Einführung in die Algorithmik - Hausaufgabenserie 2

Nike Pulow, Henri Heyden
stu239549, stu240825

Aufgabe 1.1

Landau-Klassen von f

$$\begin{aligned} g, h, f &\in \mathcal{O}(f) \\ g, f &\in \Omega(f) \\ g, f &\in \Theta(f) \\ g, h, f &\in o(f) \\ g, h, f &\notin \omega(f) \end{aligned}$$

Landau-Klassen von g

$$\begin{aligned} f, h, g &\in \mathcal{O}(f) \\ f, g &\in \Omega(f) \\ f, g &\in \Theta(f) \\ h &\in o(f) \\ f, h, g &\notin \omega(f) \end{aligned}$$

Landau-Klassen von h

$$\begin{aligned} h &\in \mathcal{O}(f) \\ g, f, h &\in \Omega(f) \\ h &\in \Theta(f) \\ g, f, h &\notin o(f) \\ g, f &\in \omega(f) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2

Zugehörigkeiten 1-3

Wir werden zeigen, dass $f \in \Theta(f) \land f \in \mathcal{O}(f) \land f \in \Omega(f)$ gilt.
Nach Vorlesung können wir dies zeigen, indem wir $\lim_x \frac{f(x)}{f(x)}$ untersuchen.
Beobachte: $\lim_x \frac{f(x)}{f(x)} = \lim_x 1 = 1 =: p$.
Daraus folgt: (1.): $p < +\infty$, (2.): $p > 0$ und (3.): 1.: $0 < p < +\infty$.
Diese Aussagen sind nach Vorlesung äquivalent zu:
(1.): $f \in \mathcal{O}(f)$, (2.): $f \in \Omega(f)$ und (3.): $f \in \Theta(f)$.
Damit gilt, was zu zeigen war. $\square$

Zugehörigkeiten 4-5

Wir nehmen hier an, dass mit log der Logarithmus zur Basis e gemeint ist.
Wir werden zeigen, dass $g \in \Omega(h) \land g \in \omega(h)$ gilt.
Nach Vorlesung können wir dies zeigen, indem wir $\lim_x \frac{g(x)}{h(x)}$ untersuchen.
Siehe folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
& \lim_x \frac{g(x)}{h(x)} && \mid \text{Setze ein in die Funktionen} \\
&= \lim_x \frac{12x^2 - 56}{24x \cdot log(5x)} && \mid \text{Ziehe einige Konstanten heraus} \\
&= \frac{4}{24} \cdot \lim_x \frac{3x^2 - 14}{x \cdot \log(5x)} && \mid \text{Wende Logarithmusgesetz an} \\
&= \frac{4}{24} \cdot \lim_x \frac{3x^2 - 14}{x \cdot (\log 5 + \log x)} && \mid \text{Wende die Regel von l'Hopital an} \\
&= \frac{4}{24} \cdot \lim_x \frac{6x}{\log 5 + \log x + 1} && \mid \text{Wende die Regel von l'Hopital erneut an} \\
&= \frac{4}{24} \cdot \lim_x \frac{6}{x^{-1}} && \mid \text{Bruchrechnung} \\
&= \frac{4}{24} \cdot \lim_x 6x \\
&= \frac{4}{24} \cdot +\infty \\
&= +\infty = p
\end{aligned}$$

Daraus folgt: (1.): $p > 0$ und (2.): $p = +\infty$. Diese Aussagen sind nach Vorlesung äquivalent zu: (1.): $g \in \Omega(h)$ und (2.): $g \in \omega(h)$.
Damit gilt, was zu zeigen war. $\square$