Mathematik für die Informatik B

Serie 3

Abgabe der Hausaufgaben: Fr, 5.05.2023, 23:59 Uhr im OLAT

Benötigtes Vorwissen: Skript bis Kapitel 2 §3 einschließlich; zugehörige Vorlesungen; Globalübung vom 24.04. (siehe ggf. Video).

Bevor Sie mit den Präsenzaufgaben von Serie 3 beginnen, bearbeiten Sie in den Übungen zunächst übrige Präsenzaufgaben von Serie 2!

Es ist OK, wenn Sie Präsenzaufgabe 3 von Serie 3 diese Woche nicht schaffen zu bearbeiten; nehmen Sie aber die Aussage zur Kenntnis!

Präsenzaufgabe 1: Unbestimmte Divergenz

Die Folge $((-1)^n)_n$ divergiert unbestimmt.

Präsenzaufgabe 2: Monotonie des Limes

Wir wissen, dass der Limes monoton ist. Ist er auch streng monoton?

Präsenzaufgabe 3: Inverse Folge

Es sei $(x_n)_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ so, dass $\lim_n x_n = 1$ gilt. Dann gilt $\lim_n \frac{1}{x_n} = 1$.

Hinweis. Man diskutiere zunächst, wie $(\frac{1}{x_n})_n$ überhaupt zu verstehen ist, denn immerhin könnte $(x_n)_n$ den Wert 0 annehmen.

Hausaufgabe 1: Konvergenz oder (un)bestimmte Divergenz (10 Punkte)

Für alle $n \in \mathbb{N}_1$ definiere:

$$x_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ odd} \\ n & n \text{ even} \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, bestimmt divergiert oder unbestimmt divergiert. Formulieren Sie dann Ihr Ergebnis als Behauptung und geben einen Beweis; abzugeben sind nur Behauptung und Beweis.

Hausaufgabe 2: Wurzel aus positiver Konstante (15 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

Es gilt $\lim_n \sqrt[n]{c} = 1$ für alle $c > 0$.

Tipp. Wenn n groß genug ist, gilt $\frac{1}{n} \leq c \leq n$.

Lösung zu Präsenzaufgabe 1

Die Folge $((-1)^n)_n$ divergiert unbestimmt.

Beweis. Es sei $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Wir zeigen $\lim_n (-1)^n \neq p$.

Fall $p = 1$: Definiere $A := B(1, 1)$. Dann gilt $x_n = -1 \notin A$ für alle odd n.

Fall $p = -1$: Definiere $A := B(-1, 1)$. Dann gilt $x_n = 1 \notin A$ für alle even n.

Fall $p \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$: Definiere $\delta := \min\{|1-p|, |-1-p|\} > 0$ und $A := B(p, \delta)$. Dann gilt $1, -1 \notin A$, denn $|1-p| \geq \delta$ und $|-1-p| \geq \delta$. Also liegen alle Komponenten außerhalb von A.

Fall $p = +\infty$: Offenbar liegen alle Komponenten außerhalb von $]1, +\infty]$.

Fall $p = -\infty$: Offenbar liegen alle Komponenten außerhalb von $[-\infty, -1[$. □

Lösung zu Präsenzaufgabe 2

Für alle $n \in \mathbb{N}_1$ definiere $x_n := -\frac{1}{n}$ und $y_n := \frac{1}{n}$. Dann gilt $x_n < y_n$ für alle n und $\lim_n x_n = 0 = \lim_n y_n$.

Beweis. Die Aussage $x_n < y_n$ für alle n ist klar. Wir wissen bereits $\lim_n y_n = 0$; wegen $|-\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ überträgt sich der Beweis auf $(x_n)_n$. □

Lösung zu Präsenzaufgabe 3

Zum Verständnis der inversen Folge. Die gegebene Folge habe die Form $(x_n)_{n \geq \mu}$, also μ sei der Startindex. Definiere:

$$M := \{m \in \mathbb{Z}_\mu \,;\, \forall n \geq m : x_n \neq 0\}$$

Wegen $\lim_n x_n = 1$ ist $M \neq \emptyset$. Die Folge $(\frac{1}{x_n})_n$ ist zu verstehen als $(\frac{1}{x_n})_{n \geq \nu}$, wobei $\nu := \min(M)$ definiert ist. Für die Limesbetrachtung könnte man die Folge aber auch bei jedem Index größer als ν starten lassen.

Zum Konvergenzbeweis.

Es sei $(x_n)_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ so, dass $\lim_n x_n = 1$ gilt. Dann gilt $\lim_n \frac{1}{x_n} = 1$.

Beweis. Definiere:

$$n_1 := n_0(B(1, \tfrac{1}{2}), x) \qquad n_2 := n_0(B(1, \tfrac{\varepsilon}{2}), x)$$

Definiere $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$. Es sei $n \geq n_0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{x_n} - 1\right| = \frac{|1 - x_n|}{|x_n|} \\
&\leq 2|1 - x_n| && n \geq n_1\text{, also } |x_n| > \tfrac{1}{2} \\
&< 2\frac{\varepsilon}{2} && n \geq n_2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\square$