Analyse numérique 3 : Éléments finis HAX804X

Vanessa LLERAS

vanessa.lleras@umontpellier.fr

Bureau 311 bâtiment 9

Chapitre 1
Quelques rappels

1. Un premier exemple
2. Un peu d'analyse fonctionnelle
   — Rappels sur les distributions
   — L'espace L^2
   — Les espaces H^1 et H_0^1
   — Les espaces H^2 et H_0^2
3. Formules de Green
4. Théorème de Lax-Milgram
   — Théorème
   — Exemple pour des problèmes d'ordre 2
   — Exemple pour des problèmes d'ordre 4

Introduction

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles :

— méthodes de différences finies,
— méthodes de volumes finis,
— méthodes spectrales,
— méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qui est fort utile, même sur le plan très pratique. Cette base mathématique permet de prévoir jusqu'à un certain point la précision de notre approximation et même d'améliorer cette précision, via les méthodes adaptatives.

Un peu d'histoire

- Courant a introduit le concept de formulation variationnelle, qui est à la base de toute méthode d'éléments finis.
- Pour la méthode de Galerkin, on part d'un problème posé dans un espace de dimension infinie. On approche ensuite la solution du problème initial en cherchant une solution dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. Ces problèmes approchés sont en général beaucoup plus facile à résoudre. C'est Courant qui eut l'idée d'introduire des fonctions à support local comme fonctions de base.
- La théorie derrière la méthode des éléments finis a pris une forme plus rigoureuse avec les travaux de Strang et Fix
- les premières applications véritables de la méthode des éléments finis apparaissent en 1956 en mécanique des structures : un groupe de chercheurs (Turner, Clough, Martin et Topp) l'utilisent pour calculer la voilure d'un avion.

Un premier exemple

On considère le problème, avec f(x) fonction connue :

$$-u''(x) = f(x)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Pour calculer la solution approchée par différences finies, on subdivise l'intervalle [0,1] en N sous intervalles de longueur h.
On obtient N+1 points : $x_0 = 0, x_N = 1, x_i = i/N$. Si on note u_i l'approximation de $u(x_i)$ au point x_i, on obtient en discrétisant l'équation différentielle (ici à l'ordre 2) :

$$u_0 = 0, u_N = 0$$

$$-\quad \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq N-1$$

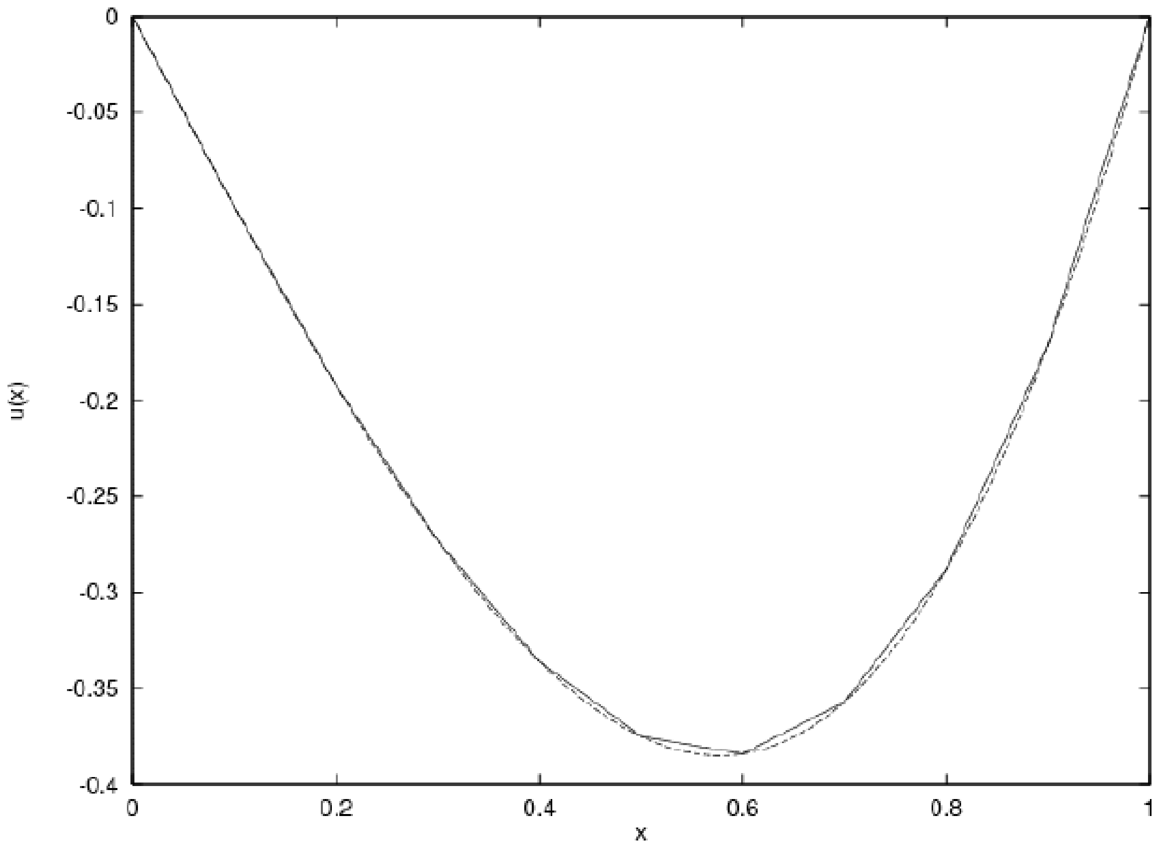
Un premier exemple

On obtient alors le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & ... & ... & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ ... \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système linéaire tridiagonal est simple.

Un premier exemple



On peut voir que la solution approchée est une bonne approximation de la solution analytique.

Un premier exemple

Pour la méthode des éléments finis,

- en multipliant par une fonction test w(x) :

$$-\int_0^1 u''(x)w(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

- en intégrant par parties :

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx - (u'(1)w(1) - u'(0)w(0)) = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

- en supposant $w(0) = w(1) = 0$:

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

Remarque : La formulation variationnelle ne fait apparaître que la dérivée d'ordre 1 et demande donc moins de régularité que l'équation différentielle qui est d'ordre 2. D'où le nom de formulation faible, et aussi formulation forte pour l'équation différentielle.

Un premier exemple

Dans le sens inverse,

— en intégrant par parties :

$$-\int_0^1 u''(x)w(x)dx + (u'(1)w(1) - u'(0)w(0)) = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

$$\int_0^1 (-u''(x) - f(x))w(x)dx = 0$$

pour toute fonction w(x) qui s'annule en 0 et 1.

— en posant $w(x) = x(1-x)(-u''(x) - f(x))$ (s'annule bien en 0 et 1) :

$$\int_0^1 x(1-x)(-u''(x) - f(x))^2 dx = 0$$

— comme l'intégrale d'une fonction positive est nulle, on a :

$$-u''(x) = f(x) \qquad \text{dans }]0,1[$$

Remarque : Il y a équivalence entre formulation variationnelle et équation différentielle.

Un premier exemple

On répondra par la suite aux questions suivantes :

- Comment déterminer les fonctions test admissibles ?
- Sous quelles conditions la formulation variationnelle possède t'elle une solution unique ?
- Sous quelles conditions la formulation faible est-elle équivalente à la formulation forte ?
- Comment peut-on discrétiser cette formulation variationnelle pour en tirer une solution numérique ?
- Cette solution numérique converge t'elle vers la solution analytique ? A quelle vitesse ?

Un peu d'analyse fonctionnelle

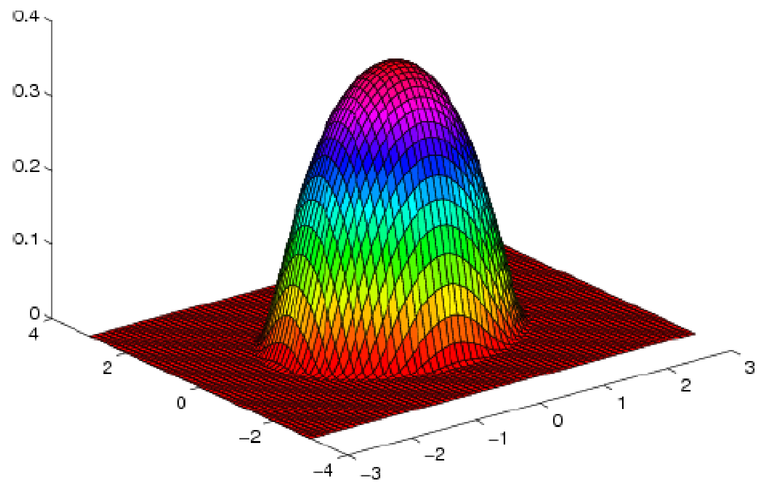
Ω désigne un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière Γ est régulière.

Définition :

On appelle $D(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω et dont le support est compact et inclus dans Ω.

Exemple : La fonction

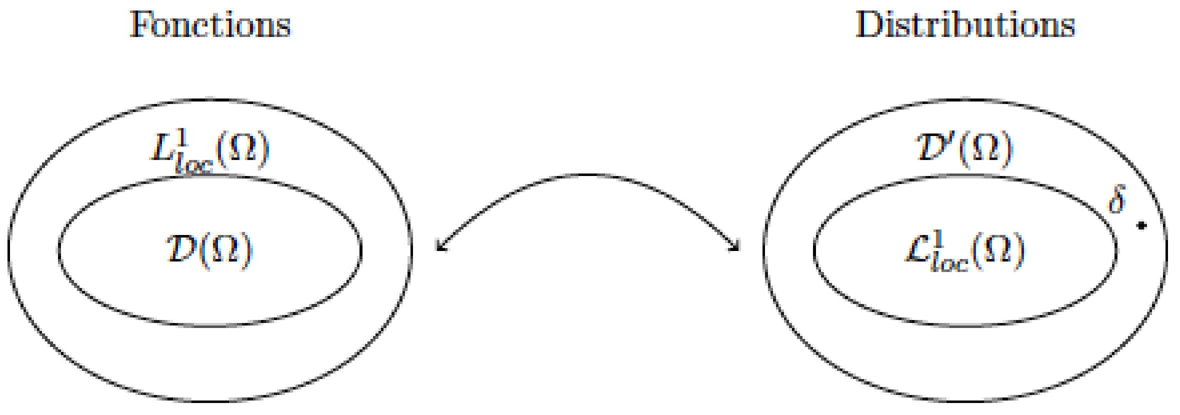
$$\phi(x) = \begin{cases} exp\left(\frac{R^2}{\|(x-p)\|^2 - R^2}\right) & \text{si } \|x-p\| < R \\ 0 & \text{si } \|x-p\| \geq R \end{cases}$$



Un peu d'analyse fonctionnelle

Définition :
Une fonctionnelle linéaire et continue définie sur l'espace $D(\Omega)$ est une distribution.
L'ensemble des distributions possède une structure d'espace vectoriel que nous notons $D'(\Omega)$. Cet espace est aussi appelé espace dual de $D(\Omega)$.

Exemple : La distribution de Dirac : $< \delta_a, \phi >= \phi(a) \quad \forall \phi \in D(\Omega)$.
Elle n'est pas régulière.



Un peu d'analyse fonctionnelle

Définition :
On définit la dérivée d'une distribution T par la relation :

$$< T', \phi >= - < T, \phi' > \quad \forall \phi \in D(]a, b[)$$

et la dérivée d'ordre n par :

$$< T^{(n)}, \phi >= (-1)^n < T, \phi^{(n)} > \quad \forall \phi \in D(]a, b[)$$

Remarque : Contrairement aux fonctions, les distributions sont toutes infiniment différentiables.

Exemple :
- La dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside est la distribution de Dirac en 0.
- La dérivée seconde de la distribution associée à la fonction valeur absolue est 2 fois la distribution de Dirac en 0.
- En dimension supérieure, on a :

$$< \nabla T, \phi >= - < T, \nabla \phi > \quad \forall \phi \in D(\Omega)$$

Un peu d'analyse fonctionnelle

Un peu d'analyse fonctionnelle

Définition :
On note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré sommable :

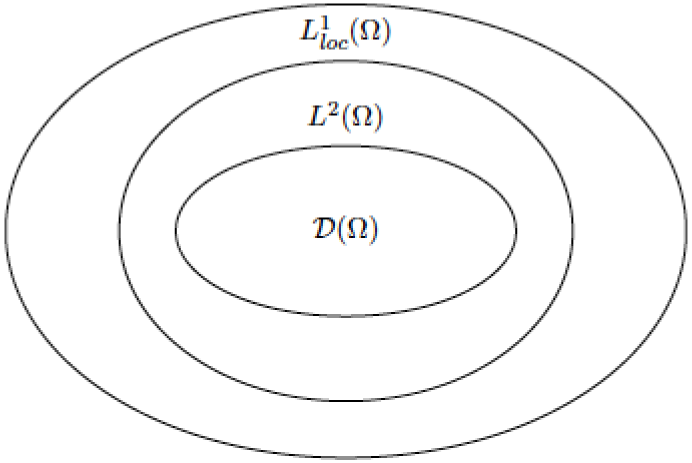
$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que } \int_\Omega (u(x))^2 dx < \infty\}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :
Si u et v sont des fonctions de $L^2(\Omega)$ alors :

$$|\int_\Omega uv dx| \leq \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{1/2}$$

Conséquence :

$$L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$



Un peu d'analyse fonctionnelle

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les EDP restés sans réponse jusque là.

On suppose l'ouvert Ω borné.

Définition :
On note $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq 3\}$$

que l'on munit du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

On considère ici la fonction u et ses dérivées partielles comme des distributions régulières associées à des fonctions qui sont dans $L^2(\Omega)$.

Un peu d'analyse fonctionnelle

Remarque :

on a $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et $\|u\|_{1,\Omega}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2$

Ainsi

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega}$$

Exemple : la fonction Heaviside définie sur]-1,1[appartient à $L^2(]-1,1[)$ mais pas à $H^1(]-1,1[)$

Lors de la résolution des EDP, il nous faudra introduire des conditions aux limites, on a alors besoin de parler de la restriction à la frontière Γ d'une fonction de $H^1(\Omega)$.
On ne peut pas parler de la valeur au bord d'une fonction de $L^2(\Omega)$.

Définition :

La restriction au bord Γ d'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ est appelée trace au bord de v et est notée $v\,|_\Gamma$ ou encore $\gamma_0(v)$.

Théorème :
L'ensemble des traces au bord des fonctions de $H^1(\Omega)$ forme un sous espace de $L^2(\Gamma)$ noté $H^{1/2}(\Gamma)$.

$$H^{1/2}(\Gamma) = \{v \in L^2(\Gamma), \exists w \in H^1(\Omega), v = \gamma_0(w)\}$$

On peut le munir de la norme $\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = inf_{w \in H^1(\Omega), v=\gamma_0(w)} \|w\|_{1,\Omega}$

Dans le cadre d'une méthode éléments finis, pour une condition aux limites g donnée, nous construirons explicitement la fonction v_g de $H^1(\Omega)$. Cette fonction sera appelée le relèvement de la condition aux limites g.

Continuité de la trace au bord :
Si $v \in H^1(\Omega)$ il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma} = \left(\int_\Gamma (\gamma_0(v))^2 ds\right)^{1/2} \leq C\|v\|_{1,\Omega}$$

Remarque : Si v tend vers 0, sa trace au bord tend aussi vers 0.

Un peu d'analyse fonctionnelle

Définition :
On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $D(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{1,\Omega}$. Ainsi pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite v_i de fonctions de $D(\Omega)$ telle que $lim_{i\to\infty}\|v - v_i\|_{1,\Omega} = 0$.
Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent donc au bord et on a :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ telle que } v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Exemple : En dimension 1 :

$$H_0^1(]a,b[) = \{v \in H^1(]a,b[) \text{ telle que } v(a) = v(b) = 0\}$$

Théorème :
L'expression $|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx\right)^{1/2}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$

Remarque :
Ce n'est pas une norme sur $H^1(\Omega)$.

Un peu d'analyse fonctionnelle

Inégalité de Poincaré :
Les normes $|u|_{1,\Omega}$ et $\|u\|_{1,\Omega}$ sont équivalentes sur $H_0^1(\Omega)$ mais pas sur $H^1(\Omega)$.

Inégalité de Poincaré 2 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction. Il existe alors une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω telle que :

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega)|u|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Théorème de Rellig :
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière suffisamment régulière. Alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Un peu d'analyse fonctionnelle

Un peu d'analyse fonctionnelle

Définition :
On note $H^2(\Omega)$ l'espace défini par :

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq n\}$$

que l'on munit du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx$$

Remarque : $\|u\|^2_{2,\Omega} = \|u\|^2_{1,\Omega} + \sum_{i,j=1}^{n} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|^2_{0,\Omega}$

Les fonctions de $H^2(\Omega)$ sont plus régulières que celles de $H^1(\Omega)$.

Un peu d'analyse fonctionnelle

Définition :
Si $u \in H^2(\Omega)$ et **n** le vecteur unitaire normal à Γ, la fonction $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u.\mathbf{n}$ définie sur la frontière Γ est appelée la trace normale de u au bord que l'on note $\gamma_1(u)$

Théorème :
L'ensemble des traces au bord des fonctions de $H^2(\Omega)$ forme un sous espace de $L^2(\Gamma)$ noté $H^{3/2}(\Gamma)$ ($=\gamma_0(H^2(\Omega))$).
L'ensemble des traces normales au bord des fonctions de $H^2(\Omega)$ forme un sous espace de $L^2(\Gamma)$ qui n'est autre que $H^{1/2}(\Gamma)$ ($=\gamma_1(H^2(\Omega))$).

Un peu d'analyse fonctionnelle

Théorème :
Si $g \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $h \in H^{1/2}(\Gamma)$ alors il existe au moins une fonction $w \in H^2(\Omega)$ dite de relèvement des conditions aux limites dont :

$$\gamma_0(w) = g \quad \text{et} \quad \gamma_1(w) = h$$

De plus on a la continuité de la trace au bord :

$$\|\gamma_0(w)\|_{0,\Gamma} + \|\gamma_1(w)\|_{0,\Gamma} \leq C\|w\|_{2,\Omega}$$

Définition :
On définit l'espace $H_0^2(\Omega)$ par :

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) \text{ telle que } v = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Exemple : En dimension 1 :

$$H_0^2(]a,b[) = \{v \in H^2(]a,b[) \text{ telle que } v(a) = v(b) = v'(a) = v'(b) = 0\}$$

Théorème :
L'expression $|u|_{2,\Omega} = \left(\int_\Omega (\nabla^2 u)^2 dx\right)^{1/2}$ est une norme sur $H_0^2(\Omega)$

Remarque :
Ce n'est pas une norme sur $H^2(\Omega)$.

Exercices

Exercice 1 : Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger : si Ω est borné, régulier et connexe, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\|v - m(v)\|_{0,\Omega} \leq C\|\nabla v\|_{0,\Omega} \text{ avec } m(v) = \frac{\int_\Omega v dx}{\int_\Omega dx}$$

Exercices

Exercice 2 : Le but de cet exercice est de montrer qu'il ne peut pas y avoir de notion de trace pour des fonctions de $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\|v\,|_{\partial\Omega}\,\|_{0,\partial\Omega} \leq C\|v\|_{0,\Omega}$$

Pour simplifier, on choisit comme ouvert la boule unité. Construire une suite de fonctions régulières dans $\bar{\Omega}$ égales à 1 sur $\partial\Omega$ et dont la norme dans $L^2(\Omega)$ tend vers 0. Conclure.

Formules de Green

Proposition :
Soient $u, v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v n_i ds$$

Proposition :
Soient $u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v ds$$

Formules de Green

Définition :
On note $H(div,\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^p,$ tel que $divu \in L^2(\Omega)\}$.
On le munit de la norme suivante :

$$\|u\|_{H(div,\Omega)} = (\|u\|_{0,\Omega}^2 + \|divu\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}$$

Définition :
La restriction au bord Γ d'une fonction $v \in H(div,\Omega)$ est notée $\gamma_n(v) = v.n\ |_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Continuité de la trace au bord :
Si $v \in H(div,\Omega)$, $\|\gamma_n(v)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|v\|_{H(div,\Omega)}$

Proposition :
Soient $u \in H(div,\Omega), v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega (divu)v dx = -\int_\Omega u.\nabla v dx + < \gamma_n u, v >_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}$$

Théorème de Lax Milgram

La résolution d'une EDP se ramène à celle d'un problème variationnel.

Définition :
Une forme linéaire l sur l'espace de Hilbert V muni de la norme $\|.\|_V$ est dite continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|l(v)| \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Définition :
L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert V est appelé espace dual de V et est noté V'.

Les duaux des espaces $H_0^1(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$ sont notés respectivement $H^{-1}(\Omega)$ et $H^{-2}(\Omega)$

Théorème de Lax Milgram

Définition :
Une forme bilinéaire a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|a(v,w)| \leq C\|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v,w \in V$$

Définition :
Une forme bilinéaire a est dite symétrique si

$$a(v,w) = a(w,v) \quad \forall v,w \in V$$

.

Exemple : $a(v,w) = \int_\Omega \left(vw + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx$ est une forme bilinéaire continue symétrique sur $H^1(\Omega)$

Théorème de Lax Milgram

Définition :
Une forme bilinéaire a est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive α telle que :

$$a(w,w) \geq \alpha \|w\|_V^2 \quad \forall w \in V$$

Remarque : C'est une généralisation de la notion de matrice définie positive.

Théorème de Lax Milgram

Théorème de Lax Milgram :
Soit V un espace de Hilbert et soient l et a des formes linéaire et bilinéaire continues sur V et $V \times V$. Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution u du problème variationnel :
trouver $u \in V$ telle que $a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, le problème variationnel est équivalent au problème de minimisation suivant :
trouver $u \in V$ telle que $J(u) = inf_{w \in V} J(v) = inf_{w \in V} \frac{1}{2} a(w, w) - l(w)$
La fonctionnelle J est appelée fonctionnelle d'énergie.

Théorème de Lax Milgram

Théorème de Lax Milgram

Exercice 3 : Démontrer que l'unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)dx = \int_{\partial\Omega} gvds + \int_\Omega fvdx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

vérifie l'estimation d'énergie suivante

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\partial\Omega})$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend pas de u, f et g.

Problèmes d'ordre 2.

Exemple :

$$-u''(x) = f(x)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Exemple 2 :

$$-\nabla.(k\nabla u) = f \qquad \text{dans } \Omega$$

$$u = g \qquad \text{sur } \Gamma_0$$

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = h \qquad \text{sur } \Gamma_1$$

où les frontières Γ_0 et Γ_1 sont disjointes et leur réunion est égale à Γ

Problèmes d'ordre 2.

Le cadre fonctionnel approprié est $H^1(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$

- la seule condition de Dirichlet est l'imposition de u
- on identifie la portion de la frontière Γ_0 où la condition de Dirichlet est imposée
- on pose $V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ et si aucune condition de Dirichlet n'est imposée, on pose $V = H^1(\Omega)$
- on a l'existence d'une fonction de relèvement u_g des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes.
- là où la condition de Dirichlet est imposée, les fonctions tests s'annulent.
- on obtient la formulation variationnelle
- on vérifie les hypothèses du théorème de Lax Milgram et on en déduit l'existence et l'unicité de la solution.

Problèmes d'ordre 4.

Exemple :

$$\frac{d^2}{dx^2}(q(x)u'') = f(x) \qquad \text{dans }]0, L[$$

$$u(0) = u'(0) = 0$$

$$q(L)u''(L) = M_0$$

$$(q(x)u'')' \mid_{x=L} = 0$$

avec q fonction strictement positive et bornée de sorte qu'il existe des constantes q_1 et q_2 telles que

$$0 < q_1 \leq q(x) \leq q_2 \quad \forall x \in [0, L]$$

Théorème de Lax Milgram

Problèmes d'ordre 4.

Le cadre fonctionnel approprié est $H^2(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$

- il y a 2 conditions de Dirichlet soit l'imposition de u et de $\frac{\partial u}{\partial \lll}$
- on identifie la portion de la frontière Γ_0 où les conditions de Dirichlet sont imposées
- on pose $V = H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$ et si aucune condition de Dirichlet n'est imposée, on pose $V = H^2(\Omega)$
- on a l'existence d'une fonction de relèvement u_g des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes.
- là où la condition de Dirichlet sur u(x) est imposée, les fonctions tests s'annulent. Là où la condition de Dirichlet sur $\frac{\partial u}{\partial \lll}$ est imposée les dérivées normales des fonctions test s'annulent
- on obtient la formulation variationnelle
- on vérifie les hypothèses du théorème de Lax Milgram et on en déduit l'existence et l'unicité de la solution.