Numerieke methoden
Inleveropgaven V

Oefening 1

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^1 functie waarvoor constanten $M, m > 0$ bestaan z.d.

$$0 < m = \min_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = M < \infty$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Toon aan dat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ bestaat z.d. de functie $\Phi(x) = x + \alpha f(x)$ een contractie is.

b) De foutschattingen voor de vast punt iteratie tonen aan dat hoe kleiner de contractie constante is hoe sneller de convergentie van de iteratie. Is er een optimale waarde α_{opt} die de snelste convergentie garandeert?

Hint: Zoek α z.d. er geldt $-1 < \Phi' < 1$. Om de optimale waarde te verkrijgen zoek α z.d. de maximale ondergrens en de minimale bovengrens van Φ' symmetrisch zijn, d.w.z. $-L \leq \Phi' \leq L$ voor een zekere $L < 1$.

Oefening 2

Zij $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. Deze functie heeft een nulpunt $x^* = 1.3652300134...$ in het gegeven interval. Zoals boven kan x^* tevens vast punt van een functie Φ zijn. Merk op, de keuze van α is niet eenduidig.

a) Geef een conditie waaraan α moet voldoen z.d. Φ een contractie is.

b) Is er een optimale waarde van α (d.w.z. de waarde die de snelste convergentie geeft)?

c) Kies een zekere α die voldoet aan de contractie conditie en pas de vast punt menthode toe om x^* te benaderen met de absolute fout kleiner dan $TOL = 10^{-8}$. Hoeveel iteraties zijn hiervoor nodig? Komt het resultaat overeen met de a-priori en a-posteriori schattingen? Als er een optimale α_{opt} bestaat, herhaal deze procedure voor α_{opt}. Vergelijk de resultaten (aantal iteraties).

Oefening 3

Een simpele manier om de convergentieorde γ te schatten is gebaseerd op de aanname dat voor de fouten $e_k = |x_k - x^*|$ geldt $e_{k+1} \approx Ce_k^\gamma$ voor een zekere $C > 0$ en dat er geldt $e_{k+1} \approx \tilde{C}e_k e_{k-1}$ voor een constante $\tilde{C}$ die niet afhangt van k (vergelijk dit met de a-posteriori schatting). Gebruik dit in de a-posteriori schatting zoals gegeven in de convergentiestelling voor de secant-methode om aan te tonen dat $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Hint: Voor de convergentie kun je $\gamma > 0$ aannemen (waarom is $\gamma \leq 0$ geen optie?).

Oefening 4

Als het nulpunt x^* de multipliciteit m heeft met $m > 1$ dan kan de Newton-methode minder goed convergeren (of helemaal niet). In dit geval zijn er twee mogelijkheden te bedenken:

a) x^* is een simpel nulpunt voor $h = f^{(m-1)}$ en kan de Newton-methode dus toegepast worden voor h.

b) Alternatief: voor elke x bestaat er een $\xi(x)$ z.d. $f(x) = \frac{(x-x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi(x))$. Dan geldt ook $f'(x) = \frac{(x-x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi(x)) + \frac{(x-x^*)^m}{m!} f^{(m+1)}(\xi(x))\xi'(x)$. Toon nu aan dat als $f'(x_k) \neq 0$ geldt asymptotisch (d.w.z. als $x_k \to x^*$):

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = O((x_k - x^*)^2).$$

Dat rechtvaardigt de volgende variante van de Newton-methode:

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Implementeer de twee varianten in MATLAB en gebruik deze om $x^* = 1$, het dubbele nulpunt van $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ te benaderen met de absolute fout $TOL = 10^{-8}$. Vergelijk de resultaten voor de twee algoritmen en voor de standaard Newton-methode.