Numerieke methoden
Inleveropgaven IV

Oefening 1

a) Zij $f \in C^5$ en $x_k = x_0 + kh$ ($k \in \{-2, -1, 0, 1, , 2\}$) met $h > 0$. Toon aan dat er geldt

$$f_0^3 = \frac{1}{2h^3}(-f_{-2} + 2f_{-1} - 2f_1 + f_2) + O(h^2).$$

b) Zij $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ en $x_0 = 1$. We benaderen $f'(1)$ gebruikmakend van de formules

$$f_{x_0}^1(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + O(h), \text{ en } f'(x_0) = 2f_{x_0}^1(h) - f_{x_0}^1(2h) + O(h^2).$$

Inspecteer de fout voor $h \in [10^{-3}, 10^{-12}]$. Hint gebruik het commando `logspace(-3,-12)`. Doe dit in een MATLAB programma en plot de twee fouten in een grafiek op de logaritmische schaal (zie `loglog`). Omschrijf uitvoerig je bevindingen. Kun je ook de theoretische fout in de grafiek plotten?

Oefening 2

a) Voor de functie $f \in C^1[a, b]$ zijn de waarden $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ en $f'(b)$ gegeven. Gebruik deze informatie om een kwadratuurformule te bepalen voor de benadering van $\int_a^b f(x)dx$. Geef ook de integratiefout (als functie van de 4^e afgeleide van f in een punt in het interval (a, b)).

b) Construeer de bijbehorende samengestelde regel en bepaal tevens de integratiefout.

Oefening 3

Maak oefening 2 op blz. 421.

Oefening 4

Zij de punten $x_k \in [a, b]$ voor $k = 0, \ldots, n$ gegeven door de gesloten Newton-Cotes formules.

a) Bewijs de volgende (anti-)symmetrische eigenschap voor het steunpunten-polynoom

$$\omega_{n+1}(\frac{a+b}{2} + x) = (-1)^{n+1}\omega_{n+1}(\frac{a+b}{2} - x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) Plot de functie $\omega_{n+1}(x)$ voor $n = 5$ en $n = 6$. Bewijs dat:

(i) Voor $a < x + h \leq \frac{a+b}{2}$ met $x \neq x_k, k = 0, \ldots, n$

$$|\omega_{n+1}(x+h)| < |\omega_{n+1}(x)|.$$

(ii) Voor $\frac{a+b}{2} \leq x < b$ met $x \neq x_k, k = 0, \ldots n$

$$|\omega_{n+1}(x)| < |\omega_{n+1}(x+h)|.$$

c) Toon aan dat voor n even

$$\int_a^x \omega_{n+1}(t)\, dt > 0, \qquad x \in (a, b).$$