Numerieke methoden
Inleveropgaven II

Oefening 1

Zij $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bovendriehoekig (d.w.z. $l_{ij} = 0$ als $i > j$) en inverteerbaar. Bewijs dat L^{-1} tevens bovendriehoekig is.

Oefening 2

Lees paragraaf 3.7.1 *Tridiagonal Matrices*. Implementeer in MATLAB het Thomas-algoritme om het stelsel $AX = B$ gegeven in punt 52 op te lossen met $n = 11$. Gebruik vervolgens de methode gegeven in paragraaf 3.2.3 *Inverse of a Triangular Matrix* om de matrix B in punt 34 te berekenen.

Oefening 3

De *Hilbert matrix* $H^{(n)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is een bekend voorbeeld van een slecht geconditioneerde matrix. De elementen van $H^{(n)}$ zijn $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Zij b de vector met alle elementen 1. Gebruik je MATLAB programma van punt 52 om het stelsel $H^{(n)}x = b$ op te lossen. Probeer dit in zowel `single` als ook `double` nauwkeurigheid voor $n = 1, 2, 3, \ldots, m$, met m een geschikt gekozen natuurlijk getal. Ga na of er fouten zijn op het resultaat. Maak vervolgens gebruik van voorconditionering om de resulatataten te verbeteren.

Oefening 4

In les 3 hebben we geleerd hoe het stelsel $Ax = b$, met $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $b \in \mathbb{R}^n$, kunnen oplossen met de methode van Gauß. Een alternatieve methode om het stelsel op te lossen is door gebruik te maken van de regel van Cramer

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det(A)}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

met Δ_j de determinant van de matrix die ontstaat door de j-de kolom van A te vervangen door de vector b. Toon aan dat het aantal berekeningen die nodig zijn om de oplossing x te bepalen van $\mathcal{O}((n+1)!)$ is wanneer de determinant berekent wordt volgens de recursieve relatie (1.4) op blz. 10. De determinant kan ook berekend worden door eerst een LU-decompositie uit te voeren. Bepaal de orde van het aantal berekeningen in dit geval.