Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Beh.: Die Reihe über $\left(\frac{c^n}{n!}\right)_n$ konvergiert absolut.

Vor.: $n \in \mathbb{N}, c > 0$

Bew.: Nach dem Quotientenkriterium (Limes-Version) ist zu zeigen, dass $\lim_n \left| \frac{\left(\frac{c^n}{n!}\right)}{\left(\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}\right)} \right| < 1$ gilt.
Betrachte hierfür folgende Vereinfachung:

$$\lim_n \left| \frac{\left(\frac{c^n}{n!}\right)}{\left(\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}\right)} \right| \qquad | \text{ Def. Potenz und Def. Fakultät}$$

$$= \lim_n \left| \frac{\left(\frac{c \cdot c^{n-1}}{n \cdot (n-1)!}\right)}{\left(\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}\right)} \right| \qquad | \text{ Bruchrechnung}$$

$$= \lim_n \left| \frac{c}{n} \cdot \frac{\left(\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}\right)}{\left(\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}\right)} \right| \qquad | \text{ kürzen}$$

$$= \lim_n \left| \frac{c}{n} \right| \qquad | \text{ n} > 0\text{, c} > 0$$

$$= \lim_n \frac{c}{n} \qquad | \text{ Kombinationssätze, } \lim_n c = c$$

$$= c \cdot \lim_n \frac{1}{n} \qquad | \text{ Auswerten}$$

$$= c \cdot 0$$

$$= 0$$

$$< 1$$

Damit gilt, was zu zeigen war, also konvergiert die Reihe über $\left(\frac{c^n}{n!}\right)_n$ absolut.

$\square$

Aufgabe 2

Beh.: Für zwei stetige Funktionen gilt, dass ihre Summenfunktion auch stetig ist.

Vor.: $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $\quad f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ stetig, $\quad x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Bew.: Nach Aufgabenstellung werden wir das ϵ-δ-Kriterium anwenden:

Dann ist zu zeigen:

$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi \in B(x, \delta) \cap \Omega : f(\xi) + g(\xi) \in B(f(x) + g(x), \epsilon)$

Dies ist äquivalent zu:

$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi \in B(x, \delta) \cap \Omega : |f(\xi) + g(\xi) - f(x) - g(x)| < \epsilon$

Nach Vorrausetzung gilt unter den betrachteten Quantor-Vorsätzen:

$|f(\xi) - f(x)| < \epsilon$ und $|g(\xi) - g(x)| < \epsilon$.

Nach Vorlesung dürfen wir dann auch schreiben:

$|f(\xi) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|g(\xi) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$

Dann gilt: $|f(\xi) - f(x)| + |g(\xi) - g(x)| < \epsilon$.

Nach der Dreieckungleichung gilt:

$|f(\xi) - f(x)| + |g(\xi) - g(x)| \geq |f(\xi) - f(x) + g(\xi) - g(x)|$.

Damit gilt: $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi \in B(x, \delta) \cap \Omega : |f(\xi) + g(\xi) - f(x) - g(x)| < \epsilon$

– Was zu zeigen war. $\square$

(Bei langen prädikatenlogischen Aussagen und Begründungen der Schritte ist es leider etwas schwerer flalign zu verwenden.)