Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 8

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Vor.: $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x^2+x-8}{x^2-2}$,

$I_1 := \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[$,

$I_2 := \left]-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\right[$,

$I_3 := [2-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$I_4 :=]\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$,

$I_5 := [2+\sqrt{2}, +\infty[$,

Beh.: $\text{LMAX}(f) = \{2+\sqrt{2}\},\ \text{LMIN}(f) = \{2-\sqrt{2}\}$,

f ist streng monoton fallend in I_1,

streng monoton fallend in I_2,

streng monoton steigend in I_3,

streng monoton steigend in I_4 und

streng monoton fallend in I_5.

Bew.: Nach Vorlesung ist f differenzierbar in ihrer Domain mit der Ableitung (Quotientenregel): $f'(x) = \frac{(6x+1)\cdot(x^2-2)-(3x^2+x-8)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$. Wenn man dies kürzt indem man alle Klammern auflöst und vereinfacht, ergibt sich: $f'(x) = \frac{-x^2+4x-2}{(x^2-2)^2}$. Nach Satz 3.48 müssen Nullstellen von $f'(x)$ existieren, sodass f Extremstellen haben kann, also suchen wir Lösungen für $f'(x) = 0$.

Betrachte folgende Umformung:

$$
\begin{aligned}
&0 = f'(x) \\
&0 = \frac{-x^2+4x-2}{(x^2-2)^2} && \mid \cdot (x^2-2)^2,\ x \neq \pm\sqrt{2} \\
&\iff 0 = -x^2+4x-2 && \mid \text{Lösung von einer quadratischen Gleichung} \\
&\iff x_{1,2} = \frac{-4}{-2} \pm \frac{\sqrt{16-8}}{-2} && \mid \text{Auswerten} \\
&x_{1,2} = 2 \mp \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Nun wissen wir, dass die Stellen $x = 2 \pm \sqrt{2}$ möglicherweise Extremstellen sein können. Gleichzeitig sind dies die einzigen Stellen, die Extremstellen sein können, aufgrund vom Satz 3.48.

Es gilt:

$$-3 \in I_1 \wedge f'(-3) = -\frac{23}{49} < 0$$

$$-1 \in I_2 \wedge f'(-1) = -\frac{7}{1} < 0$$

$$1 \in I_3 \wedge f'(1) = \frac{1}{1} > 0$$

$$2 \in I_4 \wedge f'(2) = \frac{2}{4} > 0$$

$$4 \in I_5 \wedge f'(4) = -\frac{2}{144} < 0$$

Nach Einsatztechnik folgt die Behauptung.

Damit gilt alles, was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 2

Vor.: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, sodass $f(a) \leq g(a)$ gilt. Des Weiteren seien f, g differenzierbar auf $]a, b[$, sodass $f'(x) \leq g'(x)$ gilt für alle $x \in \,]a, b[$.

Beh.: Es gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$

Bew.: Definiere folgende Hilfsfunktion: $h : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) - f(x)$.

Nach der Voraussetzung gilt folgende Umformung:

$$
\begin{aligned}
& f(a) \leq g(a) && \mid -f(a) \\
\iff & 0 \leq g(a) - f(a) && \mid \text{Einsetzen} \\
\iff & 0 \leq h(a) \\
\iff & h(a) \geq 0
\end{aligned}
$$

Des Weiteren gilt nach der Voraussetzung folgendes für alle $x \in \,]a, b[$:

$$
\begin{aligned}
& f'(x) \leq g'(x) && \mid -f'(x) \\
\iff & 0 \leq g'(x) - f'(x) && \mid \text{Kombinationssatz der Differenzierbarkeit} \\
\iff & 0 \leq h'(x) \\
\iff & h'(x) \geq 0
\end{aligned}
$$

Damit ist h monoton steigend. Also gilt für alle $x \in [a, b] : h(x) \geq h(a) \geq 0$.

Dann gilt $h(x) \geq 0$, und damit folgendes:

$$g(x) - f(x) \geq 0$$
$$\iff g(x) \geq f(x)$$
$$\iff f(x) \leq g(x)$$

Was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 3

Vor.: $(x_n)_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), x_n := \frac{1}{n}$. Sei $(a_n)_n$ die Reihe über $(x_n)_n$

Beh.: Die Aussage gilt nicht. Wir zeigen, dass für $(a_n)_n$ folgendes gilt: $\lim_n(a_{n+1} - a_n) = 0 \wedge \lim_n(a_n) \notin \mathbb{R}$

Bew.: $\lim_n(a_n) = +\infty \notin \mathbb{R}$ folgt aus Satz 2.54.

Betrachte folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
&\lim_n (a_{n+1} - a_n) \\
&= \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right) \\
&= \lim_n \left(\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right) \\
&= \lim_n \frac{1}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit gilt, was zu zeigen war. $\square$