oef 50

Wietse Vaes

Zij Υ een indexverzameling, zij $\beta \in \Upsilon$ en noteer $\mathcal{A} = \Upsilon \backslash \{\beta\}$. Toon aan dat $(\Pi_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha) \times X_\beta$ homeomorf is met $\Pi_{\upsilon\in\Upsilon}X_\upsilon$.

We moeten een $f : (\Pi_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha) \times X_\beta \to \Pi_{\upsilon\in\Upsilon}X_\upsilon : ((x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, x_\beta) \mapsto (x_\upsilon)_{\upsilon\in\Upsilon}$ definiëren opdat f en zijn inverse continu zijn en f een bijectie is.
We stellen dat deze indexverzameling geordend is op volgende manier: $\Upsilon = \{\upsilon_1, \upsilon_2 ... \upsilon_j ...\}$, met $\upsilon_j = \beta$ en $j \in \mathbb{N}$ en $\forall i \neq j : \upsilon_i = \alpha_i$. We gebruiken nu de projectie functie $P_\upsilon : (\Pi_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha) \times X_\beta \to X_\upsilon : ((x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, x_\beta) \mapsto x_\upsilon$, we weten al dat deze continu is. Ook de inverse functie is continu, het is echter niet een bijectie.

Nu, stel we noteren $x = ((x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, x_\beta)$ en definiëren $f : (\Pi_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha)\times X_\beta \to \Pi_{\upsilon\in\Upsilon}X_\upsilon : x \mapsto (P_{\upsilon_1}(x), P_{\upsilon_2}(x)...P_{\upsilon_j}(x)...)$ oftewel: $f(x) = (P_\upsilon(x))_{\upsilon\in\Upsilon}$. De functie is goed gedefinieerd aangezien uit de definitie van de projectie functie $P_\upsilon(x) \in X_\upsilon$ endus $(P_\upsilon(x))_{\upsilon\in\Upsilon} \in \Pi_{\upsilon\in\Upsilon}X_\upsilon$ voor alle $x \in (\Pi_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha) \times X_\beta$.

Nu is elke component van f continue, dus is f zelf continu. Hetzelfde geldt voor f^{-1}. Ook is f een bijectie. Het is namelijk injectief: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ aangezien alle componenten van x en y in de functie f worden gebruikt, dus moet elke component van x en y hetzelfde zijn. Ook is het surjectief aangezien het domein en codomein enkel van rangschikking verschillen en we dus met functie f enkel de componenten anders schikken, dus $f((\Pi_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha) \times X_\beta) = \Pi_{\upsilon\in\Upsilon}X_\upsilon$.

We hebben dus een homeomorfische functie tussen beide ruimtes gevonden, dus de twee ruimtes zijn homeomorf.