

# Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Ali Galip Altun  
stu240825, stu242631

## Aufgabe 1

**Beh.:** Für  $n \in even_1$  ist  $f$  differenzierbar und für  $n \in odd$  ist  $f$  differenzierbar für alle  $x > 0$ .

**Bew.:** Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}_1$  gilt, dass es entweder in  $odd = \{2a+1 | a \in \mathbb{N}\}$  oder in  $even_1 = \{2a | 2a \geq 1 \wedge a \in \mathbb{N}\}$  liegt.

Wir schreiben  $even_1$ , da  $n$  aus  $\mathbb{N}_1$  gesucht sind.

Hiermit können wir die folgenden Fallunterscheidungen für ein zu überprüfendes  $n$  eröffnen:

**A:** Es gelte  $n \in odd$  und **B:** Es gelte  $n \in even_1$ .

Beide Fälle werden wir im Folgenden betrachten:

### Erster Fall: A

Gelte  $n \in odd$  ließe sich  $n$  schreiben als  $2a + 1$  für  $a \in \mathbb{N}$ . Dann gelte für  $f_n$  folgendes:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{x}^n && | \ n \in odd \\ &= \sqrt{x}^{2a+1} && | \text{ Potenzgesetze} \\ &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}^{2a} && | \text{ Vereinfache} \\ &= \sqrt{x} \cdot x^a \end{aligned}$$

Dann gilt:  $f_n(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^a + \sqrt{x} \cdot ax^{a-1}$  nach der Ableitung der Wurzel (3.45), der Ableitung eines Polynoms (3.42) und der Produktregel (3.41).

Bemerke, dass gilt:  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)' = +\infty$  gilt (folgt aus den Kombinations-sätzen), und somit konvergiert der Differenzenquotient von  $f_n$  nicht an der Stelle 0, womit  $f_n$  an dieser Stelle für  $n \in \text{odd}$  nicht differenzierbar ist.

$x = 0$  ist die einzige Stelle bei der  $f_n$  nicht differenzierbar ist, da für  $x > 0$ ,  $f_n(x)' \in \mathbb{R}$  gilt, was aus den verwendeten Operationen in  $f_n(x)'$  folgt.

## Zweiter Fall: B

Gelte  $n \in \text{even}_1$  ließe sich  $n$  schreiben als  $2a$  für  $a \in \mathbb{N}_1$ . Dann gelte für  $f_n$  folgendes:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{x}^n && | \ n \in \text{even}_1 \\ &= \sqrt{x}^{2a} && | \text{ Vereinfache} \\ &= x^a \end{aligned}$$

Nach der Ableitung eines Polynoms (3.42) ist dann  $f_n$  in jeder Stelle differenzierbar mit  $f_n(x)' = a \cdot x^{a-1}$  für  $n \in \text{even}_1$ .

Aus beiden Fallunterscheidungen folgt somit, dass für  $n \in \text{even}_1$  ist  $f$  differenzierbar und für  $n \in \text{odd}$  ist  $f$  differenzierbar für alle  $x > 0$ ,

– was zu zeigen war. □

## Aufgabe 2

**Beh.:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in \Omega$  ein HP von  $\Omega$ . Dann gilt:

$f$  ist differenzierbar **(1)**

$\iff \exists q \in \mathbb{R}^\Omega, q$  ist stetig in  $x : \forall \xi \in \Omega : f(\xi) = f(x) + q(\xi) \cdot (\xi - x)$  **(2)**

**Bew.:** Um die Äquivalenz beider Aussagen zu zeigen, werden wir den Beweis aufteilen in die Richtungen **(1)  $\implies$  (2)** und **(2)  $\implies$  (1)**.

**Richtung (1)  $\implies$  (2)**

Blablabla

**Richtung (2)  $\implies$  (1)**

Sei also angenommen:  $q$  ist stetig in  $x$  und es gilt:  $f(\xi) = f(x) + q(\xi) \cdot (\xi - x)$ .

Betrachte folgende Umformung:

$$f(\xi) = f(x) + q(\xi) \cdot (\xi - x) \quad | -f(x)$$

$$\iff f(\xi) - f(x) = q(\xi) \cdot (\xi - x) \quad | \cdot \frac{1}{\xi - x}, \text{ angenommen } x \neq \xi$$

$$\iff \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = q(\xi)$$

$$\implies \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{\xi \rightarrow x} q(\xi) \quad | q \text{ ist stetig in } x$$

$$\iff \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = q(x) \in \mathbb{R}$$

Also liegt der Differenzenquotient von  $f(x)$  in  $\mathbb{R}$ . Somit ist  $f$  differenzierbar in jedem  $x$ .

Angenommen  $x = \xi$  gilt, dann können wir zwar beide Seiten nicht durch  $\xi - x$  teilen und dieser Beweis funktioniert nicht. Beobachte aber, dass wenn  $\xi, x$  annähert es trotzdem funktioniert, schließlich ist der Differenzenquotient so definiert, dass wir durch  $\xi - x$  teilen – eine Summe, die sich an 0 annähert. Somit gilt unserer Beweis annähernd für  $\xi - x \rightarrow 0$ , jedoch nicht für  $\xi - x = 0$ .

Insgesamt sind nun beide Richtungen gezeigt, das heißt es gilt was zu zeigen war. □

## Aufgabe 3

**Beh.:** Die Aussage aus der Aufgabenstellung gilt nicht, das heißt es existieren  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $f : [a, +\infty] \rightarrow [b, +\infty]$  so, dass  $f$  differenzierbar und streng monoton steigend ist und gleichzeitig  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$  gilt.

**Vor.:**  $a = b = 0$ ,  $f : [a, +\infty] \rightarrow [b, +\infty]$ ,  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$

**Bew.:** Nach Satz 3.42 können wir eine rationale Funktion wie unser  $f$  ableiten. Hierfür wenden wir ein mal den Quotenentensatz an und bekommen  $f(x)' = \frac{1}{(x+1)^2}$ . Dies macht  $f$  differenzierbar in jedem Punkt, denn schließlich gilt für jedes  $x$  aus unserer Domain ( $x \geq 0$ ), dass der untere Term der Ableitung nicht 0 werden kann und sonst nimmt die Ableitung auch nur Werte aus  $\mathbb{R}$  an.

Nun zeigen wir noch, dass  $f$  auch streng monoton steigend ist.

Nach dem Monotoniekriterium in Satz 3.53 zeigen wir, dass für  $f$  im Intervall

ihrer Domain ihre Ableitung nur Positive Werte annimmt.

Wir zeigen also:  $\forall x > 0 : f(x)' > 0$ . Betrachte folgende Beobachtung:

Gilt  $x > 0$ , dann gilt  $x + 1 > 0$ . Dann folgt aus den Regeln in angeordneten Körpern, dass  $(x + 1)^2 > 0$  gilt und daraus, dass  $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$  gilt.

Somit gilt:  $\forall x > 0 : f(x)' > 0$ , also ist  $f$  streng monoton steigend.

Nun haben wir alle Voraussetzungen (der Aufgabenstellung) erfüllt, also werden wir zeigen, dass  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$  für unser  $f$  gilt.

Betrachte somit folgende Auflösung des Limes<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} && | \text{ Bruchrechnung} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) && | \text{ Kombinationssätze} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} && | \text{ Stetigkeit von } \frac{1}{x+1} \text{ für } x \geq 0 \\ &= 1 - \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)} && | \text{ Kombinationssatz, auswerten, Schreibweise} \\ &= 1 - \frac{1}{+\infty + 1} && | \text{ Schreibweise} \\ &= 1 - \frac{1}{+\infty} && | \text{ Auswerten nach Schreibweise} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Die Gleichheit beim ersten Schritt sieht man leicht, indem man beide Seiten von  $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$  mit  $x+1$  multipliziert. Der Fall  $x = -1$  tritt unter unseren Bedingungen nicht auf

Da  $1 \neq +\infty$  gilt, ist somit gezeigt, was zu zeigen war.

□

Ich hab noch eine kleine Frage zu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: Man sieht im vierten Schritt unserer Auswertung in den Schrittbegründungen, dass es eng wird. Die Fußnote 1 hätte ich auch eigentlich lieber in die Umformung selbst gebracht, aber der Platz geht aus. Die wäre kein Problem, wenn es Zeilenumbrüche gäbe in flalign\*, aber es scheint nicht so, da die Elemente sonst "von dem Blatt rutschen". Gibt es hierfür eine elegante Lösung? Ich benutze TeX Live.