Mathematatik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 2

Florian Schlösser, Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240349, stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Es ist zu zeigen, dass $\lim_n \frac{\sqrt{n}}{2^n} = 0$ gilt.

Hierfür werden wir den Sandwichsatz aka. Satz 2.20, anwenden.

Wir nehmen an, dass $n \in \mathbb{N}$ gilt und, dass alle in dieser Bearbeitung erwähnten Folgen wohldefiniert sind.

Für den Sandwichsatz definieren wir die folgenden Folgen:
$(a_n)_n := \left(\frac{n}{2^n}\right)_n$, $(b_n)_n := \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$, $(x_n)_n := \left(\frac{\sqrt{n}}{2^n}\right)_n$.
Nun werden wir zeigen, dass $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ gilt.

In der Präsenzübung wurde gezeigt, dass **(A)** $\lim_n a_n = 0$ gilt,

weswegen wir nur zeigen müssen, dass **(B)** $\lim_n b_n = 0$ gilt damit wir den ersten Teil des Sandwichsatzes erfüllen.

Beobachte, dass $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n = |2^n|$ gilt, da 2^n für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton steigend ist, somit ist nach Satz 2.24 die Aussage **B** äquivalent zu $\lim_n \frac{1}{b_n} = +\infty$

Um $\lim_n \frac{1}{b_n} = \lim_n 2^n = +\infty$ zu zeigen, wenden wir Satz 2.10.c an:

$\lim_n 2^n = +\infty \iff \forall r : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : r < 2^n$.

Wir wissen allgemein, dass $n \geq n_0 \Rightarrow 2^n \geq 2^{n_0}$ gilt, da wie erwähnt 2^n monoton steigend ist. Wähle r beliebig, dann setzen wir $n_0 := |r| + 1$ und wir untersuchen die folgenden Fälle:

Hierfür setzen wir $d := n - n_0$, beobachte, $d \geq 0$ nach den gegebenen Definitionen für n und n_0.

(1.) $r < 0$**:**

Dann gilt: $r < 0 < b_n$, da der minimale Wert für b_n, 1 ist.

(2.) $r \geq 0$**:**

Dann gilt: $r < b_n = 2^n = 2^{n_0+d} = 2^{|r|+1+d} = 2^{r+1+d} = 2 \cdot 2^r \cdot 2^d$,

da $2 \cdot 2^d \geq 2$ und $r \leq 2^r$

Somit wurde $\lim_n \frac{1}{b_n} = +\infty$ gezeigt und damit auch (erinnere **A**), dass $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ gilt.

Nach dem Sandwichsatz müssen wir somit nur noch zeigen, dass

$\forall n \in \mathbb{N} : b_n \leq x_n \leq a_n$ gilt. Betrachte folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
& b_n \leq x_n \leq a_n \\
\iff & \frac{1}{2^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^n} \leq \frac{n}{2^n} && | \cdot 2^n \\
\iff & 1 \leq \sqrt{n} \leq n
\end{aligned}$$

Dies ist wahr für $n \geq 1$, was nach der Beobachtung 2.21 im Skript bedeutet, dass der Sandwichsatz vollständig anwendbar ist, wonach

$\lim_n \frac{\sqrt{n}}{2^n} = \lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ gilt. $\square$

Aufgabe 2

Es ist zu zeigen, dass $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\geq 1}$ konvergiert, wenn wir wissen, dass $(x_k)_{k\geq 1}$ konvergiert. Das heißt es existiert ein Limies der Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\geq 1}$, welche wir folgend m nennen werden, der in den reelen Zahlen liegt, wenn dieses Kriterium für die Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ gilt.
Da $(x_k)_{k\geq 1}$ konvergiert, wissen wir nach der Definiton der Konvergenz (2.1.5), dass demnach für diese Folge ein reeler Grenzwert existiert, den wir folgend mit y bezeichnen. Wir schreiben also: $y := \lim_k x_k$.
Wir werden zeigen, dass y unser gesuchter Limes der Folge m ist. Hiermit würden wir wissen, dass damit der Grenzwert von m auch in $\mathbb{R}$ liegt, wodurch nach der Definiton der Konvergenz die Folge m konvergiert.
Nach Satz 2.10.b ist hiermit zu zeigen: $\forall\epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |m_n - y| < \epsilon$.
Wähle ϵ beliebig größer 0.