Einführung in die Algorithmik - Hausaufgabenserie 5

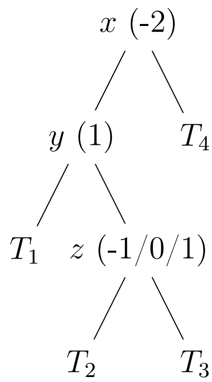
Nike Pulow, Henri Heyden

stu239549, stu240825

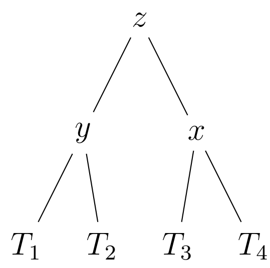
Aufgabe 1

b)

Wir betrachten einen AVL-Baum, wessen Balance im Wurzelknoten, den wir x nennen werden, -2 ist. Wir definieren hierfür folgende Teilbäume und Knoten des gesamten Binärbaums:
y definieren wir als linken Knoten von x. Der Wurzelknoten des Teilbaums T_1 mit Höhe h ist linker Knoten von y.
y hat als rechten Knoten z, welcher die Wurzelknoten von den Teilbäumen T_2 und T_3 (von links nach rechts) besitzt. Des Weiteren hat x noch als rechten Knoten den Wurzelknoten des letzten Teilbaums T_4
x hat die Balance -2, y hat die Balance 1, z hat drei mögliche Balancen: -1, 0 oder 1. Um alle Fälle abzudecken, schreiben wir deswegen in dieser Reihenfolge die Resultate, die aus diesen Balancen entstehen.
Die folgende Darstellung visualisiert unseren Baum:



Da T_1 die Höhe h und y die Balance 1 haben, wissen wir, dass z die Höhe $h+1$ hat. Daraus folgt, dass y die Höhe $h+2$ hat.
Da x die Balance -2 hat, folgt, dass T_4 die Höhe h hat. Insgesamt hat x also die Höhe $h+3$.
Da z die Balancen (-1/0/1) hat und z die Höhe $h+1$ hat, müssen T_2 und T_3 die Höhen h und $h-1$ bzw. h und h bzw. $h-1$ und h haben. Beachte, dass dieser Baum, sowie alle Teilbäume AVL-Bäume sind.
Wenn wir die LR-Rotation anwenden, sieht der resultierende Baum so aus:



Die Höhen von den Teilbäumen T_1 bis T_4 bleiben gleich.
Beobachte, dass T_2 und T_3 maximal h als Höhe haben. Da ihre "Geschwister", also T_1 bzw. T_4 beide die Höhen h haben, folgt daraus, dass y und x genau die Höhe $h + 1$ nach der LR-Rotation haben, egal welchen Fall wir betrachten. Somit ist die Höhe von unserem AVL-Baum genau $h + 2$, was um genau 1 kleiner ist, als die Höhe vor der Rotation. Dies deckt somit alle Fälle der LR-Rotation ab, und alles, was zu zeigen war, wurde gezeigt. $\square$

b)

In **a)** haben wir bereits festgestellt, dass die Höhen von y und x gleich sind, weswegen auch die Balance von z genau 0 ist. $\square$