{a} \notin \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Echter $\tilde{a} \in C = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, een contradicite. C is dus overaftelbaar.

3. Toon aan: $]0, 1[$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig.

   Oplossing:
   Neem functie $f :]0, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$.
   f is injectief: Zij $f(x) = f(y) \forall x, y \in]0, 1[\Rightarrow \tan(\pi x - \frac{\pi}{2}) = \tan(\pi y - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \pi x - \frac{\pi}{2} = \pi y - \frac{\pi}{2}$, want $x, y \in]0, 1[\Rightarrow x = y$. Bovendien is $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $f'(x) = \frac{\pi}{1+(\pi x - \frac{\pi}{2})^2} > 0$ en continu, dus is het beeld $\mathbb{R}$ (f is surjectief). Sterker nog: $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, 1[: y \mapsto \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(y) - \frac{1}{2}$. Er bestaat dus een bijectie tussen $]0, 1[$ en $\mathbb{R}$, dus zijn ze gelijkmachtig.

4. Toon aan: $[0, 1]$ en $]0, 1[$ zijn gelijkmachtig.

   Oplossing:
   Definieer $f : [0, 1] \to]0, 1[: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2^{n+2}} & x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \\ x & \text{anders} \end{cases}$.
   Zij $x \neq y$ dan is het triviaal om aan te zien dat $f(x) \neq f(y).f$ is dus injectief. Bovendien is $f(0) = \frac{1}{2},\ f(1) = f(\frac{1}{2^0}) = \frac{1}{4},\ f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8},\ f(\frac{1}{2^2}) = \frac{1}{16}\ldots$. Het is dus vrij duidelijk dat het ook surjectief is. f is dus een bijectie en dus zijn $[0, 1]$ en $]0, 1[$ gelijkmachtig.

5. Let F be the set of numbers in $[0, 1]$ whose decimal expansions contain the digit 5 infinitely many times. Show that F is a Borel set.

   Oplossing:

Ik toon aan dat F^c een borellverzamling is. Want dan is F een boreelverzameling. F^c is de verzameling van getallen met een eindige hoeveelheid 5'en in het komma getal. We kunnen getallen voorstellen als $a_0.a_1a_2a_3a_4\dots$ met $a_0 = 1$ & $a_i = 0 \forall i > 0$ of $a_0 = 0$ & $a_i \in \{0,1\dots 9\} (\forall i > 0)$. Noteer nu A_{k_n} als de verzameling getallen met $a_{k_1} = a_{k_2} = \dots = a_{k_n} = 5$ en $a_j \neq 5$, $\forall j \notin \{k_1, \dots k_n\}$. A_{k_n} is gesloten (en dus Borel). Dit omdat A_{k_n} de eindige unie is van gesloten segmenten. Zo is $A_{k_n} = \bigcup\{[a_0.a_1\dots a_{k_n-1}5, a_0.a_1\dots a_{k_n-1}6] | a_i \in \{1\dots 4, 6, \dots 9\},\ \forall i \notin \{k_1, \dots, k_n\}\}$. De laatste 6 hoort erbij aangezien, bijvoorbeeld: $0.59999\dots = 0.6$.
Nu is B_n de verzameling getallen met n 5's. Dit is een aftelbare unie van Borel verzameling A_{k_n}, en dus zelf Borel (B_0 is gesloten). Nu is $F^c = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ een aftelbare unie Borel verzamelingen, dus Borel. Ten slotte is F een Borel verzameling, omdat F^c dat is.

6. Zij $A_i(\subset \mathbb{R}^n) \in \mathcal{B}$ een stijgend rij verzamelingen en μ een maat op $\mathbb{R}^n$, dan is $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.

Oplossing:

We weten dat $A_1 \subset A_2 \subset \dots$. Definieer nu $B_1 = A_1$ en $B_k = A_k \cap A_{k-1}^c$. Merk op dat B_n paarsgewijs disjunct zijn van elkaar. Vervolgens is $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ en dus $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Nu is $\mu(A_k) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i)$ en $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$. Ten slotte is dus $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
Dus: $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$

7. H^s (de Haussdorf maat) is een maat op $\mathbb{R}^n$.

Oplossing:

Eerst gaan we na dat H_δ^s, $\forall \delta > 0$ en $s \geq 0$ met $H_\delta^s(F) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^s \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{is een } \delta-$ overdekking van $F\}$ een maat is:

(a) $H_\delta^s(\emptyset) = 0$. Dit is duidelijk aangezien voor elke δ $\emptyset \subset \emptyset$ met $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0 < \delta$.

(b) Zij $A, B \subset \mathbb{R}^n$ willekeurig zodat $A \subset B$, dan is elke $\delta-$overdekking van B ook een $\delta-$overdekking van A. Zij dus $U = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ een $\delta-$overdekking van B en $\tilde{U} = \{\tilde{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ een $\delta-$overdekking van A, dan is $U \subset \tilde{U}$ en ook $\{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^s \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{is een } \delta-\text{overdekking van } B\} \subset \{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^s \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{is een } \delta-$ overdekking van $A\}$. Dus is $H_\delta^s(A) \leq H_\delta^s(B)$.

(c) Zij $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$, stel dat $\{U_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ een $\delta-$overdekking is van A_k ($A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i^k$). Nu is $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i^k = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} U_i^k$, dus is het een $\delta-$overdekking van $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Nu is $H_\delta^s(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \inf\{\sum_{k,i=1}^{\infty} U_i^k \mid \{U_i^k\}_{k,i\in\mathbb{N}} \text{ is een } \delta-\text{overdekking van } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\} = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} U_i^1 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i^2 + \dots \mid \{U_i^k\}_{k,i\in\mathbb{N}} \text{ is een } \delta-\text{overdekking van } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} U_i^1 \mid \{U_i^1\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ is een } \delta-\text{overdekking van } A_1\} + \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} U_i^2 \mid \{U_i^2\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ is een } \delta-\text{overdekking van } A_2\} + \dots = \sum H_\delta^s(A_1) + H_\delta^s(A_2) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} H_\delta^s(A_k)$.
Dus: $H_\delta^s(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H_\delta^s(A_k)$

We weten dus dat H_δ^s een maat is $\forall \delta > 0$ en $s \geq 0$, dit omdat geen enkel van de voorwaarde voldaan zijn voor een zekere δ. Nu is:

- $\lim_{\delta\to 0} H_\delta^s(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0} 0 = 0$
- Zij $A, B \subset \mathbb{R}^n$ willekeurig zodat $A \subset B \Rightarrow H_\delta^s(A) \leq H_\delta^s(B) \Rightarrow H^s(A) = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^s(A) \leq \lim_{\delta\to 0} H_\delta^s(B) = H^s(B) \Rightarrow H^s(A) \leq H^s(B)$
- Zij $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow H_\delta^s(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H_\delta^s(A_k) \Rightarrow H^s(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^s(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} H_\delta^s(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\delta\to 0} H_\delta^s(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} H^s(A_k) \Rightarrow H^s(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H^s(A_k)$.
(convergente som)

H^s voldoet aan de voorwaardes om een maat te zijn (buiten 4), dus is het een maat (Het is ook een functie met variabele s).

8. Zij $F \subset \mathbb{R}^n$, toon aan:

$$H^0(F) = \begin{cases} r & |F| = r \\ +\infty & F \text{ is oneindig} \end{cases}$$

Oplossing:

Zij $|F|= r < \infty$ eindig, dan is al bewezen dat $H^0(F) = r$.
Stel nu dat F oneindig is. Stel vervolgens dat $\exists m \in \mathbb{N}$ zo dat $H^0(F) = m < \infty$. Dit betekent dat $\inf\{\sum_{i=1}^{N} \text{diam}(U_i)^0 \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$is een $\delta-$overdekking van F en $N \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ de hoeveelheid in de overdekking$\}$ $=$ $\inf\{\sum_{i=1}^{N} 1 \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$is een $\delta -$ overdekking van F en $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de hoeveelheid in de overdekking$\}$ $=$ m, wat op zijn beurt betekent dat er een eindige familie $\delta -$ overdekking van F bestaat. Dit is echter een contradictie. Dus, $H^0(F) = \infty$ als F oneindig is.

9. Zij $F = \{[(0,0),(1,\frac{1}{k})]\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup\{(1,0)\}$, Met $[(0,0),(1,\frac{1}{k})]$ de verzamling punten op een rechte lijn van $(0,0)$ naar $(1,\frac{1}{k})$. Toon aan: F is samenhangend, maar niet wegsamenhanged.

Oplossing:

Definieer $E = \{[(0,0),(1,\frac{1}{k})]\}_{k\in\mathbb{N}}$. We willen een continue functie $\varphi : [0,1] \to E : t \mapsto \varphi(t)$ met $\varphi(0) = (x_j, y_j)$ ($\mathbf{x}_j \in [(0,0),(1,\frac{1}{j})]$) en $\varphi(1) = (x_i, y_i)$ ($\mathbf{x}_j \in [(0,0),(1,\frac{1}{i})]$) hebben voor willekeurige (x_j, y_j) en (x_i, y_i) . Definieer nu $\varphi := \begin{cases} ((1-2t)x_j,(1-2t)y_j) & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ ((2t-1)x_i,(2t-1)y_i) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$. Ook is $\lim_{t\to^+\frac{1}{2}} \varphi(t) = \lim_{t\to^-\frac{1}{2}} \varphi(t) = \varphi(\frac{1}{2}) = (0,0)$, $\varphi(0) = (x_j, y_j)$, $\varphi(1) = (x_i, y_i)$ en $\varphi([0,1]) \subset E$. φ is dus een pad tussen 2 willekeurige punten in E, E is dus wegsamenhangend en dus samenhangend.
Merk op dat $(1,0) \in \overline{E}$, dit aangezien $\|(1,0) - (1,\frac{1}{k})\|= \frac{1}{k}$. Nu kan $\forall\delta > 0$ een $k \in \mathbb{N}$ gevonden worden zodat $\frac{1}{k} < \delta$ en dus zou $(0,\frac{1}{k}) \in B((1,0);\delta) \bigcap E$. Dus: $\forall\delta > 0 :\ B((1,0);\delta) \bigcap E \neq \emptyset$. $(1,0)$ is dus een afsluitingspunt. Nu is $E \subset F \subset \overline{E}$ met E samenhangend. F is dus samenhangend.

F is echter niet wegsamenhangend. Stel dat dat wel zo is, dan zou er een continue $\varphi : [0,1] \to F$ bestaan zodat $\varphi(0) = (1,0)$ en $\varphi(1) = (1,\frac{1}{k})$. $(1 \pm \delta, 0) \notin F$ en $(1,-\delta) \notin F$, $\forall\delta > 0$, dus zou er een $\delta \in]0,\frac{1}{k}[$ moeten bestaan zodat $\exists t^* > 0 : \varphi(t^*) = (1,\delta)$ (φ is continu). Dit is een contradictie, want:

(a) δ is niet te schrijven als $\frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$: $\varphi(t^*) \notin F$.

(b) δ is te schrijven als $\frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$: Er moet een $\tilde{\delta} < \delta$ bestaan zodat $(\tilde{t}) = (1,\tilde{\delta})$ met $\tilde{t} < t^*$. Uiteindelijke kan $\tilde{\delta}$ zo gekozen worden dat het niet te schrijven is als een $\frac{1}{l}$. (tussen elk rationaal getal is een reëel getal)

Dus: $\varphi([0,1]) \not\subset F$. Een contradictie. Dus F is niet weg samenhangend.

10. $F = [0,1] \subset \mathbb{R} \Rightarrow H^1(F) \leq 1 < \infty$

Oplossing:

$H^1(F) = \lim_{\delta\to 0} H^1_\delta(F)$. Hierbij is $H^1_\delta(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i) \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ is een δ-overdekking van $F\}$

Definieer een rij $x_i = (i-1)\delta$ en $N_\delta = \lfloor\frac{1}{\delta}\rfloor$. Dan is $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{N_\delta}([x_i, x_{i+1}]) \cup [x_{N_\delta+1}, 1]$. Definieer dus $U_i = [x_i, x_{i+1}]$, $\forall i = \{1,\ldots,N_\delta\}$ en $U_{N_\delta+1} = [x_{N_\delta+1}, 1]$. Het is duidelijk dat $\text{diam}(U_i) \leq \delta$, $\forall i$. $\{U_i\}_{i\in\{1\ldots,N_\delta\}}$ is dus een $\delta-$overdekking van $[0,1]$. Tenslotte is $\sum_{i=0}^{N_\delta+1} \text{diam}(U_i) = \sum_{i=0}^{N_\delta} \text{diam}(U_i) + \text{diam}(U_{N_\delta+1}) = \sum_{i=0}^{N_\delta} \delta + (1-\delta N_\delta) = \delta N_\delta + 1 - \delta N_\delta = 1$.

In conclusie:

$$1 \in \{\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i) \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ is een } \delta\text{-overdekking van } F\}$$
$$\Rightarrow H^1_\delta(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i) \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ is een } \delta\text{-overdekking van } F\} \leq 1$$
$$\Rightarrow H^1(F) = \lim_{\delta\to 0} H^1_\delta(F) \leq 1$$

11. $F = \mathbb{R}$ dus $F \in \mathcal{B}$. Toon aan:

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases}$$

Oplossing:
Het is gekend dat $H^1(F) = \frac{1}{c_1} l^1(F)$. Hierbij is $c_1 = 1$ en $l^1(F)$ de lengte van F, in dit geval ∞. Dus is $H^1(F) = \infty$.

Aangezien $s \mapsto H^s(F)$ monotoom dalend is voor $s \in \mathbb{R}^+$. Is $H^s(F) = \infty$ voor $0 \leq s \leq 1$.

Definieer nu $U_i = \begin{cases} [\frac{i}{2}\delta, (\frac{i}{2}+1)\delta] & i \text{ is even} \\ [-(\frac{i-1}{2}+1)\delta, -\frac{i-1}{2}\delta] & i \text{ is oneven} \end{cases}$
Het is duidelijk dat $\text{diam}(U_i) = \delta$ en $\mathbb{R} \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$. Dus is $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ een $\delta-$overdekking van $\mathbb{R}$. Aangezien we δ naar 0 willen nemen, kiezen we alvast $\delta < 1$. Voor een $\beta > 1$ geldt nu dat $\sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^\beta$ convergeert ($\delta < 1$). Nu is

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^\beta = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{\infty} \delta^\beta = \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{\delta\to 0} \delta^\beta = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0$$

Dus is $0 \in \{\lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^\beta \mid \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ is een } \delta - \text{overdekking van } F\}$ en aangezien $0 \leq \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^\beta$ is $H^\beta(F) = 0,\ \forall \beta > 1$.

Hiermee kan ook aangetoond worden dat $\forall s \leq 1\ H^s(F) = \infty$. (aangezien de som, voor elke $\delta > 0$ zal divergeren naar ∞)

12. Toon aan dat de coordinaat transformtie van het vlak

$$\varphi := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c\cos(\theta) & -c\sin(\theta) \\ c\sin(\theta) & c\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

is een gelijkaardigheid van ratio c, en beschrijf de geometrische transformatie. (We gebruiken de euclidische norm)

Oplossing:

$$\begin{aligned} \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| &= \sqrt{c^2(\cos(\theta)(x_1-y_1) - \sin(\theta)(x_2-y_2))^2 + c^2(\sin(\theta)(x_1-y_1) + \cos(\theta)(x_2-y_2))^2} \\ &= |c|\sqrt{\begin{aligned}&(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)(x_1-y_1)^2 + (\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2)(x_2-y_2)^2 \\ &-2\cos(\theta)\sin(\theta)(x_1-y_1)(x_2-y_2) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)(x_1-y_1)(x_2-y_2)\end{aligned}} \\ &= |c|\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = |c|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \end{aligned}$$

Stel we zien (x_1, x_2) als een vector. Dan roteert φ, (x_1, x_2) met θ $\left(\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \text{ is de Givens rotatie matrix.}\right)$, vermenigvuldigt het met een factor c en verschuift het met (a_1, a_2).

13. Zij $f : X \to X$, X is een compacte metrische ruimte, d de metriek op X met $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Toon aan: f is surjectief.

Oplossing:
f is injectief: stel $f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y) \Rightarrow x = y$.
Stel dat f niet surjectief is. $\exists y \in X$ zo dat $\forall x \in X : f(x) \neq y$. Echter omdat X compact is en X zowel het codomein als domein is, zou, volgens het duivenhok principe, $\exists x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ voor $x_1 \neq x_2$. Dit is een contradictie (f is injectief). f is dus surjectief.

14. Zij $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, met U open en convex, $F \subset U$ en f is differentieerbaar in U, $Df : U \to L_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ is begrensd op U ($\sup_{x\in[x,y]}\|Df(x)\|= M < \infty$). Toon aan:

$$\exists c > 0, \text{ zodat } H^s(f(F)) \leq c^s H^s(F) \; \forall s \geq 0$$

Oplossing:
Volgens de middelwaardestelling (gezien in de cursus Differentialen en differentiaalvergelijkingen) geldt, $\forall x, y \in U : \|f(x) - f(y)\| \overset{MWS}{\leq} \sup_{x\in[x,y]}\|Df(x)\|\|x - y\|= M\|x - y\|^1$.
Hieruit volgt dat $H^s(f(F)) \leq M^s H^s(F)$, $\forall s > 0$ (volgens propositie 2.2). Kies dus $c = M$ en dan is het gevraagde bewezen.

15. Wat is de Hausdorff dimensie van de verzamelingen $\{0, 1, 2, \dots\}$ en $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ in $\mathbb{R}$

Oplossing:
Beide verzamelingen zijn aftelbaar, volgende functies zijn namelijke bijecties: $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \dots\} : x \mapsto x - 1$ en $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots\} : x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{anders} \end{cases}$.
We weten dat $\dim_H(F) = 0$ als F aftelbaar oneindig is, dus $\dim_H(\{0, 1, 2, \dots\}) = 0$ en $\dim_H(\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots\}) = 0$

16. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie $f(x) = x^2$ zijn, en laat F een willekeurige subset van $\mathbb{R}$ zijn. Toon aan dat $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$.

Oplossing:
Stel $F = \emptyset \Rightarrow f(F) = \emptyset$, dan is $\dim_H(f(F)) = 0 = \dim_H(F)$.
Stel F is eindig $\Rightarrow$ $f(F)$ is ook eindig, dan is $\dim_H(f(F)) = 0 = \dim_H(F)$.*
Definieer $F^- = \{x|x \in F, x < 0\}$ en $F^+ = \{x|x \in F, x > 0\}$, dus $F = F^- \cup F^+ \cup \{0\}$. Nu is dus $\dim_H(F) = \sup\{\dim_H(F^+), \dim_H(F^-)\}$ ($\dim_H(\{0\}) \overset{*}{=} 0$).

Neem nu $b > 0, a > 0$, beschouw dan $f : [a, b] \cap F \to f([a, b] \cap F) : x \mapsto x^2$. De functie is bi-Lipschitz want: $[a, b]$ is compact, f is bijectief ($a, b \neq 0$), $2a \leq f'(x) = 2x \leq 2b$ en $\frac{1}{2b} \leq f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x)}} \leq \frac{1}{2a}$, dus is $\dim_H(f([a, b] \cap F)) = \dim_H([a, b] \cap F)$.
Neem nu $b < 0, a < 0$, beschouw dan $f : [b, a] \cap F \to f([b, a] \cap F) : x \mapsto x^2$. De functie is bi-Lipschitz want: $[b, a]$ is compact, f is bijectief ($a, b \neq 0$), $2b \leq f'(x) = 2x \leq 2a$ en $\frac{1}{2a} \leq f^{-1\prime}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(x)}} \leq \frac{1}{2b}$, dus is $\dim_H(f([b, a] \cap F)) = \dim_H([b, a] \cap F)$.
Merk nu op dat $F^+ = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F \cap [\frac{1}{m}, m]$ en $F^- = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F \cap [-m, \frac{-1}{m}]$.
Dus, $\dim_H(F^+) = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{\dim_H(F\cap[\frac{1}{m}, m])\} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{\dim_H(f(F\cap[\frac{1}{m}, m]))\} = \dim_H(f(F^+))$ en $\dim_H(F^-) = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{\dim_H(F \cap [-m, -\frac{1}{m}])\} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{\dim_H(f(F \cap [-m, -\frac{1}{m}]))\} = \dim_H(f(F^-))$.

In conclusie:

$\dim_H(F) = \sup\{\dim_H(F^+), \dim_H(F^-)\} = \sup\{\dim_H(f(F^+)), \dim_H(f(F^-))\} = \dim_H(f(F))$

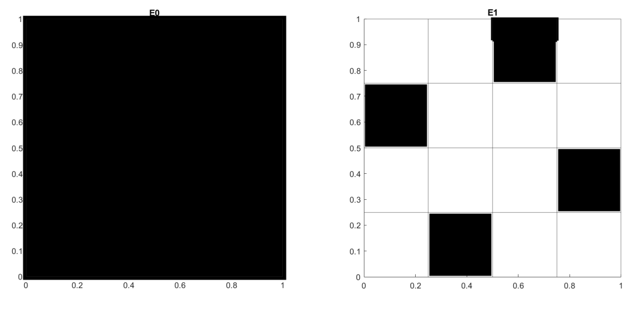
17. Laat $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ een Lipschitz functie zijn. Zij $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$, toon aan dat $\dim_H(\text{graf}(f)) = 1$. In het bijzonder is dit waar voor f een continue differentieerbare functie.

Oplossing:
Zij $g : [0,1] \to \text{graf(f)} : x \mapsto (x, f(x))$, dan is g Lipschitz: neem $x, y \in [0,1]$ willekeurig, dan is $\|g(x) - g(y)\|_\infty = \|(x-y, f(x)-f(y))\|_\infty \leq \|(x-y, c(x-y))\|_\infty = \max\{1, c\}\|x-y\|_\infty$. Het is dus al duidelijk dat $\dim_H(g([0,1])) \leq \dim_H([0,1]) = 1$.
Verder kan men ook kijken naar de inverse functie van g, namelijk: $h : \text{graf}(f) \to [0,1] : (x, f(x)) \mapsto x$. Het is duidelijk dat als $\forall (x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{graf}(f) : \|h((x, f(x))) - h((y, f(y)))\| = \|x - y\| \leq \|(x, f(x)) - (y, f(y))\|$. Dit is dus Lipschitz met constante 1, en dus is $\dim_H([0,1]) \leq \dim_H(\text{graf}(f))$.
In conclusie: $\dim_H(\text{graf}(f)) = \dim_H([0,1]) = 1$

In het geval dat f continu differentieerbaar is, is $\text{graf}(f)$ glad en dus $\dim_H(\text{graf}(f)) = \dim(\text{graf}(f)) = 1$. Of aangezien f continu differentieerbaar is, is het Lipschitz met constante $\max\{1, \sup|f'|\}$.

18. Zij F de CV α. Toon aan: F is compact, volledig, niet samenhangend, $l^2(F) = 0$ en F is een Borrelverzameling.

Oplossing:
De cantor verzameling α is gedefinieerd als volgt:
Construeer $\mathbb{R}^2 \supset E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$. Met $E_0 = [0,1] \times [0,1]$ en $E_1 = E_1^1 \cup E_1^2 \cup E_1^3 \cup E_1^4$ met E_1^i een gesloten vierkant met diameter $\frac{\sqrt{2}}{4^1}$. Verder is $E_2 =_{i=1}^{4^2} E_2^i$ met E_2^i een gesloten vierkant met diameter $\frac{\sqrt{2}}{4^2}$. In conclusie is $E_n = \bigcup_{i=1}^{4^n} E_n^i$ met E_n^i een gesloten vierkant met diameter $\frac{\sqrt{2}}{4^n}$ (zijde $\frac{1}{4^n}$). Hieronder is de wijze waarop een bestaand vierkant van E_i wordt opgedeeld in E_{i+1}:



Nu is $F = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$

$\boxed{\text{Compact}}$
E_n is een eindige unie van gesloten delen voor alle n, dus is E_n gesloten $\forall n \geq 0$. F is de doorsnede van een familie gesloten delen, en dus is F gesloten. Tenslotte is $F \subset E_0 = [0,1] \times [0,1]$ (begrensd). In conclusie: F is gesloten en begrensd, dus is F compact.

Volledig
$\mathbb{R}^2$ is volledig, $F \subset \mathbb{R}^2$ is een compacte en gesloten deelruimte van $\mathbb{R}^2$, dus is F volledig.

Niet Samenhangend
Definieer, met $\delta > 0$

$$P =]-\delta, 0.25+\delta[\times]0.5-\delta, 0.75+\delta[\cup]0.25-\delta, 0.5+\delta[\times]-\delta, 0.25+\delta[$$

en

$$Q =]0.5-\delta, 0.75+\delta[\times]0.75-\delta, 1+\delta[\cup]0.75-\delta, 1+\delta[\times]0.25-\delta, 0.5+\delta[$$

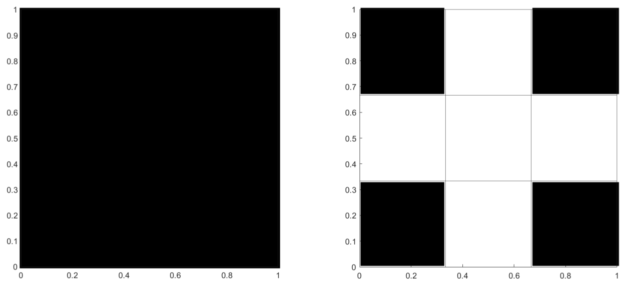
Nu zijn P en Q de unie van 2 open delen, dus ook open en $P, Q \subset \mathbb{R}^2$. Merk eerst op dat $F \subset E_1 \subset P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$ (δ kan klein genoeg gekozen worden) en $E_1 \not\subset P(of\ Q)$, vervolgens is $F \cap P \neq \emptyset$ en $F \cap Q \neq \emptyset$ en $F \cap P \cap Q = \emptyset$.

Borrel
F is gesloten en dus is $F \in \mathcal{B}$.

$l^2(F) = 0$
We weten dat $H^2(F) = 0$ aangezien $H^1(F) < \infty$. Aangezien $F \in \mathcal{B}$ en $F \subset \mathbb{R}^2$: $0 = H^2(F) = \frac{1}{c_2} l^2(F) = \frac{4}{\pi} l^2(F) \Rightarrow l^2(F) = 0$

19. Zij $F \subset \mathbb{R}^2$ de CV β, toon aan dat $\dim_H(F) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$ en vindt een bovengrens voor $H^{\frac{\ln(4)}{\ln(3)}}(F)$.

Oplossing:
De cantor verzameling β is gedefinieerd als volgt:
Construeer $\mathbb{R}^2 \supset E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ Gesloten. Hierbij is $E_0 = [0,1] \times [0,1]$ en $E_1 = E_1^1 \cup E_1^2 \cup E_1^3 \cup E_1^4$ met E_1^i een gesloten vierkant met diameter $\frac{\sqrt{2}}{3^1}$. Verder is $E_2 =_{i=1}^{4^2} E_2^i$ met E_2^i een gesloten vierkant met diameter $\frac{\sqrt{2}}{3^2}$. In conclusie is $E_n = \bigcup_{i=1}^{4^n} E_n^i$ met E_n^i een gesloten vierkant met diameter $\frac{\sqrt{2}}{3^n}$ (zijde $\frac{1}{3^n}$). Hieronder is de wijze waarop een bestaand vierkant van E_i wordt opgedeeld in E_{i+1}:



Nu is $F = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$
Definieer nu

$$f_{LO} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y)$$

$$f_{LB} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\frac{1}{3}x, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}y)$$

$$f_{RO} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y)$$
$$f_{RB} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}y)$$

Nu is

$$\|f_{LO}(x_1,x_2) - f_{LO}(y_1,y_2)\| = \|\frac{1}{3}(x_1-y_1, x_2-y_2)\| = \frac{1}{3}\|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\|, \ \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}$$

Dit geldt voor alle opgenoemde functies. Vervolgens impliceert dit dat $H^s(f_i(\tilde{F})) = (\frac{1}{3})^s H^s(\tilde{F}),\ \forall \tilde{F} \subset \mathbb{R}^2 i \in \{LO, RO, RB, LB\} = \tilde{B}$ en $s \geq 0$.
Nu is $E_n = f_{LO}(E_{n-1}) \cup f_{RO}(E_{n-1}) \cup f_{LB}(E_{n-1}) \cup f_{RB}(E_{n-1})\ \forall n \geq 1$. Dus :

$$\begin{aligned}
F &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \\
&= E_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (f_{LO}(E_{n-1}) \cup f_{RO}(E_{n-1}) \cup f_{LB}(E_{n-1}) \cup f_{RB}(E_{n-1})) \\
&=^* E_0 \cap (f_{LO}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n-1}) \cup f_{RO}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n-1}) \cup f_{LB}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n-1}) \cup f_{RB}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n-1})) \\
&= E_0 \cap (f_{LO}(F) \cup f_{RO}(F) \cup f_{LB}(F) \cup f_{RB}(F)) \\
&= f_{LO}(F) \cup f_{RO}(F) \cup f_{LB}(F) \cup f_{RB}(F)
\end{aligned}$$

$=^*$ geldt aangezien:
$\boxed{\supseteq:}$Dit geldt door de definietie van doorsnede.
$\boxed{\subseteq:}$ E_n is een dalende rij $\Rightarrow$ $f_i(E_n)$ ook $\forall i \in \tilde{B} \Rightarrow$
$f_{LO}(E_0) = [0, \frac{1}{3}] \times [0, \frac{1}{3}] \supset f_{LO}(E_1),\ f_{RO}(E_0) = [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{1}{3}] \supset f_{RO}(E_1),\ f_{LB}(E_0) = [0, \frac{1}{3}] \times [\frac{2}{3}, 1] \supset f_{LB}(E_1),\ f_{RB}(E_0) = [\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1] \supset f_{RB}(E_1)$ en omdat $f_{LO}(E_0) \cap f_{RO}(E_0) \cap f_{LB}(E_0) \cap f_{RB}(E_0) = \emptyset$
$\Rightarrow f_{LO}(E_{n-1}) \cap f_{RO}(E_{n-1}) \cap f_{LB}(E_{n-1}) \cap f_{RB}(E_{n-1}) = \emptyset \ \Rightarrow f_{LO}(E_i) \cap f_{RO}(E_j) \cap f_{LB}(E_k) \cap f_{RB}(E_l) = \emptyset,\ \forall i,j,k,l.$
Dus:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (f_{LO}(E_{n-1}) \cup f_{RO}(E_{n-1}) \cup f_{LB}(E_{n-1}) \cup f_{RB}(E_{n-1})) \subseteq f_{RO}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n-1}) \cup f_{LB}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n-1}) \cup f_{RB}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n-1}))$$

Nu we weten dat
$$F = f_{LO}(F) \cup f_{RO}(F) \cup f_{LB}(F) \cup f_{RB}(F)$$
Aangezien $f_{LO}(F) \cap f_{RO}(F) \cap f_{LB}(F) \cap f_{RB}(F) = \emptyset$ en omdat H^s een maat is, is:

$$H^s(F) = H^s(f_{LO}(F)) + H^s(f_{RO}(F)) + H^s(f_{LB}(F)) + H^s(f_{RB}(F)),\ \forall s$$

Aangezien F gesloten is (E_n is een unie van gesloten delen en F is een doorsnede van een familie aftelbare geslote delen), is het Borrel. Ook is het duidelijk dat $f_i,\ \forall i \in \tilde{B}$ continue bijecties zijn, en dus $f_i(F),\ \forall i \in \tilde{B}$ gesloten en dus ook Borrel zijn. Nu is: $H^s(F) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F)$.

Zij $s_0 = \dim_H(F)$, veronderstel dan dat $0 < H^{s_0}(F) < \infty$. Dan is:

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^{s_0} = 1 \Rightarrow s_0 \ln(\frac{1}{3}) = \ln(\frac{1}{4}) \Rightarrow s_0 = \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{1}{3})} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$$

Dus: $H^{s_0}(F) < \infty \Rightarrow s_0 = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$.

Indien geldt dat $H^{s_0}(F) < \infty$, vind ik nu een bovengrens:
Het is gekend dat E_n een unie is van 4^n gesloten vierkanten met diameter $\frac{\sqrt{2}}{3^n}$. $\{E_n^i\}_{i\in\{1,\ldots 4^n\}}$ is dus een $\frac{\sqrt{2}}{3^n}-$overdekking van F ($F \subset E_n$). Dus:

$$H^{s_0}_{\frac{\sqrt{2}}{3^n}}(F) \leq \sum_{i=1}^{4^n} \operatorname{diam}(E_n^i)^{s_0} = \sum_{i=1}^{4^n} \left(\frac{\sqrt{2}}{3^n}\right)^{s_0} = 4^n \frac{\sqrt{2}^{s_0}}{3^{n\frac{\ln(4)}{\ln(3)}}} = 4^n 4^{-n} \sqrt{2}^{\frac{\ln(4)}{\ln(3)}} = \sqrt{2}^{\frac{\ln(4)}{\ln(3)}} = 2^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$$

In conclusie: $H^{s_0}(F) \leq 2^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20. Toon aan:

- Is $\mathbb{Q}$ totaal onsamenhangend?
- is $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ totaal OSH?
- is de ruimte $(\mathbb{R}, d)$ met de discrete metriek totaal OSH?

Oplossing:
Definitie totaal onsamenhangend:
Zij $A \subset \mathbb{R}^n$ een genormeerde ruimte, A is totaal onsamenhangend $\iff$ $\forall x, y \in A, (x \neq y)$, $\exists$ open $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zodat $x \in U,\ y \in V, A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$ en $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ en $A \subset U \cup V$

- Zij $x, y \in \mathbb{Q}$ zodat $x \neq y$ willekeurig. Uit analyse 1 weten we dat tussen twee rationale getallen altijd een reel getal bestaat. Noem dit getal $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $x < a$ en $y > a$, definieer dan $U =]-\infty, a[$ en $V =]a, \infty[$. Nu is $x \in U$ en $y \in V$, U en V zijn duidelijk open, $\mathbb{Q} = (U \cap \mathbb{Q}) \cup (V \cap \mathbb{Q})$, $(U \cap \mathbb{Q}) \cap (V \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$ aangezien $U \cap V = \emptyset$ en tenslotte is $\mathbb{Q} \subset U \cup V = \mathbb{R}\backslash\{a\}$.Ze bestaan, dus is $\mathbb{Q}$ totaal onsamenhangend.
- Zij $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ zodat $x \neq y$ willekeurig. Uit analyse 1 weten we dat tussen twee reele getallen altijd een rationaal getal bestaat. Noem dit getal $a \in \mathbb{Q}$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $x < a$ en $y > a$, definieer dan $U =]-\infty, a[$ en $V =]a, \infty[$. Nu is $x \in U$ en $y \in V$, U en V zijn duidelijk open, $\mathbb{Q} = (U \cap \mathbb{Q}) \cup (V \cap \mathbb{Q})$, $(U \cap \mathbb{Q}) \cap (V \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$ aangezien $U \cap V = \emptyset$ en tenslotte is $\mathbb{Q} \subset U \cup V = \mathbb{R}\backslash\{a\}$. Ze bestaan, dus is $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ totaal onsamenhangend.
- In ruimte met de discrete metriek is elke deelverzameling openen gesloten. Een singelton en $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ zijn dus open. Zij nu $x, y \in \mathbb{R}$ zodat $x \neq y$ willekeurig. Definieer $U = \{x\}$ en $V = \mathbb{R}\backslash\{x\}$. Nu is $x \in U$ en $y \in V$ en U en V zijn open in de discrete metriek. Verder is $\mathbb{R} = (U \cap \mathbb{R}) \cup (V \cap \mathbb{R})$, $(U \cap \mathbb{R}) \cap (V \cap \mathbb{R}) = \emptyset$ aangezien $U \cap V = \emptyset$ en tenslotte is $\mathbb{R} \subset U \cup V = \mathbb{R}$. Het bestaat, dus is $\mathbb{R}$ totaal onsamenhangend met de discrete metriek.

21. Toon aan:

(a) $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$
(b) Zij $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \overline{\lim}_{x\to 0} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$
(c) Zij $f(x) \leq g(x),\ \forall x > 0 \Rightarrow \underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \leq \underline{\lim}_{x\to 0} g(x)$ (zelfde over $\overline{\lim}$)
(d) $\underline{\lim}_{x\to 0} - f(x) = -\overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$
(e) $\underline{\lim}_{x\to 0} \lambda f(x) = \lambda \underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$, met $\lambda > 0$ constant

(f) $\underline{\lim}_{x\to 0} c + f(x) = c + \underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$, met $c \in \mathbb{R}$

Oplossing:
Definitie:

- $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \lim_{r\to 0} (\inf\{f(x)|0 < x < r\})$
- $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \lim_{r\to 0} (\sup\{f(x)|0 < x < r\})$

(a) We weten dat $\inf\{f(x)|0 < x < r\} \leq \sup\{f(x)|0 < x < r\}$, $\forall r \in \mathbb{R}_0^+$. Dus is het makkelijk in te zien dat $\lim_{r\to 0} (\inf\{f(x)|0 < x < r\}) \leq \lim_{r\to 0} (\sup\{f(x)|0 < x < r\})$ en dus: $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$

(b) We weten dat $\inf\{f(x)|0 < x < r\} \leq f(y) \leq \sup\{f(x)|0 < x < r\}$, $\forall y \in]0, r[$ & $\forall r \in \mathbb{R}_0^+$, dus: $\lim_{r\to 0} (\inf\{f(x)|0 < x < r\}) \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{r\to 0} (\sup\{f(x)|0 < x < r\})$. Wegens de insluitstelling en omdat $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ geldt: $\lim_{x\to 0} f(x) = \underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$

(c) Aangezien $f(x) \leq g(x)$, $\forall x > 0$ is $\inf\{f(x)|0 < x < r\} \leq \inf\{g(x)|0 < x < r\}$, $\forall r \in \mathbb{R}_0^+$, dus: $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \underline{\lim}_{x\to 0} g(x)$

(d) Als $a = \inf\{-f(x)|0 < x < r\}$, dan is $a \leq -f(x) \Rightarrow f(x) \leq -a \ \forall x \in]0, r[\Rightarrow a = -\sup\{f(x)|0 < x < r\}$, in conclusie: $\inf\{-f(x)|0 < x < r\} = -\sup\{f(x)|0 < x < r\}$, $\forall r \in \mathbb{R}_0^+$. Hieruit volgt uiteindelijk: $\underline{\lim}_{x\to 0} - f(x) = -\overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$

(e) Zij $a = \inf\{\lambda f(x)|0 < x < r\} \ \overset{\Rightarrow}{\lambda > 0} \ \frac{a}{\lambda} = \inf\{f(x)|0 < x < r\} \Rightarrow a = \lambda \inf\{f(x)|0 < x < r\}$. Hieruit volgt: $\underline{\lim}_{x\to 0} \lambda f(x) = \lambda \underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$

(f) Zij $c \in \mathbb{R}$ is $a = \inf\{c + f(x)|0 < x < r\} \Rightarrow a - c = \inf\{f(x)|0 < x < r\} \Rightarrow a = c + \inf\{f(x)|0 < x < r\}$. Aangezien $\lim_{r\to 0} c + h(r) = c + \lim_{r\to 0} h(r)$ volgt hieruit dat $\underline{\lim}_{x\to 0} c + f(x) = c + \underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$, met $c \in \mathbb{R}$.

22. Zij $F \neq \emptyset$, begrensd en $F \subset \mathbb{R}^n$, dan is:

$$\underline{\dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(N'_\delta(F))}{\ln(\delta)}$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(N'_\delta(F))}{\ln(\delta)}$$

Toon aan dat $N'_\delta(F)$ gelijk kan zijn aan:

- Het kleinste aantal kubussen $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ met zijden $\delta > 0$ zodat $F \subset \bigcup_{i=1}^{N'_\delta(F)} \mathcal{U}_i$.
- Het grootste aantal open bollen $B(x_i, \delta)$ zodat $x_i \in F$ en $B(x_i, \delta) \cap B(x_j, \delta) = \emptyset$, $\forall j \neq i$.

Oplossing:

- Definieer $N'_\delta(F)$ zoals gezegd en $N_\delta(F)$ als het kleinste aantal open verzamelingen U_i met $\text{diam}(U_i) \leq \delta$ zodat $F = \bigcup_{i=1}^{N_\delta(F)} U_i$.

  $\boxed{\leq}$Het is duidelijk dat $\text{diam}(\mathcal{U}_i) = \sqrt{n}\delta$, $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ is dus een $\sqrt{n}\delta-$overdekking van $F \Rightarrow N_{\sqrt{n}\delta}(F) \leq N'_\delta(F) \overset{\sqrt{n}\delta<1}{\Rightarrow} \frac{\ln(N_{\sqrt{n}\delta}(F))}{-\ln(\sqrt{n}\delta)} \leq \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\sqrt{n})-\ln(\delta)} \Rightarrow \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(N_{\sqrt{n}\delta}(F))}{-\ln(\sqrt{n}\delta)} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \Rightarrow \underline{\dim}_B(F) \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$.

$\boxed{\geq}$ Zij $U \neq \emptyset$, $\text{diam}(U) \leq \delta$ en $U \subset \mathbb{R}^n$ zodat $\exists i_0 : U \subset \mathcal{U}_{i_0}$, deze i_0 bestaat zodat als $x \in U$ er een kubus $\mathcal{U}_{i_0}$ bestaat met centrum x want $F \subset \bigcup_{i=1}^{N'_\delta(F)} \mathcal{U}_i$ en zij $y \in U$ dan is $\|x-y\| < \delta$ want beide zijn in U, dus $y \in \mathcal{U}_{i_0} \Rightarrow N'_\delta(F) \leq N_\delta(F) \overset{\delta \leq 1}{\Rightarrow}$ $\frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \Rightarrow \underline{\dim}_B(F) \geq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$
(enkel de laatste stappen verschillen voor $\overline{\dim}_B(F)$)

- Definieer $N'_\delta(F)$ zoals gezegd en $N_\delta(F)$ als het kleinste aantal open verzamelingen U_i met $\text{diam}(U_i) \leq \delta$ zodat $F = \bigcup_{i=1}^{N_\delta(F)} U_i$.

  $\boxed{\leq}$ Laat $B_1, \ldots, B_{N'_\delta(F)}$ de disjuncte bollen met straal δ zijn en centrums in F zijn. Als $x \in F$ dan $\exists i_0 \in \{1, \ldots N'_\delta(F)\} : d(x, B_{i_0}) \leq \delta$, indien dit niet het geval is, moet er een nieuwe bol gemaakt worden met centrum x. Hieruit moet volgen dat we F kunnen overdekken met de verzameling bollen met dezelfde centrums maar straal 2δ. Aangezien $N'_\delta(F)$ het grootste aantal ... is en $N_{4\delta}(F)$ het kleinste aantal ... en deze een hoeveelheid bollen gemeen hebben, is:

$$N_{4\delta}(F) \leq N'_\delta(F) \overset{4\delta\leq 1}{\Rightarrow} \frac{\ln(N_{4\delta}(F))}{-\ln(4\delta)} \leq \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(4)-\ln(\delta)} \Rightarrow \underline{\dim}_B(F) \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$$

  $\boxed{\geq}$ Stel dat $B_1, \ldots, B_{N'_\delta(F)}$ de disjuncte bollen met straal δ zijn en centrums in F zijn. Laat $U_1, \ldots, U_{N_\delta(F)}$ een $\delta-$overdekking is van F. Aangezien U_j de centrums van de B_i moet bevatten en omdat $\text{diam}(U_j) \leq \delta$, moet elke B_i minstens een U_j bevatten, dus:

$$N_\delta(F) \geq N'_\delta(F) \overset{\delta\leq 1}{\Rightarrow} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \geq \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \Rightarrow \underline{\dim}_B(F) \geq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$$

  (enkel de laatste stappen verschillen voor $\overline{\dim}_B(F)$)

23. Zij F de CV-α, toon aan: $\dim_B F = 1$

Oplossing:
Definieer $\delta_k = \frac{\sqrt{2}}{4^k}$, dus $\delta_{k+1} = \frac{1}{4}\delta_k$ ($1 > \delta_1 > \delta_2 > \ldots$ en $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$). Nu is $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ met $E_k = \bigcup$ 4^k vierkanten E_k^i met diameter $\frac{\sqrt{2}}{4^k}$. Ook is $F \subset E_k = \bigcup_{i=1}^{4^k} E_k^i \Rightarrow I_k = \{E_k^i\}_{i=1,\ldots,4^k}$ is een δ_k-overdekking van F $\forall k \geq 0 \Rightarrow N_{\frac{\sqrt{2}}{4^k}}(F) \leq 4^k$ $\forall k \geq 0 \Rightarrow \frac{\ln(N_{\delta_k}(F))}{-\ln(\delta_k)} \leq \frac{\ln(4^k)}{-\ln(\frac{\sqrt{2}}{4^k})} = \frac{\ln(4^k)}{-\ln(\sqrt{2})+\ln(4^k)} \overset{k\to\infty}{=} 1 \Rightarrow \overline{\dim}_B(F) \leq 1$.

Verder is de afstand tussen de vierkanten van $E_k \geq \frac{1}{4^k}$. Stel nu dat met $\text{diam}(U) \leq \frac{1}{4^k}$, $\forall k > 0$ dan $A = \{i \in \mathbb{N} | i \in \{1, \ldots, 4^{k-1}\}, E_{k-1}^i \cap U \neq \emptyset\}$. in A zit max 1 element. Want, indien er 2 elementen inzitten, dan betekent dat dat $\frac{1}{4^{k-1}} \leq |x_0 - x_1| \leq \frac{1}{4^2}$ met x_0 en x_1 in twee verschillende vierkanten. Hieruit volgt: $N_{\frac{1}{4^k}}(F) \geq 4^{k-1}$ want $e_{k-1}^i \cap F \neq \emptyset$. Nu volgt:

$$\frac{\ln(N_{\frac{1}{4^k}}(F))}{-\ln(\frac{1}{4^k})} \geq \frac{\ln(4^{k-1})}{-\ln(\frac{1}{4^k})} = \frac{k-1}{k} \Rightarrow \underline{\dim}_B(F) \geq \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k} = 1$$

Dus:

$$1 \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F) \leq 1 \Rightarrow \dim_B(F) = 1$$

24. Zij $F \subset \mathbb{R}^2$ en $F = B(0,r)$, bepaal: $\dim_B F$ en $\dim_B \overline{F}$

Oplossing:
Gebruikmakend van de propositie van Minkovski:$F \subset \mathbb{R}^2$ is begrensd en niet leeg. $F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^2 | \exists y \in F \text{ zodat } \|x-y\| \leq \delta\}$ en dus $F_\delta = B(0, r+\delta)$, hieruit volgt dat $l^2(B(0, r+\delta)) = \pi(r+\delta)^2$. $\underline{\dim}_B(F) = 2 - \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln(\pi(r+\delta)^2)}{\ln(\delta)} = 2 - \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{2\ln(\pi(r+\delta))}{\ln(\delta)} = 2$ (Hetzelfde geldt voor $\overline{\dim}_B(F) = 2$)
In conclusie: $\dim_B(F) = 2$

Voor $\overline{F}$ geldt: $\overline{F}_\delta = \overline{B}(0, r+\delta) \Rightarrow l^2(\overline{B}(0, r+\delta)) = \pi(r+\delta)^2$. Uiteindelijk is dan $\dim_B(F) = 2$.

25. Zij $F \subset \mathbb{R}^n, F \neq \emptyset$ en F is begrensd. Zij ook $s > 0$ en definieer:

$$M_*^s(F) = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{l^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}}$$

$$M^{*s}(F) = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{l^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}}$$

Dan is $\underline{\dim}_B(F) = \inf\{\delta \geq 0 | M_*^s(F) = 0\}$ en $\overline{\dim}_B(F) = \inf\{\delta \geq 0 | M^{*s}(F) = 0\}$

Bewijs:

(a) $M_*^s = M^{*s} = 0, \ \forall s > n$

(b) $\exists s_0 > 0$ zodat: $0 < M_*^{s_0}(F) < +\infty \Rightarrow M_*^s(F) = \begin{cases} \infty & s < s_0 \\ 0 & s > s_0 \end{cases}$

(c) Zij $F = \{a_0, \dots a_k\} \subset \mathbb{R}^2$, bepaal $M_*^0(F)$ en $M^{*0}(F)$.

Oplossing:

(a) Kies $s > n$ willekeurig, F is begrensd, er bestaat dus een $R \in \mathbb{R}$ zodat $F \subset B(x, R)$ voor een $x \in F$. Nu is ook $F_\delta \subset B(x,R)_\delta$ en dus $l^n(F_\delta) \leq l^n(B(x,R)_\delta) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}(R+\delta)^n$. Aangezien $s > n$, $0 > n - s$ is $\frac{l^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}} \leq \pi\delta^{s-n}(R+\delta)^2 \Rightarrow \lim_{\delta\to 0} \frac{l^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}} = \lim_{\delta\to 0} \pi\delta^{s-n}(R+\delta)^2 = 0$. In conclusie: $M_*^s = M^{*s} = 0, \ \forall s > n$

(b) Stel $A = M_*^{s_0}(F)$, dan is $A = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{l^n(F_\delta)}{\delta^{n-s_0}}$, We weten dus dat $l^n(F_\delta) = \mathcal{O}(\delta^{n-s_0})$ (Big-O). Hieruit volgt: $\frac{l^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}} = \mathcal{O}(\delta^{s-s_0})$, dus: $M_*^s(F) = \begin{cases} \infty & s < s_0 \\ 0 & s > s_0 \end{cases}$

(c) Het is duidelijke dat $F_\delta = \bigcup_{i=1}^k \overline{B}(x_i, \delta) \Rightarrow l^2(F_\delta) \leq \sum_{i=1}^k \pi\delta^2 = k\pi\delta^2, \ \forall \delta > 0$. Echter, $\exists \delta_0 \in \mathbb{R}$ zodat $\{\overline{B}(x_i, \delta_0)\}_{i\in\{1,\dots,k\}}$ disjunct zijn, waardoor $l^2(F_\delta) = \sum_{i=1}^k \pi\delta^2 = k\pi\delta^2, \ \forall \delta < \delta_0$. Dus: $\frac{l^2(F_\delta)}{\delta^2} = k\pi \Rightarrow M_*^0(F) = M^{*0}(F) = k\pi$.

26. Zij $E, F \subset \mathbb{R}^m, F \neq \emptyset \neq E$ en E en F zijn begrensd, dan:

(a) $\overline{\dim}_B(F), \ \underline{\dim}_B(F) \in [0, m]$

(b) Zij $f : F \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ en $\exists c_1, c_2 > 0$ zodat $c_1\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq c_2\|x-y\|, \ \forall x, y \in F$. Dan is $\underline{\dim}_B(f(F)) = \underline{\dim}_B(F), \ \forall x, y \in F$ (hetzelfde voor $\overline{\dim}_B$)

(c) $\exists \alpha, c < 0$ zodat $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x-y\|^\alpha, \ \forall x, y \in F \Rightarrow \underline{\dim}_B(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha}\underline{\dim}_B(F)$ (hetzelfde voor $\overline{\dim}_B$)

Oplossing:

(a) F is begrensd, er bestaat dus een U open (ook begrensd) zodat $F \subset U$. Aangezien U open is, is $\dim_B(U) = m$. Verder weten we dat, omdat $F \subset U \Rightarrow \dim_B(F) \leq \dim_B(U) = m$. Dus: $\dim_B(U) \in [0, m]$

(b) Zij $f : F(F)$ en $\exists c_1, c_2 > 0$ zodat $c_1\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq c_2\|x-y\|,\ \forall x, y \in F$. Aangezien $\|f(x)-f(y)\| \leq c_2\|x-y\|$, is f injectief, f is ook surjectief. Voor f^{-1} geldt: $\frac{1}{c_2}\|x-y\| \leq \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c_1}\|x-y\|,\ \forall x, y \in f(F)$..
Dus: $\|f(x)-f(y)\| \leq c_2\|x-y\|,\ \forall x, y \in F \Rightarrow \underline{\dim}_B(f(F)) \leq \underline{\dim}_B(F)$
$\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c_1}\|x-y\|,\ \forall x, y \in f(F) \Rightarrow \underline{\dim}_B(f^{-1}(f(F))) \leq \underline{\dim}_B(f(F)) \Rightarrow \underline{\dim}_B(F) \leq \underline{\dim}_B(f(F))$

In conclusie: $\underline{\dim}_B(f(F)) = \underline{\dim}_B(F)$ (Analoog voor het bewijs voor $\overline{\dim}_B$)

(c) Neem $N_\delta(F)$ het kleinste aantal verzameling U_i met $\operatorname{diam}(U_i) \leq \delta$ zodat $F = \bigcup_{i=1}^{N_\delta(F)} U_i$. Indien $x, y \in U_i$, $\|f(x)-f(y)\| \leq c\|x-y\|^\alpha \leq c\delta^\alpha$. Hieruit volgt: $N_{c\delta^\alpha}(f(F)) \leq N_\delta(F)$, aangezien deze getallen de kleinste waardes zijn waaraan de voorwaarden voldaan zijn en $\{U_i\}_{i\in\{1\ldots N_\delta(F)}$ behoort tot de families die voldoen aan voorwaarden voor $N_{c\delta^\alpha}(f(F))$. Nu is

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln(N_{c\delta^\alpha}(f(F)))}{-\ln(c\delta^\alpha)} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(c\delta^\alpha)} = \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln(N_\delta(F))}{-\alpha\ln(\delta)-\ln(c)} = \frac{1}{\alpha}\underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$$

In conclusie: $\underline{\dim}_B(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha}\underline{\dim}_B(F)$
($\underline{\lim}$ dient vervangen te worden door $\overline{\lim}$ voor $\overline{\dim}_B$)

27. Toon aan: $\underline{\lim}_{\delta\to 0}f(\delta) + \underline{\lim}_{\delta\to 0}g(\delta) \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0}f(\delta)+g(\delta) \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0}f(\delta)+g(\delta) \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0}f(\delta) + \overline{\lim}_{\delta\to 0}g(\delta)$

Oplossing:
De eerste twee ongelijkheden zijn reeds bewezen.
Ter herhaling: $\overline{\lim}_{x\to 0}f(x) = \lim_{r\to 0}(\sup\{f(x)|0<x<r\})$. Stel $M = \sup\{f(x)+g(x)|0 < x < r\} = f(x_0)+g(x_0)$ met $x_0 \in]0, r[$, $m_1 = \sup\{f(x)|0<x<r\} = f(x_1)$ en $m_2 = \sup\{g(x)|0<x<r\} = g(x_2)$ met $x_1, x_2 \in]0, r[$. Hierbij moet x_0, x_1 & x_2 niet aan elkaar gelijk zijn. Uit de definitie van sup is $f(x_0) \leq f(x_1)$ en $g(x_0) \leq g(x_2)$, dus: $M \leq m_1 + m_2$.
In conclusie: $\sup\{f(x)+g(x)|0<x<r\} \leq \sup\{f(x)|0<x<r\} + \sup\{g(x)|0<x<r\} \Rightarrow \overline{\lim}_{\delta\to 0}f(\delta)+g(\delta) \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0}f(\delta) + \overline{\lim}_{\delta\to 0}g(\delta)$

28. Zij $x_n = \frac{1}{2^{(2^n)}}$, bepaal $\dim_B(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Oplossing:
$\frac{1}{2^{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{2^n}} - f(x_n) \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{2^{2^n}} - \frac{1}{2^{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{2^n}} - \frac{1}{(2^{2^n})^2} \overset{x=1/2^{2^n}}{\Rightarrow} f(x) = x(1-x)$. $f \in \mathcal{C}^\infty$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0, \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, f is monotoom stijgend $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ $(f'(x) = 1-2x)$, $f'(0) \neq 0$, $0 < x(1-x) < x$, $\forall x \in]0, 1[$, $x_1 \in [0, 1[$ en $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$. Dus: $1 = \frac{1}{1-\dim_B(\{x_n\})} \Rightarrow \dim_B(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \frac{1-1}{1} = 0$

29. Zij $F = \left\{0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$, vindt $\dim_H(F), \underline{\dim}_B(F)$ en $\overline{\dim}_B(F)$.

Oplossing:

F is oneindig aftelbaar, want $f : \mathbb{N} \to F : x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x \neq 1 \end{cases}$ is duidelijk een bijectieve functie. Dus: $\dim_H(F) = 0$.

$F \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$ is begrensd en niet leeg.
Zij $\delta_k = \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{2k-1}{(k(k-1))^2}$ (dalende rij en convergeert naar 0), we hebben dan minstens k gesloten bollen met $\frac{\delta_k}{2}$ nodig om F te omvatten. Want de afstand tussen punten $\frac{1}{n^2}$ en $\frac{1}{(n-1)^2}$ is wordt kleiner als n groter wordt en dus hebben we zeker k bollen nodig om $0, 1, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{(k-1)^2}$ te omvatten. Dus:

$$N'_{\delta_k}(F) \geq k \Rightarrow \frac{\ln(N'_{\frac{\delta_k}{2}}(F))}{-\ln(\frac{\delta_k}{2})} \geq \frac{\ln(k)}{\ln(\frac{2(k(k-1))^2}{2k-1})} \overset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\dim}_B(F) \geq \frac{1}{3}$$

Kies nu $\delta_k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{(k(k+1))^2} \geq \frac{1}{(k+1)^3}$ (dalende rij en convergeert naar 0). Hierdoor kan alvast $[0, \frac{1}{(k+1)^2}]$ bevat worden door $k+1$ gesloten bollen met straal $\frac{\delta_k}{2}$. Verder kunnen we punten $1, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{k^2}$ ook omvatten met k extra bollen. Dus:

$$N'_{\delta_k}(F) \leq 2k + 1 \Rightarrow \frac{\ln(N'_{\frac{\delta_k}{2}}(F))}{-\ln(\frac{\delta_k}{2})} \leq \frac{\ln(2k+1)}{\ln(\frac{2(k(k-1)^2}{2k+1})} \Rightarrow \overline{\dim}_B(F) \leq \frac{1}{3}$$

In conclusie:

$$\frac{1}{3} \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F) \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \dim_B(F) = \frac{1}{3}$$

30. Laat F bestaan uit de getallen in $[0, 1]$ wiens decimale uitbreiding niet 5 bevat. Vindt $\dim_B(F)$, hiermee toon je aan dat de box dimensie ervan bestaat.

Oplossing:
$\boxed{\leq:}$ Zij $F \subset I_0 = [0, 1] = [0, 0.1[\cup \ldots \cup [0.5, 0.6] \cup [0.6, 0.7[\cup \ldots \cup [0.9, 1]$ Hierbij bevat elke element van $[0.5, 0.6]$ altijd minstens een 5 ($0.6 = 0.5\overline{9}$). Indien we dit segment weg doen, blijft F een subset ervan, dus: zij $I_1 = [0, 0.1] \cup \ldots \cup [0.4, 0.5[\cup]0.6, 0.7] \cup \ldots \cup [0.9, 1]$, dan $F \subset I_1$. Wederom kunnen we elk segment opsplitsen in 10 delen met diameter $\frac{1}{10^2}$, bv, $[0, 0.1] = [0, 0.01] \cup \ldots \cup [0.09, 0.1]$. Hieruit halen we wederom het segment $[0.05, 0.06]$ en houden we 9 segmenten over waarvan F een subset is. In totaal houden we dus 9^2 segmenten over.
Dus: $I_1 = \bigcup_{i=1}^{9} I_1^i$, $I_2 = \bigcup_{i=1}^{9^2} I_2^i$ en uiteindelijk krijgen we $I_k = \bigcup_{i=1}^{9^k} I_k^i$ met $\text{diam}(I_k^i) = \frac{1}{10^k}$ en $F \subset I_k$, $\forall k \geq 1$. Verder weten we dat $F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$, want: $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \supset F$ is duidelijk en $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \subset F$ want, zij $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$, dan staat op 5 niet op het k'de decimaal getal $\forall k \in \mathbb{N}$, de decimale uitbreiding van x bevat geen 5, dus $x \in F$
Hieruit volgt:

$$N_{\frac{1}{10^k}}(F) \leq 9^k,\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{\ln(N_{\frac{1}{10^k}}(F))}{-\ln(\frac{1}{10^k})} \leq \frac{\ln(9^k)}{\ln(10^k)} = \frac{\ln(9)}{\ln(10)} \Rightarrow \overline{\dim}_B(F) \leq \frac{\ln(9)}{\ln(10)}$$

$\boxed{\geq:}$ We zoeken de Haussdorfdimensie van F. Definieer $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{i+x}{10}$ met $i \in \{0, \ldots, 4, 6, \ldots, 9\} = \mathcal{A}$. Hierbij is $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \|f_i(x_1) - f_i(x_2)\| = \frac{1}{10}\|x_1 - x_2\|$. Dus: $H^s(\tilde{F}) = \frac{1}{10}^s H^s(\tilde{F})$, $\forall \tilde{F} \subset \mathbb{R}$ en $s \geq 0$. Verder is $I_k = \bigcup_{i\in\mathcal{A}} f_i(I_{k-1})$, $\forall k \geq 1$ met

$I_0 = [0,1[$. Merk op dat $f_4(1) = 0.5$, dit zit niet in I_k. Getallen zoals 0.1239874605 ook niet vanwege dezelfde reden. In conclusie:

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k \cup \{1\} = \left([0,1[\cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathcal{A}} f_i(I_{k-1})\right) \cup \{1\} \stackrel{*}{=} \left([0,1] \cap \left(\bigcup_{i\in\mathcal{A}} f_i\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_{k-1}\right) \cup \{1\}\right)\right.$$

$$= \bigcup_{i\in\mathcal{A}} f_i\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_{k-1}\right) \cup \{1\}$$

* kan analoog bewezen worden zoals in oef 19.
Verder is $f_j(F) \cap f_l(F) = \emptyset, \forall j \neq l$, dus is volgens de definitie van maat: $H^s(F) = \sum_{i\in\mathcal{A}} H^s(f_i(F))$ (Een aftelbare unie singeltons maken niet uit)
$f_i(F)$ zijn Borel want F is gesloten en f_i continu voor alle i. Dus:

$$H^s(F) = 9\frac{1}{10}^s H^s(F) \stackrel{H^s(F)<\infty}{\Rightarrow} s = \frac{\ln(9)}{\ln(10)}$$

Nu is $H^{\frac{\ln(9)}{\ln(10)}}(F) \leq 1$. In conclusie: $\dim_H(F) = \frac{\ln(9)}{\ln(10)}$ en verder is dus

$$\frac{\ln(9)}{\ln(10)} = \dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F)$$

In conclusie: $\dim_B(F) = \frac{\ln(9)}{\ln(10)}$

31. Bewijs:

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \iff \forall r > 0 : \mu(B(x,r)) > 0$$

Oplossing:
$\boxed{\Rightarrow:}$ We weten dat $\mu(\{x\}) = 0$ aangezien een singelton verwaarloosbaar is. Hieruit volgt dus dat $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap \mathrm{supp}(\mu)$ niet enkel mag bestaan uit een aftelbare unie singeltons. Dus: $\mu(B(x,r) \cap \mathrm{supp}(\mu)) > 0,\ \forall r > 0$. Nu is $\mu(B(x,r)) = \mu(B(x,r) \cap \mathrm{supp}(\mu)) + \mu(B(x,r) \cap \mathrm{supp}(\mu)^c) = \mu(B(x,r) \cap \mathrm{supp}(\mu)) > 0,\ \forall r > 0$.
$\boxed{\Leftarrow:}$ Stel dat $x \notin \mathrm{supp}(\mu)$, dan betekent dat dat $\mathrm{supp}(\mu)$ niet gesloten is aangezien $\forall r > 0 : \mu(B(x,r)) > 0$ en dus $B(x,r) \cap \mathrm{supp}\mu \neq \emptyset$. Hieruit volgt dat $B(x,\delta) \not\subset \mathrm{supp}(\mu)^C$ voor elke $\delta > 0$ klein genoeg, dus $\mathrm{supp}(\mu)^C$ is niet open.
Dat $\mathrm{supp}(\mu)$ niet gesloten is, is een contradictie met de definitie van drager.

32. Laat $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Definieer $\mu(A) = \mathcal{L}\{x : (x, f(x)) \in A\}$, voor $A \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{L}$ de Lebesgue maat. Toon aan dat μ een massadistributie op $\mathbb{R}^2$ met graf(f) de drager.

Oplossing:
Aangezien f continu is, is $\{x|\ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\} = [0,1]$. Hieruit volgt: $\mu(\mathbb{R}^2) = \mathcal{L}([0,1]) = 1$. μ is dus een massadistributie op $\mathbb{R}^2$.
Merk nu op dat $\{x|\ (x, f(x)) \in \mathrm{graf}(f)^C\} = \emptyset$, dus $\mu(\mathrm{graf}(f)) = \mathcal{L}(\emptyset) = 0$. graf$(f)$ is gesloten aangezien $[0,1]$ gesloten is en $f([0,1])$ ook (f is continu). Verder is het ook de kleinste gesloten verzameling waarvoor $\mu(X^c) = 0$ geldt. Stel immers dat dit niet zo is en, als $A = ([0,1] \setminus]a,b[, f([0,1] \setminus]a,b[))$, $\mu(A^C) = 0$, $a < b \in [0,1]$ ($[0,1] \setminus]a,b[$, $[0,1] \setminus]a,1]$ of $[0,1] \setminus [0,b[$ zijn de enige opties, aangezien A gesloten moet zijn, de overige twee verlopen analoog). Anderzijds is $\mu(A^C) = \mathcal{L}\{x|\ (x, f(x)) \in A^C\} = \mathcal{L}(]a,b[) = b - a \neq 0$.
In conclusie: graf(f) is de drager van μ

33. $F \subset \mathbb{R}$, $F \neq \emptyset$ en F is begrensd en $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$, definieer $D := \{x-y | x, y \in F\} \subset \mathbb{R}$. Bewijs dat $\dim_H(D) \leq \min\{1, 2\dim_H(F)\}$

Oplossing:
Definieer functie $f : F \times F \to D : (x,y) \mapsto x-y$. $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|= |x_1-x_2+y_2-y_1| \leq |x_1-x_2|+|y_1-y_2|= \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|_1 \ \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F \times F$. Nu is dus $\dim_H(D) = \dim_H(f(F\times F)) \leq \dim_H(F \times F)$. Verder is, aangezien $F \subset \mathbb{R}$, $F \neq \emptyset$, F is begrensd en $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$, $\dim_H(F \times F) = 2\dim_H(F)$.
Uit oefening 26 a weten we ook dat $\dim_H(D) \leq \underline{\dim}_B(D) \leq 1$ $D \subset \mathbb{R}$.
In conclusie: $\dim_H(D) \leq \min\{1, 2\dim_H(F)\}$

34. Zij $f^{-1} : [-m,m] \times F \to f^{-1}([-m,m] \times F) : (x,y) \mapsto (x, y+x^2)$.
Toon aan: f^{-1} bi-Lipschitz continu.

Oplossing:
We weten dat $f : f^{-1}([-m,m] \times F) \to [-m,m] \times F : (x,y) \mapsto (x, y-x^2)$. Hierbij is

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2m & 1 \end{bmatrix} = A \qquad Df^-1(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2m & 1 \end{bmatrix} = B$$

Nu weten we uit de middelwaardestelling van differentiale:

$$\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \|x-y\| \sup_{z \in [x_1,y_1]\times[x_2,y_2]} \|Df^{-1}\| \leq \|x-y\|\|B\|, \ \forall x,y \in [-m,m] \times F$$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\| \sup_{z \in [x_1,y_1]\times[x_2,y_2]} \|Df\| \leq \|x-y\|\|A\|, \ \forall x,y \in f^{-1}([-m,m] \times F)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{\|A\|}\|x-y\| \leq \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \|B\|\|x-y\|, \quad \forall x,y \in [-m,m] \times F$$

Merk op dat $\forall m \geq 0 : \det(A) \neq 0 \neq \det(B)$ en $\|A\| > 0, \|B\| > 0$

35. $F' = \{(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) | r \in F, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$ met F de cantor-verzameling. Bewijs $\dim_H F' = 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$

Oplossing:
Definieer $f : [\frac{1}{m}, 1] \cap F \times [0, 2\pi - \frac{1}{m}] \to F' : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, $(m \in \mathbb{N})$. Het is duidelijk dat $f \in C^\infty$, want de componenten zijn het product van $\sin, \cos$ en r. Het is duidelijk dat $F' = f(F, [0,2\pi]) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f([\frac{1}{m}, 1] \cap F \times [0, 2\pi - \frac{1}{m}])$. Verder is $f^{-1}(x,y) = (x^2+y^2, \tan^{-1}(\frac{y}{x}))$.
Nu zijn:

$$Df(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad Df^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Indien we nu $f : [\frac{1}{m}, 1] \cap F \times [0, 2\pi] \to f([\frac{1}{m}, 1] \cap F \times [0, 2\pi - \frac{1}{m}])$ en $f^{-1} : f([\frac{1}{m}, 1] \cap F \times [0, 2\pi]) \to [\frac{1}{m}, 1] \cap F \times [0, 2\pi]$ met $m \in \mathbb{N}$ beschouwen, zijn beide differentialen begrensd. Op een gelijkaardige manier aan oefening 34 kan bewezen worden dat f bi Lipschitz is. Nu weten we dat $F' = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f([\frac{1}{m}, 1] \cap F \times [0, 2\pi - \frac{1}{m}]) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f(F \times [0, 2\pi - \frac{1}{m}])$ en dus is $\dim_H(F') = \sup_{m \in \mathbb{N}}\{\dim_H(f(F \times [0, 2\pi - \frac{1}{m}]))\} = \sup_{m \in \mathbb{N}}\{\dim_H(F \times [0, 2\pi - \frac{1}{m}])\}$ met $\dim_H(F \times [0, 2\pi - \frac{1}{m}]) = \dim_H(F) + \dim_H([0, 2\pi - \frac{1}{\pi}]) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} + 1$.
In conclusie: $\dim_H(F') = 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$

36. Zij $f : [0,1]$ continu en $\exists c > 0,\ \delta_0 > 0$ en $1 \leq s < 2$ zodat: $\forall t \in [0,1],\ \forall \delta \in]0, \delta_0],\ \exists u : [0,1]$ zodat $|t-u| \leq \delta$ en $|f(t) - f(u)| \geq c\delta^{2-s}$, dan geldt:

$$s \leq \underline{\dim}_B \Gamma_f$$

Oplossing:
Zij $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ met $|t_1 - t_2| \leq \delta$ voor elke t_1 kan zo een t_2 gevonden worden, nu geldt: $R_f[t_1, t_2] = \sup_{t_1 < t, u < t_2} |f(t) - f(u)| \overset{|t-u| \leq \delta}{\geq} c\delta^{2-s}.*$
Zij nu $m = \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor$ en $N_\delta = N_\delta(\Gamma_f) =$ aantal $\delta-$kubussen $K_{k_1,k_2} = [k_1\delta, (k_1+1)\delta] \times [k_2\delta, (k_2+1)\delta]$ zodat $K_{k_1,k_2} \cap \Gamma_f \neq \emptyset$:

$$N_\delta \geq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{R_f[i\delta, (i+1)\delta]}{\delta} \overset{*}{\geq} mc\delta^{1-s} \geq M\delta^{-s}, \qquad M \leq mc\delta$$

Hierbij kan $M > 0$ zijn (Merk op dat $1 \leq s < 2$). Nu is $\underline{\dim}_B(\Gamma_f) = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln(N_\delta)}{-\ln(\delta)} \geq \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{-s\ln(\delta) + \ln(M)}{-\ln(\delta)} = s$
In conclusie: $s \leq \underline{\dim}_B \Gamma_f$

37. Bewijs dat de Weierstrass functie continu is op $[0,1]$.

Oplossing:

De Weierstrass functie is gedefinieerd als : Zij $\lambda > 1, 1 < s < 2$ zodat

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$$

Aangezien $1 < s < 2$ is $-1 < s - 2 < 0$ en aangezien $\lambda > 1$ is $\lambda^{s-2} < 1$. Verder geldt dat $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1] : (\lambda^{s-2})^k \sin(\lambda^k t) \leq (\lambda^{s-2})^k$. Nu is:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (\lambda^{s-2})^k = \frac{1}{1 - \lambda^{s-2}} < \infty$$

Deze reeks convergeert dus. Volgens de Majorantie test convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$ uniform. Verder is $\sum_{k=1}^{n} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$ met $n \in \mathbb{N}$ voor alle n continu (eindige som van continue functies).
In conclusie: aangezien de Weierstrass functie uniform convergeert en de partiële sommen continu zijn, is de Weierstrass functie continu.

38. Zij $F \subset \mathbb{R}$ en $F = \mathbb{N}$, bereken $P_0^1(F)$ en $P_0^1(\{i\})$ voor $i \in \mathbb{N}$.

Oplossing:
$P_\delta^1(F) = \sup\{\sum \operatorname{diam}(B_i) |\ \{B_i\}$ is een familie open bolle met $B_i = B_i(x_i, \delta_i)$ zodat $\delta_i \leq \delta, x_i \in F,\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ \forall i \neq j\}$.
Merk op dat als $0 < \delta_i \leq \frac{1}{2} : B_i = B(i, \delta_i) \subset B(i, \frac{1}{2}) =]i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}[$. Aangezien $i \in \mathbb{N}$ concluderen we dat $B_i \cap B_j = \emptyset$ als $i \neq j$ en $\delta_i, \delta_j \leq \frac{1}{2}$. Aangezien de definitie sup gebruikt kunnen we een familie open bollen gebruiken met de zelfde straal δ en centrum i, dan is $\sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2\delta = \infty$. De som is in ieder geval divergent voor alle $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, dus $P_0^1(F) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i \in \mathbb{N}} 2\delta = \infty$.

Aangezien $\{i\}$ enkel 1 punt bevat, kan enkel $B(i,\delta_i)$ beschouwd worden. Vandaar is $P^1_\delta(\{i\}) = \sup\{\sum_{j=1}^1 B(i,\delta_i)|\delta_i \leq \delta\} = 2\delta$.
Hieruit volgt meteen dat $P^1_0(\{i\}) = \lim_{\delta\to 0} P^1_\delta(\{i\} = 0$.

39. Bereken $P^1(\mathbb{N})$ en $P^1(\{i\})$ voor $i \in \mathbb{N}$.

Oplossing:
Eerst berekenen we $P^1(\{i\})$. $\{i\} \subset \{i\}$, aangezien P^s een maat is $\forall s \geq 0$. is P^1 dat ook en dus $0 \leq P^1(\{i\})$. Verder, omdat $P^1_0(\{i\}) = 0$ is $P^1(\{i\}) = 0$

Aangezien $\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{i\}$ een aftelbare hoeveelheid disjuncte verzamelingen zijn, is $P^1(\mathbb{N}) = p^1(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{i\}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P^1(\{i\}) = 0$.

40. (a) Zij $E \subset F \Rightarrow \dim_P(E) \leq \dim_P(F)$
(b) $\dim_P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{\dim_P F_i\}$

Oplossing:

(a) Zij $E \subset F$, dan is $0 \leq P^s(E) \leq P^s(F)$ (het is een maat) voor alle s. Vervolgens, als $P^s(F) = 0$, dan is $P^s(E) = 0$. Dus: $\{s \geq 0|P^s(F) = 0\} \subset \{s \geq 0|P^s(E) = 0\} \Rightarrow \inf\{s \geq 0|P^s(E) = 0\} \leq \inf\{s \geq 0|P^s(F) = 0\} \Rightarrow \dim_P(E) \leq \dim_P(F)$.

(b) $\boxed{\geq:}$$F_j \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, $\forall j \in \mathbb{N}$ uit 1 volgt dan $\dim_P(F_j) \leq \dim_P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)$, $\forall j \in \mathbb{N}$ dus $\dim_P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) \geq \sup_{i\in\mathbb{N}}\{\dim_P F_i\}$.
$\boxed{\leq:}$ Stel $\exists s > \dim_P(F_i)$, $\forall i \Rightarrow P^s(F_i) = 0$, $\forall i \Rightarrow 0 \leq P^s(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} P^s(F_i) = 0$
$\Rightarrow P^s(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = 0 \Rightarrow \{s \geq 0|s > \dim_P(F_i), \forall i\} \subset \{s \geq 0|\ P^s(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = 0\} \Rightarrow$
$\dim_P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = \inf\{s \geq |\ P^s(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i)\} \leq \inf\{s \geq 0|\dim_P(F_i) < s, \forall i\} = \sup\{\dim_P(F_i), \forall i\}$.
Stel dat s niet bestond dan is $\sup\{\dim_P(F_i)|\ \forall i\} = \infty$.
In conclusie: $\dim_P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{\dim_P F_i\}$

41. Zij $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}[$, bepaal ∂U en zij $\tilde{U} = \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$, bepaal $\underline{\Delta}_{ext}(\tilde{U}), \overline{\Delta}_{ext}(\tilde{U})$ en $\overline{\Delta}_{int}(\tilde{U})$.

Oplossing:
U is een aftelbare unie open delen, dus het is open, dus $\mathring{U} = U$. In het eerste jaar zagen we dat $\overline{U} = [0,1]$. Het uitdagenste om dit aan te tonen, is aantonen dat $0 \in \overline{U}$. Dit is omdat voor elk reel getal a bestaat er een $\frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{N}$ zodat $a \leq \frac{1}{n}$.
In conclusie: $\partial U = [0,1]\backslash\mathring{U} = \{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\}$.

$U^C =]-\infty,0] \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\} \cup [1,\infty[$ en $\tilde{U}_\delta = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]\frac{1}{n}-\delta,\frac{1}{n}+\delta[$. Voor δ klein genoeg: $\tilde{U}_\delta \cap U^C = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{n+1} \cup [1,1+\delta[\Rightarrow l(\tilde{U}_\delta \cap U^C) = \delta$.
In conclusie:

$$\Delta_{ext}(\tilde{U}) = \lim_{\delta\to 0}\left(1 - \frac{\ln(l(\tilde{U}_\delta \cap U^C))}{\ln(\delta)}\right) = \lim_{\delta\to 0}\left(1 - \frac{\ln(\delta)}{\ln(\delta)}\right) = 0$$

Verder is, omdat $\dim_B(\tilde{U}) = \max\{\overline{\Delta}_{int}(\tilde{U}), \overline{\Delta}_{ext}(\tilde{U})\}$:

$$\frac{1}{2} = \dim_B(\tilde{U}) = \max\{\overline{\Delta}_{int}(\tilde{U}), 0\} = \overline{\Delta}_{int}(\tilde{U})$$

42. Bepaal $\overline{\dim}_B(F)$ met $F = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\}$.

Oplossing:
Neem $x_n = \frac{1}{n^2}$, dan is $s_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{2}{n(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)^2} \leq \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4} \leq \frac{3}{n^3}$. s_n is alvast een dalende rij en $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n^3} < \infty$, dus volgens de Majorantie test is $\sum_{n\geq 1} s_n$ ook convergent. Verder is $\frac{1}{(2n+1)^3} \leq s_n$. Neem nu $f_s(z) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}\right)^z$, dan weten we dat $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{(2n+1)^3}\right)^z \leq f_s(z) \leq \sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{n^3}\right)^z$. Nu convergeert $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{n^3}\right)^z$ als $3z > 1 (z > \frac{1}{3})$ en $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{(2n+1)^3}\right)^z$ divergeert als $3z \leq 1 (z \leq \frac{1}{3})$. Hieruit volgt dat $D(f_s) = \inf\{z \in \mathbb{R} | f_s(z) < \infty\} = \frac{1}{3}$ en dus ook dat $\overline{\dim}_B(F) = \frac{1}{3}$.