Complexe Analyse thuistoets kwartiel 1

Wietse Vaes

1. Los op: $\boxed{z \in \mathbb{C} : \sin(z) = 2}$

   Oplossing:
   $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Rightarrow e^{2zi} - 1 = 4ie^{iz} \overset{t=e^{iz}}{\Rightarrow} t^2 - 4it - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4i\pm\sqrt{(-4i)^2+4}}{2} = \frac{4i\pm\sqrt{-12}}{2} = 2i \pm \sqrt{3}i = (2 \pm \sqrt{3})i \Rightarrow e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i \overset{z=x+yi}{\Rightarrow} e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) = (2 \pm \sqrt{3})i$. Dus:

   $$\begin{cases} e^{-y}\cos(x) = 0 \\ e^{-y}\sin(x) = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

   Hieruit concludeer ik dat: $\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Zij nu $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \sin(x) = 1 \Rightarrow e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} > 0 \Rightarrow y = -\ln(2 \pm \sqrt{3})$
   Zij nu $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \sin(x) = -1 \Rightarrow e^{-y} = -(2\pm\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow$ Geen oplossing mogelijk aangezien $y \in \mathbb{R}$.

   De enige oplossingen zijn dus $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$ met $k \in \mathbb{Z}$

2. We integreren de complexe functie $f(z) = z^3e^{-z}$ over de driehoek in het complexe vlak met hoekpunten: $0,\ R,\ R + Ri$. Deze driehoek noemen we C.

   (a) Toon aan dat $\oint_C f(z)dz = 0$

   Oplossing:
   Zij $z = x + yi$:

   $$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+yi)^3e^{-(x+yi)}\right) = 3(x+yi)^2e^{-(x+yi)} - (x+yi)^3e^{-(x+yi)} = 3z^2e^{-z} - z^3e^{-z}$$

   $$\frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left((x+yi)^3e^{-(x+yi)}\right) = 3i(x+yi)^2e^{-(x+yi)} - i(x+yi)^3e^{-(x+yi)} = (3z^2e^{-z} - z^3e^{-z})i$$

   Het is duidelijk dat $\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f(z)}{\partial y}$, dus is $f(z)$ analytische en dus is, volgens de stelling van Cauchy, $\oint_C f(z)dz = 0$. (C is een kromme waarvan een stukgewijs gladde kromme bestaat die lus-homotoop is in $\mathbb{C}$).

   (b) Laat C_1, C_2 en C_3 achtereenvolgens de verbindingslijnen zijn tussen 0 en R, tussen R en $R + Ri$ en tussen $R + Ri$ en 0. Laat zien dat de integralen over C_1 en C_2, achtereenvolgens $3! = 6$ (Gamma-functie) en 0 leveren als $R \to \infty$.

   Oplossing:
   Voor C_1 gebruik ik de parametrisatie $\sigma : [0, R] \to [0, R] : t \mapsto t$, dan is $\frac{d\sigma}{dt} = 1$. Dus: $\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^R t^3e^{-t}dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^R t^3e^{-t}dt &= -t^3e^{-t}|_0^R + 3\int_0^R t^2e^{-t}dt \\
&= -R^3e^{-R} - 3t^2e^{-t}|_0^R + 6\int_0^R te^{-t}dt \\
&= -R^3e^{-R} - 3R^2e^{-R} - 6te^{-t}|_0^R + 6\int_0^R e^{-t}dt \\
&= -R^3e^{-R} - 3R^2e^{-R} - 6Re^{-R} - 6e^{-R} + 6 \\
&\overset{R\to\infty}{=} 6 \qquad\qquad \text{exponenten groeien sneller dan veeltermen.}
\end{aligned}$$

Voor C_2 gebruik ik de parametrisatie $\sigma : [0,R] \to [0,R] : t \mapsto R+ti$, dan is $\frac{d\sigma}{dt} = i$. Dus: $\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^R (R+ti)^3 e^{-(R+ti)} i dt$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)dz &= i\frac{(R+ti)^3e^{-(R+ti)}}{-i} + 3i\frac{(R+ti)^2e^{-(R+ti)}}{-i} + 6i\frac{(R+ti)e^{-(R+ti)}}{-i} + 6i\frac{e^{-(R+ti)}}{-i}|_0^R \\
&= R^3e^{-R} + 3R^2e^{-R} + 6Re^{-R} + 6e^{-R} \\
&\quad - ((R+Ri)^3e^{-(R+Ri)} + 3(R+Ri)^2e^{-(R+Ri)} + 6(R+Ri)e^{-(R+Ri)} + 6e^{-(R+Ri)} \\
&= \left[R^3 + 3R^2 + 6R + 6 - \left((R+Ri)^3 + 3(R+Ri)^2 + 6(R+Ri) + 6\right)e^{-iR}\right]e^{-R} \\
&\overset{R\to\infty}{=} 0 \qquad\qquad |e^{-iR}| < \infty \text{ en exponenten groeien sneller dan veeltermen}
\end{aligned}$$

(c) Verwerk de integraal over C_3 en toon aan dat uiteindelijk volgt dat

$$\int_0^\infty x^3e^{-x}\sin(x)dx = 0 \qquad\qquad \int_0^\infty x^3e^{-x}\cos(x)dx = \frac{-3}{2}$$

Oplossing:

Voor C_3, bekijk ik eerst $\tilde{C}_3$, de verbindingslijn tussen 0 en $R+Ri$. Hiervoor gebruik ik de parametrisatie $\sigma : [0,R] \to [0,R] : t \mapsto (1+i)t$, dan is $\frac{d\sigma}{dt} = 1+i$. Dus: $\int_{\tilde{C}_3} f(z)dz = \int_0^R ((1+i)t)^3 e^{-(1+i)t}(1+i)dt = (1+i)^4 \int_0^R t^3e^{-(1+i)t}dt = -4\int_0^R t^3e^{-(1+i)t}dt = -4\int_0^R t^3e^{-t}(\cos(t) - i\sin(t))dt = -4\int_0^R t^3e^{-t}\cos(t)dt + 4i\int_0^R t^3e^{-t}\sin(t)dt$.

Merk op dat $\int_{\tilde{C}_3} f(z)dz = \int_0^R f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = -\int_R^0 f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = -\int_{C_3} f(z)dz$.

Nu is

$$0 = \lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\sum_{i=1}^3\int_{C_i} f(z)dz = 6 + 4\lim_{R\to\infty}\int_0^R t^3e^{-t}\cos(t)dt - 4i\lim_{R\to\infty}\int_0^R t^3e^{-t}\sin(t)dt$$

Dus

$$\begin{cases} 6 + 4\int_0^\infty t^3e^{-t}\cos(t)dt = 0 \\ -4\int_0^\infty t^3e^{-t}\sin(t)dt = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^\infty t^3e^{-t}\cos(t)dt = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ \int_0^\infty t^3e^{-t}\sin(t)dt = 0 \end{cases}$$

In conclusie ($t = x$):

$$\int_0^\infty x^3e^{-x}\sin(x)dx = 0 \qquad\qquad \int_0^\infty x^3e^{-x}\cos(x)dx = \frac{-3}{2}$$

3. Gegeven $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)}$.

(a) Bereken de residuen in $z = 2i$ en in $z = 3i$.

Oplossing:

$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)} = \frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2(z+3i)(z-3i)}$. $f(z)$ is de van de vorm $\frac{g(z)}{(z-2i)^2}$ met $g(z) =$

$\frac{z^2}{(z+2i)^2(z+3i)(z-3i)}$, deze functie is analytisch in $B(2i,\delta)$, met $\delta > 0$, en $g(2i) = \frac{1}{20} \neq 0$. Nu is $2i$ een pool met orde 2 van $f(z)$ en dus $\text{Res}(f, 2i) = \frac{g^{(1)}(2i)}{1!}$. Hierbij is $g'(z) = -\frac{2z(z^3-18i)}{(z+2i)^3(z^2+9)^2}$ en dus $g'(2i) = -\frac{4i(-8i-16i)}{(4i)^3(-4+9)^2} = -\frac{26i}{25(4i)^2} = -\frac{13i}{200}$. Dus:

$$\text{Res}(f, 2i) = -\frac{13i}{200}$$

Analoog voor $z_0 = 3i : f(z) = \frac{g(z)}{z-3i}$, met $g(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z+3i)}$. Wederom is het duidelijk dat $g(z)$ analytisch kan zijn in een omgeving $B(3i,\delta)$ met $\delta > 0$. Nu is $\text{Res}(f(z), 3i) = \frac{g(3i)}{0!} = \frac{\frac{3i}{50}}{1} = \frac{3}{50}i$. Dus:

$$\text{Res}(f, 3i) = \frac{3i}{50}$$

(b) Laat C de samenstelling zijn van de halve cirkel met straal R met als middelpunt de oorsprong, gelegen in het boven-halfvlak van het complexe vlak en het lijnstuk op de reële as tussen $-R$ en R. We nemen aan dat $R > 3$.

Bereken $\oint_C f(z)dz$.

Oplossing:

Zij $\mathring{C}$ het gebied dat C omsluit (en C erbij), dan zien we dat, aangezien $R > 3$, $2i(= z_1), 3i(= z_2) \in \mathring{C}$. Verder is $f : \mathring{C}\backslash\{2i, 3i\} \to \mathbb{C}$ analytisch, aangezien $\mathring{C}$ enkel bestaat uit elementen met een positief imaginaire deel. Bovendien is het ook duidelijk dat $2i$ en $3i$ inwendige punten zijn van $\mathring{C}$ en dat $\mathring{C}$ gesloten is, dus: $\{2i, 3i\} \subset \mathring{\mathring{C}} \subset \overline{\mathring{C}} \subset \mathring{C}$. Ten slotte kies ik dat $C = \partial\mathring{C}$ tegenkloksgewijs georienteerd is. Nu is volgens de residustelling:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \text{Res}(f, z_j) = 2\pi i(\text{Res}(f, 2i) + \text{Res}(f, 3i)) = 2\pi(\frac{13}{200} - \frac{3}{50}) = \frac{\pi}{100}$$

(c) Laat zien dat de integraal over de halve cirkel naar nul gaat voor $R \to \infty$.

Oplossing:

Zij S_R de kromme die een halve cirkel met straal R omschrijft, gebruik de parametrisatie: $\sigma : [0, \pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto Re^{ti}$ met $\sigma'(t) = Rie^{ti}$, dus:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{S_R} \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)}dz\right| &= \left|\int_{S_R} \frac{9}{25(z^2+4)} - \frac{4}{5(z^2+4)^2} - \frac{9}{25(z^2+9)}dz\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} \left|\frac{9Re^{it}}{25(R^2e^{2it}+4)}\right| + \left|\frac{4Re^{it}}{5(R^2e^{2it}+4)^2}\right| + \left|\frac{9Re^{it}}{25(R^2e^{2it}+9)}\right| dt \\
&= \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \left|\frac{9e^{it}}{25(e^{2it}+\frac{4}{R^2})}\right| + \left|\frac{4e^{it}}{5R^2(e^{2it}+\frac{4}{R^2})^2}\right| + \left|\frac{9e^{it}}{25(e^{2it}+\frac{9}{R^2})}\right| dt \\
&\leq \frac{1}{R}\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{9}{25|1-\frac{4}{R^2}|} + \frac{4}{5(1-\frac{4}{R^2})^2} + \frac{9}{25|1-\frac{9}{R^2}|}dt}_{\text{integraal} < \infty \text{ voor } R > 3 \ (R \neq 3)} \\
&\overset{R\to\infty}{=} 0
\end{aligned}$$

Dus voor $R \to \infty$ geldt: $0 \leq \left|\int_{S_R} \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)}\right| \leq 0$. Vanwege de insluitstelling is $\lim_{R\to\infty} \left|\int_{S_R} \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)}\right| = 0$ en dus $\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)} = 0$

(d) Bereken $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)}dx$.

Oplossing:

Zij C_R de halve cirkel met straal R en bodem erbij (tegenwijzerzin), dan is

$$\oint_{C_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz \Rightarrow \oint_{C_R} f(z)dz - \int_{S_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)dz$$

Uit (b) en (c) weten we nu dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+4)^2(z^2+9)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)dz = \frac{\pi}{100} - 0 = \frac{\pi}{100}$$

4. Bewijs de volgende stelling:

Stelling: Zij $f(z)$ analytisch rond $z_0 \in \mathbb{C}$, dan is $f(z)$ continu in $z = z_0$.

Oplossing:

Aangezien $f(z)$ analytisch is rond $z_0 \in \mathbb{C}$, geldt dat: $f'(z_0) < \infty$. Nu geldt:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0) \right| && |\cdot| \text{ is een continue functie} \\
&= f'(z_0)\ 0 && \text{limiet van beide delen bestaan} \\
&= 0
\end{aligned}$$

In conclusie: $\lim_{z-z_0} f(z) = f(z_0)$

5. We beschouwen de hoofdwaarde van een kringintegraal waarbij we een singulariteit op de kromme waarover we integreren bekijken. Laat $f(z) : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch zijn, We bewijzen de volgende stelling:

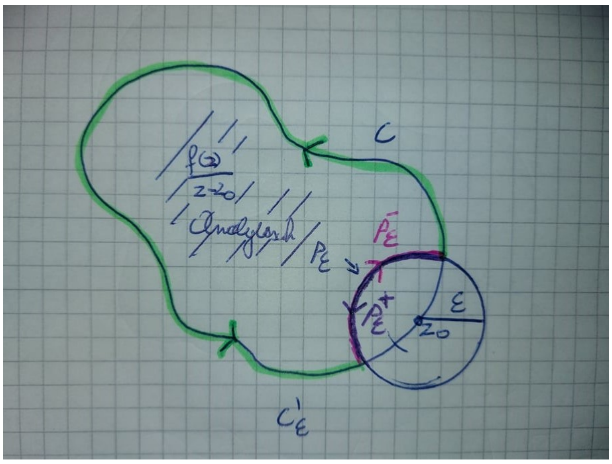
Stelling: Zij $C \subset \Omega$ een gladde Jordankromme, en zij $z_0 \in C$, dan $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2}f(z_0)$.

We pakken het bewijs 'stap voor stap' aan.

(a) Teken de situatie. Teken rond $z = z_0$ een cirkel met straal $\varepsilon > 0$ en markeer het deel van de kleine cirkel dat binnen C ligt. Noem dit deel ρ_ε. Verder beschouwen we het deel van C dat het punt z_0 **niet** bevat, markeer het deel van C dat tussen de snijpunten van C en ρ_ε ligt. Dit deel van C noemen we C'_ε. Laat ρ_ε^- de kromme zijn doorlopen van 'kleine' naar 'grote' hoek met de reële as; ρ_ε^+ verloopt dan in tegengestelde richting.

Laat zien dat $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'(\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$.

Oplossing:



Zij $\tilde{C} = C'_\varepsilon \cup \rho_\varepsilon^-$, dan weten we dat $z_0 \notin \mathring{\tilde{C}}$ en $z_0 \notin \tilde{C}$ en dus, aangezien $f(z)$ analytisch impliceert dat $\frac{f(z)}{z-z_0}$ analytisch is overal buiten z_0, geldt:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^-} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

De laatste gelijkheid geldt aangezien ρ_ε^+ en ρ_ε^- enkel verschillen in zin.
Hieruit concludeer ik dat:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'(\varepsilon)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

(b) We gaan verder met de integraal over het cirkelsegment. Gebruik $z(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, waarom kunnen we stellen dat $0 \le t \le \pi$ als $\varepsilon \to 0$? en:

> Laat zien dat $\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2}f(z_0)$.

Oplossing:

Aangezien C een gladde Jordankromme is, kan de kromme rond het punt z_0 benadert worden met de raaklijn in het punt z_0 als $\varepsilon \to 0$. Aangezien de raaklijn recht is, en deze door het punt $(z_0, f(z_0))$ zal gaan (het centrum van de cirkel), zal het de cirkel met straal ε in 2 gelijke delen splitsen. Aangezien ρ_ε^+ gelijk is aan de kromme tussen de snijpunten van ρ_ε en C, en C benadert kan worden door een rechte door het centrum van de cirkel. Is ρ_ε^+, voor ε klein, bijna de helft van de cirkel, en dus kan de parametrisatie $z(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, met $\beta \le t < \beta + \pi$ de kromme ρ_ε^+ omschrijven als $\varepsilon \to 0$ (met β de hoek tussen de traditionele reële as en de raaklijn). We kunnen echter de assen roteren met β, waardoor voorgaande parametrisatie klopt met $0 \le t < \pi$. Aangezien een aftelbare hoeveelheid punten verwaarloosbaar is (bij integratie), gebruiken we, voor de integraal, de parametrisatie $z(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, met $0 \le t \le \pi$ als $\varepsilon \to 0$.
Verder is dan:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int_0^\pi \frac{\varepsilon i e^{it}}{\varepsilon e^{it}}dt = \frac{1}{2}f(z_0)$$

Indien er een knik is in C met binnen hoek α, is C niet meer glad en kan vorige analogie niet gebruikt worden. De parametrisatie van ρ_ε^+ wordt dan: $z(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, met $0 \le t \le \alpha$, dus:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\alpha \frac{f(z_0)}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon i e^{it}dt = \frac{\alpha}{2\pi}f(z_0)$$

De rest van het bewijs als er een knik is, verloopt hetzelfde als bij de gladde kromme C.

(c) We gebruiken dat f analytisch is.

> Laat zien dat er een $M > 0$ bestaat waarvoor $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le M\varepsilon$.

Oplossing:

Het is duidelijk dat $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ continu is op elk punt van ρ_ε^+. Dit omdat zij $z^* \in \rho_\varepsilon^+$, $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ is analytisch op de omgeving $B(z^*, \varepsilon)$, want $|z^* - z_0| = \varepsilon$ en dus $z_0 \notin B(z^*, \varepsilon)$. Dus, volgens oefening 4, is $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ continu op ρ_ε^+. De lengte van ρ_ε^+ is altijd kleiner dan $2\pi\varepsilon$. Noteer nu $0 < \max_{z\in\rho_\varepsilon^+}\{\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|\} = M < \infty$ (de functie is continu op ρ_ε^+). Volgens het $ML-$lemma is dus:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}M2\varepsilon\pi = M\varepsilon$$

(d) Maak het bewijs van de stelling af, waarin we de hoofdwaarde van de integraal definieren als

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Oplossing:

Aangezien $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le M\varepsilon$, zal voor $\varepsilon \to 0$: $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \to \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz\right|$, dus:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \stackrel{(a)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \stackrel{(c)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon^+}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{2}f(z_0)$$

In conclusie:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2}f(z_0)$$