Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Beh.: Für $n \in even_1$ ist f differenzierbar und für $n \in odd$ ist f differenzierbar für alle $x > 0$.

Bew.: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_1$ gilt, dass es entweder in $odd = \{2a+1 | a \in \mathbb{N}\}$ oder in $even_1 = \{2a | 2a \geq 1 \wedge a \in \mathbb{N}\}$ liegt.
Wir schreiben $even_1$, da n aus $\mathbb{N}_1$ gesucht sind.
Hiermit können wir die folgenden Fallunterscheidungen für ein zu überprüfendes n eröffnen:
A: Es gelte $n \in odd$ und **B**: Es gelte $n \in even_1$.
Beide Fälle werden wir im Folgenden betrachten:

Erster Fall: A

Gelte $n \in odd$ ließe sich n schreiben als $2a + 1$ für $a \in \mathbb{N}$. Dann gelte für f_n folgendes:

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \sqrt{x}^n && | \; n \in odd \\
&= \sqrt{x}^{2a+1} && | \text{ Potenzgesetze} \\
&= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}^{2a} && | \text{ Vereinfache} \\
&= \sqrt{x} \cdot x^a
\end{aligned}
$$

Dann gilt: $f_n(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^a + \sqrt{x} \cdot ax^{a-1}$ nach der Ableitung der Wurzel (3.45), der Ableitung eines Polynoms (3.42) und der Produktregel (3.41).
Bemerke, dass gilt: $\lim_{x \to 0} f_n(x)' = +\infty$ gilt (folgt aus den Kombinationssätzen), und somit konvergiert der Differenzenquotient von f_n nicht an der Stelle 0, womit f_n an dieser Stelle für $n \in odd$ nicht differenzierbar ist.
$x = 0$ ist die einzige Stelle bei der f_n nicht differenzierbar ist, da für $x > 0$, $f_n(x)' \in \mathbb{R}$ gilt, was aus den verwendeten Operationen in $f_n(x)'$ folgt.

Zweiter Fall: B

Gelte $n \in even_1$ ließe sich n schreiben als $2a$ für $a \in \mathbb{N}_1$. Dann gelte für f_n folgendes:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{x}^n && \mid n \in even_1 \\ &= \sqrt{x}^{2a} && \mid \text{Vereinfache} \\ &= x^a \end{aligned}$$

Nach der Ableitung eines Polynoms (3.42) ist dann f_n in jeder Stelle differenzierbar mit $f_n(x)' = a \cdot x^{a-1}$ für $n \in even_1$.

Aus beiden Fallunterscheidungen folgt somit, dass für $n \in even_1$ ist f differenzierbar und für $n \in odd$ ist f differenzierbar für alle $x > 0$,
– was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 2

Beh.: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $x \in \Omega$ ein HP von Ω. Dann gilt:

f ist differenzierbar **(1)**

$\iff \exists q \in \mathbb{R}^{\Omega}, q$ ist stetig in $x : \forall \xi \in \Omega : f(\xi) = f(x) + q(\xi) \cdot (\xi - x)$ **(2)**

Bew.: Um die Äquivalenz beider Aussagen zu zeigen, werden wir den Beweis aufteilen in die Richtungen **(1)** $\implies$ **(2)** und **(2)** $\implies$ **(1)**.

Richtung (1) $\implies$ (2)

Sei also angenommen: $\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} \in \mathbb{R}$.

Wir wissen nach Satz 3.36, dass hiermit f stetig ist.

Definiere folgende Funktionen:

$h : \Omega \to \mathbb{R}, \xi \mapsto f(\xi) - f(x)$ und $\tilde{h} : \Omega \to \mathbb{R}, \xi \mapsto \xi - x$. Dann sind h und $\tilde{h}$ stetig in x nach Satz 3.20 und der Differenzierbarkeit von Polynomen.

Definiere eine weitere Funktion:

$q : \Omega \to \mathbb{R}, \xi \mapsto \begin{cases} \frac{h(\xi)}{\tilde{h(\xi)}} & \xi \neq x \\ f'(x) & \xi = x \end{cases}$

Zuerst zeigen wir, dass q, wenn $\xi \neq x$ gilt, stetig ist in ξ.

Wenn $\xi \neq x$ gilt, kann $\frac{h(\xi)}{\tilde{h(\xi)}}$ nicht undefiniert sein, also könnte sie stetig sein.

Da h und $\tilde{h}$ stetig sind, ist nach Satz 3.20 q auch stetig in ξ im Fall $\xi \neq x$.

Dann gilt für alle $\xi \neq x$ folgendes:

$$q(\xi) = \frac{h(\xi)}{\tilde{h(\xi)}} \qquad | \text{ Einsetzen}$$

$$q(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \qquad | \cdot(\xi - x)$$

$$\iff q(\xi) \cdot (\xi - x) = f(\xi) - f(x) \qquad | +f(x)$$

$$\iff f(\xi) = f(x) + q(\xi) \cdot (\xi - x)$$

Somit erfüllt q für $\xi \neq x$ die gewünschten Eigenschaften: **(2)**.

Betrachte somit den anderen Fall: Wir zeigen, dass $q(\xi)$ für $\xi = x$ stetig ist und dann auch die anderen Eigenschaften von **(2)** gelten.

Wenn $\xi = x$ gilt, gilt folgendes:

$$\lim_{\xi \to x} q(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = f'(x) = q(\xi) = q(x)$$

Dies macht q stetig in x.

Des Weiteren gilt dann auch

$$f(\xi) = q(\xi) \cdot (\xi - x) + f(x)$$

da $f(\xi) = f(x)$ und $\xi - x = 0$ gelten.

Also gilt für $\xi = x$ die Aussage **(2)**

Somit gilt für alle $\xi \in \Omega$ die Aussage **(2)** und diese Richtung ist abgeschlossen.

Richtung (2) $\implies$ (1)

Sei also angenommen: q ist stetig in x und es gilt: $f(\xi) = f(x) + q(\xi) \cdot (\xi - x)$, $\xi \neq x$. [1]

Betrachte folgende Umformung:

$$
\begin{aligned}
& f(\xi) = f(x) + q(\xi) \cdot (\xi - x) && \mid -f(x) \\
\iff & f(\xi) - f(x) = q(\xi) \cdot (\xi - x) && \mid \cdot \frac{1}{\xi - x}, \text{ angenommen } x \neq \xi \\
\iff & \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = q(\xi) \\
\implies & \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} q(\xi) && \mid \text{q ist stetig in } x \\
\iff & \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = q(x) \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Also liegt der Differenzenquotient von $f(x)$ in $\mathbb{R}$. Somit ist f differenzierbar in x.

Angenommen $x = \xi$ gilt, dann können wir beide Seiten nicht durch $\xi - x$ teilen und dieser Beweis funktioniert nicht. Uns wurde in einer Präsenzübung sogar gesagt, dass das dann überhaupt nicht gilt. Deswegen würde ich argumentieren, dass wir ξ so beschränken, dass es nicht x sein darf. Die Begründung aus der Präsenzübung warum $x = \xi$ nicht gelten darf war, dass dann für ein Folgenglied von einer Folge $(\xi_n)_n$, $\xi_n = x$ gelte, was jedoch nicht sein darf, wenn wir einen Funktionslimes betrachten wollen, der etwas für die Differenzierbarkeit aussagen soll, wie bei der Definition von Differenzierbarkeit im

[1] Zum Fall $\xi = x$ sagen wir gleich noch etwas

Skript.

Diese Begründung sehen wir ein und sind deswegen davon überzeugt, dass **(2)** $\implies$ **(1)**, **nur** für alle $\xi \in \Omega \setminus \{x\}$ gelten kann.[2]

Insgesamt sind nun beide Richtungen gezeigt, das heißt es gilt was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 3

Beh.: Die Aussage aus der Aufgabenstellung gilt nicht, das heißt es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, +\infty] \to [b, +\infty]$ so, dass f differenzierbar und streng monoton steigend ist und gleichzeitig $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$ gilt.

Vor.: $a = b = 0$, $f : [a, +\infty] \to [b, +\infty], x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Bew.: Nach Satz 3.42 können wir eine rationale Funktion wie unser f ableiten. Hierfür wenden wir ein mal den Quotenentensatz an und bekommen $f(x)' = \frac{1}{(x+1)^2}$. Dies macht f differenzierbar in jedem Punkt, denn schließlich gilt für jedes x aus unserer Domain ($x \geq 0$), dass der untere Term der Ableitung nicht 0 werden kann und sonst nimmt die Ableitung auch nur Werte aus $\mathbb{R}$ an.

Nun zeigen wir noch, dass f auch streng monoton steigend ist.

Nach dem Monotoniekriterum in Satz 3.53 zeigen wir, dass für f im Intervall ihrer Domain ihre Ableitung nur Positive Werte annimmt.

Wir zeigen also: $\forall x > 0 : f(x)' > 0$. Betrachte folgende Beobachtung:

Gilt $x > 0$, dann gilt $x + 1 > 0$. Dann folgt aus den Regeln in angeordneten

[2] Wir haben in der Behauptung dieses Beweises die Aussage nicht bearbeitet, da wir nicht für Verwirrung sorgen wollten.

Körpern, dass $(x+1)^2 > 0$ gilt und daraus, dass $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$ gilt.

Somit gilt: $\forall x > 0 : f(x)' > 0$, also ist f streng monoton steigend.

Nun haben wir alle Voraussetzungen (der Aufgabenstellung) erfüllt, also werden wir zeigen, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$ für unser f gilt.

Betrachte somit folgende Auflösung des Limetes[3]:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} && \mid \text{Bruchrechnung} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) && \mid \text{Kombinationssätze} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} && \mid \text{Stetigkeit von } \frac{1}{x+1} \text{ für } x \geq 0 \\
&= 1 - \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}(x+1)} && \mid \text{Kombinationssatz, auswerten, Schreibweise} \\
&= 1 - \frac{1}{+\infty + 1} && \mid \text{Schreibweise} \\
&= 1 - \frac{1}{+\infty} && \mid \text{Auswerten nach Schreibweise} \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Da $1 \neq +\infty$ gilt, ist somit gezeigt, was zu zeigen war. □

[3] Die Gleichheit beim ersten Schritt sieht man leicht, indem man beide Seiten von $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ mit $x+1$ multipliziert. Der Fall $x = -1$ tritt unter unseren Bedingungen nicht auf

Ich hab noch eine kleine Frage zu LaTeX: Man sieht im vierten Schritt unserer Auswertung in den Schrittbegründungen, dass es eng wird. Die Fußnote 1 hätte ich auch eigentlich lieber in die Umformung selbst gebracht, aber der Platz geht aus. Die wäre kein Problem, wenn es Zeilenumbrüche gäbe in flalign*, aber es scheint nicht so, da die Elemente sonst "von dem Blatt rutschen". Gibt es hierfür eine elegante Lösung? Ich benutze TeX Live.