Karnaugh kaarten

1 Minimalisatie van logische uitdrukking

het minimaliseren van logische functies centraal in het spel. Dit probleem wordt eerst kort geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld. Stel dat er een vast aantal logische inputvariabelen (True of False) zijn, die gecombineerd worden tot een logische output (True = 1 of False = 0), dan kan dit voorgesteld worden in een tabel. Neem als voorbeeld volgende tabel (figuur 2), waarbij er 3 inputvariabelen zijn: x_1, x_2 en x_3. De combinatie van de drie inputvariabelen kan voorgesteld worden in een elementaire product term (p-term). Een p-term is een term in een logische uitdrukking die bestaat uit een product (AND-operatie) van variabelen. De p-term van een inputcombinatie wordt genoteerd als een product van alle variabelen, waarin negaties aangeduid worden met een ‘’‘.

	x_1	x_2	x_3	Output	p-termen
0	0	0	0	0	$x'_1x'_2x'_3$
1	0	0	1	1	$x'_1x'_2x_3$
2	0	1	0	1	$x'_1x_2x'_3$
3	0	1	1	1	$x'_1x_2x_3$
4	1	0	0	0	$x_1x'_2x'_3$
5	1	0	1	0	$x_1x'_2x_3$
6	1	1	0	1	$x_1x_2x'_3$
7	1	1	1	1	$x_1x_2x_3$

Figuur 1: waarheidstabel

De verzameling van alle combinaties van inputs die tot een output 1 leiden, kunnen voorgesteld worden in de volgende canonieke vorm:

$$True = x'_1x'_2x_3 + x'_1x_2x'_3 + x'_1x_2x_3 + x_1x_2x'_3 + x_1x_2x_3$$

Uit de tabel kan eenvoudig afgeleid worden dat de output True is als x_2 = 1, of als x_1 = 0 en x_3 = 1. De uitdrukking kan dus vereenvoudigd worden tot:

$$True = x_2 + x'_1x_3$$

In de informatica wordt gebruik gemaakt van deze logische uitdrukkingen om elektrische schakelingen te beschrijven. De ‘functie’ van input variabelen naar output variabelen wordt in dit geval een circuit-transmissie genoemd. Het minimaliseren van deze uitdrukkingen voor schakelingen is belangrijk omdat dit tot besparingen leidt van de componenten die nodig zijn om de schakeling te kunnen realiseren. Hierdoor zullen de circuits ook efficiënter zijn.

2 Karnaugh kaarten

Een eenvoudig te begrijpen methode om logische uitdrukkingen te minimaliseren is met behulp van Karnaugh-kaarten. Deze methode werd gevonden in 1953 door Maurice Karnaugh. Om logische uitdrukkingen te vereenvoudigen, zijn er vaak moeilijke berekeningen vereist, maar met behulp van Karnaugh-kaarten hoeft dit niet. Deze methode toont op een visuele manier welke termen best gecombineerd worden. In wat volgt zal de werking van deze methode worden uitgediept aan de hand van de waarheidstabel uit figuur 2.

x_1 \ x_2x_3	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1

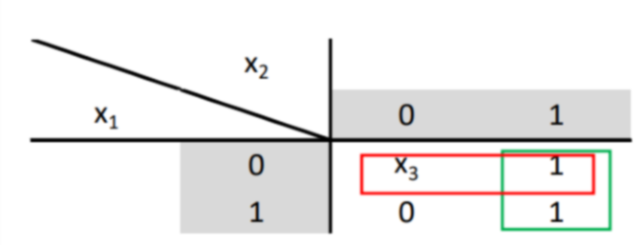
Figuur 2: voorbeeld: Karnaugh kaarten

Eerst worden de inputvariabelen in 2 groepen verdeeld. Vervolgens wordt er een tabel gemaakt met een van de groepen in de kolom wat hier de groep van x_2 en x_3 is en een van de groepen dat de rijen gaat vertegenwoordigen, wat hier dan x_1 is (figuur 3). De kaart wordt dan ingevuld met de waarheidswaarde van uit de tabel. Wanneer er twee of meer variabelen in een groep zitten, moeten deze gesorteerd worden volgens Gray code. Dit betekent dat twee opeenvolgende getallen altijd maar één bit verschillen. De volgende stap is om alle eentjes in de Karnaugh-kaart te groeperen in rechthoeken. Het aantal elementen in een rechthoek moet altijd een macht van 2 zijn waarbij de macht groter dan 0 moet zijn (2^n met $n > 0$). De rechthoeken moeten zo groot mogelijk gekozen worden om zo’n minimaal mogelijke uitkomst te bekomen. Meerdere rechthoeken mogen ook overlappen. Wanneer alle rechthoeken gevormd zijn, moet voor elke rechthoek de ‘gemeenschappelijke inputs’ gezocht worden. Dit zijn de inputcombinateis die in de hele rechthoek constant zijn. Vervolgens worden deze inputwaardes opgenomen in de p-term van de rechthoek. De som van al deze termen stelt de geminimaliseerde uitdrukking voor. Zo stelt het rode vierkant alle inputs waar x_2 = 1 en de groene rechthoek alle inputs waar x_1 = 0 en x_3 = 1. Dit resulteert opnieuw in

de volgende minimale uitdrukking $x_2 + x_1' x_3$ zoals hierboven intuïtief werd gevonden.
Een nadeel van Karnaugh-kaarten is dat het vanaf meer dan 4 variabelen al snel complex wordt en het vaak efficiënter is om alternatieve algoritmes te gebruiken. Hiervoor zijn later varianten gevonden op de methode van Karnaugh-kaarten die beter werken met meer variabelen zoals Variable Entered Karnaugh Maps (VEKM).

Variable-entered Karnaugh maps

Een van de belangrijkste verbeteringen aan het algoritme van Karnaugh is het toelaten van variable-entered maps. Dit houdt in dat de variabelen niet allemaal apart worden voorgesteld in de tabel, maar ook in de cellen van andere geplaatst kunnen worden. De variable-entered map procedure van Fletcher kan toegepast worden op veel algemene transmissiefuncties. Deze methode laat zelfs toe dat de functie niet volledig gespecifieerd moet zijn, zowel in de kaart als in de entered variabelen. Nog een verdere uitbreiding werd voorgesteld door Rushdi [**?**]. Deze uitbreiding kan nog met meer variabelen werken omdat de map-entries ook meerdere variabelen mogen bevatten.



Figuur 3: voorbeeld: variable-entered Karnaugh map

Figuur 4 is een voorbeeld van een variable-entered Karnaugh-kaart waar opnieuw de waarheidstabel uit figuur 2 wordt gebruikt. De key-variabelen zijn in dit voorbeeld x_1 en x_2. Deze worden genoteerd in de rijen en kolommen. De variabele x_3 is hier gekozen als map-entered variabele. De cel linksboven betekent dat wanneer x_1 en x_2 nul zijn dat $x_3 = 1$ moet zijn om tot een output True te komen.