

Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 1

Florian Schlösser, Henri Heyden
stu240349, stu240825

Aufgabe 1

Es ist zu zeigen, dass $\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$ eine wahre Aussage ist.

Wir werden dies mithilfe eines direkten Beweises zeigen.

Vorausgesetzt ist, dass $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten.

Des weiteren definieren wir das Aufrunden als Operation für nicht-negative reelle Zahlen: $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \min\{n \in \mathbb{N} | n \geq x\}$

Wir setzen $n := \lceil \frac{2y}{x} \rceil$. Da $n \in \mathbb{N}$ gilt, wird der Term aufgerundet.

Dann gilt folgendes:

| | |
|---|-----------------------------|
| nx | Einsetzen in n |
| $= \left\lceil \frac{2y}{x} \right\rceil x$ | Def. Aufrundung |
| $\geq \frac{2y}{x} x$ | $\frac{1}{x}$ invers zu x |
| $= 2y$ | Satz 1.5 (21) |
| $> y$ | |

Also gilt: $\lceil \frac{2y}{x} \rceil x = nx > y$

Hierdurch wurde gezeigt, dass das Archimedische Axiom gilt. □

Aufgabe 2

Es ist zu zeigen, dass $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < x < b$

Wir werden dies mithilfe eines direkten Beweises zeigen.

Hier ist vorauszusetzen, dass $a, b \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge a < b$ gilt.

Da für alle zwei Zahlen aus \mathbb{R} gilt, dass wenn sie nicht gleich sind, es unendlich viele Zahlen zwischen ihnen gibt, folgern wir, dass es unendlich Zahlen aus \mathbb{R} gibt, die zwischen a und b liegen.

Nun werden wir zeigen, dass es auch unendlich Zahlen x der gesuchten Eigenschaft auch in $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$ gibt.

Wir definieren $x := a + \alpha\sqrt{2}$, wobei α eine rationale Zahl ist, dessen Intervall wir noch bestimmen werden.

Des weiteren gilt, wie in der Vorlesung bewiesen (Satz 1.23), $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Somit gilt: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aufgrund der Definition von x .

Damit $a < x < b$ gilt, müssen wir α so wählen, sodass $a < a + \alpha\sqrt{2} < b$ gilt.

Dazu formen wir die Ungleichungen $a < a + \alpha\sqrt{2}$ und $a + \alpha\sqrt{2} < b$ nach α um:

(1.)

$$a < a + \alpha\sqrt{2} \quad -a$$

$$\iff 0 < \alpha\sqrt{2} \quad : \sqrt{2}$$

$$\iff 0 < \alpha$$

Somit ist die linke exklusive Grenze für $\alpha = 0$.

(2.)

$$\begin{aligned}a + \alpha\sqrt{2} &< b && -a \\ \iff \alpha\sqrt{2} &< b - a && : \sqrt{2} \\ \iff \alpha &< \frac{b-a}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Damit ist die rechte exklusiv Grenze für $\alpha = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$.

Insgesamt schließt sich daraus, dass $\alpha \in (0, \frac{b-a}{\sqrt{2}})_{\mathbb{Q}}$ gilt.

Nun um zu prüfen, dass unsere x nun die geforderte Bedingung erfüllen, setzen wir linke und rechte Grenze in α und zeigen, dass dann $x = a$ und $x = b$ gelten würde:

1. ($\alpha = 0$):

$$\begin{aligned}x &= 0 \cdot \sqrt{2} + a \\ &= a\end{aligned}$$

2. ($\alpha = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$):

$$\begin{aligned}x &= \frac{b-a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + a \\ &= b - a + a \\ &= b\end{aligned}$$

Somit gelte dann $x = a$ bzw. $x = b$, wodurch wir wissen, dass wenn $\alpha \in (0, \frac{b-a}{\sqrt{2}})_{\mathbb{Q}}$ gilt, dass dann $x \in (a, b) \iff a < x < b$ gilt. Da wir schon gezeigt hatten, dass für diese x , $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt, ist somit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge a < x < b$ wahr.

Damit wurde $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < x < b$ gezeigt. \square