

Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 9

Henri Heyden, Ali Galip Altun

stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Vor.: $n \in \mathbb{N}_1$, $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n e^{-x}$

$I_1 := [0, n]$, $I_2 := [n, +\infty[$

Beh.: f ist streng monoton steigend in I_1 , streng monoton fallend in I_2 und es gilt: $\text{LMAX}(f) = n$

Bew.: f ist über Kombinationssätze der Differenzierbarkeit differenzierbar in $\text{dom}(f)$ mit der Ableitung:

$f'(x)$ | Quotientenregel, Bruchrechnung

$$= nx^{n-1} \cdot e^{-x} + x^n \cdot \frac{-e^x}{(e^x)^2} \quad | \text{ Bruchrechnung}$$

$$= nx^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot \frac{1}{e^x} \quad | \text{ Potenzgesetze}$$

$$= nx^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x} \quad | \text{ Ausklammern}$$

$$= (nx^{n-1} - x^n) \cdot e^{-x}$$

für jedes $x \in \text{dom}(f)$.

Nach der Vorlesung ist bekannt, dass $e^x > 0$ gilt, für $x \in \text{dom}(f)$, somit ist für die Suche nach Nullstellen oder für das Vorzeichenverhalten von f' an einer Stelle x der Term " e^{-x} ", der in $f'(x)$ liegt, zu vernachlässigen, da somit

auch $e^{-x} = (e^x)^{-1} > 0$ durch die Regeln in angeordneten Körpern gilt.

Wir werden nun die Ungleichungen $f'(x) > 0$ und $f'(x) < 0$ betrachten. Um dies etwas zu verkürzen, schreiben wir " $f'(x) \gtrless 0$ " und betrachten damit beide Fälle, also beide Ungleichungen. Um die Bedeutung der Reihenfolge festzulegen, ist $f'(x) \gtrless 0$ äquivalent zu $0 \lesseqgtr f'(x)$, genau wie der Ausdruck " $a = 1 \pm -1$ " äquivalent zu " $a = 1 \mp 1$ " ist.

Damit betrachten wir die Ungleichungen, $f'(x) \gtrless 0$:

$$f'(x) \gtrless 0 \quad | \text{ Schreibweise, Einsetzen, } e^x > 0$$

$$\iff 0 \lesseqgtr n \cdot x^{n-1} - x^n \quad | \text{ Potenzgesetze}$$

$$\iff 0 \lesseqgtr n \cdot x^{n-1} - x \cdot x^{n-1} \quad | \text{ Ausklammern}$$

$$\iff 0 \lesseqgtr (n - x) \cdot x^{n-1} \quad | \text{ Wir betrachten nicht } x = 0 \text{ (dazu später noch was), } \dots$$

\dots deswegen können wir $x^{n-1} = 0$ ignorieren, \dots

\dots und im Fall $n = 1$ gilt $x^{n-1} = 1$

$$\implies 0 \lesseqgtr n - x \quad | \text{ Schreibweise}$$

$$\iff n - x \gtrless 0 \quad | \text{ } +x, \cdot -1$$

$$\iff x \lesseqgtr n$$

Somit gilt also $f'(x) > 0$, wenn $x < n$ gilt und $f'(x) < 0$, wenn $x > n$ gilt.

Insbesondere gilt $f'(x) = 0$, wenn $x = n$ gilt, was aus einer ähnlichen Umformung folgt (Beachte hier immer noch, dass wir $x = 0$ nicht betrachten, denn

es gilt $\forall x \in]-\infty, 0[: x \notin \text{dom}(f)$ und somit kann 0 nicht innerer Punkt von $\text{dom}(f)$ sein und somit kann keine Extremstelle von f vorliegen an 0, da keine Umgebung um 0 existiert).

Aufgrund des Monotoniekriteriums sind die ersten beiden Aussagen, die zu zeigen waren gezeigt, und da $x = n$ die einzige Nullstelle von f' ist, die wir betrachten können, gilt nun auch die dritte Aussage, die zu zeigen war nach Einsatztechnik.

Somit ist alles gezeigt, was zu zeigen war □

Aufgabe 2

Vor.: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \Omega$ ein HP,

$f, g \in \mathbb{C}^\Omega$, sodass: $\lim_{\zeta \rightarrow z} |f(\zeta)| = +\infty \wedge \lim_{\zeta \rightarrow z} (fg)(\zeta) \in \mathbb{C}$ gilt.

Seien außerdem $(a_n)_n := (f(\zeta_n))_n$ und $(b_n)_n := (g(\zeta_n))_n$ die zugehörigen Funktionswertfolgen.

Beh.: $\lim_{\zeta \rightarrow z} g(\zeta) = 0$ (Nach Voraussetzung äquivalent zu: $\lim_n b_n = 0$)

Bew.: Nach der Voraussetzung können wir die angenommenen Aussagen umschreiben in: $\lim_n |a_n| = +\infty$ und $\lim_n (a_n \cdot b_n) \in \mathbb{C}$.

Nach der Mindestindex-Charakterisierung für komplexe Folgen ist die zweite Aussage dann äquivalent zu:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n \cdot b_n - p| < \epsilon$$

wobei $p \in \mathbb{C}$ der Limes ist, zu dem die kombinierte Folge konvergiert.

Betrachte nun folgende Umformung der Ungleichung $|a_n \cdot b_n - p| < \epsilon$ für die

gerade genannten Voraussetzungen:

ϵ

$$> |a_n \cdot b_n - |p|| \quad | \text{ S 4.8 (15): Dreiecksungleichung nach unten}$$

$$\geq ||a_n \cdot b_n| - |p|| \quad | \text{ S 4.8 (11)}$$

$$= ||a_n| \cdot |b_n| - |p||$$

Wir wissen, dass $\forall r > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : r < |a_n|$ gilt, nach Voraussetzung.

Des Weiteren wissen wir, dass $|p| \in \mathbb{R}$ gilt.

Da $||a_n| \cdot |b_n| - |p|| < \epsilon$ gilt, muss $\forall r > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : r > |b_n|$ gelten¹, da $p \in \mathbb{C}$ gilt.

Wenn dies nicht gilt, ist divergiert das Produkt der Folgen, da sonst $\forall r > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : r < |b_n| \cdot |a_n|$ gilt, denn wenn $(|b_n|)_n$ gegen eine Zahl ungleich null konvergiert, gibt es nach dem Archimedisches Axiom ein n_0 , sodass dies gilt.

Somit muss $\lim_n b_n = 0$ gelten, – was zu zeigen war. \square

Aufgabe 3

Keine Zeit mehr...

¹Dies lässt sich durch Satz 2.10 und Satz 2.24 schlussfolgern.
Dies ist ein Kriterium jeder Nullfolge, da es zu $\forall \epsilon : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| < \epsilon$ äquivalent ist