

Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Beh.: Für $n \in \text{even}_1$ ist f differenzierbar und für $n \in \text{odd}$ ist f differenzierbar für alle $x > 0$.

Bew.: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_1$ gilt, dass es entweder in $\text{odd} = \{2a+1 | a \in \mathbb{N}\}$ oder in $\text{even}_1 = \{2a | 2a \geq 1 \wedge a \in \mathbb{N}\}$ liegt.

Wir schreiben even_1 , da n aus \mathbb{N}_1 gesucht sind.

Hiermit können wir die folgenden Fallunterscheidungen für ein zu überprüfendes n eröffnen:

A: Es gelte $n \in \text{odd}$ und **B:** Es gelte $n \in \text{even}_1$.

Beide Fälle werden wir im Folgenden betrachten:

Erster Fall: A

Gelte $n \in \text{odd}$ ließe sich n schreiben als $2a + 1$ für $a \in \mathbb{N}$. Dann gelte für f_n folgendes:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{x}^n && | \ n \in \text{odd} \\ &= \sqrt{x}^{2a+1} && | \ \text{Potenzgesetze} \\ &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}^{2a} && | \ \text{Vereinfache} \\ &= \sqrt{x} \cdot x^a \end{aligned}$$

Dann gilt: $f_n(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^a + \sqrt{x} \cdot ax^{a-1}$ nach der Ableitung der Wurzel (3.45), der Ableitung eines Polynoms (3.42) und der Produktregel (3.41).

Bemerke, dass gilt: $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)' = +\infty$ gilt (folgt aus den Kombinationsätzen), und somit konvergiert der Differenzenquotient von f_n nicht an der Stelle 0, womit f_n an dieser Stelle für $n \in \text{odd}$ nicht differenzierbar ist.

$x = 0$ ist die einzige Stelle bei der f_n nicht differenzierbar ist, da für $x > 0$, $f_n(x)' \in \mathbb{R}$ gilt, was aus den verwendeten Operationen in $f_n(x)'$ folgt.

Zweiter Fall: B

Gelte $n \in \text{even}_1$ ließe sich n schreiben als $2a$ für $a \in \mathbb{N}_1$. Dann gelte für f_n folgendes:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{x}^n && | \ n \in \text{even}_1 \\ &= \sqrt{x}^{2a} && | \text{ Vereinfache} \\ &= x^a \end{aligned}$$

Nach der Ableitung eines Polynoms (3.42) ist dann f_n in jeder Stelle differenzierbar mit $f_n(x)' = a \cdot x^{a-1}$ für $n \in \text{even}_1$.

Aus beiden Fallunterscheidungen folgt somit, dass für $n \in \text{even}_1$ ist f differenzierbar und für $n \in \text{odd}$ ist f differenzierbar für alle $x > 0$,

– was zu zeigen war. □

Aufgabe 3

Beh.: Die Aussage aus der Aufgabenstellung gilt nicht, das heißt es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, +\infty] \rightarrow [b, +\infty]$ so, dass f differenzierbar und streng monoton steigend ist und gleichzeitig $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$ gilt.

Vor.: $a = b = 0$, $f : [a, +\infty] \rightarrow [b, +\infty]$, $x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Bew.: Nach Satz 3.42 können wir eine rationale Funktion wie unser f ableiten. Hierfür wenden wir ein mal den Quotientensatz an und bekommen $f(x)' = \frac{1}{(x+1)^2}$. Dies macht f differenzierbar in jedem Punkt, denn schließlich gilt für jedes x aus unserer Domain ($x \geq 0$), dass der untere Term der Ableitung nicht 0 werden kann und sonst nimmt die Ableitung auch nur Werte aus \mathbb{R} an.

Nun zeigen wir noch, dass f auch streng monoton steigend ist.

Nach dem Monotoniekriterium in Satz 3.53 zeigen wir, dass für f im Intervall ihrer Domain ihre Ableitung nur Positive Werte annimmt.

Wir zeigen also: $\forall x \geq 0 : f(x)' > 0$. Betrachte folgende Beobachtung:

Gilt $x \geq 0$, dann gilt $x + 1 > 0$. Dann folgt aus den Regeln in angeordneten Körpern, dass $(x + 1)^2 > 0$ gilt und daraus, dass $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$ gilt.

Somit gilt: $\forall x \geq 0 : f(x)' > 0$, also ist f streng monoton steigend.

Nun haben wir alle Voraussetzungen (der Aufgabenstellung) erfüllt, also werden wir zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$ für unseres f gilt.

Betrachte somit folgende Auflösung des Limes¹:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} && | \text{ Bruchrechnung} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) && | \text{ Kombinationssätze} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} && | \text{ Stetigkeit von } \frac{1}{x}, \text{ auswerten} \\
 &= 1 - \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1} && | \text{ Kombinationssatz, auswerten, Schreibweise} \\
 &= 1 - \frac{1}{+\infty+1} && | \text{ Schreibweise} \\
 &= 1 - \frac{1}{+\infty} && | \text{ Auswerten} \\
 &= 1 - 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Da $1 \neq +\infty$ gilt, ist somit gezeigt, was zu zeigen war. □

Ich hab noch eine kleine Frage zu L^AT_EX: Man sieht im vierten Schritt unserer Auswertung in den Schrittbeurteilungen, dass es eng wird. Die Fußnote 1 hätte ich auch eigentlich lieber in die Umformung selbst gebracht, aber der Platz geht aus. Die wäre kein Problem, wenn es Zeilenumbrüche gäbe in flalign*, aber es scheint nicht so, da die Elemente sonst "von dem Blatt rutschen". Gibt es hierfür eine elegante Lösung? Ich benutze TeX Live.

¹Die Gleichheit beim ersten Schritt sieht man leicht, indem man beide Seiten von $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ mit $x+1$ multipliziert. Der Fall $x = -1$ tritt unter unseren Bedingungen nicht auf