Extra opdrachten Analyse

Wietse Vaes

8 april 2023

1. Een deel $A \subset (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ is begrensd $\iff \exists m, M \in \mathbb{R} : m < a < M : \forall a \in A$

$$\begin{aligned} A \subset \mathbb{R} \text{ is begrensd} &\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}, \exists r > 0 \text{ zodat } A \subset B(b,r) \qquad \text{Def. 1.4.1} \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}, \exists r > 0 \text{ zodat } \forall a \in A : a \in]b-r, b+r[\\ &\Leftrightarrow \exists m (= b-r), M(= b+r) \in \mathbb{R} \text{ zodat } \forall a \in A : m < a < M \end{aligned}$$

2. Indien $V = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, dan geldt een rij $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ is begrensd in $\mathbb{R} \iff \exists M > 0 : |a_m| < M, \forall m \in \mathbb{N}$
Uit Def. 1.4.2 (zij we een rij beschouwen als een functie $a : \mathbb{N} \to V$) volgt dat:

$$\begin{aligned} \text{een rij}(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{R} \text{ is begrensd} &\Leftrightarrow a(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R} \text{ is begrensd} \\ &\Leftrightarrow \exists b \in a(\mathbb{N}), \exists r > 0 : a(\mathbb{N}) \subset B(b,r) =]b-r, b+r[\\ &\Leftrightarrow \exists M = \max\{b+r, b-r\} > 0 : A(\mathbb{N}) \subset]b-r, b+r[\subset]-M, M[\\ &\Leftrightarrow |a_m| < M, \quad \forall a_m \in a(\mathbb{N}) \end{aligned}$$

3. Vindt een voorbeeld zodat $d(B(a,r)) < 2r$.
Zij we in de metrische ruimte $(\mathbb{N}, d)$ met d de discrete metriek zijn. Dan: $\forall a \in \mathbb{N} : \exists r > 0 : \max_{a\in A}(d(B(a,r))) = 1$ en aangezien $a \in B(a,r)$ moet gelden en $d(a,a) = 1$ moet $r > 1$. Dus: $d(B(a,r)) \leq 1 < r < 2r$

4. Zij we in $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, $r > 0$ en $a \in \mathbb{R}^n \implies d(B(a,r)) = d(\bar{B}(a,r)) = 2r$
Zij $a \in \mathbb{R}^n$ er is reeds bewezen dat $d(B(a,r)) \leq 2r$ en $d(\bar{B}(a,r)) \leq 2r$. We moeten nu dus bewijzen dat $d(B(a,r)) \geq 2r$ en $d(\bar{B}(a,r)) \geq 2r$.
Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $a = 0$. We mogen dit, want: zij $x \in B(0,r)$, $z = (x+a) \in B(a,r)$. Omdat $d(B(0,r)) = \sup\{d(x,y)|x,y \in B(0,r)$, zou $d(B(0,r)) \geq 2r$ indien we een rij $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset B(0,r)$ en $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset B(0,r)$ vinden zodat $lim_{m\to\infty} x_m = x$, $lim_{m\to\infty} y_m = y$ en $d(x,y) = \|x-y\| = 2r$. Definieer nu de rij $r_m, 1 = r\frac{m}{m+1}$ en $r_m, i = 0 \forall i \in \{2, \ldots n\}$. Dan is $(r_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset B(0,r)$ en $\|lim_{m\to\infty} r_m\| = r$. Merk op dat $(-r_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Nu weten we dat:

$$\lim_{m\to\infty} \|r_m - (-r_m)\| = \lim_{m\to\infty} |2|\|r_m\| = 2\|\lim_{m\to\infty} r_m\| = 2r$$

De limiet mag naar binnen gebracht worden omdat de functie $\|\cdot\|$ continu is.
Hierdoor weten we dus dat $d(B(a,r)) \geq 2r$ is. Dus $d(B(a,r)) = 2r$

5. Zij (V,d) een MR en (A,$\tilde{d}$) een deelruimte hiervan. In het bewijs van: $Y \subset A$ is gesloten in $A \iff \exists Z \subset V : Y = Z \cap A$. Bewijs gedetaileerder: $\exists W \subset V, W$ is open in V, zodat $A \backslash Y = W \cap A \iff \exists Z \subset V,\ Z$ is gesloten in V, zodat $Y = Z \cap A$

   - Stel er bestaat een $W \subset V$ open, zodat $A\backslash Y = W \cap A$. Definieer nu $Z = V\backslash W$. Z is dus gesloten in V want W is open in V. Bovendien: $Y = A\backslash(A\backslash Y) = A\backslash(W\cap A) = (A\backslash W)\cup(A\backslash A) = (V\backslash W)\cap A = Z\cap A$
   - Stel er bestaat een $Z \subset V$ gesloten, zodat $Y = Z \cap A$. Definieer nu $W = V\backslash Z$. W is dus open in V want Z is gesloten in V. Bovendien: $A\backslash Y = A\backslash(Z\cap A) = (A\backslash Z)\cup(A\backslash A) = A\backslash Z = (V\backslash z)\cap A = W\cap A$

6.
   - $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$
   Zij $x \in \bar{A}$: $x \in V$ en $\forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Dus zij $x \in A : \exists r > 0 : B(x,r) \subset A \implies x \in \mathring{A}$
   of, zij $x \in V\backslash A : \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ en $B(x,r) \cap (V\backslash A) \neq \emptyset \implies \partial A$. Dus $\bar{A} \subset \mathring{A} \cup \partial A$
   Zij nu $x \in \mathring{A} \cup \partial A$, dan Volgt dat $x \in V : \forall r > 0 : (x,r) \cap A \neq \emptyset$ en $B(x,r) \cap (V\backslash A) \neq \emptyset$ of $x \in A : \exists r > 0 : B(x,r) \subset A$, dus $x \in \bar{A}$.
   Dus $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

- $\bar{A} = A \cup \partial A$
  Zij $x \in \bar{A}$: $x \in V$ en $\forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Dus oftewel is $x \in V \backslash A : \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ en $B(x,r) \cap (V \backslash A) \neq \emptyset \implies \partial A$ of $x \in A$. Dus $\bar{A} \subset A \cup \partial A$
  anderzijds, zij $x \in A \cup \partial A$: dan volgt hier meteen uit dat $x \in \bar{A}$
- $\mathring{A} = \bar{A} \backslash \partial A$
  Omdat $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$ want zij $x \in \mathring{A}$ dan $\exists r : B(x,r) \cap V \backslash A = \emptyset$ en omdat $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ is $\mathring{A} = \bar{A} \backslash \partial A$
- $\mathring{A} = A \backslash \partial A$
  Omdat $\bar{A} = A \cup \partial A$ en $\mathring{A} = \bar{A} \backslash \partial A$ is $\mathring{A} = \bar{A} \backslash \partial A = (A \cup \partial A) \backslash \partial A = A \backslash \partial A$

7. Zij (V,d) een MR, zij $A \subset V$, zij $a \in A'$ en zij $f, g : A \to \mathbb{R}$ twee afbeeldingen. Veronderstel dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ en dat $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$. Dan geldt:

- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$
  Er geldt:
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \text{ zodat } \forall x \in A \backslash \{a\}, d(x,a) < \delta_1 \implies |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \text{ zodat } \forall x \in A \backslash \{a\}, d(x,a) < \delta_2 \implies |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  We definieren nu $' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ dan geldt $\forall x \in A \backslash \{a\} : d(x,a) < \delta$:
  $$|(f(x) + g(x) - (b + c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
  Dus: $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$
- $\lim\limits_{x \to a} (\alpha f(x)) = \alpha b, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
  Zij $\alpha = 0$ dan: $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$ zodat $\forall x \in A \backslash \{a\}, d(x,a) < \delta \implies |0 - 0| < \varepsilon$.
  Dus, uiteraard, $\lim_{x \to a}(0) = 0$.
  Zij $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Er geldt:
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ zodat } \forall x \in A \backslash \{a\} : d(x,a) > \delta \implies |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$
  Dus zij $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ zodat $\forall x \in A \backslash \{a\}, d(x,a) < \delta$, dan is:
  $$|\alpha f(x) - \alpha b| = |\alpha||f(x) - b| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$
  Dus $\lim\limits_{x \to a} (\alpha f(x)) = \alpha b$
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$
  Zij $M = \sup |f(x)|$. Er geldt:
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \text{ zodat } \forall x \in A \backslash \{a\}, d(x,a) < \delta_1 \implies |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|c| + M}$$
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \text{ zodat } \forall x \in A \backslash \{a\}, d(x,a) < \delta_2 \implies |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{|c| + M}$$
  Definieer nu $' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, als $\forall x \in A \backslash \{a\} : d(a,x) < \delta$:
  $$|f(x)g(x) - bc| = |f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc| \leq |f(x)||g(x) - c| + |c||f(x) - b| < M \frac{\varepsilon}{|c| + M} + |c| \frac{\varepsilon}{|c| + M} = \varepsilon$$
  Dus $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$
- zij $c \neq 0$ dan is $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{b}{c}$
  We tonen aan dat, zij $c \neq 0$, $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{c}$. Er geldt:
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 \text{ zodat } \forall x \in A \backslash \{a\} : d(x,a) < \delta' \implies |g(x) - c| < \varepsilon$$

Kies nu $\varepsilon = \frac{2}{|c|}$. Dan geldt $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|c|}$ indien $x \in A\backslash\{a\}$ en $d(x,a) < \delta'$. Dit omdat:
Zij $c > 0 : \frac{-|c|}{2} < g(x) - |c| \implies 0 < \frac{c}{2} < g(x) \implies \frac{1}{|g(x)|} = \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{|c|}$.
Zij $c < 0(|c| = -c) : g(x) - c = g(x) + |c| < \frac{|c|}{2} \implies g(x) < \frac{|c|}{2} - |c| < 0 \implies -|g(x)| = g(x) < -\frac{|c|}{2} \implies |g(x)| > \frac{|c|}{2} \implies \frac{1}{|g(x)|} > \frac{2}{|c|}$.
Merk op $\exists\delta > 0$ zodat $d(x,a) < \delta \implies |g(x) - c| < \varepsilon\frac{|c|^2}{2}$. Dus:
$\forall x \in A\backslash\{a\}$ zodat $d(x,a) < \min\{\delta, \delta'\}$:

$$|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c}| = \frac{|g(x) - c|}{|cg(x)|} < \varepsilon\frac{|c|}{2}\frac{1}{|g(x)|} < \varepsilon$$

Hieruit volgt meteen dan dat $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = \frac{b}{c}$

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$
  Wederom geldt er:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ zodat } \forall x \in A\backslash\{a\}, d(x,a) < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

  Nu geldt er:
  $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ zodat $\forall x \in A\backslash\{a\} : d(x,a) < \delta$:

$$||f(x)| - |b|| = ||f(x) - b + b| - |b|| \leq ||f(x) - b| + |b| - |b|| = |f(x) - b| < \varepsilon$$

  Dus: $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$

8. - de limiet van een convergente rij in (V,d) is uniek.
  Stel de limiet van een convergente rij in (V,d) is niet uniek. Dus: $\lim_{m\to\infty} a_m = a$ en $\lim_{m\to\infty} a_m = b$ met $a \neq b$. Zij nu $\varepsilon = d(a,b) > 0$, dan:

$$\forall\epsilon > 0, \exists m_1 \in \mathbb{N} \text{ zodat } \forall m > m_1 : d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\epsilon > 0, \exists m_2 \in \mathbb{N} \text{ zodat } \forall m > m_2 : d(a_m, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Zij $m_0 = \max\{a_1, a_2\}$, dan geldt $\forall m > m_0$:

$$\varepsilon = d(a,b) \leq d(a, a_m) + d(a_m, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

  Dus: $\varepsilon < \varepsilon$. Dit is een tegenspraak dus is de limiet van een convergente rij in (V,d) uniek.

- een convergente rij in (V,d) is begrensd.
  Stel $\varepsilon = 1$, zij $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ een convergente rij (naar a), dan: $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall m \geq m_0 : d(a_m, a) < 1$
  Dan geldt: $\forall m \geq m_0 : a_m \in B(a,1)$. Merk op: er zijn eindig veel punten die verder dan 1 van a ligt. We definieren nu een $M = \max\{d(a_0,a), ..., d(a_{m_0-1}, a), 1\}$ dan:$(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset B(a,M) \implies (a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ is begrensd

- elke deelrij van een convergente rij in (V,d) is convergent met dezelfde limiet.
  Zij $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ een convergente rij in (V,d) met limiet a en $(a_{\rho(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ een willekeurige deelrij.
  Kies $m_0 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall m > m_0 : d(a_m, a) < \varepsilon$. Omdat de functie $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt monotoon stijgende is, geldt: $\forall m \in \mathbb{N} : \rho(m) \geq m$. dus:

$$\rho(m) \geq m \implies \rho(m) \geq m_0 \implies d(a_{\rho(m)}, b) < \varepsilon \implies lim_{m\to\infty} a_{\rho(m)} = b$$

9. **Stelling:** Er geldt: $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} = \left(a_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(n)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ is een Cauchy rij in $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow (a_m^{(k)})_{m\in\mathbb{N}}$ is een Cauchy rij in $\mathbb{R}$, $\forall k \in \{1, \ldots n\}$.
Bewijs: We weten dat: zij $x \in \mathbb{R}^n$ $|x_k| \leq \|x\|_m \leq \|x\| \leq \|x\|_\Sigma \leq n\|x\|_m$

$\Rightarrow$: Zij$(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ een cauchy rij, dus:

$\forall\varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall m \geq m_0, \forall p \in \mathbb{N} : \|a_{m+p} - a_m\| < \varepsilon$ of $\|a_{m+p} - a_m\|_\Sigma < \varepsilon$ of $\|a_{m+p} - a_m\|_m < \varepsilon$

Dus:

$$|(a_{m+p} - a_m)^{(k)}| = |a_{m+p}^{(k)} - a_m^{(k)}| \leq \|a_{m+p} - a_m\| < \varepsilon, \quad \forall k \text{ Dit geldt ook voor de andere normen}$$

Dus $(a_m^{(k)})_{m\in\mathbb{N}}$ is een cauchy reeks in $\mathbb{R}$ $\forall k$

$\Leftarrow$: Stel $(a_m^{(k)})_{m\in\mathbb{N}}$ is een cauchy reeks in $\mathbb{R}$ $\forall k$. Dus:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists m_k \in \mathbb{N} \text{ zodat } \forall m \geq m_k, \forall p \in \mathbb{N} : |a_{m+p}^{(k)} - a_m^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{n}$$

Definieer $m_0 = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$, dan geldt $\forall m \geq m_0 :$

$$\|a_{m+p}^{(k)} - a_m^{(k)}\|_m < \frac{\varepsilon}{n}$$

Dus:

$$\|a_{m+p} - a_m\|_m \leq \|a_{m+p} - a_m\| \leq \|a_{m+p} - a_m\|_\Sigma \leq n\|a_{m+p} - a_m\|_m < \varepsilon$$

Dus $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ is een Cauchy rij in $\mathbb{R}^n$

10. **Stelling:** $C \subset \mathbb{R}$ is gesloten en begrensd $\Longrightarrow$ C is compact.
Bewijs: Zij $C \subset \mathbb{R}$ gesloten en begrensd en $(a_m)_{m\mathbb{N}}$ een willekeurige rij in C. Omdat C begrensd is en $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C$ is de rij ook begrensd, dus er bestaat, volgens de stelling van Bolzano-Weierstrass, een convergente deelrij $(a_{\rho(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subset C$ van $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Dus $\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{m\to\infty} a_{p(m)} = a$. Omdat C gesloten is, is de limiet van elke convergente rij in C een element van C. Dus $a \in C$. Dus elke rij in C heeft een convergente deelrij in C, dus C is compact.