Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 1

Florian Schlösser, Henri Heyden

stu240349, stu240825

Aufgabe 1

Es ist zu zeigen, dass $\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$ eine wahre Aussage ist.

Wir werden dies mithilfe eines direkten Beweises zeigen.

Vorausgesetzt ist, dass $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten.

Des weiteren definieren wir das Aufrunden als Operation für nicht-negative reelle Zahlen: $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{N}, x \mapsto min\{n \in \mathbb{N} | n \geq x\}$

Wir setzen $n := \lceil \frac{2y}{x} \rceil$. Da $n \in \mathbb{N}$ gilt, wird der Term aufgerundet.

Dann gilt folgendes:

$$\begin{aligned}
&nx && \text{Einsetzen in n} \\
&= \left\lceil \frac{2y}{x} \right\rceil x && \text{Def. Aufrundung} \\
&\geq \frac{2y}{x} x && \frac{1}{x} \text{ invers zu } x \\
&= 2y && \text{Satz 1.5 (21)} \\
&> y &&
\end{aligned}$$

Also gilt: $\lceil \frac{2y}{x} \rceil x = nx > y$

Hierdurch wurde gezeigt, dass das Archimedische Axiom gilt. $\square$

Aufgabe 2

Es ist zu zeigen, dass $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < x < b$

Wir werden dies mithilfe eines direkten Beweises zeigen.

Hier ist vorauszusetzen, dass $a, b \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge a < b$ gilt.

Da für alle zwei Zahlen aus $\mathbb{R}$ gilt, dass wenn sie nicht gleich sind, es unendlich viele Zahlen zwischen ihnen gibt, folgern wir, dass es unendlich Zahlen aus $\mathbb{R}$ gibt, die zwischen a und b liegen.

Nun werden wir zeigen, dass es auch unendlich Zahlen x der gesuchten Eigentschaft auch in $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$ gibt.

Wir definieren $x := a + \alpha\sqrt{2}$, wobei α eine rationale Zahl ist, dessen Intervall wir noch bestimmen werden.

Des weiteren gilt, wie in der Vorlesung bewiesen (Satz 1.23), $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Somit gilt: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aufgrund der Definition von x.

Damit $a < x < b$ gilt, müssen wir α so wählen, sodass $a < a + \alpha\sqrt{2} < b$ gilt.

Dazu formen wir die Ungleichungen $a < a + \alpha\sqrt{2}$ und $a + \alpha\sqrt{2} < b$ nach α um:

(1.)

$$
\begin{aligned}
& a < a + \alpha\sqrt{2} && \text{-a} \\
\iff & 0 < \alpha\sqrt{2} && :\sqrt{2} \\
\iff & 0 < \alpha
\end{aligned}
$$

Somit ist die linke exklusive Grenze für $\alpha = 0$.

(2.)

$$
\begin{aligned}
& a + \alpha\sqrt{2} < b && \text{-a} \\
\iff & \alpha\sqrt{2} < b - a && :\sqrt{2} \\
\iff & \alpha < \frac{b-a}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Damit ist die rechte exklusiv Grenze für $\alpha = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$.

Insgesamt schließt sich daraus, dass $\alpha \in (0, \frac{b-a}{\sqrt{2}})_{\mathbb{Q}}$ gilt.

Nun um zu prüfen, dass unsere x nun die geforderte Bedingung erfüllen, setzen wir linke und rechte Grenze in α und zeigen, dass dann $x = a$ und $x = b$ gelten würde:

1. ($\alpha = 0$):

$$
\begin{aligned}
x &= 0 \cdot \sqrt{2} + a \\
&= a
\end{aligned}
$$

2. ($\alpha = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$):

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{b-a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + a \\
&= b - a + a \\
&= b
\end{aligned}
$$

Somit gelte dann $x = a$ bzw. $x = b$, wodurch wir wissen, dass wenn $\alpha \in (0, \frac{b-a}{\sqrt{2}})_{\mathbb{Q}}$ gilt, dass dann $x \in (a, b) \iff a < x < b$ gilt. Da wir schon gezeigt hatten, dass für diese x, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt, ist somit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge a < x < b$ wahr. Damit wurde $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < x < b$ gezeigt. $\square$