# Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 5

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

## Aufgabe 1

**Beh.:** Die Reihe über $\left(c^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\cdot(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ konvergiert absolut.

**Vor.:** $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

**Bew.:** Wir nennen ab sofort $(y_n)_{n\geq 1} := \left(c^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\cdot(n+1)}\right)_{n\geq 1}$.

Betrachte folgende Vereinfachung:

$$c^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\cdot(n+1)} \qquad | \text{ Potenzgesetze}$$

$$= c^n \cdot \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right)^n \qquad | \text{ } c \text{ hereinziehen}$$

$$= \left(c \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right)^n \qquad | \text{ doppelt invertieren}$$

$$= \left(c \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-1}\right)^n \qquad | \text{ Bruch vereinfachen}$$

$$= \left(c \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}\right)^n \qquad | \text{ doppelt invertieren}$$

$$= \left(c \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\right)^n$$

Nach Satz 2.62 (1) konvergiert die Reihe über $y$ absolut, wenn $\lim_n \sqrt[n]{|y_n|} < 1$ gilt. Betrachte folgende Vereinfachung:

$$\lim_n \sqrt[n]{|y_n|} \qquad | \text{ setze ein}$$

$$= \lim_n \sqrt[n]{\left| \left( c \cdot \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^{n+1} \right)^n \right|} \qquad \mid \text{löse Wurzel auf, Potenzgesetze}$$

$$= \lim_n \left| c \cdot \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^{n+1} \right| \qquad \mid \text{Kombinationssätze, Regeln in Beträgen}$$

$$= \lim_n |c| \cdot \lim_n \left| \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^{n+1} \right|$$

Nach Satz 2.39 gilt: $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \in [2,4]$ Wir nennen diesen Limes $d$

Dann gilt weiterhin, da $\frac{1}{n}$ stetig ist (Vorlesung):

$$\lim_n |c| \cdot \lim_n \left| \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^{n+1} \right| \qquad \mid \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 0$$

$$= \lim_n |c| \cdot \lim_n \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^{n+1} \qquad \mid \frac{1}{n} \text{ stetig}$$

$$= \lim_n |c| \cdot \frac{1}{\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \lim_n |c| \cdot \frac{1}{d}$$

$$= |c| \cdot \frac{1}{d}$$

Nun betrachte folgende Überlegegung:

Da $d \in [2,4]$ gilt, gilt $\frac{1}{d} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Beobachte $c \in\, ]-2,2[ \implies |c| \in [0,2[$.

Dann gilt also $|c| \cdot \frac{1}{d} \in [0,1[$ und somit außerdem $|c| \cdot \frac{1}{d} < 1$,

also konvergiert die Reihe über $y$, was zu zeigen war. $\square$

## Aufgabe 2

**Beh.:** $M$ ist weder abgeschlossen, noch offen.

**Vor.:** $M := \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_1\}$

**Bew.:** Wir zeigen, dass nach Vorlesung gilt $M = ]0, 1]$ :

Da $\frac{1}{n}$ stetig (Vorlesung) und monoton fallend (Vorlesung) ist, sowie es gilt, dass $\frac{1}{1} = 1$ gilt und dass $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ gilt, obwohl $\frac{1}{n} \neq 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_1$, gilt für alle Werte in M, dass sie kleiner oder gleich 1 sind oder größer als 0 sind, was genau $]\ 0, 1]$ erfüllt. Nach Satz 3.2 gilt damit, dass $M$ weder abgeschlossen noch offen ist, − was zu zeigen war. $\square$

Wir haben tatsächlich sowas ähnliches in der Vorlesung auch schon angewendet wurde, um beispielsweise eine Folge zu finden, die seinen Limes nicht annimmt, jedoch trotzdem konvergiert.