Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 9

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Vor.: $n \in \mathbb{N}_1$, $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n e^{-x}$

$I_1 := [0, n]$, $I_2 := [n, +\infty[$

Beh.: f ist streng monoton steigend in I_1, streng monoton fallend in I_2 und es gilt: $\mathrm{LMAX}(f) = n$

Bew.: f ist über Kombinationssätze der Differenzierbarkeit differenzierbar in $dom(f)$ mit der Ableitung:

$$f'(x) \qquad | \text{ Quotientenregel, Bruchrechnung}$$

$$= nx^{n-1} \cdot e^{-x} + x^n \cdot \frac{-e^x}{(e^x)^2} \qquad | \text{ Bruchrechnung}$$

$$= nx^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot \frac{1}{e^x} \qquad | \text{ Potenzgesetze}$$

$$= nx^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x} \qquad | \text{ Ausklammern}$$

$$= \left(nx^{n-1} - x^n\right) \cdot e^{-x}$$

für jedes $x \in dom(f)$.

Nach der Vorlesung ist bekannt, dass $e^x > 0$ gilt, für $x \in dom(f)$, somit ist für die Suche nach Nullstellen oder für das Vorzeichenverhalten von f' an einer Stelle x der Term "e^{-x}", der in $f'(x)$ liegt, zu vernachlässigen, da somit

auch $e^{-x} = (e^x)^{-1} > 0$ durch die Regeln in angeordneten Körpern gilt.
Wir werden nun die Ungleichungen $f'(x) > 0$ und $f'(x) < 0$ betrachten. Um dies etwas zu verkürzen, schreiben wir "$f'(x) \gtrless 0$" und betrachten damit beide Fälle, also beide Ungleichungen. Um die Bedeutung der Reihenfolge festzulegen, ist $f'(x) \gtrless 0$ äquivalent zu $0 \lessgtr f'(x)$, genau wie der Ausdruck "$a = 1 \pm -1$" äquivalent zu "$a = 1 \mp 1$" ist.
Damit betrachten wir die Ungleichungen, $f'(x) \gtrless 0$:

$$
\begin{aligned}
& f'(x) \gtrless 0 && \mid \text{Schreibweise, Einsetzen, } e^x > 0 \\
\iff & 0 \lessgtr n \cdot x^{n-1} - x^n && \mid \text{Potenzgesetze} \\
\iff & 0 \lessgtr n \cdot x^{n-1} - x \cdot x^{n-1} && \mid \text{Ausklammern} \\
\iff & 0 \lessgtr (n-x) \cdot x^{n-1} && \mid \text{Wir betrachten nicht } x = 0 \text{ (dazu später noch was), } \ldots \\
& && \ldots \text{deswegen können wir } x^{n-1} = 0 \text{ ignorieren, } \ldots \\
& && \ldots \text{und im Fall } n = 1 \text{ gilt } x^{n-1} = 1 \\
\implies & 0 \lessgtr n - x && \mid \text{Schreibweise} \\
\iff & n - x \gtrless 0 && \mid +x, \cdot -1 \\
\iff & x \lessgtr n
\end{aligned}
$$

Somit gilt also $f'(x) > 0$, wenn $x < n$ gilt und $f'(x) < 0$, wenn $x < n$ gilt.
Insbesondere gilt $f'(x) = 0$, wenn $x = n$ gilt, was aus einer ähnlichen Umformung folgt (Beachte hier immer noch, dass wir $x = 0$ nicht betrachten, denn

es gilt $\forall x \in \,]-\infty, 0[\, : x \notin dom(f)$ und somit kann 0 nicht innerer Punkt von $dom(f)$ sein und somit kann keine Extremstelle von f vorliegen an 0, da keine Umgebung um 0 existiert).

Aufgrund des Monotoniekriteriums sind die ersten beiden Aussagen, die zu zeigen waren gezeigt, und da $x = n$ die einzige Nullstelle von f' ist, die wir betrachten können, gilt nun auch die dritte Aussage, die zu zeigen war nach Einsatztechnik.

Somit ist alles gezeigt, was zu zeigen war $\square$

Aufgabe 2

Vor.: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \Omega$ ein HP,

$f, g \in \mathbb{C}^\Omega$, sodass: $\lim_{\zeta \to z} |f(\zeta)| = +\infty \;\wedge\; \lim_{\zeta \to z}(fg)(\zeta) \in \mathbb{C}$ gilt.

Seien außerdem $(a_n)_n := (f(\zeta_n))_n$ und $(b_n)_n := (g(\zeta_n))_n$ die zugehörigen Funktionswertfolgen.

Beh.: $\lim_{\zeta \to z} g(\zeta) = 0$ (Nach Voraussetzung äquivalent zu: $\lim_n b_n = 0$)

Bew.: Nach der Voraussetzung können wir die angenommenen Aussagen umschreiben in: $\lim_n |a_n| = +\infty$ und $\lim_n (a_n \cdot b_n) \in \mathbb{C}$.

Nach der Mindestindex-Charakterisierung für komplexe Folgen ist die zweite Aussage dann äquivalent zu:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n \cdot b_n - p| < \epsilon$$

wobei $p \in \mathbb{C}$ der Limes ist, zu dem die kombinierte Folge konvergiert.

Betrachte nun folgende Umformung der Ungleichung $|a_n \cdot b_n - p| < \epsilon$ für die gegebenen Voraussetzungen:

ϵ

$> |a_n \cdot b_n - |p||$ | S 4.8 (15): Dreiecksungleichung nach unten

$\geq ||a_n \cdot b_n| - |p||$ | S 4.8 (11)

$= ||a_n| \cdot |b_n| - |p||$

Wir wissen, dass ab einem Index die Folge $(|a_n|)_n$ monoton steigend ist.
Des Weiteren wissen wir, dass $|p| \in \mathbb{R}$ gilt.
Somit muss $(|b_n|)_n$ monoton fallend sein, was durch den Betrag nur funktioniert, wenn $(b_n)_n$ gegen null konvergiert.
Hört $(b_n)_n$ auf sich an 0 anzunähren, kann $(|b_n|)_n$ nicht gegen null konvergieren womit es einen Index geben wird, ab dem die kombinierte Folge
(also $(a_n \cdot b_n)_n$) gegen $+\infty$ konvergiert, da sie ab diesem Index wieder anfinge monoton zu steigen.
Damit ist $\lim_n b_n = 0$ gezeigt, − was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 3