oef 82/83

wietse vaes

Welke van volgende functies zijn lineair en welke bilineair:

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + 5y$
  Niet bilineair: $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ geldt: $f_{y_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x, y_0)$,dus $f_{y_0}(\lambda x) = \lambda x + 5y_0 \neq \lambda(x+5y_0) = \lambda f_{y_0}(x)$. Dit is niet lineair dus is f niet bilineair.

  Wel lineair: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f(\lambda(x_1, x_2)+\mu(y_1, y_2)) = f(\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2) = \lambda x_1+\mu y_1+5(\lambda x_2+\mu y_2) = \lambda x_1+5\lambda x_2+\mu y_1+5\mu y_2 = \lambda f(x_1, x_2) + \mu f(y_1, y_2)$

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3xy$
  Wel bilineair: $\forall y_0, x_0 \in \mathbb{R}$ en $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f_{y_0}(\lambda x_1 + \mu x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, y_0) = 3(\lambda x_1 + \mu x_2)y_0 = \lambda 3x_1y_0 + \mu 3x_2y_0 = \lambda f(x_1, y_0) + \mu f(x_2, y_0) = \lambda f_{y_0}(x_1) + \mu f_{y_0}(x_2)$
  $f_{x_0}(\lambda y_1 + \mu y_2) = f(x_0, \lambda y_1 + \mu y_2) = 3x_0(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda 3x_0y_1 + \mu 3x_0y_2 = \lambda f(x_0, y_1) + \mu f(x_0, y_2) = \lambda f_{x_0}(y_1) + \mu f_{x_0}(y_2)$

  Niet lineair: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ en $\lambda\mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f(\lambda x + \mu y) = 3(\lambda x_1 + \mu y_1)(\lambda x_2 + \mu y_2) = 3\lambda^2 x_1x_2 + 3\lambda\mu x_1y_2 + 3\mu\lambda y_1\ x_2 + 3\mu^2 y_1y_2 \neq \lambda f(x) + \mu f(y)$

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - 6$
  Niet bilineair: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ en $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f_{x_0}(\lambda y_1 + \mu y_2) = x_0 - 6 = f_{x_0}(y_1) \neq \lambda f_{x_0}(y_1) + \mu f_{x_0}(y_2)$

  Niet lineair: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ en $\lambda\mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda x_1 + \mu y_1 - 6 = \lambda f(x) + \mu f(y) - 6 + 6\mu + 6\lambda \neq \lambda f(x) + \mu f(y)$

- $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 3x_1 + y_2$
  Niet bilineair: $\forall x_{10}, y_{10} \in \mathbb{R}$ en $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f_{(x_{10},y_{10})}(\lambda(x_1, x_2)+\mu(y_1, y_2)) = f_{(x_{10},y_{10})}(\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2) = f((x_{10}, y_{10}), (\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2)) = 3x_{10}+\lambda x_2+\mu y_2 = \lambda f((x_{10}, y_{10}), (x_1, x_2))+\mu f((x_{10}, y_{10}), (y_1, y_2))+3x_{10}-3\lambda x_{10}-3\mu x_{10} \neq \lambda f_{(x_{10},y_{10})}(x_1, x_2)+\mu f_{(x_{10},y_{10})}(y_1, y_2)$

  Wel lineair: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f(\lambda x+\lambda y) = f(\lambda((x_1, x_2), (x_3, x_4))+\mu((y_1, y_2), (y_3, y_4)) = f(\lambda(x_1, x_2)+\mu(y_1, y_2), \lambda(x_3, x_4)+\mu(y_3, y_4)) = f((\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2), (\lambda x_3+\mu y_3, \lambda x_4+\mu y_4)) = 3(\lambda x_1+\mu y_1)+\lambda x_4+\mu y_4 = \lambda(3x_1+x_4)+\mu(3y_1+y_4) = \lambda f((x_1, x_2), (x_3, x_4)) + \mu f((y_1, y_2), (y_3, y_4))$

- $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 3x_1y_2 - 4x_2x_1$
  Wel bilineair: $\forall x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20} \in \mathbb{R}$ en $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f_{(x_{10},y_{10})}(\lambda(x_1, x_2)+\mu(y_1, y_2)) = f_{(x_{10},y_{10})}(\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2) = f((x_{10}, y_{10}), (\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2)) = 3x_{10}(\lambda x_2 + \mu y_2) - 4(\lambda x_1 + \mu y_1)x_{10} = \lambda(3x_{10}x_2 - 4x_1x_{10}) + \mu(3x_{10}y_2 - 4y_1x_{10}) = \lambda f_{(x_{10},y_{10})}(x_1, x_2) + \mu f_{(x_{10},y_{10})}(y_1, y_2)$
  $f_{(x_{20},y_{20})}(\lambda(x_1, x_2)+\mu(y_1, y_2)) = f_{(x_{20},y_{20})}(\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2) = f((\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2), (x_{20}, y_{20})) = 3(\lambda x_1 + \mu y_1)y_{20} - 4x_{20}(\lambda x_1 + \mu y_1) = \lambda(3x_1y_{20} - 4x_{20}x_1) + \mu(3y_1y_{20} - 4x_{20}y_1) = \lambda f_{(x_{20},y_{20})}(x_1, x_2) + \mu f_{(x_{20},y_{20})}(y_1, y_2)$

  Niet lineair: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f(\lambda x + \lambda y) = f((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2), (\lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4)) = 3(\lambda x_1 + \mu y_1)(\lambda x_4 + \mu y_4) - 4(\lambda x_3 +$

$\mu y_3)(\lambda x_1 + \mu y_1) = 3\lambda^2 x_1 x_4 + 3\lambda\mu x_1 y_4 + 3\lambda\mu y_1 x_4 + 3\mu^2 y_1 y_4 - 4\lambda^2 x_3 x_1 - 4\lambda\mu x_3 y_1 - 4\lambda\mu y_3 x_1 - 4\mu^2 y_3 y_1 \neq \lambda f((x_1, x_2), (x_3, x_4)) + \mu f((y_1, y_2), (y_3, y_4))$

- $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 y_2, x_1 x_2, x_1 y_1)$
  Niet bilineair: $\forall x_{10}, y_{10} \in \mathbb{R}$ en $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f_{(x_{10}, y_{10})}(\lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2)) = f((x_{10}, y_{10}), (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2)) = (x_{10}(\lambda x_2 + \mu y_2), x_{10}(\lambda x_1 + \mu y_1), x_{10} y_{10}) \neq \lambda f_{(x_{10}, y_{10})}(x_1, x_2) + \mu f_{(x_{10}, y_{10})}(y_1, y_2)$

  Niet lineair: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:
  $f(\lambda x + \lambda y) = f((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2), (\lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4)) = ((\lambda x_1 + \mu y_1)(\lambda x_4 + \mu y_4), (\lambda x_1 + \mu y_1)(\lambda x_3 + \mu y_3), (\lambda x_1 + \mu y_1)(\lambda x_2 + \mu y_2)) = (\lambda^2 x_1 x_4 + \lambda\mu x_1 y_4 + \lambda\mu y_1 x_4 + \mu^2 y_1 y_4, \lambda^2 x_1 x_3 + \lambda\mu x_1 y_3 + \lambda\mu y_1 x_3 + \mu^2 y_1 y_3, \lambda^2 x_1 x_2 + \lambda\mu x_1 y_2 + \lambda\mu y_1 x_2 + \mu^2 y_1 y_2) \neq \lambda f((x_1, x_2), (x_3, x_4)) + \mu f((y_1, y_2), (y_3, y_4))$

Zij E, F en G genormeerde ruimten. Beschouw de afbeelding

$$B : L_c(E, F) \times L_c(F, G); (u, v) \mapsto v \circ u$$

Bewijs:

(1) B is continu en bilineair;
B is de samenstelling van continue functies v en $u \to$ B is een continue functie.
Zij $v_0 \in L_c(E, F)$, $u_0 \in L_c(F, G)$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (eerst $s, t \in L_c(F, G)$):
$B_{v_0}(\lambda s + \mu t) = B(v_0, \lambda s + \mu t) = v_0(\lambda s + \mu t) = \lambda v_0(s) + \mu v_0(t) = \lambda B_{v_0}(s) + \mu B_{v_0}(t)$ (want v_0 is lineair)
Stel nu $s, t \in L_c(E, F)$
$B_{u_0}(\lambda s + \mu t) = (\lambda s + \mu t)(u_0) = \lambda s(u_0) + \mu t(u_0) = \lambda B(s, u_0) + \mu B(t, u_0) = \lambda B_{u_0}(s) + \mu B_{u_0}(t)$ (want ts zijn continu, vandaar de mogelijkheid tot opsplitsing)
Hieruit concluderen we dat B continu en bilineair is.

(2) Als $E = F = G$, dan is $\|B\| = 1$
Omdat $E = F = G$, definieert $B(u, v)$ een inwendig product op $L_c(E, E)$ (pagina 67). Vervolgens is $\|B\| = \sup\limits_{u,v \neq 0} \frac{\|B(u,v)\|}{\|v\|\|u\|} = \sup\limits_{u,v \neq 0} \frac{|\langle u,v \rangle|}{\|v\|\|u\|} = \sup\limits_{\alpha} |\cos(\alpha)| = 1$ (α hoek tussen v en u voor elke $x \in F = E$ (domein van functies))