Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Beh.: Für $n \in even_1$ ist f differenzierbar und für $n \in odd$ ist f differenzierbar für alle $x > 0$.

Bew.: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_1$ gilt, dass es entweder in $odd = \{2a+1 | a \in \mathbb{N}\}$ oder in $even_1 = \{2a | 2a \geq 1 \wedge a \in \mathbb{N}\}$ liegt.

Wir schreiben $even_1$, da n aus $\mathbb{N}_1$ gesucht sind.

Hiermit können wir die folgenden Fallunterscheidungen für ein zu überprüfendes n eröffnen:

A: Es gelte $n \in odd$ und **B**: Es gelte $n \in even_1$.

Beide Fälle werden wir im Folgenden betrachten:

Erster Fall: A

Gelte $n \in odd$ ließe sich n schreiben als $2a + 1$ für $a \in \mathbb{N}$. Dann gelte für f_n folgendes:

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \sqrt{x}^n && | \ n \in odd \\
&= \sqrt{x}^{2a+1} && | \text{ Potenzgesetze} \\
&= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}^{2a} && | \text{ Vereinfache} \\
&= \sqrt{x} \cdot x^a
\end{aligned}
$$

Dann gilt: $f_n(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^a + \sqrt{x} \cdot ax^{a-1}$ nach der Ableitung der Wurzel (3.45), der Ableitung eines Polynoms (3.42) und der Produktregel (3.41).

Bemerke, dass gilt: $\lim_{x\to 0} f_n(x)' = +\infty$ gilt, und somit konvergiert der Differenzenquotient von f_n nicht an der Stelle 0, womit f_n an dieser Stelle für $n \in odd$ nicht differenzierbar ist.

$x = 0$ ist die einzige Stelle bei der f_n nicht differenzierbar ist, da für $x > 0$, $f_n(x)' \in \mathbb{R}$ gilt, was aus den verwendeten Operationen in $f_n(x)'$ folgt.

Zweiter Fall: B

Gelte $n \in even_1$ ließe sich n schreiben als $2a$ für $a \in \mathbb{N}_1$. Dann gelte für f_n folgendes:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{x}^n && \mid n \in even_1 \\ &= \sqrt{x}^{2a} && \mid \text{Vereinfache} \\ &= x^a \end{aligned}$$

Nach der Ableitung eines Polynoms (3.42) ist dann f_n in jeder Stelle differenzierbar mit $f_n(x)' = a \cdot x^{a-1}$ für $n \in even_1$.

Aus beiden Fallunterscheidungen folgt somit, dass für $n \in even_1$ ist f differenzierbar und für $n \in odd$ ist f differenzierbar für alle $x > 0$,

– was zu zeigen war. $\square$