Mathematatik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Beh.: Für $n \in even_1$ ist f differenzierbar und für $n \in odd$ ist f differenzierbar für alle $x > 0$.

Bew.: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_1$ gilt, dass es entweder in $odd = \{2a+1 | a \in \mathbb{N}\}$ oder in $even_1 = \{2a | 2a \geq 1 \wedge a \in \mathbb{N}\}$ liegt.

Wir schreiben $even_1$, da n aus $\mathbb{N}_1$ gesucht sind.

Hiermit können wir die folgenden Fallunterscheidungen für ein zu überprüfendes n eröffnen:

A: Es gelte $n \in odd$ und **B**: Es gelte $n \in even_1$.

Beide Fälle werden wir im Folgenden betrachten:

Erster Fall: A

Gelte $n \in odd$ ließe sich n schreiben als $2a + 1$ für $a \in \mathbb{N}$. Dann gelte für f_n folgendes:

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \sqrt{x}^n && | \ n \in odd \\
&= \sqrt{x}^{2a+1} && | \ \text{Potenzgesetze} \\
&= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}^{2a} && | \ \text{Vereinfache} \\
&= \sqrt{x} \cdot x^a
\end{aligned}
$$

Dann gilt: $f_n(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^a + \sqrt{x} \cdot ax^{a-1}$ nach der Ableitung der Wurzel (3.45), der Ableitung eines Polynoms (3.42) und der Produktregel (3.41).
Bemerke, dass gilt: $\lim_{x \to 0} f_n(x)' = +\infty$ gilt (folgt aus den Kombinationssätzen), und somit konvergiert der Differenzenquotient von f_n nicht an der Stelle 0, womit f_n an dieser Stelle für $n \in odd$ nicht differenzierbar ist.
$x = 0$ ist die einzige Stelle bei der f_n nicht differenzierbar ist, da für $x > 0$, $f_n(x)' \in \mathbb{R}$ gilt, was aus den verwendeten Operationen in $f_n(x)'$ folgt.

Zweiter Fall: B

Gelte $n \in even_1$ ließe sich n schreiben als $2a$ für $a \in \mathbb{N}_1$. Dann gelte für f_n folgendes:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{x}^n && \mid n \in even_1 \\ &= \sqrt{x}^{2a} && \mid \text{Vereinfache} \\ &= x^a \end{aligned}$$

Nach der Ableitung eines Polynoms (3.42) ist dann f_n in jeder Stelle differenzierbar mit $f_n(x)' = a \cdot x^{a-1}$ für $n \in even_1$.

Aus beiden Fallunterscheidungen folgt somit, dass für $n \in even_1$ ist f differenzierbar und für $n \in odd$ ist f differenzierbar für alle $x > 0$,
– was zu zeigen war. □

Aufgabe 3

Beh.: Die Aussage aus der Aufgabenstellung gilt nicht, das heißt es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, +\infty] \to [b, +\infty]$ so, dass f differenzierbar und streng monoton steigend ist und gleichzeitig $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$ gilt.

Vor.: $a = b = 0$, $f : [a, +\infty] \to [b, +\infty], x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Bew.: Nach Satz 3.42 können wir eine rationale Funktion wie unser f ableiten. Hierfür wenden wir ein mal den Quotenentensatz an und bekommen $f(x)' = \frac{1}{(x+1)^2}$. Dies macht f differenzierbar in jedem Punkt, denn schließlich gilt für jedes x aus unserer Domain ($x \geq 0$), dass der untere Term der Ableitung nicht 0 werden kann und sonst nimmt die Ableitung auch nur Werte aus $\mathbb{R}$ an.

Nun zeigen wir noch, dass f auch streng monoton steigend ist.

Nach dem Monotoniekriterum in Satz 3.53 zeigen wir, dass für f im Intervall ihrer Domain ihre Ableitung nur Positive Werte annimmt.

Wir zeigen also: $\forall x > 0 : f(x)' > 0$. Betrachte folgende Beobachtung:

Gilt $x > 0$, dann gilt $x + 1 > 0$. Dann folgt aus den Regeln in angeordneten Körpern, dass $(x + 1)^2 > 0$ gilt und daraus, dass $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$ gilt.

Somit gilt: $\forall x > 0 : f(x)' > 0$, also ist f streng monoton steigend.

Nun haben wir alle Voraussetzungen (der Aufgabenstellung) erfüllt, also werden wir zeigen, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$ für unser f gilt.

Betrachte somit folgende Auflösung des Limetes[1]:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} && \mid \text{Bruchrechnung}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) && \mid \text{Kombinationssätze}\\
&= \lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} && \mid \text{Stetigkeit von } \frac{1}{x+1} \text{ für } x \geq 0\\
&= 1 - \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}(x+1)} && \mid \text{Kombinationssatz, auswerten, Schreibweise}\\
&= 1 - \frac{1}{+\infty + 1} && \mid \text{Schreibweise}\\
&= 1 - \frac{1}{+\infty} && \mid \text{Auswerten}\\
&= 1 - 0\\
&= 1
\end{aligned}$$

Da $1 \neq +\infty$ gilt, ist somit gezeigt, was zu zeigen war. □

Ich hab noch eine kleine Frage zu LaTeX: Man sieht im vierten Schritt unserer Auswertung in den Schrittbegründungen, dass es eng wird. Die Fußnote 1 hätte ich auch eigentlich lieber in die Umformung selbst gebracht, aber der Platz geht aus. Die wäre kein Problem, wenn es Zeilenumbrüche gäbe in flalign*, aber es scheint nicht so, da die Elemente sonst "von dem Blatt rutschen". Gibt es hierfür eine elegante Lösung? Ich benutze TeX Live.

[1] Die Gleichheit beim ersten Schritt sieht man leicht, indem man beide Seiten von $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ mit $x+1$ multipliziert. Der Fall $x = -1$ tritt unter unseren Bedingungen nicht auf