Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 2

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Beh.: Die Aussage beschrieben in der Aufgabenstellung gilt nicht, das heißt es gilt: $\exists (x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\neq 0}), \lim_n x_n = \lim_n y_n = +\infty : \lim_n \frac{x_n}{y_n} \notin \overline{\mathbb{R}}$

Vor.: $n \in \mathbb{N}$.

Bew.: Sei $a_n := n + n^2 + n^2 \cdot (-1)^n$ und $b_n := n^2$.

Dann gilt: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+n^2+n^2\cdot(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 + (-1)^n$.

Wir werden nun den Limes dieser Folge versuchen zu berechnen. Betrachte folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_n}{b_n} &= \lim_n \left(\frac{1}{n} + 1 + (-1)^n\right) && \mid \text{Kombinationssätze} \\
&= \lim_n \frac{1}{n} + \lim_n 1 + \lim_n (-1)^n && \mid \text{Ausrechnen} \\
&= 0 + 1 + \lim_n (-1)^n && \mid \lim_n (-1)^n \notin \overline{\mathbb{R}} \\
&\notin \overline{\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

Damit gilt was zu zeigen war, also gilt die Aussage aus der Aufgabenstellung nicht. □

Aufgabe 2

Beh.: Die Aussage beschrieben in der Aufgabenstellung gilt nicht, das heißt es gilt: $\exists (x_k)_{k\geq 1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \lim_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) \in \mathbb{R} : \lim_k x_k \notin \mathbb{R}$.

Vor.: $n, k \in \mathbb{N}_1$.

Bew.: Sei $x_k := (-1)^k$. Dann gilt: $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (-1)^k\right)\Big)_n$, wir nennen diese Mittelwertsfolge m_n.

Wir werden zeigen, dass $\lim_n m_n = 0 \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir werden das ϵ-Kriterium anwenden, das heißt wir werden zeigen, dass folgendes gilt: $\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |m_n - 0| < \epsilon$. Setze $n_0 := \left\lceil \frac{1}{n} \right\rceil + 1$. Dann gilt $n_0 \in \mathbb{N}_1$. Sei $n \geq n_0$. Dann gilt folgende Umformung:

$$
\begin{aligned}
|m_n - 0| = |m_n| &= \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (-1)^k \right| && \mid \frac{1}{n} > 0 \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| && \mid \text{Annahme } n \geq n_0 \text{ und } \frac{1}{n_0} < n_0 \\
&\leq \frac{1}{n_0} \cdot \left| \sum_{k=1}^{n_0} (-1)^k \right| && \mid \text{setze in } n_0 \text{ ein} \\
&= \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{n} \right\rceil + 1} \cdot \left| \sum_{k=1}^{n_0} (-1)^k \right| && \mid \text{Beobachte } \max\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n_0} (-1)^k \right| \right\} \\
&\leq \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{n} \right\rceil + 1} \cdot 1 = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{k} \right\rceil + 1} && = \max\{|-1|, |0|\} = 1 \\
&< \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Somit haben wir gezeigt, dass $\lim_n m_n = 0$ gilt und da $0 \in \mathbb{R}$ gilt, konvergiert $(m_n)_n$. Beobachte aber, dass $(x_k)_k$ nicht konvergiert nach Vorlesung.

Damit haben wir gezeigt, was zu zeigen war und die Aussage aus der Aufgabenstellung gilt nicht. $\square$