Numerieke methoden: Inleveropgaven 4

Feline Swinnen, Lori Trimpeneers, Wietse Vaes

Mei 2019

Oefening 1

Vraag a

Zij $f \in C^5$ en $x_k = x_0 + kh$ met $(k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ met $h > 0$. Toon aan dat er geldt:

$$f_0^3 = \frac{1}{2h^3}(-f_{-2} + 2f_{-1} - 2f_1 + f_2) + O(h^2)$$

Bewijs:
We gebruiken de Taylor benaderingen tot de 4^{de} graad voor f_{-2}, f_{-1}, f_1 en f_2 rond x_0.

$$f_{-2} = f_0 + \frac{f_0'}{1!}(x_{-2} - x_0) + \frac{f_0''}{2!}(x_{-2} - x_0)^2 + \frac{f_0^{(3)}}{3!}(x_{-2} - x_0)^3 + \frac{f_0^{(4)}}{4!}(x_{-2} - x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(\xi_{-2})}{5!}(x_{-2} - x_0)^5$$

$$\Rightarrow f_{-2} = f_0 + f_0'(x_0 - x_0 - 2h) + 2h^2 f_0'' - \frac{4}{3}h^3 f_0^{(3)} + \frac{2}{3}h^4 f_0^{(4)} - \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_{-2}) \tag{1}$$

$$f_{-1} = f_0 - hf_0' + \frac{h^2}{2}f_0'' - \frac{h^3}{6}f_0^{(3)} + \frac{h^4}{24}f_0^{(4)} - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(\xi_{-1}) \tag{2}$$

$$f_1 = f_0 + hf_0' + \frac{h^2}{2}f_0'' + \frac{h^3}{6}f_0^{(3)} + \frac{h^4}{24}f_0^{(4)} + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(\xi_1) \tag{3}$$

$$f_2 = f_0 + 2hf_0' + 2h^2 f_0'' + \frac{4}{3}h^3 f_0^{(3)} + \frac{2}{3}h^4 f_0^{(4)} + \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_2) \tag{4}$$

Stel nu:

$$\frac{-(1)+2(2)-2(3)+(4)}{2h^3}=\frac{(-f_{-2}+2f_{-1}-2f_1+f_2)}{2h^3}$$

Er geldt:

$$-(1)+2(2)-2(3)+(4)=$$

- $f_0+2f_0-2f_0+f_0+2hf_0'-2hf_0'-2hf_0'+2hf_0'-2h^2f_0''+h^2f_0''-h^2f_0''+2h^2f_0''+\frac{4}{3}h^3f_0^{(3)}-\frac{h^3}{3}f_0^{(3)}-\frac{h^3}{3}f_0^{(3)}+\frac{4}{3}h^3f_0^{(3)}-\frac{2}{3}h^4f_0^{(4)}+\frac{h^4}{12}f_0^{(4)}-\frac{h^4}{12}f_0^{(4)}+\frac{2}{3}h^4f_0^{(4)}+h^5(\frac{4}{15}f^{(5)}(\xi_{-2})-\frac{1}{60}f^{(5)}(\xi_{-1})-\frac{1}{60}f^{(5)}(\xi_1)+\frac{4}{15}f^{(5)}(\xi_{-2}))$

$$\Rightarrow \frac{-(1)+2(2)-2(3)+(4)}{2h^3}=\frac{0f_0+0hf_0'+0h^2f_0''+2h^3f_0^{(3)}-0h^4f_0^{(4)}+O(h^5)}{2h^3}$$

$\Rightarrow \frac{-(1)+2(2)-2(3)+(4)}{2h^3}=f_0^{(3)}+O(h^2)$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{-f_{-2}+2f_{-1}-2f_1+f_2}{2h^3}=f_0^{(3)}+O(h^2)$$

$\Rightarrow f_0^{(3)}=\frac{1}{2h^3}(-f_{-2}+2f_{-1}-2f_1+f_2)+O(h^2)$

Vraag b

Ten eerste maken we een script voor de benaderende functie voor $f'(x_0)$ volgens de formule:

$$f^1_{x_0}(h)=\frac{f(x_0+h-f(x_0}{h}+O(h)$$

Onderstaande MATLAB functie maakt deze formule:

```
function y=functie1(h)
%FUNCTIE1 berekent de eerste benaderende formule van oefening 1b

f=@(x)log(x);
x_0=1;

y=(f(x_0+h)-f(x_0))/h;
```

Vervolgens maken we een script voor de bendaring van $f'(x_0)$ volgens de formule:

$$f'(x_0)=2f^1_{x_0}(h)-f^1_{x_0}(2h)+O(h^2)$$

Onderstaande MATLAB functie maakt deze formule:

```
function y=functie2(h)
%FUNCTIE2 berekent de tweede benaderende formule van oefening 1b

y=2*(functie1(h))-functie1(2*h);
```

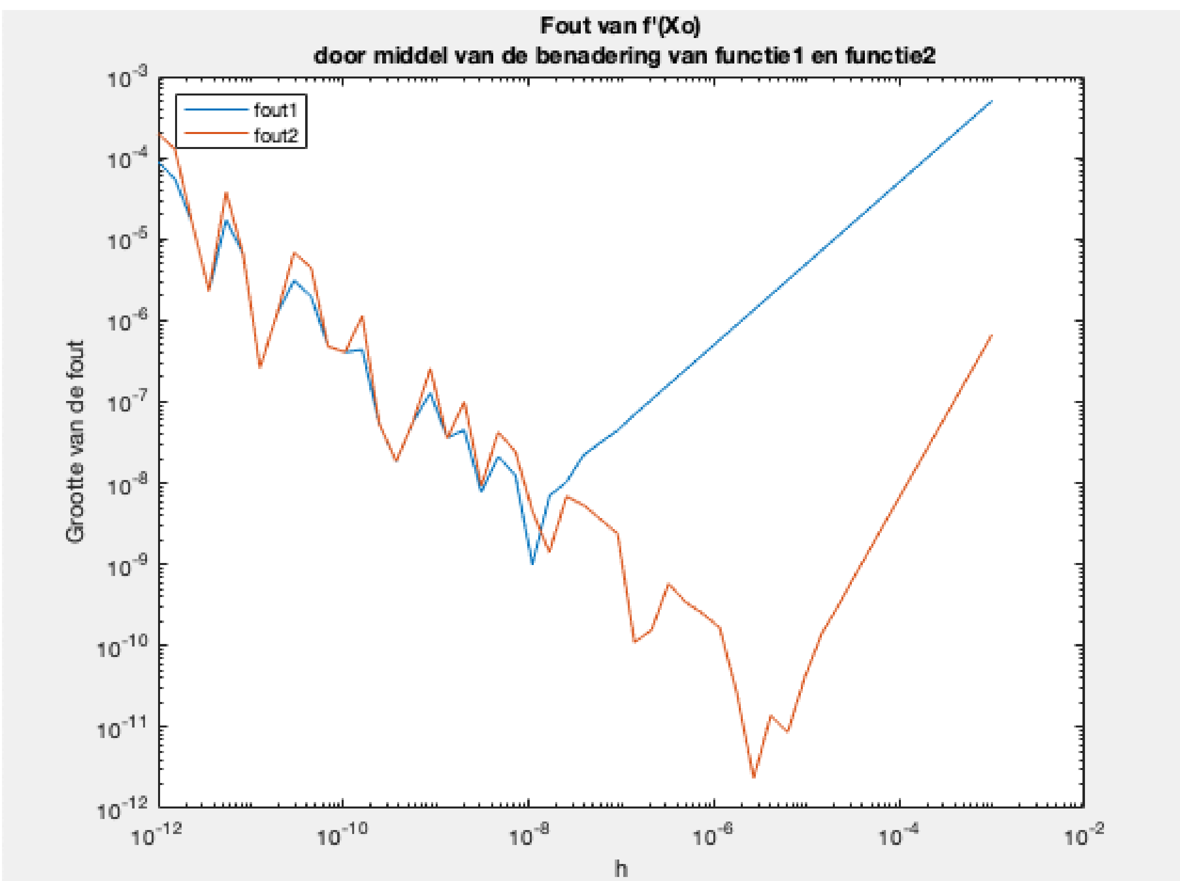
Tot slot plotten we de fouten die bij deze benaderingen worden gemaakt, met behulp van volgend script:

```
f=@(x)log(x);
h=logspace(-3,-12);
x_0=1;


for x=1:50  %want de vector h bestaat uit 50 elementen
    fout1(x) = abs(functie1(h(x))-1);  % de benaderende waarde dmv functie1/ functie2,
    fout2(x) = abs(functie2(h(x))-1);  %min de echte waarde van f'(x_0) (dit is 1)
end
loglog(h,fout1, h, fout2)

legend('fout1','fout2', 'Location','NW')
xlabel('h')
ylabel('Grootte van de fout')
title({'Fout van f''(Xo)',' door middel van de benadering van functie1 en functie2'})
```

De grafiek die we dan bekomen, is de volgende:



We zien dat voor h gaande van 10^{-12} tot 10^{-8} de fouten van beide benadering ongeveer gelijk op gaan, maar dat toch de eerste benadering iets beter is omdat fout 1 lichtjes kleiner is dan fout 2. Voor h gaande van 10^{-8} tot 10^{-3} zien we dat er wel een groot verschil optreedt. Dan is de tweede benaderende functie duidelijk beter dan de eerste benaderende functie. Want fout 2 is kleiner dan fout 1.

Voor de theoretische fout op de eerste methode geldt:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{1}{2}h^2f''(\xi)-f(x_0)}{h} \qquad = f'(x_0)+\frac{1}{2}hf''(\xi)$$

Met $\xi \in [x_0, x_0+h]$.
Omdat h heel klein is geldt: $\xi \approx x_0 = 1$.
Er geldt:

$$\begin{gathered} f(x) = ln(x) \\ f'(x) = \frac{1}{x} \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \end{gathered}$$

Dus $f''(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} \approx -\frac{1}{1^2} = -1$.
Er geldt dat $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + E_1$.
In bovenstaande formule hadden we nu gevonden dat:

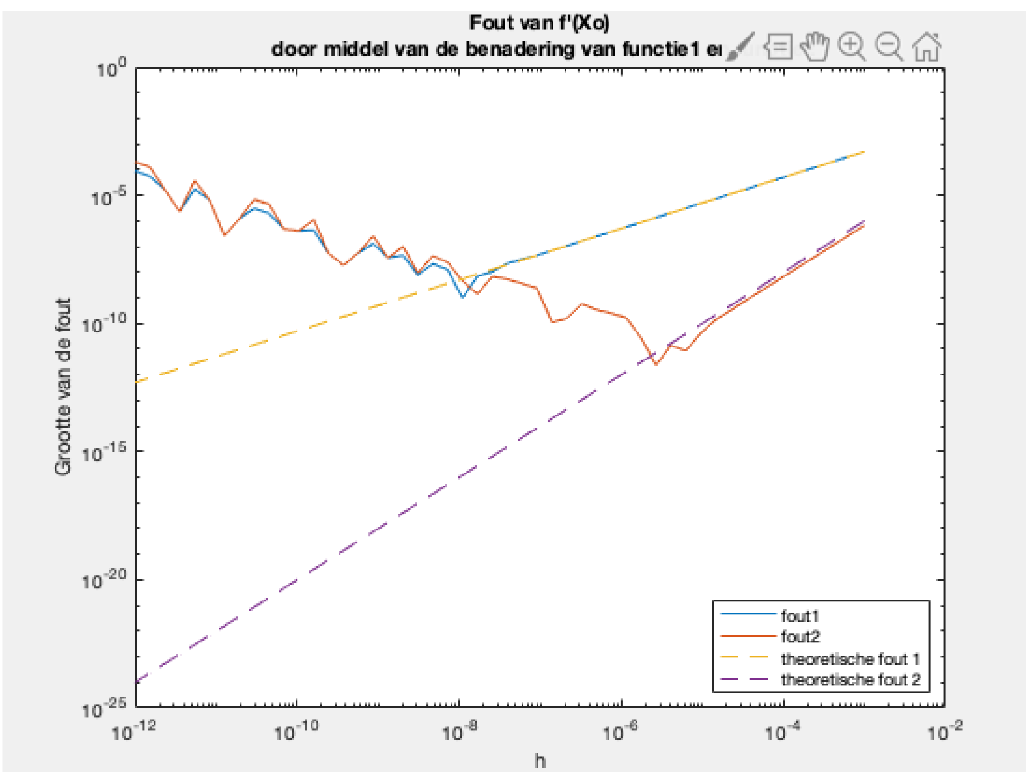
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{1}{2}hf''(\xi)$$

Dus:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{1}{2}hf''(\xi) \\ &\approx -\frac{1}{2}h(-1) \\ &= 1/2h \end{aligned}$$

De theoretische fout op de tweede methode kan op analoge manier gevonden worden.

De resultaten zijn te zien in onderstaande grafiek:



Deze grafiek is bekomen met onderstaand MATLAB script:

```
f=@(x)log(x);
h=logspace(-3,-12);
x_0=1;


for x=1:50  %want de vector h bestaat uit 50 elementen
    fout1(x) = abs(functie1(h(x))-1);  % de benaderende waarde dmv functie1/ functie2,
    fout2(x) = abs(functie2(h(x))-1);  %min de echte waarde van f'(x_0) (dit is 1)
    fouttheor1(x)= (1/2)*h(x);
    fouttheor2(x)= h(x)^2
end
loglog(h,fout1, h, fout2, h, fouttheor1,'--', h, fouttheor2,'--')

legend('fout1','fout2','theoretische fout 1','theoretische fout 2', 'Location','SE')
xlabel('h')
ylabel('Grootte van de fout')
title({'Fout van f''(Xo)',' door middel van de benadering van functie1 en functie2'})
```

Oefening 2

Vraag a

Voor $n = 1$ volgt:

$$\begin{aligned}
I_1(f) &= \sum_{k=0}^{1} \alpha_k \cdot f(x_k) + \sum_{k=0}^{1} \beta_k \cdot f'(x_k) \\
&= \alpha_0 \cdot f(x_0) + \alpha_1 \cdot f(x_1) + \beta_0 \cdot f(x_0) + \beta_1 \cdot f(x_1) \\
&= I(\mathcal{L}_0) \cdot f(a) + I(\mathcal{L}_1) \cdot f(b) + I(\mathcal{M}_0) \cdot f(a) + I(\mathcal{M}_1) \cdot f(b)
\end{aligned}$$

Vervolgens bepalen we α_0:

$$\alpha_0 = I(\mathcal{L}_0) = I([1 - \frac{w_2''(a)}{w_2'(a)}(x-a)] \cdot l_0^2(x))$$

Er geldt dat:
$w_2(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - ax - bx + ab$
$w_2'(x) = 2x - a - b \Rightarrow w_2'(a) = a - b$
$w_2''(x) = 2 \Rightarrow w_2''(a) = 2$

Dus :

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= I([1-\frac{2}{a-b}(x-a)]\cdot(\frac{x-b}{a-b})^2) = I(\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2}-\frac{2(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^3})\\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\int_a^b (x-b)^2dx - \frac{2}{(a-b)^3}\int_a^b (x-a)(x-b)^2dx\\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\int_a^b x^2-2bx+b^2dx - \frac{2}{(a-b)^3}\int_a^b x^3-2bx^2+b^2x-ax^2+2abx-ab^2dx\\
&= \frac{1}{(a-b)^2}(\frac{1}{3}x^3-bx^2+b^2x|_a^b) - \frac{2}{(a-b)^3}(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}bx^3+\frac{1}{2}b^2x^2-\frac{1}{3}ax^3+abx^2-ab^2x|_a^b)\\
&= \frac{1}{(a-b)^2}(\frac{1}{3}b^3-b^3+b^3-\frac{1}{3}a^3+a^2b-ab^2)\\
&- \frac{2}{(a-b)^3}(\frac{1}{4}b^4-\frac{2}{3}b^4+\frac{1}{2}b^4-\frac{1}{3}ab^3+ab^3-ab^3-\frac{1}{4}a^4+\frac{2}{3}a^3b-\frac{1}{2}a^2b^2+\frac{1}{3}a^4-a^3b+a^2b^2)\\
&= \frac{1}{(a-b)^2}(\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{3}a^3+a^2b-ab^2) - \frac{2}{(a-b)^3}(\frac{1}{12}b^4-\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{2}a^2b^2)\\
&= \frac{1}{3(a-b)^2}(b^3-a^3+3a^2b-3ab^2) - \frac{1}{6(a-b)^3}(b^4+a^4-4ab^3-4a^3b+6a^2b^2)\\
&= \frac{(b-a)^3}{3(a-b)^2} - \frac{(a-b)^4}{6(a-b)^3}\\
&= \frac{(b-a)^3}{3(a-b)^2} - \frac{(a-b)}{6}\\
&= \frac{2(b-a)^3-(a-b)^3}{6(a-b)^2}\\
&= \frac{2(b^3-a^3-3ab^2+3a^2b)-(a^3-b^3-3a^2b+3ab^2)}{6(a-b)^2}\\
&= \frac{3b^3-3a^3-9ab^2+9a^2b}{6(a-b)^2}\\
&= \frac{b^3-a^3-3ab^2+3a^2b}{2(a-b)^2}\\
&= \frac{(b-a)^3}{2(a-b)^2}\\
&= \frac{(b-a)^3}{2(b-a)^2}\\
&= \frac{b-a}{2}
\end{aligned}
$$

Als volgt bepalen we α_1:

$$\alpha_1 = I(\mathcal{L}_1) = I([1-\frac{w_2''(b)}{w_2'(b)}(x-b)]\cdot l_1^2(x))$$

Er geldt dat:
$w_2(x) = (x-a)(x-b) = x^2-ax-bx+ab$
$w_2'(x) = 2x-a-b \Rightarrow w_2'(b) = b-a$
$w_2''(x) = 2 \Rightarrow w_2''(b) = 2$

Dus :

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= I([1-\frac{2}{b-a}(x-b)]\cdot(\frac{x-a}{b-a})^2) = I(\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} - \frac{2(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^3}) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)^2 dx - \frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b (x-b)(x-a)^2 dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b x^2 - 2ax + a^2 dx - \frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b x^3 - 2ax^2 + a^2x - bx^2 + 2abx - ba^2 dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}(\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x|_a^b) - \frac{2}{(b-a)^3}(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{3}bx^3 + abx^2 - ba^2x|_a^b) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}(\frac{1}{3}b^3 - ab^2 + a^2b - \frac{1}{3}a^3 + a^3 - a^3) \\
&- \frac{2}{(b-a)^3}(\frac{1}{4}b^4 - \frac{2}{3}ab^3 + \frac{1}{2}a^2b^2 - \frac{1}{3}b^4 + ab^3 - a^2b^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{2}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{3}a^3b - a^3b + a^3b) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 - ab^2 + a^2b) - \frac{2}{(b-a)^3}(-\frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{2}a^2b^2 - \frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3b) \\
&= \frac{1}{3(b-a)^2}(b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3a^2b) - \frac{1}{6(b-a)^3}(-b^4 + 4ab^3 - 6a^2b^2 - a^4 + 4a^3b) \\
&= \frac{(b-a)^3}{3(b-a)^2} + \frac{(a-b)^4}{6(b-a)^3} \\
&= \frac{(b-a)}{3} + \frac{(a-b)^4}{6(b-a)^3} \\
&= \frac{2(b-a)^4 + (a-b)^3}{6(b-a)^3} \\
&= \frac{2(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + b^4 - 4ab^3) + (b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 + a^4 - 4a^3b)}{6(b-a)^2} \\
&= \frac{3a^4 - 12a^3b + 18a^2b^2 + 3b^4 - 12ab^3}{6(b-a)^3} \\
&= \frac{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + b^4 - 4ab^3}{2(b-a)^3} \\
&= \frac{(b-a)^4}{2(b-a)^3} \\
&= \frac{b-a}{2}
\end{aligned}
$$

Nu bepalen we β_0:

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= I(\mathcal{M}_0) = I((x-a)\cdot l_0^2(x)) \\
&= I((x-a)\cdot(\frac{x-b}{a-b})^2) = I(\frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^2}) \\
&= I(\frac{(x-a)(x^2-2bx+b^2)}{(a-b)^2}) \\
&= I(\frac{(x^3-2bx^2+b^2x-ax^2+2abx-ab^2)}{(a-b)^2}) \\
&= I(\frac{(x^3+(-2b-a)x^2+(b^2+2ab)x-ab^2)}{(a-b)^2}) \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\int_a^b x^3+(-2b-a)x^2+(b^2+2ab)x-ab^2dx \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}(\frac{1}{4}x^4+\frac{(-2b-a)}{3}x^3+\frac{(b^2+2ab)}{2}x^2-ab^2x|_a^b) \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}(\frac{1}{4}b^4+\frac{(-2b-a)}{3}b^3+\frac{(b^2+2ab)}{2}b^2-ab^3-\frac{1}{4}a^4-\frac{(-2b-a)}{3}a^3-\frac{(b^2+2ab)}{2}a^2-a^2b^2) \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}(\frac{1}{4}b^4-\frac{2}{3}b^4-\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{2}b^4+ab^3-ab^3-\frac{1}{4}a^4+\frac{2}{3}a^3b+\frac{1}{3}a^4-\frac{1}{2}a^2b^2-a^3b+a^2b^2) \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}(\frac{1}{12}b^4-\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{2}a^2b^2) \\
&= \frac{1}{12(a-b)^2}(b^4-4ab^3+a^4-4a^3b+6a^2b^2) \\
&= \frac{(a-b)^4}{12(a-b)^2} \\
&= \frac{(a-b)^2}{12} \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

Tenslotte bepalen we β_1:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= I(\mathcal{M}_1) = I((x-b)\cdot l_1^2(x)) \\
&= I((x-b)\cdot(\frac{x-a}{b-a})^2) = I(\frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^2}) \\
&= I(\frac{(x-b)(x^2-2ax+a^2)}{(b-a)^2}) \\
&= I(\frac{(x^3-2ax^2+a^2x-bx^2+2abx-a^2b)}{(b-a)^2}) \\
&= I(\frac{(x^3+(-2a-b)x^2+(a^2+2ab)x-a^2b)}{(b-a)^2}) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b x^3+(-2a-b)x^2+(a^2+2ab)x-a^2bdx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}(\frac{1}{4}x^4+\frac{(-2a-b)}{3}x^3+\frac{(a^2+2ab)}{2}x^2-a^2bx|_a^b) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}(\frac{1}{4}b^4-\frac{2}{3}ab^3-\frac{1}{3}b^4+\frac{1}{2}a^2b^2+ab^3-a^2b^2-\frac{1}{4}a^4+\frac{2}{3}a^4+\frac{1}{3}a^3b-\frac{1}{2}a^4-a^3b+a^3b) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}(-\frac{1}{12}b^4+\frac{1}{3}ab^3-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3b) \\
&= \frac{1}{12(b-a)^2}(-b^4+4ab^3-6a^2b^2-a^4+4a^3b) \\
&= \frac{-(a-b)^4}{12(b-a)^2} \\
&= \frac{-(b-a)^4}{12(b-a)^2} \\
&= \frac{-(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned}
I_1(f) &= \frac{b-a}{2}f(a)+\frac{b-a}{2}f(b)+\frac{(b-a)^2}{12}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{12}f'(b) \\
&= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b))
\end{aligned}$$

Vervolgens bepalen we de integratiefout.
Als functie van de 4^e afgeleide van f $\Rightarrow f \in C^4([a,b])$.
Zij $\xi \in (a,b)$:

$$E_1(f) = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}\omega_4(x)dx$$

Door de middelwaardestelling volgt:

$$E_1(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\int_a^b \omega_4(x)dx$$

Dus:

$$
\begin{aligned}
E_1(f) &= \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\int_a^b \omega_4(x)dx \\
&= \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2dx \\
&= \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)\int_a^b (x^2-2ax+a^2)(x^2-2bx+b^2)dx \\
&= \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)\int_a^b (x^4-2bx^3+b^2x^2-2ax^3+4abx^2-2ab^2x+a^2x^2-2a^2bx+a^2b^2dx \\
&= \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}bx^4+\frac{1}{3}b^2x^3-\frac{1}{2}ax^4+\frac{4}{3}abx^3-ab^2x^2+\frac{1}{3}a^2x^3-a^2bx^2+a^2b^2x)|_a^b) \\
&= \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)(\frac{1}{5}b^5-\frac{1}{2}b^5+\frac{1}{3}b^5-\frac{1}{2}ab^4+\frac{4}{3}ab^4-ab^4+\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^3+a^2b^3 \\
&-\frac{1}{5}a^5+\frac{1}{2}a^4b-\frac{1}{3}a^3b^2+\frac{1}{2}a^5-\frac{4}{3}a^4b-a^3b^2-\frac{1}{3}a^5+a^4b-a^3b^2) \\
&= \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)(\frac{1}{30}b^5-\frac{1}{6}ab^4+\frac{1}{3}a^2b^3-\frac{1}{30}a^5+\frac{1}{6}a^4b-\frac{1}{3}a^3b^2) \\
&= \frac{1}{24\cdot 30}f^{(4)}(\xi)(b^5-5ab^4+10a^2b^3-10a^3b^2+5a^4b-a^5)
\end{aligned}
$$

Wegens het binomium van Newton geldt:

$$(b^5-5ab^4+10a^2b^3-10a^3b^2+5a^4b-a^5)=(b-a)^5$$

Dus:

$$
\begin{aligned}
E_1(f) &= \frac{1}{24\cdot 30}f^{(4)}(\xi)(b^5-5ab^4+10a^2b^3-10a^3b^2+5a^4b-a^5) \\
&= \frac{1}{720}f^{(4)}(\xi)\cdot(b-a)^5 \\
&= \frac{h^5}{720}f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}
$$

Met $h=b-a$.
Dus:

$$E_1(f)=\frac{h^5}{720}f^{(4)}(\xi)$$

Met $h=b-a$ en $\xi\in(a,b)$.

Vraag b

Uit vraag a hebben we dat:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b))$$

Nu splitsen we het interval $[a,b]$ op in m even grote deelintervallen met $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{m-1} < x_m = b$.
Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{2} \cdot [f(x_k) + f(x_{k+1}] + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{12} \cdot [f'(x_k) + f'(x_{k+1})] \\
&= \frac{x_1 - x_0}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot [f(x_1) + f(x_2)] + ... + \frac{x_m - x_{m-1}}{2} \cdot [f(x_{m-1}) + f(x_m)] \\
&+ \frac{(x_1 - x_0)^2}{12} \cdot [f'(x_0) + f'(x_1)] + \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \cdot [f'(x_1) + f'(x_2)] + ... + \frac{x_m - x_{m-1}}{12} \cdot [f'(x_{m-1}) + f'(x_m)]
\end{aligned}$$

Omdat de deelintervallen even groot zijn (we hebben equidistante punten) volgt er dat:
$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_m - x_{m-1} = \frac{b-a}{m}$.
We vullen dit in:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{2} \cdot [f(x_k) + f(x_{k+1}] + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{12} \cdot [f'(x_k) + f'(x_{k+1})] \\
&= \frac{b-a}{m}[\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) + ... + \frac{1}{2}f(x_{m-1}) + \frac{1}{2}f(x_m)] \\
&+ (\frac{(b-a)}{m})^2[\frac{1}{12}f'(x_0) - \frac{1}{12}f'(x_1) + \frac{1}{12}f'(x_1) - \frac{1}{12}f'(x_2) + ... + \frac{1}{12}f'(x_{m-1}) - \frac{1}{2}f'(x_m)] \\
&= \frac{b-a}{m}[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2}f(x_m)] + \frac{(b-a)^2}{m^2}[\frac{1}{12}f'(x_0) - \frac{1}{2}f'(x_m)] \\
&= \frac{b-a}{m}[\frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_m)) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{m-1})] + \frac{(b-a)^2}{12m^2}[f'(x_0) - f'(x_m)]
\end{aligned}$$

Dus:

$$I_{1,m}(f) = \frac{b-a}{m}[\frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_m)) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{m-1})] + \frac{(b-a)^2}{12m^2}[f'(x_0) - f'(x_m)]$$

Voor een samengestelde formule met n=1 oneven geldt:

$$E_{n,m}(f) = \frac{b-a}{(n+1)!} \cdot \frac{K_n}{\gamma_n^{n+2}} \cdot h^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$$

Met $\xi \in (a,b)$ en met $h = \frac{b-a}{m}$.
Dus:

$$E_{1,m}(f) = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{K_1}{\gamma_1^3} \cdot h^2 \cdot f^{(2)}(\xi)$$

Met $\xi \in (a,b)$ en met $h = \frac{b-a}{m}$.
Omdat we werken met een gesloten formule (want $x_0 = a$ en $x_m = b$), volgt er dat:

$$\gamma_1 = 1$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^1 \Pi_2(t)dt \\
&= \int_0^1 \Pi_{i=0}^{1}(t-i)dt \\
&= \int_0^1 t \cdot (t-1)dt \\
&= \int_0^1 (t^2 - t)dt \\
&= (\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2})|_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Dus:

$$
\begin{aligned}
E_{1,m}(f) &= \frac{b-a}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{6}}{1^3} \cdot h^2 \cdot f^{(2)}(\xi) \\
&= -\frac{h^2}{12} \cdot (b-a) \cdot f^{(2)}(\xi)
\end{aligned}
$$

Met $\xi \in (a,b)$ en met $h = \frac{b-a}{m}$.

Oefening 3

Er geldt voor de middelpuntsregel dat:

$$
E_0(f) = \frac{h^3}{3} f''(\xi) \qquad , h = \frac{b-a}{2}
$$

Er geldt voor de trapezium regel dat:

$$
E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad , h = b-a
$$

Er geldt voor de Cavelieri-Simpson formule dat:

$$
E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad , h = \frac{b-a}{2}
$$

Dit zijn speciale gevallen van:

1. $$
E_n(f) = \frac{M_n}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi),
$$

   Als gegeven n is even $f \in C^{n+2}([a,b])$, waar $\xi \in (a,b)$. Met

   $$
M_n = \int_0^n t\pi_{n+1}(t)dt < 0,
$$

voor een gesloten formule,

$$M_n = \int_{-1}^{n+1} t\pi_{n+1}(t)dt > 0,$$

voor een open formule.

2.

$$E_n(f) = \frac{K_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta),$$

Als gegeven n is oneven $f \in C^{n+2}([a,b])$, waar $\eta \in (a,b)$. Met

$$K_n = \int_0^n \pi_{n+1}(t)dt < 0,$$

voor een gesloten formule,

$$K_n = \int_{-1}^{n+1} \pi_{n+1}(t)dt > 0,$$

voor een open formule.

We tonen dit aan door eerst de waarde van M_n of K_n te berekenen via de gegeven gelijkheid en daarna ter controle de twee formules gelijk te stellen.

Dus:

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{-1}^{0+1} t\pi_{0+1}(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} t\pi_1(t)dt \end{aligned}$$

Met $\pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(t-i)$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{-1}^{1} ttdt \\ &= \frac{t^3}{3}|_{-1}^{1} \\ \Rightarrow M_0 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned} E_0(f) &= \frac{2}{3}\frac{1}{(0+2)!} h^{0+3} f''(\xi) \\ &= \frac{h^3}{3} f''(\xi) \qquad\qquad ,\xi \in (a,b) \end{aligned}$$

De fout bij de middelpuntsregel is dus een speciaal geval van E_n van $E_n(f)$ waarbij n=0, dus n is even en $M_0 = \frac{2}{3}$.

Vervolgens:

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^1 \pi_{1+1}(t)dt \\ &= \int_1^0 t(t-1)dt \\ &= (\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2})|_0^1 \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} E_1(f) &= \frac{K_1}{(1+1)!} h^{1+2} f''(\eta) \\ &= -\frac{h^3}{12} f''(\eta) \qquad\qquad ,\eta \in (a,b) \end{aligned}$$

Dus $\frac{1}{6} = K_1$, waaruit volgt dat de fout van de trapeziumregel een speciaal geval is van $E_n(f)$ waarbij n=1, dus n is oneven. Er geldt dan $K_1 = -\frac{1}{6}$. Merk op η kan gelijk genomen worden aan ξ.

Ten slotte:

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_0^2 t\pi_{2+1}(t)dt \\ &= \int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt \\ &= \int_0^2 t^4 - 3t^3 + 2t^2 dt \\ &= (\frac{t^5}{5} - \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3})|_0^2 \\ &= \frac{32}{5} - 12 + \frac{16}{3} \\ &= -\frac{4}{15} \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} E_2(f) &= \frac{M_2}{(2+2)!} h^{2+3} f^{(2+2)}(\xi) \\ &= -\frac{4h^5}{15 \cdot 4!} f^{(2+2)}(\xi) \\ &= -\frac{1}{90} h^5 f^{(2+2)}(\xi) \qquad\qquad ,\xi \in (a,b) \end{aligned}$$

De fout van de Cavalieri-Simpson formule is dus een speciaal geval van $E_n(f)$ waarbij $n = 2$, dus n is even. Er geldt dan $M_2 = -\frac{4}{15}$.

De nauwkeurigheidsgraad bij de middelpuntsregel, de tapeziumregel en de Cavelieri-Simpson formule wordt gegeven wanneer $I_n(x^r) = \int_a^b x^r dx$. Er geldt $I_n(f(x)) = \int_a^b P(x) + E_n(f)$ met $P(x)$ een simpelere vorm van $f(x)$ en $E_n(f)$ de fout.
Dus als $I_n(x^r) = \int_a^b P(x)dx + E_n(f) = \int_a^b x^r dx$ wil zijn, zoeken we naar de nauwkeurigheidsgraad, dus

de hoogste r waarbij er geen fout is bij de simpele functie $P(x)$ van x^r. Dus $E_n(f)$ moet gelijk zijn aan 0.

Voor de middelpuntsregel:

$$E_0(f) = f''(\xi)\frac{h^3}{3} \qquad , h = \frac{b-a}{2}$$

Er geldt dat $h \neq 0$,$3 \neq 0$, dus dan moet $f''(\xi) = 0$. Dit is enkel bij $r = 1$ want $\frac{d^2zx}{(dx)^2} = 0$ en $\frac{d^2zx^2}{(dx)^2} = 2z$ met $z \in \mathbb{R}$.
Dus:

$$I_n(x^k) = \int_a^b x^k dx,$$

voor $k = 0, 1$, $r = 1$.

$$I_n(x^j) \neq \int_a^b x^j dx,$$

voor $j \geq 2$, $j > k$.
Dus de nauwkeurigheid is 1 (oftewel orde 2).

Voor de trapezium regel:

$$E_1(f) = f''(\xi)(-\frac{h^3}{12}) \qquad , h = b - a$$

Er geldt dat $f''(\xi)$ enkel 0 kan worden en dit enkel voor $r = 1$, want $\frac{d^2zx}{(dx)^2} = 0$ en $\frac{d^2zx^2}{(dx)^2} = 2z$ met $z \in \mathbb{R}$.
Dus:

$$I_n(x^k) = \int_a^b x^k dx,$$

voor $k = 0, 1$, $r = 1$.

$$I_n(x^j) \neq \int_a^b x^j dx,$$

voor $j \geq 2$, $j > k$.
Dus de nauwkeurigheid is 1 (oftewel orde 2).

Voor de Cavalieri-Simpson formule:

$$E_2(f) = f^{(4)}(\xi)(-\frac{h^5}{90}) \qquad , h = \frac{b-a}{2}$$

Er geldt dat $f''(\xi)$ enkel 0 kan worden en dit enkel voor $r = 3$, want $\frac{d^4zx^3}{(dx)^4} = 0$ en $\frac{d^4zx^4}{(dx)^4} = 24z$ met $z \in \mathbb{R}$.
Dus:

$$I_n(x^k) = \int_a^b x^k dx,$$

voor $k = 0, 1, 2, 3,\ r = 3$.

$$I_n(x^j) \neq \int_a^b x^j dx,$$

voor $j \geq 4,\ j > k$.
Dus de nauwkeurigheid is 3 (oftewel orde 4).

Oefening 4

Vraag a

Bewijs:
Er geldt voor de gesloten Newton-Cotes formules:

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

met k = 0,...,n.

We geven het bewijs per inductie op n.
n = 0:

$$\begin{aligned}
\omega_1(\frac{a+b}{2} - x) &= \prod_{i=0}^{0}(\frac{a+b}{2} - x - x_i) \\
&= (\frac{a+b}{2} - x - x_0) \\
&= (\frac{a+b}{2} - x - a) \\
&= (\frac{b-a}{2} - x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1(\frac{a+b}{2} + x) &= \prod_{i=0}^{0}(\frac{a+b}{2} + x - x_i) \\
&= (\frac{a+b}{2} + x - x_0) \\
&= (\frac{a+b}{2} + x - a) \\
&= (\frac{b-a}{2} + x) \\
&= (-1)\omega_1(\frac{a+b}{2} - x)
\end{aligned}$$

n = 1:

$$\begin{aligned}\omega_2(\frac{a+b}{2}-x) &= \prod_{i=0}^{1}(\frac{a+b}{2}-x-x_i)\\ &= (\frac{a+b}{2}-x-x_0)(\frac{a+b}{2}-x-x_1)\\ &= (\frac{a+b}{2}-x-a)(\frac{a+b}{2}-x-b)\\ &= (\frac{b-a}{2}-x)(\frac{a-b}{2}-x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2(\frac{a+b}{2}+x) &= \prod_{i=0}^{1}(\frac{a+b}{2}+x-x_i)\\ &= (\frac{a+b}{2}+x-x_0)(\frac{a+b}{2}+x-x_1)\\ &= (\frac{a+b}{2}+x-a)(\frac{a+b}{2}+x-b)\\ &= (\frac{b-a}{2}+x)(\frac{a-b}{2}+x)\\ &= (-1)(\frac{a-b}{2}-x)(-1)(\frac{b-a}{2}-x)\\ &= (-1)^2\omega_2(\frac{a+b}{2}-x)\end{aligned}$$

Stel dat de forumle waar is voor n, dan ook waar voor n+1:

$$\begin{aligned}\omega_2(\frac{a+b}{2}-x) &= \prod_{i=0}^{n+1}(\frac{a+b}{2}-x-x_i)\\ &= \prod_{i=0}^{n}(\frac{a+b}{2}-x-x_i)(\frac{a+b}{2}-x-x_{n+1})\\ &= \prod_{i=0}^{n}(\frac{a+b}{2}-x-x_i)(\frac{a+b}{2}-x-b)\\ &= \prod_{i=0}^{n}(\frac{a+b}{2}-x-x_i)(\frac{a-b}{2}-x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2(\frac{a+b}{2}+x) &= \prod_{i=0}^{n+1}(\frac{a+b}{2}+x-x_i)\\ &= \prod_{i=0}^{n}(\frac{a+b}{2}+x-x_i)(\frac{a+b}{2}+x-x_{n+1})\\ &= \prod_{i=0}^{n}(\frac{a+b}{2}+x-x_i)(\frac{a+b}{2}+x-b)\\ &= (-1)^{n+1}\omega_{n+1}(\frac{a+b}{2}-x)(-1)(\frac{a-b}{2}-x)\\ &= (-1)^{n+2}\omega_{n+1}(\frac{a+b}{2}-x)\end{aligned}$$

Vraag b

Onderstaande MATLAB functie maakt de functie $\omega_{n+1}(x)$:

```
function y = omega(a,b,n)


for k = 1:n+1
    x(k) = a + (k-1) * (b-a)/n
end

y = @(z) prod(z-x)
```

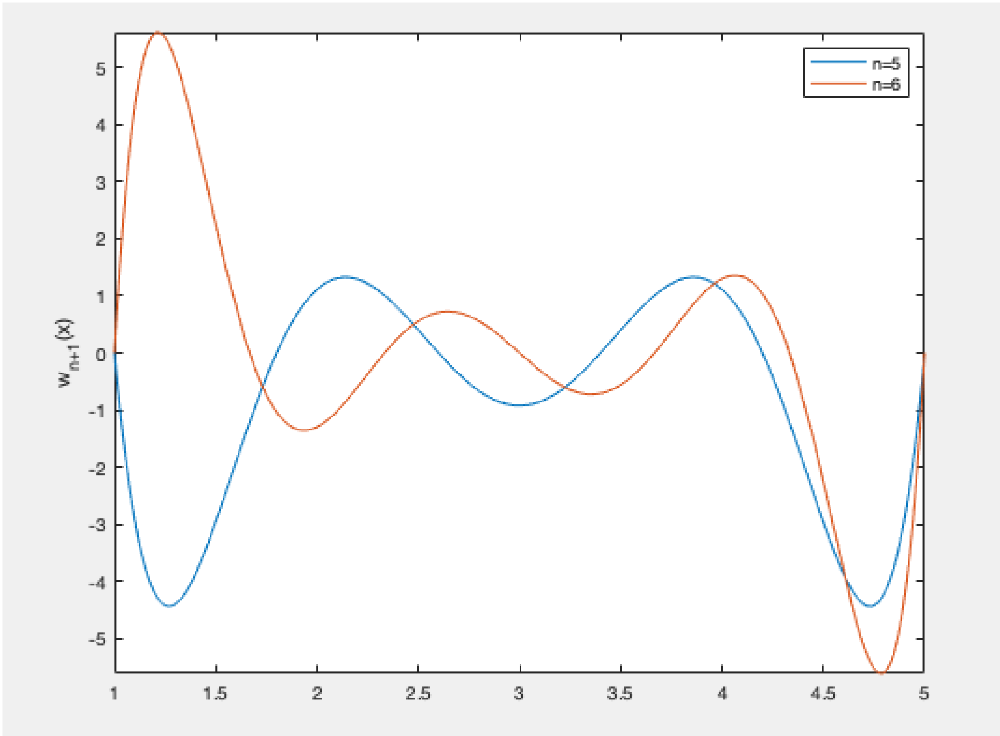
De plot wordt gemaakt door onderstaand MATLAB script:

```
clear
a = 1
b = 5
n = 5
m = 6

y = omega(a,b,n)
w = omega(a,b,m)

fplot(y,[a,b])
hold on
fplot(w,[a,b])
hold off
legend('n=5', 'n=6')
```

Als resultaat is volgende grafiek verkregen:



Vraag i

Bewijs:
We kijken eerst naar het geval $a = 0$, $b = n$ en $h = 1$.
Dan is

$$\begin{aligned} x_j &= x_0 + h \cdot j \\ &= 0 + h \cdot j \\ &= 0 + j \\ &= j \end{aligned}$$

En:

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(x) &= \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \\ &= \prod_{j=0}^{n} (x - j) \end{aligned}$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{|\omega_{n+1}(x+h)|}{|\omega_{n+1}(x)|} &= \frac{|\omega_{n+1}(x+1)|}{|\omega_{n+1}(x)|} \\
&= \frac{|\prod_{j=0}^{n}((x+1)-j)|}{|\prod_{j=0}^{n}(x-j)|} \\
&= \frac{|(x+1)(x)(x-1)(x-2)...(x-n)(x+1-n)|}{|(x)(x-1)(x-2)...(x-n)|} \\
&= |(x+1)(x+1-n)| \\
&\leq |\frac{b}{2}||x+1-b]
\end{aligned}$$

Want $n = b$ en er geldt dat $a < x+h \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow 0 < x+1 \leq \frac{b}{2}$.
Dan:

$$\frac{|\omega_{n+1}(x+h)|}{|\omega_{n+1}(x)|} < |\frac{b}{2}||\frac{1}{b}|$$

Aangezien $0 < x+1 \leq \frac{b}{2} \Rightarrow -b < x+1-b \leq \frac{-b}{2} \Rightarrow x+1-b < -\frac{1}{b}$ want $x+1-b < 0$.
Dus:

$$\begin{aligned}
\frac{|\omega_{n+1}(x+h)|}{|\omega_{n+1}(x)|} &< |\frac{1}{2}| \\
&< 1
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$|\omega_{n+1}(x+h)| < |\omega_{n+1}(x)|$$

Omdat alle andere gevallen lineaire combinaties zijn van dit geval, geldt dit ook in het algemeen.

Vraag ii

Bewijs:
We kijken eerst naar het geval $a = 0$, $b = n$ en $h = 1$.
Dan is zoals in vraag i: $x_j = j$ en $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-j)$.

Dan geldt:

$$
\begin{aligned}
\frac{|\omega_{n+1}(x)|}{|\omega_{n+1}(x+h)|} &= \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{|\omega_{n+1}(x+1)|} \\
&= \frac{|\prod_{j=0}^{n}(x-j)|}{|\prod_{j=0}^{n}((x+1)-j)|} \\
&= \frac{|(x)(x-1)(x-2)...(x-n)|}{|(x+1)(x)(x-1)(x-2)...(x-n)(x+1-n)|} \\
&= |\frac{1}{(x+1)(x+1-n)}| \\
&= |\frac{1}{(x+1)}||\frac{1}{(x+1-b)}| \\
&< |\frac{1}{x}||x| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Want $b > a = 0$, dus $b > 0 \Rightarrow \frac{b}{2} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{b}{2} \leq x$.
Dus $x > 0$, waaruit volgt dat $|\frac{1}{(x+1)}| < |\frac{1}{x}|$.
Als $b = 1$, dan is $x + 1 - b = x$ en anders is $x + 1 - b < 0$, want $x < b$.
Dus $|\frac{1}{(x+1-b)}| \leq |x|$.

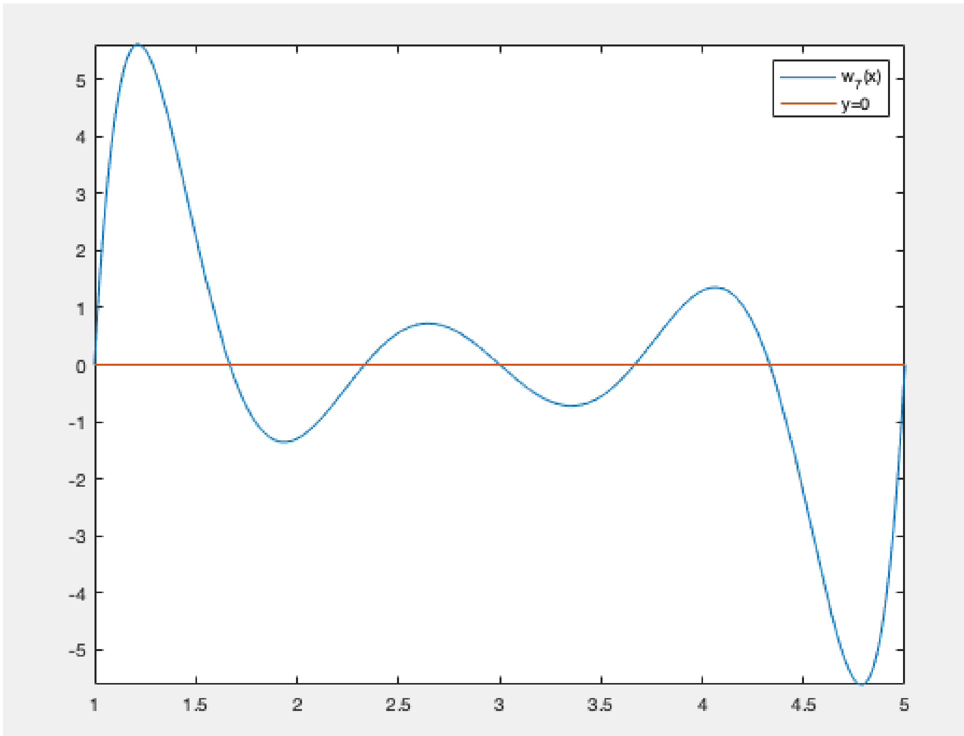
Hieruit volgt dat:

$$|\omega_{n+1}(x)| < |\omega_{n+1}(x+h)|$$

Omdat alle andere gevallen lineaire combinaties zijn van dit geval, geldt dit ook in het algemeen.

Vraag c

Bewijs:
Onderstaande grafiek is de plot van $\omega_{n+1}(x)$ voor n=6.



Hierop is te zien dat bij het punt $\frac{a+b}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$ de grafiek antisymmetrisch is. Dit geldt voor elke n die even is, aangezien n+1 dan oneven is. Op de grafiek is te zien dat voor het punt $\frac{a+b}{2}$ er voor elk positief deel en kleiner negatief deel is, hieruit volgt dat:

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \omega_{n+1}(t)dt > 0.$$

Omdat $x > a$ en $x < b$ gaat de dalende piek die er is tussen het punt $\frac{a+b}{2}$ en b niet volledig meegerekend worden in de integraal. Hieruit volgt dat:

$$\int_a^x \omega_{n+1}(t)dt > 0.$$