Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 2

Florian Schlösser, Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240349, stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Es ist zu zeigen, dass $\lim_n \frac{\sqrt{n}}{2^n} = 0$ gilt.

Hierfür werden wir den Sandwichsatz aka. Satz 2.20, anwenden.

Wir nehmen an, dass $n \in \mathbb{N}$ gilt und, dass alle in dieser Bearbeitung erwähnten Folgen wohldefiniert sind.

Für den Sandwichsatz definieren wir die folgenden Folgen:
$(a_n)_n := \left(\frac{n}{2^n}\right)_n$, $(b_n)_n := \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$, $(x_n)_n := \left(\frac{\sqrt{n}}{2^n}\right)_n$.
Nun werden wir zeigen, dass $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ gilt.

In der Präsenzübung wurde gezeigt, dass **(A)** $\lim_n a_n = 0$ gilt,

weswegen wir nur zeigen müssen, dass **(B)** $\lim_n b_n = 0$ gilt damit wir den ersten Teil des Sandwichsatzes erfüllen.

Beobachte, dass $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n = |2^n|$ gilt, da 2^n für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton steigend ist, somit ist nach Satz 2.24 die Aussage **B** äquivalent zu $\lim_n \frac{1}{b_n} = +\infty$

Um $\lim_n \frac{1}{b_n} = \lim_n 2^n = +\infty$ zu zeigen, wenden wir Satz 2.10.c an:

$\lim_n 2^n = +\infty \iff \forall r : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : r < 2^n$.

Wir wissen allgemein, dass $n \geq n_0 \Rightarrow 2^n \geq 2^{n_0}$ gilt, da wie erwähnt 2^n monoton steigend ist. Wähle r beliebig, dann setzen wir $n_0 := |r| + 1$ und wir untersuchen die folgenden Fälle:

Hierfür setzen wir $d := n - n_0$, beobachte, $d \geq 0$ nach den gegebenen Definitionen für n und n_0.

(1.) $r < 0$**:**

Dann gilt: $r < 0 < b_n$, da der minimale Wert für b_n, 1 ist.

(2.) $r \geq 0$**:**

Dann gilt: $r < b_n = 2^n = 2^{n_0+d} = 2^{|r|+1+d} = 2^{r+1+d} = 2 \cdot 2^r \cdot 2^d$,

da $2 \cdot 2^d \geq 2$ und $r \leq 2^r$

Somit wurde $\lim_n \frac{1}{b_n} = +\infty$ gezeigt und damit auch (erinnere **A**), dass $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ gilt.

Nach dem Sandwichsatz müssen wir somit nur noch zeigen, dass

$\forall n \in \mathbb{N} : b_n \leq x_n \leq a_n$ gilt. Betrachte folgende Umformung:

$$\begin{aligned} & b_n \leq x_n \leq a_n \\ \iff & \frac{1}{2^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^n} \leq \frac{n}{2^n} && | \cdot 2^n \\ \iff & 1 \leq \sqrt{n} \leq n \end{aligned}$$

Dies ist wahr für $n \geq 1$, was nach der Beobachtung 2.21 im Skript bedeutet, dass der Sandwichsatz vollständig anwendbar ist, wonach

$\lim_n \frac{\sqrt{n}}{2^n} = \lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ gilt. $\square$

Aufgabe 2

Es ist zu zeigen, dass $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\geq 1}$ konvergiert, wenn wir wissen, dass $(x_k)_{k\geq 1}$ konvergiert. Das heißt es existiert ein Limies der Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\geq 1}$, welche wir folgend m_n nennen werden, der in den reelen Zahlen liegt, wenn dieses Kriterium für die Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ gilt.
Da $(x_k)_{k\geq 1}$ konvergiert, wissen wir nach der Definiton der Konvergenz (2.1.5), dass demnach für diese Folge ein reeler Grenzwert existiert, den wir folgend mit y bezeichnen. Wir schreiben also: $y := \lim_k x_k$.
Wir werden zeigen, dass y unser gesuchter Limes der Folge m_n ist. Hiermit würden wir wissen, dass damit der Grenzwert von m_n auch in $\mathbb{R}$ liegt, wodurch nach der Definiton der Konvergenz die Folge m_n konvergiert.
Nach Satz 2.10.b ist hiermit zu zeigen: $\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |m_n - y| < \epsilon$.
Wähle ϵ beliebig größer 0. Setze $n_0 := \left\lceil \frac{n_1 \cdot t}{\epsilon} \right\rceil$. Wir werden zeigen, wie wir auf dieses n_0 kommen, und warum es sich eignet.
Bei der folgenden Umformung ist zu beachten, dass mit n_1 der Mindestwertindex der Folge $(x_k)_k$ ist, sodass diese das Epsilon Kriterium erfüllt:

$$
\begin{aligned}
& |m_n - y| && \mid \text{Einsetzen in } m_n \\
= & \left| -y + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \right| && \mid \text{Def. Inverses} \\
= & \left| n \cdot \frac{1}{n} \cdot (-y) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \right| && \mid n \cdot y = \sum_{k=1}^{n} y \\
= & \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - y) \right| && \mid \frac{1}{n} \text{ positiv, da } n > 0 \\
= & \frac{1}{n} \cdot \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - y) \right| && \mid \text{Dreiecksungleichung (Satz 2.2.6)}
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k - y| \qquad | \text{ Spalte die Summe am Punkt } n_1$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n_1-1} |x_k - y| + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n_1}^{n} |x_k - y| \qquad | \text{ beobachte } |x_k - y| < \epsilon$$

$$< \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n_1-1} |x_k - y| + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n_1}^{n} \epsilon$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n_1-1} |x_k - y| + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \epsilon$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n_1-1} |x_k - y| + \epsilon$$

Beobachte, dass die Summe aus endlich vielen Summanden besteht. Von diesen Summanden existiert ein Maximum.

Wir nennen es t mit $t := max\Big\{|x_\alpha - y|\Big|\alpha \in [1, n_1]_{\mathbb{N}}\Big\}$, dann gilt:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n_1-1} |x_k - y| + \epsilon \quad | \text{ Setze t ein und erweitere die Summe bis auf } n_1 \text{ statt } n_1 - 1$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n_1} t + \epsilon \qquad | \text{ Löse die Summe auf}$$

$$= \frac{n_1 \cdot t}{n} + \epsilon$$

Wir werden nun zeigen, dass $\frac{n_1 \cdot t}{n} \leq \epsilon$ gilt, wenn $n_0 := \left\lceil \frac{n_1 \cdot t}{\epsilon} \right\rceil$ gesetzt ist. Wir Betrachten $n := n_0$:

$$\frac{n_1 \cdot t}{n} \qquad n_0 = n$$

$$= \frac{n_1 \cdot t}{n_0} \qquad | \text{ Setze } n_0 \text{ ein}$$

$$= \frac{n_1 \cdot t}{\left(\frac{n_1 \cdot t}{\epsilon}\right)} \qquad | \text{ Bruchrechnung}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\epsilon \cdot n_1 \cdot t}{n_1 \cdot t} && | \text{ Bruchrechnung} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

Da es hier gilt, gilt $\frac{n_1 \cdot t}{n} \leq \epsilon$ auch für $n > n_0$, da dann $\frac{n_1 \cdot t}{n} < \frac{n_1 \cdot t}{n_0}$ gilt.
Insgesamt gilt damit: $\frac{n_1 \cdot t}{n} + \epsilon \leq 2 \cdot \epsilon$.
Hierdurch haben wir gezeigt, dass $|m_n - y| < 2 \cdot \epsilon$ gilt. Nun beobachte, dass nach der Definiton des Epsilon Kriterium's $|m_n - y| < \epsilon$ gelten soll, angenommen $\epsilon > 0$ gelte. Beobachte aber, dass angenommen $\epsilon_1 > 0$ gelte, dass dann mit $2 \cdot \epsilon_1$ alle Zahlen die durch alleine $\epsilon_0 > 0$ darstellbar sind, auch durch $2 \cdot \epsilon_1$ darstellbar sind, es werden nur unterschiedliche Eingabewerte für die beiden ϵ gewählt mit $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{2}$, angenommen $\epsilon_0 = 2 \cdot \epsilon_1$ sollte gelten.
Durch diese Beobachtung ließe sich sogar zeigen, dass man das Epsilon Kriterium erweitern kann, sodass man nur ein positives Vielfaches von ϵ größer haben müsse (mit $\epsilon > 0$ beliebig) für die Differenz zwischen Limes und Folge, was wir aber nicht tun werden, weil wir uns hier nur das doppelte Vielfache von ϵ interessieren und dies schon gezeigt wurde.
Damit erfülllt die Folge $m_n - y$ das "2-fache Epsilon Kriterium", das heißt $\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |m_n - y| < 2 \cdot \epsilon$ gilt mit y als dem Limes der Folge $(x_k)_{k \geq n_1}$.
Damit wissen wir, dass die Folge $(m_n)_{n \geq n_0}$ konvergiert zu y. $\square$