Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 9

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Vor.: $n \in \mathbb{N}_1$, $f : [0, +\infty[\ \to \ \mathbb{R}, x \mapsto x^n e^{-x}$

$I_1 := [0, n]$, $I_2 := [n, +\infty[$

Beh.: f ist streng monoton steigend in I_1, streng monoton fallend in I_2 und es gilt: $\text{LMAX}(f) = n$

Bew.: f ist über Kombinationssätze der Differenzierbarkeit differenzierbar in $dom(f)$ mit der Ableitung:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) && \mid \text{Quotientenregel, Bruchrechnung} \\
&= nx^{n-1} \cdot e^{-x} + x^n \cdot \frac{-e^x}{(e^x)^2} && \mid \text{Bruchrechnung} \\
&= nx^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot \frac{1}{e^x} && \mid \text{Potenzgesetze} \\
&= nx^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x} && \mid \text{Ausklammern} \\
&= \left(nx^{n-1} - x^n\right) \cdot e^{-x}
\end{aligned}
$$

für jedes $x \in dom(f)$.

Nach der Vorlesung ist bekannt, dass $e^x > 0$ gilt, für $x \in dom(f)$, somit ist für die Suche nach Nullstellen oder für das Vorzeichenverhalten von f' an einer Stelle x der Term "e^{-x}", der in $f'(x)$ liegt, zu vernachlässigen, da somit auch $e^{-x} = (e^x)^{-1} > 0$ durch die Regeln in angeordneten Körpern gilt.

Wir werden nun die Ungleichungen $f'(x) > 0$ und $f'(x) < 0$ betrachten. Um dies etwas zu verkürzen, schreiben wir "$f'(x) \gtrless 0$" und betrachten damit beide Fälle, also beide Ungleichungen. Um die Bedeutung der Reihenfolge festzulegen, ist $f'(x) \gtrless 0$ äquivalent zu $0 \lessgtr f'(x)$, genau wie der Ausdruck "$a = 1 \pm -1$" äquivalent zu "$a = 1 \mp 1$" ist.

Damit betrachten wir die Ungleichungen, $f'(x) \gtrless 0$:

$$
\begin{aligned}
& f'(x) \gtrless 0 && \mid \text{Schreibweise, Einsetzen, } e^x > 0 \\
\iff & 0 \lessgtr n \cdot x^{n-1} - x^n && \mid \text{Potenzgesetze} \\
\iff & 0 \lessgtr n \cdot x^{n-1} - x \cdot x^{n-1} && \mid \text{Ausklammern} \\
\iff & 0 \lessgtr (n - x) \cdot x^{n-1} && \mid \text{Wir betrachten nicht } x = 0 \text{ (dazu später noch was), } \ldots \\
& && \ldots \text{deswegen können wir } x^{n-1} = 0 \text{ ignorieren, } \ldots \\
& && \ldots \text{und im Fall } n = 1 \text{ gilt } x^{n-1} = 1 \\
\implies & 0 \lessgtr n - x && \mid \text{Schreibweise} \\
\iff & n - x \gtrless 0 && \mid +x, \cdot -1 \\
\iff & x \lessgtr n
\end{aligned}
$$

Somit gilt also $f'(x) > 0$, wenn $x < n$ gilt und $f'(x) < 0$, wenn $x < n$ gilt. Insbesondere gilt $f'(x) = 0$, wenn $x = n$ gilt, was aus einer ähnlichen Umformung folgt (Beachte hier immer noch, dass wir $x = 0$ nicht betrachten, denn

es gilt $\forall x \in \,]-\infty, 0[\, : x \notin dom(f)$ und somit kann 0 nicht innerer Punkt von $dom(f)$ sein und somit kann keine Extremstelle von f vorliegen an 0, da keine Umgebung um 0 existiert).
Aufgrund des Monotoniekriteriums sind die ersten beiden Aussagen, die zu zeigen waren gezeigt, und da $x = n$ die einzige Nullstelle von f' ist, die wir betrachten können, gilt nun auch die dritte Aussage, die zu zeigen war nach Einsatztechnik.
Somit ist alles gezeigt, was zu zeigen war $\square$

Aufgabe 2

Vor.: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \Omega$ ein HP,
$f, g \in \mathbb{C}^{\Omega}$, sodass: $\lim_{\zeta \to z} |f(\zeta)| = +\infty \;\wedge\; \lim_{\zeta \to z}(fg)(\zeta) \in \mathbb{C}$ gilt.
Seien außerdem $(a_n)_n := (f(\zeta_n))_n$ und $(b_n)_n := (g(\zeta_n))_n$ die zugehörigen Funktionswertfolgen.
Beh.: $\lim_{\zeta \to z} g(\zeta) = 0$ (Nach Voraussetzung äquivalent zu: $\lim_n b_n = 0$)
Bew.: Nach der Voraussetzung können wir die angenommenen Aussagen umschreiben in: $\lim_n |a_n| = +\infty$ und $\lim_n (a_n \cdot b_n) \in \mathbb{C}$.
Nach der Mindestindex-Charakterisierung für komplexe Folgen ist die zweite Aussage dann äquivalent zu:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n \cdot b_n - p| < \epsilon$$

wobei $p \in \mathbb{C}$ der Limes ist, zu dem die kombinierte Folge konvergiert.
Betrachte nun folgende Umformung der Ungleichung $|a_n \cdot b_n - p| < \epsilon$ für die

gegebenen Voraussetzungen:

$$
\begin{aligned}
\epsilon \\
&> |a_n \cdot b_n - |p|| && |\ \text{S 4.8 (15): Dreiecksungleichung nach unten} \\
&\geq ||a_n \cdot b_n| - |p|| && |\ \text{S 4.8 (11)} \\
&= ||a_n| \cdot |b_n| - |p||
\end{aligned}
$$

Wir wissen, dass $\forall r > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : r < |a_n|$ gilt, nach Voraussetzung.
Des Weiteren wissen wir, dass $|p| \in \mathbb{R}$ gilt.
Da $||a_n| \cdot |b_n| - |p|| < \epsilon$ gilt, muss $\forall r > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : r > |b_n|$ gelten[1], da $p \in \mathbb{C}$ gilt.
Wenn dies nicht gilt, ist divergiert das Produkt der Folgen, da sonst $\forall r > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : r < |b_n| \cdot |a_n|$ gilt, denn wenn $(|b_n|)_n$ gegen eine Zahl ungleich null konvergiert, gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein n_0, sodass dies gilt.
Somit muss $\lim_n b_n = 0$ gelten, $-$ was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 3

:(

[1]Dies lässt sich durch Satz 2.10 und Satz 2.24 schlussfolgern.
Dies ist ein Kriterium jeder Nullfolge, da es zu $\forall \epsilon : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| < \epsilon$ äquivalent ist