UHASSELT

WETENSCHAPSFILOSOFIE

BACHELOR IN DE WISKUNDE

Onvolledigheidsstelling van Gödel

Auteurs
Lies VRANKEN
Wietse VAES
Lode DECKERS

Docent
Prof. dr. Bart VAN KERKHOVE

22 december 2020

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Wiskunde komt in ieders dagdagelijkse leven voor. Of je nu even checkt hoeveel je moet betalen in de supermarkt, rekent met excel op de werkvloer of heuse bewijzen van belangrijke stellingen blokt. Het is niet meer weg te denken uit ons leven. Toch is er een belangrijk concept waarvan niet veel mensen het bestaan afweten. Er is namelijk een stelling die beweert dat de wiskunde niet volledig en consistent kan zijn, de zogenaamde onvolledigheidsstelling. Deze werd in de 20e eeuw geformuleerd en bewezen door de wiskundige Kurt Gödel.

Om te beginnen wordt het leven van Gödel besproken. Zo komen we te weten wat hem ertoe zette over dit wiskundig probleem na te denken en wie of wat een belangrijke invloed had in zijn leven. Verder specificeren we de begrippen volledig en consistentie en uiteraard wordt de correcte formulering van de onvolledigheidsstelling gegeven. Er wordt ook een intuïtie over de aanpak van het bewijs meegegeven aan de lezer. Ten slotte kijken we naar de gevolgen die de stelling veroorzaakte. Vandaag de dag is het resultaat al volledig ingeburgerd, maar vroeger had men een heel ander beeld van wiskunde. Er veranderde bijgevolg veel voor het werk van de wiskundigen toen de stelling gepubliceerd werd. Ook ontdekte men dat de relatie tussen bewijsbaarheid en waarheid niet was zoals eerst gedacht werd. Aan de hand van voorbeelden wordt nagegaan of het resultaat van de stelling echt een grote invloed heeft gehad op het gebruik van de wiskunde in het dagelijkse leven.

2 Wie is Gödel?

Alvorens te kunnen praten over de onvolledigheidsstelling van Gödel, moet eerst kennis worden gemaakt met Kurt Friedrich Gödel, een van de belangrijkste logici aller tijden.

Figuur 1: Kurt Friedrich Gödel

2.1 Levensloop

Kurt Friedrich Gödel werd op 28 april 1906 geboren te Brünn in het toenmalige Oostenrijk-Hongarije (Nu Brno in Tsjechië) en is gestorven op 14 januari 1978 in Princeton. Hij werd protestants opgevoed, naar de religie van zijn moeder. Hierbij was het geloof in een persoonlijke god en het hiernamaals belangrijk. Door de vele veranderingen op wereldvlak in de 20e eeuw, had Gödel gedurende zijn leven verschillende nationaliteiten. Zo was hij Tsjechoslovaaks burger, een Oostenrijker, Duits burger en na WO II zelfs een Amerikaans burger. Verder waren de ouders van Gödel beide geëmigreerd naar Brünn omwille van de textiel industrie. Zijn vader werd op een bepaald moment zelfs mede-eigenaar van één van de toonaangevende textielfirma's. De interesse voor wetenschap, wiskunde en logica werd dus niet met de paplepel meegegeven, maar groeide stilaan met de tijd. Van jongs af aan merkte zijn familie wel een nieuwsgierigheid naar kennis. Hij werd dan ook wel eens 'Herr Warum' of Meneer Waarom genoemd. Dit resulteerde in een vlotte schoolcarrière. Oorspronkelijk lagen zijn interesses bij talen, wiskunde en religie, later groeide, mede door de studies van zijn oudere broer, de interesse voor de wiskunde en de logica. Op 18 jarige leeftijd ging hij zelf studeren aan de universiteit van Wenen. Hier volgde hij de opleiding theoretische natuurkunde, samen met enkele wiskundige- en filosofische colleges. Gödel raakte erg geïnteresseerd in wiskundige logica en begon hier steeds meer rond te werken.

Een lezing van David Hilbert over de volledigheid en consistentie van wiskundige systemen inspireerde Gödel voor het schrijven van zijn doctoraat. Dit voltooide hij in 1927, op 23-jarige leeftijd. Hij bleef verder werken rond dit onderwerp en 2 jaar later publiceerde hij de nu zeer bekende onvolledigheidsstellingen. Gödel werd een tijdje professor aan de universiteit waar hij studeerde maar ten gevolge van WOII emigreerden zijn vrouw, Adele Nimbursky, en hijzelf naar Amerika. Hier bracht hij veel tijd door aan het *Institute for Advanced Study* in Princeton. In zijn verdere carrière werden nog veel van zijn werken gepubliceerd, maar er bleven er ook veel onder de radar. Een voorbeeld daarvan is zijn 'model-logical proof of the existence of God' waarin hij met behulp van logica aantoonde dat God bestaat. Hieruit blijkt dat het voor Gödel zeker mogelijk was om logica en religie met elkaar te verbinden, een visie waar niet iedereen het over eens is.

Vanaf 1943 verdween de logica meer en meer naar de achtergrond en begon Gödel zich meer te focussen op filosofische onderwerpen. In zijn laatste levensjaren ging zijn gezondheid er stevig op achteruit, zowel fysiek als mentaal. Hij was ervan overtuigd dat iemand hem wilde vergiftigen, wat resulteerde in eetproblemen en uiteindelijk de dood. Gödel stierf op 71-jarige leeftijd in Princeton.

2.2 Invloedrijke wetenschappers in het leven van Gödel

Toen Gödel aan *The institute for advanced study* werkte, maakte hij kennis met Albert Einstein. Deze kennismaking bloeide uit tot een vriendschap. Einstein was immers getuige voor Gödel's Amerikaans burgerexamen. Deze vriendschap heeft op wetenschappelijk vlak zijn kracht bewezen. Zo bewees Gödel in 1951 het bestaan van een paradoxiale vergelijking in de Algemene relativiteitstheorie van Einstein. Hierdoor ging Einstein zelfs twijfelen aan zijn eigen relativiteitstheorie. Deze vergelijking wordt vandaag de dag de Gödel-metriek genoemd.

Ook de wiskundige David Hilbert had een grote invloed op Gödels leven. Zoals eerder vermeld, was een lezing van Hilbert de inspiratie om te werken rond volledigheid en consistentie van wiskundige systemen. Gödel heeft ook een bijdrage geleverd aan het oplossen van de 23 problemen van Hilbert. Eén van deze problemen was het aantonen van de consistentie van de rekenkunde. Volgens sommigen is de onvolledigheidsstelling een bewijs dat dit niet opgelost kan worden. Hilbert zelf, die nog 12 jaar na de publicatie van de stelling leefde, heeft hier echter nooit een formeel antwoord op gegeven.

3 De onvolledigheidsstelling van Gödel

3.1 Definities en formulering van de stelling

Gödel werkte dus rond de volledigheid en de consistentie van wiskundige systemen. Het is dan ook belangrijk om te weten wat deze begrippen betekenen in een wiskundige context. De wiskunde is opgebouwd vanuit een axiomatisch systeem. Een voorbeeld hiervan is het axiomatisch systeem voor de natuurlijke getallen, wat te vinden is in de appendix. Zo een systeem bestaat uit uitspraken die niet bewezen zijn, maar die wel aanvaard worden als zinvolle uitspraken. Een systeem is consistent als er geen contradicties te vinden zijn. Met andere woorden, je kan voor elke uitspraak zowel de uitspraak zelf als zijn ontkenning afleiden aan de hand van de axioma's binnen het systeem. Indien je voor elke uitspraak kan aantonen of deze waar of onwaar is, wordt het systeem volledig genoemd. Er zijn dan geen uitspraken die je niet kan bewijzen.

Ondanks het feit dat Gödel eigenlijk op zoek was naar een bewijs voor de volledigheid en consistentie, vond hij na een aantal jaren onderzoek dat juist het omgekeerde gold. Met de onvolledigheidssteling beweerde en bewees hij de volgende dingen:

1. Als een systeem consistent is, is het niet volledig.
2. Het consistent zijn van axioma's kan niet bewezen worden binnen hun eigen systeem.

Hieruit volgt direct dat we nooit de consistentie van een axiomatisch systeem kunnen bewijzen in een sterker systeem waarvan de consistentie bewezen is. Aangezien we het consistentiebewijs van dit sterker systeem enkel kunnen voltooien met een nog sterker systeem, enzovoort. Ook zegt dit dat we nooit zowel een consistent als een volledig axiomatisch systeem.

3.2 Het bewijs

Het bewijs van de eerste onvolledigheidsstelling is enorm complex en vraagt wiskundige methodes die wij als wiskunde studenten nog niet kunnen toepassen. Dit is de reden waarom wij enkel het idee achter het bewijs van de onvolledigheidsstelling aanhalen. Alvorens we dit uitleggen, bespreken we een aantal basisbegrippen en notatie uit de logica. Om een uitspraak te doen, worden volgende logische operatoren gebruikt:

symbool	betekenis
$\neg$	niet
$\vee$	of
$\wedge$	en
$\Rightarrow$	als ... dan (implicatie)
$\Leftrightarrow$	als en slechts als (equivalentie)

Eerst en vooral geldt dat in de logica een uitspraak waar of onwaar kan zijn op basis van andere uitspraken die waar of onwaar zijn. Beschouw even het volgende voorbeeld. Zij A, B twee uitspraken. Dan is $A \wedge B$ enkel waar als zowel A als B waar zijn. Indien A waar is en B onwaar, dan is $A \wedge B$ onwaar. Je kan dus zien dat het waar of onwaar zijn van de uitspraak $A \wedge B$ afhangt van het waar of onwaar zijn van de uitspraken A en B apart.

Met deze logische operatoren is het mogelijk om uitspraken te formuleren binnen een axiomatisch systeem. Zo gebruikt Gödel voor beide onvolledigheidsstellingen, volgende logische uitspraak:

$$(\text{consistent} \Rightarrow \text{onvolledig}) \Leftrightarrow (\text{inconsistent} \vee \text{onvolledig}) \tag{1}$$

Dit moet gelezen worden als: consistentie van een systeem impliceert onvolledigheid, als en slechts als, het systeem inconsistent of onvolledig is.

Men kan de formele taal niet gebruiken in een axiomatisch systeem, daarom zocht Gödel naar een manier om uitspraken in formele taal om te zetten naar iets wat bruikbaar is in het axiomatisch systeem. Hiervoor bedacht hij, onder andere, een codering genaamd de Gödel nummering. Aan elk symbool in de wiskunde ging hij een uniek getal toeschrijven. Dit maakte het mogelijk uitspraken om te vormen naar unieke natuurlijke getallen om zo er getaltheorie op toe te passen. Zo kon hij bijvoorbeeld te werk gaan volgens onderstaande tabel.

symbool	nummer
$\Leftrightarrow$	1
$\Rightarrow$	2
$\vee$	3
(	4
)	5
consistent	6
inconsistent	7
onvolledig	8

Zo kan uitspraak (1) herschreven worden als $\langle 4,6,2,8,5,1,4,7,3,8,5 \rangle$. Dit doen we door de symbolen te vervangen door de numerieke waarde, en dit vervolgens achter elkaar te schrijven. Dit getal was uniek, dus kon iedere uitspraak alvast op een unieke manier voorgesteld worden. Hiermee ging hij dan de code, oftewel het Gödel getal, opmaken. Dit deed hij door de volgende stelling uit te buiten: elk getal is het uniek product van priemgetallen. De code zag er dan als volgt uit: gegeven een sequentie van getallen, zoals in ons geval $\langle 4,6,2,8,5,1,4,7,3,8,5 \rangle$, ging hij het i^{de} getal gebruiken als macht van het i^{de} priemgetal. Dus het Gödel getal voor uitspraak (1) werd dan $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^8 \cdot 11^5 \cdot 13^1 \cdot 17^4 \cdot 19^7 \cdot 23^3 \cdot 29^8 \cdot 31^5$. Het Gödel getal van uitspraak P wordt genoteerd als $\ulcorner P \urcorner$. Men kan ook omgekeerd werken, en uit een Gödel getal een uitspraak formuleren. Ook kan er met deze getallen een bewijs voor een uitspraak geformuleerd worden. Het getal zou een bewijs zijn indien het voldoet aan een aantal voorwaarden, die afhangen van het Gödel getal van de stelling. Hierdoor is het dus belangrijk om zowel van uitspraak naar Gödel getal te kunnen gaan als van Gödel getal naar uitspraak.

Voor het bewijs van de tweede onvolledigheidsstelling geven we een intuïtief idee van de fundamenten mee door gebruik te maken van de leugenaarsparadox:

$$\text{Deze zin is onwaar} \tag{2}$$

Deze uitspraak zal leiden tot een contradictie, waarbij (2) waar en onwaar is. Stel ten eerste dat (2) waar is, dan is de zin onwaar volgens zijn definitie. We vinden dat als de zin waar is, hieruit volgt dat ze onwaar is. Omgekeerd, stel dat (2) onwaar is. Per definitie is de zin onwaar, indien we stellen dat deze definitie onwaar is, bekomen we dat de zin waar is. Dan volgt: de zin is onwaar als en slechts als de zin waar is. Dit is onmogelijk en vormt dus een paradox dat ontstaat door de zelfreferentie van de uitspraak.

De leugenaarsparadox is dus duidelijk een taalparadox. Indien we het kunnen vertalen naar een wiskundige uitspraak, hebben we een wiskundige paradox. Hiervoor hebben we het "zelf-referentie lemma"nodig:

Als een uitspraak in het axiomatisch systeem AS, G(x), exact één variabele heeft, dan kunnen we een uitspraak B maken zodat:

$$AS \text{ bewijst: } B \iff G(B) \tag{3}$$

Alvorens we verder gaan, verduidelijken we deze stelling met een gelijkaardig voorbeeld in de taal. Stel we zitten in het "axiomatisch systeem" *wiskundig vakjargon* en hebben de uitspraak $G(x)$: "x is een wiskundige vraag". Stel nu dat B : "Wat is de stelling van Pythagoras?". Het is duidelijk dat $G(B)$ waar is, dus is G bewijsbaar/beantwoordbaar met ons wiskundig vakjargon.

Nu kunnen we door (3) de leugenaarsparadox omvormen tot "AS bewijst: $G \iff \neg PR(G)$". Hierbij hebben we G :"AS kan G niet bewijzen" en $PR(x)$:"het Gödel getal x kan bewezen worden in AS", dus $\neg PR(x)$:"het Gödel getal x kan niet bewezen worden in AS". Ook dit is duidelijk een paradox, maar nu in de wiskunde. Dit waren een aantal ideeën die gebruikt worden in het bewijs, de rest laten we over aan de lezer.

4 Gevolgen van de stelling

4.1 Het beeld van de wiskunde door de stelling

Om de invloed van de stelling goed te begrijpen, moet er eerst een beeld geschetst worden van de gedachtegang voordat Gödel met zijn schokkende resultaten kwam. Men was toen zeer gefascineerd door het redeneervermogen van de mens en zocht hierachter processen om dit te kunnen beschrijven. Uit deze fascinatie vloeide de logica voort. Oorspronkelijk ging men ervan uit dat de wiskunde de realiteit beschreef. Het zou dan ook mogelijk moeten zijn om de wiskunde van het begin af aan op te bouwen en volledig te bewijzen. Uiteraard moest het begrip 'een bewijs' duidelijk gedefinieerd zijn voor men dit kon doen. Hiervoor werd er gewerkt aan manieren om dat redeneervermogen te koppelen aan wiskundige concepten zoals de verzamelingenleer of de studie van de gehele getallen. Hieronder worden enkele voorbeelden gegeven van andere ontdekkingen die eerder al voor verwarring zorgde in het oude wereldbeeld over de wiskunde.

In de klassieke wiskunde kwam er veel twijfel door verschillende paradoxen. Eén van de meest gekende paradoxen in de verzamelingenleer is de paradox van Russell. Deze ging over de verzameling van verzamelingen die zichzelf niet bevatten. Noem deze voor het gemak even A, zij V een verzameling:

$$A = \{V | V \notin V\}$$

Nu kan je gaan nadenken of A zichzelf bevat. Indien $A \in A$, is A een verzameling die zichzelf bevat en bijgevolg $A \notin A$. Omgekeerd kom je ook tot een tegenspraak. Stel dat $A \notin A$, dan volgt uit de definitie van A dat $A \in A$, een tegenspraak. We vinden dus: $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$. Door deze paradox ging men kijken naar de fundamenten van de verzamelingenleer. Er rezen vragen over de manier waarop verzamelingen voorgesteld werden en of er manieren waren om deze voor te stellen zonder dat er paradoxen bij kwamen kijken. De wiskundige gemeenschap heeft echter een oplossing gevonden voor dit paradox. Het axioma dat het mogelijk maakte deze verzameling te definiëren, werd verworpen en vervangen door twee andere axioma's. Hierdoor werd A niet meer als een verzameling gedefinieerd, en dus was het probleem "opgelost".

Wat in de paradox van Russell en in vele andere paradoxen voorkomt is een zelfreferentie. Op een bepaald moment wordt naar het object zelf verwezen. Aangezien dit voor veel problemen zorgde, probeerden onder andere Russell en Whitehead al deze zelfreferenties te verwijderen uit de logica, verzamelingenleer en de getaltheorie. Dit deden ze in hun grote werk de *Principia Mathematica*. Hiervoor probeerden ze de typentheorie te gebruiken. Deze kan kort beschreven worden als volgt: een verzameling van het laagste type kan enkel objecten als elementen hebben. Voor verzamelingen van een bepaald type (ongelijk aan het laagste type) geldt dat ze enkel verzamelingen van een lager type of objecten kunnen bevatten. Deze restrictie op verzamelingen lijkt aannemelijk voor een abstract iets zoals de verzamelingenleer, maar wanneer je de typentheorie op bijvoorbeeld een taal zou definiëren, zie je dat dit compleet absurde resultaten geeft. Aangezien het zo moeilijk was om paradoxen te vermijden, rezen er twijfels over de fundamenten van sommige wiskundige theorieën zoals de getaltheorie.

Het doel van de *Principia Mathematica* was dus de wiskunde beschrijven zonder dat er paradoxen voorkwamen. Ondanks dat het werk door velen bewonderd werd, werden er ook vragen gesteld. Eén van de dingen waar de wiskundige David Hilbert zich mee bezig hield was de vraag of de *Principia Mathematica* zowel volledig als consistent was. Het is gemakkelijk te zien dat je ook in de vraag een zelfreferentie kan ontdekken. Om volledigheid en consistentie aan te tonen moest je werken met de principes die in het werk beschreven werden. Zoals eerder uitgelegd had Gödel een manier gevonden om dit toch te doen. Hiermee bewees hij niet enkel dat het werk van Russell en Whitehead de getaltheorie niet op een consistente en volledige manier kon bewijzen, maar zelfs dat geen enkel axiomatisch systeem dit kon. Hierdoor werd de *Principia Mathematica* een stuk minder interessant voor wiskundigen en bleek dat het werk van de twee wiskundigen niet meer dan een onmogelijke opgave was.

Vandaag de dag zijn de stellingen algemeen aanvaard, maar je kan je vast wel inbeelden dat ze op het moment van de publicatie heel wat verwarring veroorzaakten. Heel wat wiskundigen zagen hun levenswerk in rook opgaan. Er was namelijk aangetoond dat hun beeld van een volledige en consistente wiskunde onmogelijk was.

4.2 Onbewijsbaarheid vs. onwaarheid

Heeft dit nu een directe invloed op de wiskunde die je dagdagelijks gebruikt? Neen, 1 appel plus 1 appel is nog steeds gelijk aan 2 appelen. Dit kan gemakkelijk nagegaan worden door te tellen. Maar er zijn ook heel wat stellingen waarvoor dit niet zo triviaal is. Bekijk bijvoorbeeld de volgende stelling:

"Er zijn oneindig veel priemgetallen"

Je kan onmogelijk op een rechtstreekse manier deze stelling gaan aantonen. Dit wil echter niet zeggen dat de stelling onwaar is. Euclides stelde een bewijs op door een logische redenering te volgen. Dit bewijs ging als volgt[1]: kies een getal N. Vorm nu de faculteit: $N! = N \cdot N - 1 \cdot N - 2 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$. Het is gemakkelijk in te zien dat de uitkomst hiervan deelbaar is door ieder getal tot en met N. Indien je nu 1 optelt bij $N!$, dus vorm $N! + 1$, dan is dit resultaat enkel deelbaar door 1, zichzelf (bij alle andere krijg je de rest 1) en mogelijk door getallen groter dan N. Hier volgt nu uit dat $N! + 1$ ofwel zelf een priemgetal moet zijn, ofwel dat zijn priemdelers groter zijn dat N. Omdat je deze redenering voor elke N kan toepassen, is de stelling aangetoond. Deze redenering is gemakkelijk te volgen, waardoor de stelling ook als waar wordt aangenomen. Het is echter niet zo dat je echt kan nagaan door bijvoorbeeld te tellen dat ze klopt. Het bewijs berust louter op een goed te volgen redenering, een denkproces.
Een ander voorbeeld is de volgende stelling:

"Elk even getal (groter dan 2) kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen"

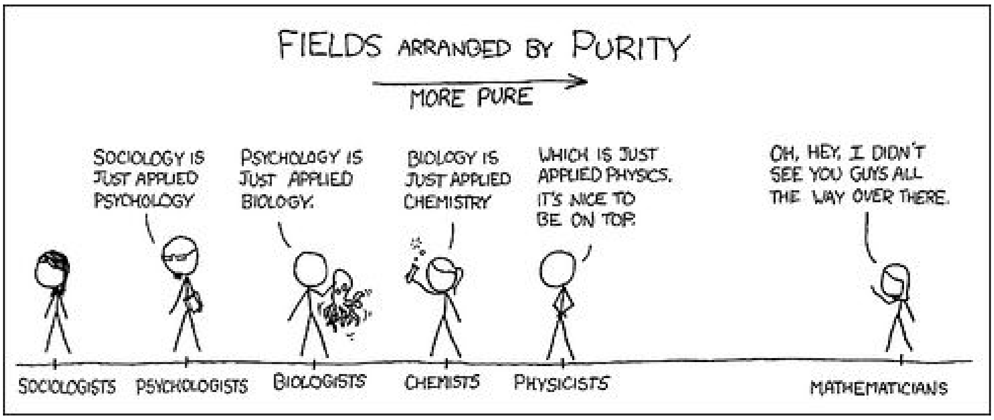
Je kan zelf voorbeelden zoeken waarvoor dit klopt. Het is namelijk zo dat voor elk voorbeeld dat de mens al probeerde, de stelling klopte. Toch is nog niemand erin geslaagd ze te bewijzen. We gaan er dus van uit dat de stelling waar is, maar onbewijsbaar. Je zou kunnen stellen dat Gödel met zijn onvolledigheidsstellingen heeft aangetoond dat waarheid sterker is dan bewijsbaarheid. Hieruit volgt dan ook dat onbewijsbaarheid zeker niet altijd gelijk is aan onwaarheid.

Wanneer is een bepaalde stelling nu moeilijk te bewijzen of gewoonweg niet te bewijzen? De onvolledigheidsstellingen hebben het onmogelijk gemaakt om dit met zekerheid te zeggen.

[1] [3] Gödel, Escher, Bach; een eeuwige gouden band, p. 68

Toen men nog geloofde dat de wiskunde consistent was, leek het enkel een kwestie van tijd tot een bewijs gevonden werd. Die zekerheid is er nu niet meer. Dit kan het zeker moeilijker maken om te beslissen of je een poging wilt doen om een bepaalde stelling te bewijzen. Er is altijd de kans dat dit een onmogelijke operatie is. Verder is hierdoor de wereld alvast nog niet vervangbaar door computers, aangezien zij geen verschil kunnen maken tussen onwaarheid en onbewijsbaarheid.

4.3 Absolute waarheid



Figuur 2: Wiskunde wordt gebruikt in veel wetenschapsdisciplines

Aannemen dat iets waar is, kan je natuurlijk niet als een absolute waarheid beschouwen. Dit is daarom ook iets wat onmogelijk is in de wiskunde. Om stellingen te bewijzen wordt gesteund op een axiomatisch systeem. Dit systeem wordt aanvaard in de wetenschap, maar het behoort niet tot de absolute waarheid. Je kan namelijk niet bewijzen dat het klopt. We baseren ons op logische redeneringen of tellingen om onszelf ervan te overtuigen dat het waar is. In figuur 2 is te zien hoe de verschillende wetenschapsdisciplines geordend worden volgens puurheid. Een discipline is minder puur indien ze concepten uit een andere discipline gaat toepassen. We zien dat de wiskunde achteraan in het rijtje staat en als het meest puur wordt beschouwd. In alle andere disciplines wordt dus wel iets uit de wiskunde toegepast. Door de inconsistentie van de wiskunde zou het kunnen dat er fouten in onze wiskunde zitten. Zo kan het bijvoorbeeld dat voor momenteel onbewezen stellingen, waar we nu van uitgaan dat deze waar is, later gaat blijken dat de stelling op zich toch fout was. Als nu in een andere discipline ergens op deze foutieve stelling gesteund wordt om iets aan te tonen, valt ook deze theorie volledig in het water. Je zou er dan over kunnen nadenken of het wel zo een goed idee is om je te baseren op die wiskunde waar mogelijks fouten inzitten.

Toch is dit niet een vraagstuk dat de kinderen wordt meegegeven in school. De wiskunde en het gebruik ervan wordt gewoon aangeleerd. Ook vroeger, toen men er nog van uitging dat de wiskunde wel consistent was, gebruikte men de wiskunde volop in andere wetenschapsdisciplines. De klassieke mechanica die steunt op de wetten van Newton is hier een voorbeeld van. Toen Albert Einstein in 1905 zijn speciale relativiteitstheorie publiceerde, liet hij zien dat de snelheid van het licht niet afhankelijk is van een coördinatenstelsel, in de fysica krijgt dit de benaming referentiestelsel. Dit is in tegenspraak met de klassieke mechanica waar gesteld word dat de snelheid wel afhankelijk is van een referentiestelsel. Je kan je dus afvragen of de consistentie van een axiomatisch systeem wel zo belangrijk is voor het gebruik van wiskunde.

In de meeste gevallen is het antwoord op deze vraag simpelweg "nee". De wetten van Newton zijn nog altijd van essentieel belang voor verschillende wetenschapsdiciplines. De publicatie van de speciale relativiteitstheorie verwerpt deze wetten ook niet, deze theorie laat enkel zien dat de klassieke mechanica niet de volledige natuurkunde omschrijft. Vandaag de dag wordt vaak de klassieke mechanica gebruikt om uitspraken te doen over objecten die ten opzichte van de lichtsnelheid een kleine snelheid hebben, terwijl de speciale relativiteitstheorie wordt toegepast voor objecten die zich met een grotere snelheid voortbewegen. De consistentie van de rekenkunde is dus niet essentieel voor het gebruik van wiskundige concepten in bijvoorbeeld de fysica. In het dagelijks leven heeft de stelling dus niet veel invloed.

Nog een voorbeeld hiervan is het gebruik van je gsm of een ander communicatiemiddel zoals je computer. De onvolledigheidsstellingen zeggen ons niet dat deze dingen niet kunnen werken als blijkt dat ons axiomatisch systeem niet consistent is. Dit omdat we deze toestellen hebben uitgevonden op basis van dit axiomatisch systeem. Zo is het toestel gemaakt om te functioneren met code, die bestaat uit de logica en bepaalde axioma's. Ook hebben we de realiteit proberen om te zetten tot iets bruikbaars en bewerkbaars in onze wiskunde, net zoals we de taal omzetten tot Gödel nummering. Zo hebben we machines uitgevonden die dit kunnen, bijvoorbeeld camera's die licht omzetten tot een digitaal beeld dat we kunnen bewerken of microfonen die geluidsgolven opvangen en transformeren tot een formaat waarmee we kunnen werken. Over het algemeen hangt technologie niet af van de consistentie of volledigheid van hun axiomatische systemen. Dit is immers een uitvinding en we hebben deze zo gecreëerd zodat ze in onze systemen passen.

4.4 Formalisme vs. Platonisme

Binnen de grondslagen van de wiskunde kunnen verschillende stromingen beschouwd worden. Zo is er ten eerste het formalisme, waar David Hilbert een aanhanger van was. Hierbij geloofde men dat de wiskunde enkel een betekenisloos, formeel spel is waarvoor de regels willekeurig gekozen kunnen worden. Het 'spel' bestaat er dan zogezegd uit een stelling af te leiden waarbij de gegeven regels het mogelijk maken uit de axioma's nieuwe dingen af te leiden en te bewijzen. Een belangrijke voorwaarde is dat er geen tegenspraken of paradoxen in het spel mogen zitten en alles moet bewijsbaar zijn, het moet met andere woorden consistent en volledig zijn. Gödel's denkbeeld daarentegen had meer de onderbouw van het platonisme. Hierbij was de wiskunde eerder iets abstracts dat zich los van de realiteit bevond. Het is dus zeker geen spel dat je in de echte wereld kan spelen. Gödel had ook een sceptische blik op alledaagse begrippen zoals juistheid of waarheid omdat deze een foute context kunnen krijgen wanneer ze toegepast worden op iets abstracts. Oorspronkelijk had Hilberts formalisme veel aanhangers, maar door de onvolledigheidsstelling zag men in dat de regels van het 'spel' niet bewezen konden worden. Het formalisme kwam onder vuur te liggen.

5 Conclusie

Het beeld van de wiskunde lag al eerder onder vuur door verschillende paradoxen en andere ontdekkingen. De publicatie van de onvolledigheidsstelling zorgde ervoor dat het beeld van een consistente en volledige wiskunde volledig van tafel werd geveegd. Er kwam dus een grote verandering in de manier waarop men naar de wiskunde keek. Zo werd ook duidelijk dat onbewijsbaarheid niet meteen onwaarheid impliceert. Dit maakt het complexer om voor bepaalde stellingen te beslissen of ze onbewijsbaar zijn of heel moeilijk te bewijzen. Het concept van absolute waarheid is niet toepasbaar in de wiskunde omdat het axiomatisch stelsel niet te bewijzen is. Verschillende voorbeelden waarin de wiskunde gebruikt wordt, geven aan dat voor het dagelijkse leven er geen grote gevolgen zijn. Dit is ook een van de redenen dat weinig mensen van het bestaan van de stellingen afweten.

6 Appendix

De axioma's bedacht door Giuseppe Peano zijn, zo goed als, alle axioma's voor de natuurlijke getallen. Ze gaan als volgt:

- 0 is een natuurlijk getal.
- Als a een natuurlijk getal is, dan is de opvolger van a een natuurlijk getal.
- 0 is geen opvolger van een natuurlijk getal.
- Als de opvolgers van 2 getallen gelijk zijn, dan zijn de 2 getallen gelijk.
- Als een verzameling S van getallen, die 0 en alle opvolgers van elk getal is S bevat, dan ligt elk natuurlijk getal in S.

Dit laatste axioma gaat uit van de logica inductie: We weten dat 0 in S en ook elke opvolger van elk getal in S. 1 zit dus ook in S, vervolgens zit 2 ook in S...

Ook hebben ze hier gebruik gemaakt van het concept "opvolger" en "gelijkheid". Met "opvolger" bedoelt men: de opvolger van n is $n + 1$. Gelijkheid is een relatie en wordt genoteerd met "=", deze relatie is reflexief ($a = a$), symmetrisch ($a = b \implies b = a$) en transitief ($x = y \wedge y = z \implies x = z$).

Referenties

[1] Elsevier B.V., 2005, Landmark writings in western mathematics 1640-1940.

[2] Feferman S., *In the light of logic*, 02/12/20, https://ebookcentral.proquest.com/lib/ubhasselt/reader.action?docID=271659

[3] Hofstadter D., 2006, *Gödel, Escher, Bach: een eeuwige gouden band*, Uitgeverij Contact, Amsterdam/Antwerpen

[4] Numberphile, *Gödel's Incompleteness Theorem - Numberphile*, 30/10/20, https://www.youtube.com/watch?v=O4ndIDcDSGcab_channel=Numberphile

[5] Numberphile, *Gödel's Incompleteness (extra footage 1) - Numberphile*, 30/10/20, https://www.youtube.com/watch?v=mccoBBf0VDMab_channel=Numberphile

[6] Numberphile, *Gödel's Incompleteness (extra footage 2) - Numberphile*, 30/10/20, https://www.youtube.com/watch?v=7DtzChPqUAwab_channel=Numberphile2

[7] Podnieks K., Incompleteness Theorems, 4/12/20, https://www.labri.fr/perso/betrema/MC/gt5.html

[8] Raatikainen P., *Gödel Numbering*, 4/12/20, https://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/sup1.html

[9] Raatikainen P., *Gödel's incompleteness theorems*, 3/12/20, https://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/

[10] Van Ettinger N., *Wiskunde construct van ons denken of zoektocht naar objectieve waarheid?*, 6/11/20, https://docplayer.nl/41104226-Gödel-s-onvolledigheidsstellingen-4.html

[11] Weisstein, Eric W. "Peano's Axioms."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/PeanosAxioms.html

[12] Rosario H., *Wiskundige en Wetenschappelijk Visie over het Goddelijke: Een Rationele Theologie.*, 13/12/20, https://verbodengeschriften.nl/html/kurt-Gödel-wiskundige-en-wetenschappelijk-visie-over-het-goddelijke.html

[13] Swean M., De wiskunde van de wiskundeleraar, 08/12/20, http://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/233/233maart_swaen.pdf

[14] Wikipedia, *Principia Mathematica*, 29/11/20, https://nl.wikipedia.org/wiki/Principia_Mathematica

[15] Wikipedia, *Kurt Gödel*, 30/10/20, https://en.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del

[16] Wikipedia, *Onvolledigheidsstellingen van Gödel*, 30/10/20, https://nl.wikipedia.org/wiki/Onvolledigheidsstellingen_van_GC3B6del

[17] Wikipedia, *Axiomatisch systeem*, 30/10/20, https://en.wikipedia.org/wiki/Axiomatic_system

[18] Wikipedia, *Leugenaarsparadox*, 31/12/20, https://nl.wikipedia.org/wiki/LeugenaarsparadoxDe_paradox_van_Quine