Mathematik für die Informatik B - Hausaufgabenserie 3

Florian Schlösser, Henri Heyden, Ali Galip Altun
stu240349, stu240825, stu242631

Aufgabe 1

Behauptung: $(x_n)_{n\geq 1}$ divergiert unbestimmt.

Voraussetzung: $odd := \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}, even := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beweis: Nehme an, $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiere oder divergiere bestimmt. Demnach müsse gelten, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ einen Limes habe, den wir p nennen werden.

Definiere hierzu die Teilfolgen $(a_n)_{n\geq 1} := (x_{2n+1})_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1} := (x_{2n})_{n\geq 1}$ von x (es ist leicht zu sehen, dass $2n+1$ und $2n$ strenge monotone Abbildungen von n sind für $n \in \mathbb{N}$).

Beobachte, dass nach den Definitionen von *odd* und *even*, $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n$ gelten. Nach Satz 2.42 müssten die Limetes von den Folgen a und b gleich dem Limes von x gleichen.

Beobachte aber, dass $lim_n a_n = 0 \neq lim_n b_n = +\infty$ nach Skript gilt, was uns zu einem Widerspruch der Annahme $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiere oder divergiere bestimmt.

Demnach gilt das Gegenteil, also divergiert $(x_n)_{n\geq 1}$ unbestimmt. $\square$

Aufgabe 2

Behauptung: $\lim_n \sqrt[n]{c} = 1$.

Voraussetzung: $c > 0$.

Beweis: Wir werden den Sandwichsatz (S.2.20) nutzen, um die Aussage zu zeigen. Demnach definieren wir zwei Folgen: $(a_n)_{n\geq 1} := (\frac{1}{n}^{\frac{1}{n}})_{n\geq 1}, (b_n)_n := (\sqrt[n]{n})_n$ und geben der Folge, wessen Limes gesucht ist den Namen $(x_n)_n$.

Um den Sandwichsatz anwenden zu können werden wir Zeigen, dass für **fast** (S.2.12) alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \leq x_n \leq b_n$ und dass $\lim_n a_n = \lim_n b_n$ wahre Aussagen sind.

Für die zweite Aussage wissen wir nach S.2.28: $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

Wir werden zeigen, dass $\lim_n \frac{1}{n}^{\frac{1}{n}} = 1$ gilt, betrachte folgende Umformung:

$$
\begin{aligned}
&\lim_n \frac{1}{n}^{\frac{1}{n}} && \mid \text{Vereinbarung Schreibweise} \\
&= \lim_n n^{-1^{\frac{1}{n}}} && \mid \text{Potenzgesetze} \\
&= \lim_n n^{-\frac{1}{n}} && \mid \text{Potenzgesetze} \\
&= \lim_n n^{\frac{1}{n}^{-1}} && \mid \text{Schreibweise bzw. Potenzgesetze} \\
&= \lim_n \sqrt[n]{n}^{-1} && \mid \text{Potenzgesetze} \\
&= \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} && \mid \text{Präsenzaufgabe 3 und Satz 2.28} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Damit gilt nur noch zu zeigen, dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x_n \leq b_n$ gilt.

Beobachte, dass wenn $n = c$, $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{c}$ gilt.

Demnach, wenn $n \geq c \land n \geq 1$ gilt, gilt $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{c}$, da n steigt und c konstant ist, – im Beweis von S.2.28 im Skript wird angesprochen, dass $\sqrt[n]{\cdot}$ streng monoton steigend ist für $n \geq 1$ (wir nennen diese Aussage **A**).

Somit müssen wir nur noch zeigen, dass $a_n \leq x_n$ in den gegebenen Bedingungen (also, $n \in \mathbb{N}, n \geq c \wedge n \geq 1$) für fast alle n gilt.

Betrachte, dass wenn $n \geq c$ gilt auch $\frac{1}{n} \leq c$ gilt. Aus **A** folgt $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{c}$.

Damit beobachten wir für $n \geq c \wedge n \geq 1$, dass $a_n \leq x_n \leq b_n$ gilt, was nach S.2.12 uns genügt, um den Sandwichsatz vollständig anzuwenden.

Da wir $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 1$ schon gezeigt haben wissen wir, dass $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 1 = \lim_n a_n = \lim_n x_n$ gilt.

Also gilt $\lim_n \sqrt[n]{c} = 1$. $\square$