

Analyse numérique pour les EDP

Projet 5: Coup de cymbale

Wietse Vaes

8 avril 2023

On suppose

$$\Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \alpha\}$$

L'objet est fixé sur la partie γ de son bord (angle rentrant), le reste du domaine est libre de vibrer. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On se donne une fonction décroissante $\phi \in C^2([0, 1])$ qui vérifie $\phi(0) = 1$ et $\phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0$. On pose alors en coordonnées polaires $u_0(r, \theta) = \phi(r)r^{\pi/\alpha} \sin(\frac{\pi}{\alpha}\theta)$.

1. Montrer que la fonction u_0 est solution du problème avec $f = -\Delta u_0$.

Solution :

On sait que $\gamma = \{(r, 0) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{(r, \alpha) : 0 \leq r \leq 1\}$ et parce que $\sin(\frac{\pi}{\alpha}0) = 0 = \sin(\frac{\pi}{\alpha}\alpha)$, $u|_\gamma = 0$. ($\phi(0) = 1 \Rightarrow u_0(0, \theta) = 0$). On sait également que $u_0(1, \theta) = 0$ parce que $\phi(1) = 0$, mais c'est moins important.

On sait aussi que $\Gamma = \{(1, \theta) : 0 < \theta < \alpha\}$.

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = \phi'(r)r^{\pi/\alpha} \sin(\frac{\pi}{\alpha}\theta) + \frac{\pi}{\alpha}\phi(r)r^{\pi/\alpha-1} \sin(\frac{\pi}{\alpha}\theta)$$

On sait que $\frac{\partial u_0}{\partial n}|_\Gamma = \frac{\partial u_0}{\partial r}|_\Gamma$. Donc c'est clair que, parce que $\phi'(1) = \phi(1) = 0$, $\frac{\partial u_0}{\partial r}(1, \theta(x, y)) = 0$. Donc $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ sur Γ .

Donc, si $f = -\Delta u_0$, la fonction u_0 est solution du problème.

2. Ecrire la formulation variationnelle du problème.

Solution :

Soit $v \in V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_\gamma = 0\}$

$$-\int_\Omega \Delta u v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} v (=0) - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} (=0) v = \int_\Omega \nabla u \nabla v, \quad \forall v \in V$$

Donc, la formulation variationnelle du problème est :

Trouvez $u \in V$ telle que :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in V$$

3. Programmer une approximation numérique du problème par la méthode des éléments finis P_1 . On prendra $\phi = 1_{\{r < 0.5\}} + 1_{\{r \geq 0.5\}} \times 0.5(1 + \cos(2\pi(r - 0.5)))$.

Solution :

On définit $V_h := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}), v_h|_{K_i} \in P_1, \text{ avec } K_i \text{ un élément triangulaire } \forall i \in \{1, \dots, n_\tau\} \text{ tq } v_h|_\gamma = 0\}$. Donc, on a :

Pb discrete : Trouvez $u \in V_h$ telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \\ \forall v_h \in V_h$$

On sait que $\Delta u_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}$, donc :

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= -\frac{\phi(r)r^{\pi/\alpha}}{r^2} \frac{\pi^2}{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\phi'(r)r^{\pi/\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + \frac{\pi}{\alpha} \phi(r)r^{\pi/\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) \right) \\ &\quad + \left(\phi''(r)r^{\pi/\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + \frac{2\pi}{\alpha} \phi'(r)r^{\pi/\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + \left(\frac{\pi^2}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha}\right) \phi(r)r^{\pi/\alpha-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) \right) \\ &= \left[\left(-\frac{\pi^2}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi^2}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha} \right) \phi(r)r^{\pi/\alpha-2} + \left(1 + 2\frac{\pi}{\alpha} \right) \phi'(r)r^{\pi/\alpha-1} + \phi''(r)r^{\pi/\alpha} \right] \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) \\ &= \left[\left(1 + 2\frac{\pi}{\alpha} \right) \phi'(r)r^{\pi/\alpha-1} + \phi''(r)r^{\pi/\alpha} \right] \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) \end{aligned}$$

$$\phi'(r) = \begin{cases} 0 & 0.5 > r \\ -\pi \sin(2\pi(r-0.5)) & 0.5 \leq r \end{cases}$$

$$\phi''(r) = \begin{cases} 0 & 0.5 > r \\ -2\pi^2 \cos(2\pi(r-0.5)) & 0.5 \leq r \end{cases}$$

Donc, on a :

$$f(x, y) = \begin{cases} \left[\left(1 + 2\frac{\pi}{\alpha} \right) \pi r^{\pi/\alpha-1} \sin(2\pi(r-0.5)) + 2\pi^2 r^{\pi/\alpha} \cos(2\pi(r-0.5)) \right] \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) & 0.5 \leq r(x, y) \\ 0 & 0.5 > r(x, y) \end{cases}$$

avec $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta(x, y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

Si on veut calculer $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ avec n la quantité de sommets qui ne sont pas sur γ . on ne sait pas à quoi ressemble la maillage en termes concrets et pareil pour les mailles. Mais on sait que $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_\tau} \bar{K}_i$ avec n_τ la quantité de mailles. Pour cette raison, je vais calculer $A^{K_i} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ qui est défini par $\tilde{a}_i(\varphi_k, \varphi_j) = \int_{K_i} \nabla \varphi_k \nabla \varphi_j$. On sait que $A = \sum_{i=1}^{n_\tau} A^{K_i}$. On a pour tout $\varphi_l \in V_h$, $\forall l$ (donc si $\varphi_l \in V_h$, $\varphi_l(\mathbf{x}) = \varphi_l(x, y) = \alpha_l + \beta_l x + \gamma_l y$) :

$$\tilde{a}_i(\varphi_k, \varphi_j) = \begin{cases} (\beta_k \beta_j + \gamma_k \gamma_j) |K_i| & \mathbf{x}_k \text{ et } \mathbf{x}_j \text{ sont sommets de } K_i \\ 0 & \mathbf{x}_k \text{ ou } \mathbf{x}_j \text{ ne sont pas sommets de } K_i \end{cases}$$

on peut trouver $|K_i| = \int_{K_i} 1$ (avec les sommets (x_{i1}, y_{i1}) , (x_{i2}, y_{i2}) et (x_{i3}, y_{i3})) par :

$$\int_{K_i} = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_{i1} & y_{i1} \\ 1 & x_{i2} & y_{i2} \\ 1 & x_{i3} & y_{i3} \end{pmatrix} \right| / 2$$

et on peut trouver toutes les α , β et γ pour K_i par

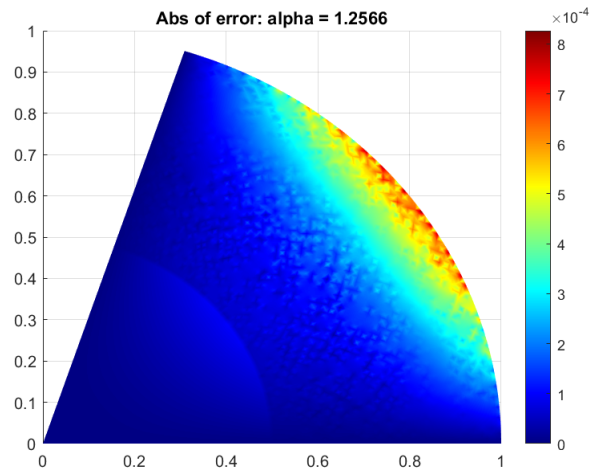
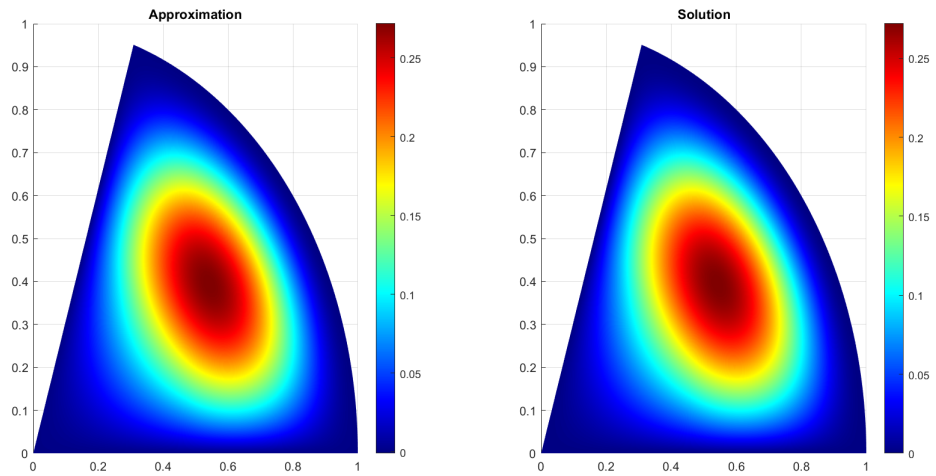
$$\begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & y_{i1} \\ 1 & x_{i2} & y_{i2} \\ 1 & x_{i3} & y_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \beta_{i3} \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \gamma_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \beta_{i3} \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \gamma_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & y_{i1} \\ 1 & x_{i2} & y_{i2} \\ 1 & x_{i3} & y_{i3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a aussi pour $\tilde{l}_i(\varphi_j) = \int_{K_i} f \varphi_j$:

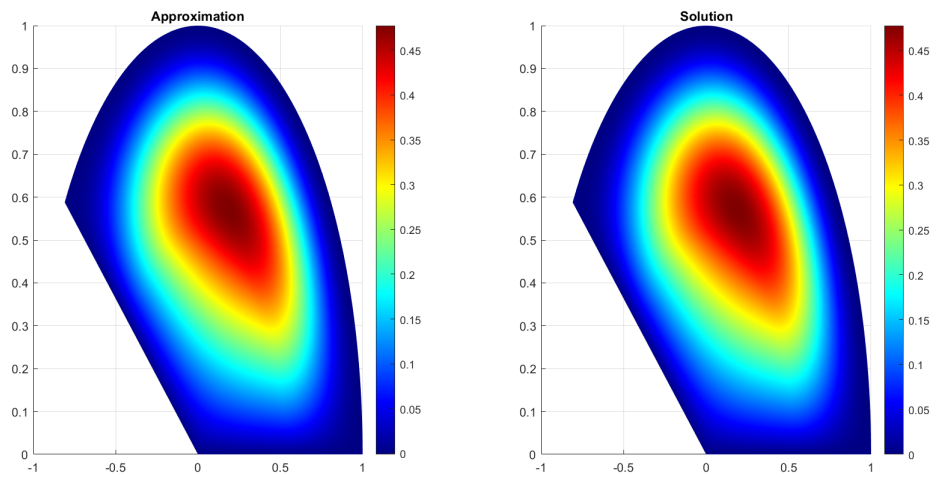
$$\tilde{l}_i(\varphi_j) = \begin{cases} \frac{f(x_j)}{3} |K_i| & \mathbf{x}_j \text{ est un sommet de } K_i \\ 0 & \mathbf{x}_j \text{ n'est pas un sommet de } K_i \end{cases}$$

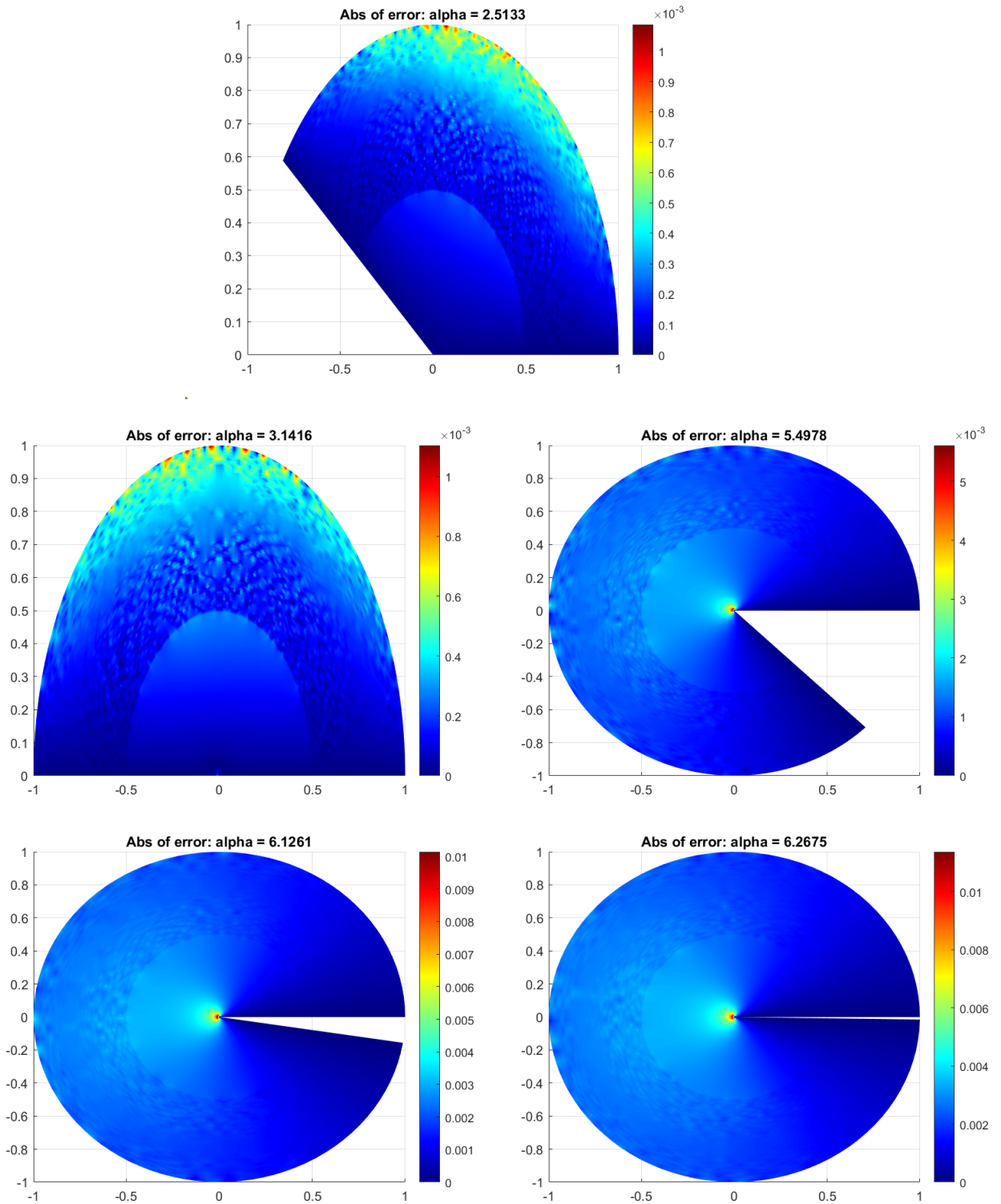
Si je le programme pour $\alpha \in \{\frac{\pi}{2.5}, \frac{2\pi}{2.5}, \pi, \frac{3.5\pi}{2}, \frac{3.9\pi}{2}, \frac{3.99\pi}{2}\}$, j'obtiens

alpha = 1.2566



alpha = 2.5133





On voit que que plus α est grand, plus l'erreur est mauvaise autour de $(0, 0)$. Si α est petit, l'erreur est prévalent autour Γ , ce qui est normal.

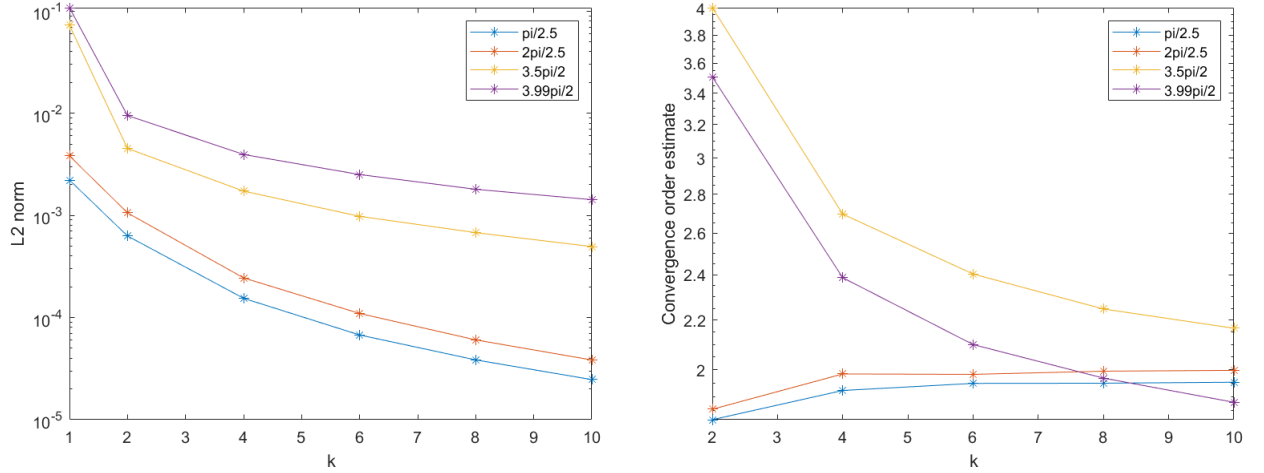
4. Calculer l'erreur $\|u_0 - u_h\|_{L^2}$ et évaluer l'ordre de convergence (on pourra faire un graphe de convergence sous Matlab). Comment cette vitesse de convergence dépend elle de l'angle α pour $0 < \alpha < 2\pi$? Essayer 3 ou 4 valeurs pour α .

Solution :

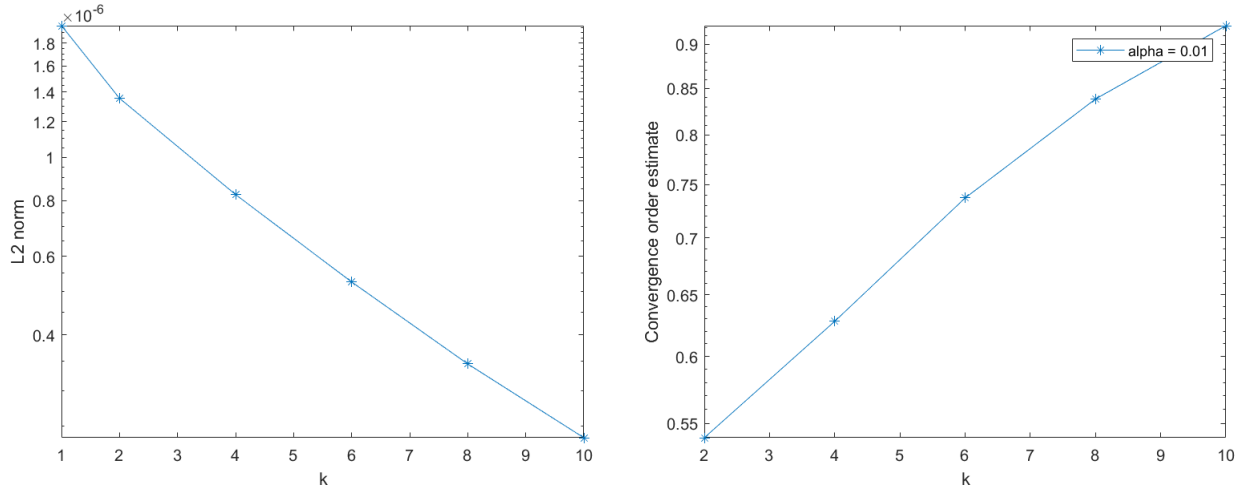
Si on a h et $\tilde{h} = \frac{h}{k}$ avec $k \in \mathbb{R}$ pour V_h et $V_{\tilde{h}}$. On sait que $\|u_0 - u_h\|_{L^2} = Ch^\beta$ et $\|u_0 - u_{\tilde{h}}\|_{L^2} = C\tilde{h}^\beta =$

$C \left(\frac{h}{k} \right)^\beta$ avec β l'ordre de convergence. Donc on a que l'ordre de convergence est donné par $\frac{\ln \left(\frac{\|u_0 - u_h\|_{L^2}}{\|u_0 - u_{\tilde{h}}\|_{L^2}} \right)}{\ln(k)}$.

Je calcule $\|u_0 - u_h\|_{L^2} = \|\varepsilon\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} \varepsilon^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(\sum_{i=1}^{n_{\tau}} \frac{|K_i| \sum_{j=1}^3 \varepsilon(\mathbf{x}_{ij})^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$. Je vois que les erreurs et l'ordre de convergence sont :



l'ordre de convergence est exactement pour $\alpha = \frac{\pi}{2.5} : 1.9533$, $\frac{2\pi}{2.5} : 1.9833$, $\frac{3.5\pi}{2} : 2.1662$ & $\frac{3.99\pi}{2} : 1.8795$. Pour $\alpha = 0.01$ on a :



Si l'angle α est plus grand, la vitesse de convergence est plus lente. Ceci est plausible puisque notre Ω devient plus grand et donc la maillage sera moins raffiné avec un Ω plus grand. Il est possible que l'erreur soit plus grande à l'origine en raison de la forme des mailles. Ici, l'aire est presque nulle et les coefficients de φ sont grands.

Si l'angle α est plus petit, l'ordre de convergence est petit. L'erreur est petite, mais relativement parlant, elle est grande. Ici aussi, l'incident des mailles se produit (aire est toujours presque nulle, coefficients sont grands).

Quand on a un bord régulier, on sait par Lemme de Cea et Théorème d'interpolation (I_{h1}) (avec α la coefficient de coercivité ici) que :

$$\|u_0 - u_h\|_{L^2} \stackrel{L. \text{ Cea}}{\leq} \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u_0 - v_h\|_{L^2} \stackrel{I_{h1} \in V_h}{\leq} \frac{C}{\alpha} \|u_0 - I_{h1}(u_0)\|_{L^2} \stackrel{T. \text{ interpolation}}{\leq} \tilde{C} h^2 |u_0|_{2,\Omega}$$

Donc on a un l'ordre 2 comme l'ordre de convergence théorique (pour $\|\cdot\|_{L^2}$).