# Extra oef DEDV

Wietse Vaes

8 april 2023

1. *Stel $B$ is bilineair, E, G en F genormeerde ruimtes.*
$$B \textit{ is continu} \iff \exists C > 0 \textit{ zodat } \forall (x,y) \in (E,F) : \|B(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|$$

   **Bewijs:**
   $\boxed{\Rightarrow}$ Stel $B$ is continu,
$$\|B\| = \sup\{\|B(x,y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} = \sup_{x\neq 0, y\neq 1}\{\|B\left(\frac{x}{\|x\|}.\frac{y}{\|y\|}\right)\|\} = \sup_{x\neq 0, y\neq 1}\left\{\frac{\|B(x,y)\|}{\|x\|\|y\|}\right\} \leq C$$
   ($\|x\|, \|y\|$ mogen uit B komen aangezien B bilineair is en $C > 0$ met $\|B\| \leq C$ bestaat aangezien B continu is). Hieruit concluderen we dat $\|B(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|, \ \forall (x,y) \in (E,F)$

   $\boxed{\Leftarrow}$ $\|B\| = \sup\limits_{x\neq 0, y\neq 1}\left\{\frac{\|B(x,y)\|}{\|x\|\|y\|}\right\} \leq \frac{C\|x\|\|y\|}{\|x\|\|y\|} \leq C$. Dus $\|B\|$ is begrensd en dus continu.

2. *$T \in L(E)$ en $\exists\ T^{-1} : E \to E$ zodat $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = Id_E \Rightarrow T^{-1} \in L(E)$*

   **Bewijs:**
$$\begin{aligned}
&T(T^{-1}(x+y)) = x + y = T(T^{-1}(x)) + T(T^{-1}(y)) = T(T^{-1}(x) + T^{-1}(y)) \\
\Rightarrow &T^{-1}(T(T^{-1}(x+y))) = T^{-1}(T(T^{-1}(x) + T^{-1}(y))) \\
\Rightarrow &T^{-1}(x+y) = T^{-1}(x) + T^{-1}(y)
\end{aligned}$$
   Verder is
$$T(T^{-1}(\lambda x)) = \lambda x = \lambda T(T^{-1}(x)) = T(\lambda T^{-1}(x)) \Rightarrow T^{-1}(\lambda x) = \lambda T^{-1}(x)$$

3. *T is lineair: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$ (f en g zijn trapfuncties en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)*

   **Bewijs:**
   we definieerde $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(c_i)$, (met $c_i \in ]x_{i-1}, x_i[$). Hierbij is dit goed gedefinieerd (het is onafhankelijk van de keuze van eventuele extra verdeelpunten $x_i$. Daarom kunnen we de intervallen, waarop de trapfuncties $f$ en $g$ constant zijn, zodanig kiezen/opsplitsen zodat ze beide dezelfde intervallen hebben. We schrijven deze gridpunten hiervan als $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x_m = b$. Nu is
$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx &= \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})(\alpha f(c_i) + \beta g(\xi_i)) && c_i, \xi_i \in ]x_{i-1}, x_i[ \\
&= \sum_{i=1}^m \alpha(x_i - x_{i-1})f(c_i) + \beta(x_i - x_{i-1})g(\xi_i) && \text{eindige som} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})f(c_i) + \beta \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})g(\xi_i) \\
&= \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx
\end{aligned}$$

4. *Zij $F = \mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$ volledig, $f : [a,b] \to F$ ($f \in RF$), $f := (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, dan*

$$\int_a^b f dx = \left( \int_a^b f_1 dx, \int_a^b f_2 dx, \ldots, \int_a^b f_m dx \right)$$

**Bewijs:**
$f$ is een regelfunctie. Indien we bewijzen dat dit geldt voor alle trapfuncties geldt dit ook voor de regelfuncties aangezien $\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ met $f_n(x)$ trapfuncties. Stel dat $g = (g_1, \ldots, g_n)$ een functie met trapfuncties als componenten is. Nu is

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) g(c_i) = \sum_{i=1}^{m} ((x_i - x_{i-1}) g_1(c_i), \ldots, (x_i - x_{i-1}) g_1(c_i))$$

$$= (\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) g_1(c_i), \ldots, \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) g_n(c_i)) = (\int_a^b g_1(x)dx, \ldots, \int_a^b g_n(x)dx)$$

We hebben het dus bewezen voor alle trapfunctie. Indien we nu voor elke $f_i$ een rij trapfuncties $(f_i)_m$ vinden die convergeren naar $f_i$ (die bestaan aangezien de verzameling trapfuncties dicht is in de verzameling regelfuncties) geldt het volgende:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{m\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \lim_{m\to\infty} \left( \int_a^b (f_1)_m(x)dx, \ldots, \int_a^b (f_n)_m(x)dx \right)$$

$$= \left( \lim_{m\to\infty} \int_a^b (f_1)_m(x)dx, \ldots, \lim_{m\to\infty} \int_a^b (f_n)_m(x)dx \right) = \left( \int_a^b f_1 dx, \int_a^b f_2 dx, \ldots, \int_a^b f_m dx \right)$$

5. *Zij $E$ en $F$ genormeerde ruimten. Dan zijn er, voor elke $n \geq 2$, natuurlijke isometrieen*

$$i_n : L_c(E, L_c(E, \ldots, L_c(E, F) \ldots)) \to L_C^n(E, F)$$

**Bewijs:**
We weten al dat $i_2$ een natuurlijke isometrie is, stel nu dat $i_{n-1}$ gekend is. Voor elke $f$ in het domein van $i_n$ geldt dus dat $f(a_1)$ in het domein van $i_{n-1}$ ligt (indien $a_1 \in E$). definieer nu

$$i_n(f)(a_1, \ldots, a_n) := i_{n-1}(f(a_1))(a_2, \ldots, a_n)$$

Dit beschrijft $i_n(f)$volledig, voor elke f. Nu gelden volgende zaken:

goed-gedefinieerd: $i_n$ is n-lineair aangezien $i_n$ (n-1)-lineair is en het is continu aangezien $\|i_n(f)(a_1, \ldots, a_n)\| = \|i_{n-1}(f(a_1))(a_2, \ldots, a_n)\| \leq \|i_{n-1}(f(a_1))\| \|(a_2, \ldots, a_n)\|$ Aangezien $i_{n-1}$ goed gedefinieerd is, is het continu en dus is $\|i_{n-1}\|$ begrensd endus is $\|i_n(f)\| \leq \|i_{n-1}(f(a_1))\|$, het is dus zelf begrensd en dus continu, dus $i_n(f) \in L_c^n(E, F)$

lineair: $i_n(\lambda f + \mu g)(a_1, \ldots, a_n) = i_{n-1}((\lambda f + \mu g)(a_1))(a_2, \ldots, a_n) = \lambda i_{n-1}(f(a_1))(a_2, \ldots, a_n) + \mu i_{n-1}(g(a_1))(a_2, \ldots, a_n) = \lambda i_n f(a_1, \ldots, a_n) + \mu i_n g(a_1, \ldots, a_n)$ (aangezien $i_{n-1}$ lineair is)

surjectief: Zij $\tilde{f} \in L_c^n(E, F)$ willekeurig en vast, we definiëren $\tilde{f}_{a_1} : E^{n-1} \to F : (A_2, \ldots, a_n) \mapsto \tilde{f}(x_{1,n})$. $\tilde{f}_{a_1}$ moet dus (n-1)-lineair zijn, dus $\tilde{f}_{a_1} \in L_c^{n-1}(E, F)$. Omdat $i_{n-1}$ bijectief is, (surjectief en injectief) bestaat er een $g_{a_1} \in L_c(E, L_c(E, \ldots, L_c(E, f) \ldots))$ met $n-1$ keer $L_c$ zodat $i_{n-1}(g_{a-1}) = \tilde{f}_{a_1}$ Dan kunnen we $f(x_1) := g_{x_1}$ met $f \in L_c(E, L_c(E, \ldots, L_c(E, f) \ldots))$ met $n$ keer $L_c$. We kunnen dus elke $\tilde{f} \in L_c^n(E, F)$ bekomen met een $f \in L_c(E, L_c(E, \ldots, L_c(E, f) \ldots))$. Het is dus surjectief.

injectief: $i_{n-1}(f(a_1))$ is een injectieve functie, dus $i_n(f)$ ook.

Het is dus lineair en bijectief, dus een natuurlijk isometrie.

6. *Zij $E$ en $F_1, \ldots, F_n$ genormeerde ruimten. Dan is er een natuurlijke isometrie*

$$j_n : L_c(E, F_1 \times \cdots \times F_n) \to L_c(E, F_1) \times \cdots \times L_c(E, F_n)$$

**Bewijs:**
Noteer met $\pi_i : F_1 \times \ldots \times F_n \to F_i$ de natuurlijke projectie op de $i-de$ component. Dan stellen we $j_n(f) = (\pi_1 \circ f, \ldots, \pi_n \circ f)$.

goed-gedefinieerd: Omdat $\pi_i$ en $f$ continu zijn, is $j_n$ continu (alle componenten zijn continu en de componenten zijn samenstelling van continue functies) en het is ook vrij duidelijk dat elk component $\pi_i \circ f \in L(E, F_i)$ aangezien f lineair is en $\pi_i$ enkel 1 component afbeelden. De functie is dus goed gedefinieerd.

lineair: $j_n(\lambda f + \mu g) = (\pi_1 \circ (\lambda f + \mu g), \ldots, \pi_n \circ (\lambda f + \mu g)) = (\lambda \pi_1 \circ f + \mu \pi_1 \circ g, \ldots, \lambda \pi_n \circ f + \mu \pi_n \circ g)) = \lambda(\pi_1 \circ f, \ldots, \pi_n \circ f) + \mu(\pi_1 \circ g, \ldots, \pi_n \circ g) = \lambda j_n(f) + \mu j_n(g)$

surjectief: Neem $\tilde{f}_i \in L_c(E, f_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ willekeurig en vast. En definieer $\tilde{f} := (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_n)$, het is nu vrij duidelijk dat $\tilde{f} \in L_c(E, F_1 \times \cdots \times F_n)$ en omdat $j_n(\tilde{f}) = (\pi_1 \circ \tilde{f}, \ldots, \pi_n \circ \tilde{f})$ is het duidelijk dat $j_n$ surjectief is.

injectief: $j_n(f) = j_n(g) \implies (\pi_1 \circ f, \ldots, \pi_n \circ f) = (\pi_1 \circ g, \ldots, \pi_n \circ g) \implies \pi_i \circ f = \pi_i \circ g,\ \forall i \implies f = g$

$j_n$ is een bijectief lineaire functie, dus een natuurlijke isometrie.

7. *De eigenschap $f(x) = o(\|x - x_0\|^\beta)$ blijft ongewijzigd indien men de norm vervangt door een equivalente norm.*

**Bewijs:**
Stel we nemen normen $\|\cdot\|$ en $\|\cdot\|_q$, waarbij deze equivalent zijn: $\alpha\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_q \leq \gamma\|\cdot\|$ $(\alpha, \gamma \in \mathbb{R})$. Ook geldt de eigenschap $f(x) = o(\|x - x_0\|^\beta)$. Volgens de definitie geldt dan: $f(x_0) = 0$ en $\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|x - x_0\|^\beta} = 0$. Er geldt dus al dat $f(x_0) = 0$ en we zien ook in dat:

$$0 \leq \frac{\|f(x)\|_q}{\|x - x_0\|_q^\beta} \leq \frac{\gamma}{\alpha^\beta} \frac{\|f(x)\|}{\|x - x_0\|^\beta}$$

Volgens de insluitstelling geldt nu dat $0 \leq \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x)\|_q}{\|x - x_0\|_q^\beta} \leq \frac{\gamma}{\alpha^\beta} \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|x - x_0\|^\beta} = 0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x)\|_q}{\|x - x_0\|_q^\beta} = 0$
conclusie: $f(x) = o(\|x - x_0\|_p^\beta)$. Het geldt dus ook als men de norm vervangt door een equivalente norm.

8. *$DB$ is lineair, met continue bilineaire afbeelding $B : E \times F \to G$*

**Bewijs:**
We weten al dat $DB_{(x,y)}(h, k) = B(x, k) + B(h, y)$. Nu is

$$\begin{aligned} DB_{\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)}(h, k) &= DB_{(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)}(h, k) \\ &= B(\lambda x_1 + \mu x_2, k) + B(h, \lambda y_1 + \mu y_2) && \text{B is bilineair} \\ &= \lambda B(x_1, k) + \mu B(x_2, k) + \lambda B(h, y_1) + \mu B(h, y_2) \\ &= \lambda DB_{(x_1,y_1)}(h, k) + \mu DB_{(x_2,y_2)}(h, k) \end{aligned}$$

9. *Zij $f \in L_c^m(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m)$ $m \geq 2$, $\|f(a_1, \ldots, a_m)\| \leq \|f\|\|a_1\| \ldots \|a_m\|$, dan*

$$Df_{(a_1,\ldots,a_m)}(h_1, \ldots, h_m) = \sum_{i=1}^{m} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

**Bewijs:**
We bekijken het eerst voor $m = 3$. We zien dat zelfs in het algemene geval de uitdrukking lineair en continu afhangt van de variabele $(h_1, \ldots, h_n)$.(*)
Merk op dat

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) &= f(a_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) + f(h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) \\ &= f(a_1, a_2, a_3 + h_3) + f(a_1, h_2, a_3 + h_3) + f(h_1, a_2, a_3 + h_3) + f(h_1, h_2, a_3 + h_3) \\ &= f(a_1, a_2, a_3) + f(a_1, a_2, h_3) + f(a_1, h_2, a_3) + f(a_1, h_2, h_3) + f(h_1, a_2, a_3) \\ &\quad + f(h_1, a_2, h_3) + f(h_1, h_2, a_3) + f(h_1, h_2, h_3) \end{aligned}$$

Nu is dus

$$\varphi(\mathbf{h}) = f(a_1+h_1, a_2+h_2, a_3+h_3) - f(a_1,a_2,a_3) - f(h_1,a_2,a_3) - f(a_1,h_2,a_3) - f(a_1,a_2,h_3)$$
$$= f(a_1,h_2,h_3) + f(h_1,a_2,h_3) + f(h_1,h_2,a_3) + f(h_1,h_2,h_3)$$

Omwille van (*) moeten we enkel aantonen dat dit $o(h_1,\dots,h_2)$ is.
Merk eerst op dat

$$\|f(a_1,h_2,h_3) + f(h_1,a_2,h_3) + f(h_1,h_2,a_3) + f(h_1,h_2,h_3)\|$$
$$\leq \|f(a_1,h_2,h_3)\| + \|f(h_1,a_2,h_3)\| + \|f(h_1,h_2,a_3)\| + \|f(h_1,h_2,h_3)\|$$
$$\leq \|f\|(\|a_1\|\|h_2\|\|h_3\| + \|h_1\|\|a_2\|\|h_3\| + \|h_1\|\|h_2\|\|a_3\| + \|h_1\|\|h_2\|\|h_3\|)$$

Merk eerst op dat $\|h_1\|, \|h_2\|, \|h_3\| \leq \|h\|$.

Dus $0 \leq \|\varphi(0)\| \leq \|f\|((\|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\|)\|\mathbf{0}\|^2 + \|\mathbf{0}\|^3) = 0 \implies \varphi(0) = 0$
en $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|\varphi(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \|f\| \frac{\|a_1\|\|h\|^2 + \|a_2\|\|h\|^2 + \|a_3\|\|h\|^2 + \|h\|^3}{\|h\|} = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \|f\|((\|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\|)\|h\| + \|h\|^2) = 0$
Vanwege deze twee zaken is $\varphi(\mathbf{h}) = o(\mathbf{h})$.

We concluderen: $Df_{(a_1,a_2,a_3)}(h_1,h_2,h_3) = \sum_{i=1}^3 f(a_1,\dots,a_{i-1},h_i,a_{i+1},\dots,a_3)$
Indien we nu naar een algemene vorm met willekeurige $m$ willen gaan, zien we dat

$$\|\varphi\mathbf{h}\| = \|f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n) - \sum_{i=1}^n f(a_1,\dots,a_{i-1},h_i,a_{i+1},\dots,a_n)\| \leq \sum_{i=2}^n \|f\|\|\mathbf{h}\|^i \Pi_{\alpha\in\Gamma_{n-i}}\|\alpha\|$$

Hierbij zijn $\Gamma_{n-i}$ alle combinaties die men kan maken met de $a_j \in \{a_1 \dots a_n\}$ met $n-i$ elementen (hierbij is $\Gamma_0 = \{(1,0,...,0)\}$). Nu is

$$0 \leq \|\varphi(0)\| \leq 0 \implies \varphi(0) = 0$$
$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|\varphi(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \lim_{\mathbf{h}\to 0} \|f\| \sum_{i=2}^n \|\mathbf{h}\|^{i-1} \Pi_{\alpha\in\Gamma_i}\|\alpha\| = 0$$

Om wille van (*) en omdat $\varphi(\mathbf{h}) = o(\mathbf{h})$ is

$$Df_{(a_1,\dots,a_m)}(h_1,\dots,h_m) = \sum_{i=1}^m f(a_1,\dots,a_{i-1},h_i,a_{i+1},\dots,a_m)$$

10. $\pi_i \in L_c(F, F_i),\ \forall i$

**Bewijs:**
Stel $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F = F_1 \times \dots \times F_n$ met $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nu is $\pi_i(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \pi_i((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda\pi_i(\mathbf{x}) + \mu\pi_i(\mathbf{y})$. Het is dus lineair.
We zien dus in dat $\|\pi_i\| = \sup\{\|\pi_i x\| \colon \|x\| \leq 1\}$. Ook weten we dat $\|c_i(x_i)\|_F \leq \|x\|_F$, dus $\|\pi_i x\|_{F_i} = \|x_i\|_{F_i} \leq \|x\|_F \leq 1$, dus $\|\pi_i\| \leq 1$. De lineaire afbeelding is begrensd en dus continu. Dus $\pi_i \in L_c(F, F_i),\ \forall i$.

11. *Zij $E, F, G$ en $H$ genormeerde ruimten, $B \in L_c^2(F, G; H)$, $D(B \circ (f, g)) = B_1 \circ (f, Dg) + B_2 \circ (Df, g)$ $B_1 : F \times L_c(E, G) \to L_c(E, H)$ en $B_2 : L_c(E, f) \times G \to L_c(E, H)$, dan zijn $B_1$ en $B_2$ continue bilineaire afbeeldingen.*

**Bewijs:**
We weten dat $B \in L_c^2(F, G; H)$, en $DB \in L_c(F, G; H)$, dus:
$D(B \circ (\lambda f_1 + f_2, g_0)) = \lambda D(B \circ (f_1, g_0)) + D(B \circ (f_2, g_0)) = \lambda B_1 \circ (f_1, Dg_0) + \lambda B_2 \circ (Df_1, g_0) + B_1 \circ (f_2, Dg_0) + B_2 \circ (Df_2, g_0)$
Verder is ook $D(B \circ (\lambda f_1 + f_2, g_0)) = B_1 \circ (\lambda f_1 + f_2, Dg_0) + B_2 \circ (\lambda Df_1 + Df_2, g_0)$.

Hieruit leiden we af dat $\lambda B_1 \circ (f_1, Dg_0) + B_1 \circ (f_2, Dg_0) + \lambda B_2 \circ (Df_1, g_0) + B_2 \circ (Df_2, g_0) = B_1 \circ (\lambda f_1 + f_2, Dg_0) + B_2 \circ (\lambda Df_1 + Df_2, g_0)$.

Dus $\lambda B_1 \circ (f_1, Dg_0) + B_1 \circ (f_2, Dg_0) = B_1 \circ (\lambda f_1 + f_2, Dg_0)$ (We kunnen $g_0$ zo kiezen dat $B_2(f, g_0) = 0$) en $\lambda B_2 \circ (Df_1, g_0) + B_2 \circ (Df_2, g_0) = B_2 \circ (\lambda Df_1 + Df_2, g_0)$. Analoog voor de $g$ kant.

Tenslotte Zijn beide begrensd : $\|D(B \circ (f,g))\| = \|B_1 \circ (f, Dg) + B_2 \circ (Df, g)\| \leq \|DB\| \|f\| \|g\| \leq M \|f\| \|g\|$ ($M > 0$ bestaat want $DB$ is continu en lineair) en $\|B_1 \circ (f, Dg)\| \leq \|B_1 \circ (f, Dg) + B_2 \circ (Df, g)\| \leq \|DB\| \|f\| \|g\|$, dus $\|B_1\| \leq \|DB\| \leq M$, dus $B_1$ is continu. (idem voor $B_2$)

12. *Zij $J : GL_c(E) \to GL_c(E) : u \mapsto u^{-1}$ dan is $J$ continu op $GL_c(E)$*

    **Bewijs:**
    Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig maar vast, zij $u, v \in GL_c(E)$ en kies $\delta = \frac{\varepsilon}{MN}$ met $\|u^{-1}\| \leq M > 0$ en $\|u^{-1}\| \leq N > 0$. Deze bestaan aangezien $u^{-1}, v^{-1} \in GL_c(E)$ ($u^{-1}, v^{-1}$ is continu en lineair). Zij nu $\|u - v\| < \delta$, dan is $\|J(u) - J(v)\| = \|u^{-1} - v^{-1}\| = \|u^{-1}(v - u)v^{-1}\| < \delta \|u^{-1}\| \|v^{-1}\| \leq \delta MN = \varepsilon$.

13. $\|x\|_e := \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} \|x(t)\|\}$ *is een norm op* $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}[t_0, t_0 + \alpha]$

    **Bewijs:**
    Merk eerst op dat $\|x(t)\|$ een norm is waarvoor de voorwaarde van een norm voldaan zijn.

    (a) (Merk op $e^{-K(t-t_0)} > 0$ en $\|x(t)\| \geq 0$ (dus $\sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} \|x(t)\|\} \geq 0$) en $\|x\| = 0 \iff x = 0$) als $\|x\|_e = 0 \iff \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} \|x(t)\|\} = 0 \iff \|x(t)\| = 0 \iff x = 0$

    (b) $\|\lambda x\|_e = \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} \|\lambda x(t)\|\} = \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} |\lambda| \|x(t)\|\} = |\lambda| \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} \|x(t)\|\} = |\lambda| \|x\|_e$

    (c) $\|x+y\|_e = \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} \|x(t)+y(t)\|\} \leq \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} (\|x(t)\| + \|y(t)\|)\} \leq \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} \|x(t)\|\}$ $\sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \{e^{-K(t-t_0)} \|y(t)\|\} = \|x\|_e + \|y\|_e$