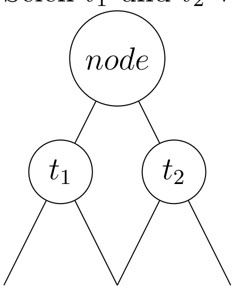
Einführung in die Algorithmik - Hausaufgabenserie 2

Nike Pulow, Henri Heyden

stu239549, stu240825

Aufgabe 2

In der Präsenzübung wurde bereits gezeigt, dass bei einem vollständigen Binärbaum der Höhe h genau 2^h Blätter vorliegen. Betrachte folgende Überlegung:
Seien t_1 und t_2 vollständige Binärbaume der Höhe $h-1$, dann gilt:



... ist auch ein vollständiger Binärbaum. Dieser ist dann der Länge h und hat genau 2^h Blätter, wie wir bereits wissen.
Wir zeigen erst, dass die zwei Aussagen äquivalent sind, die wir beweisen wollen, wenn wir wissen, dass das erinnerte Verhalten über die Blätteranzahl anhand der Höhe gilt. Sei $\mathcal{K}_n(t)$ eine Funktion, die einem Baum ihre Knotenanzahl übergibt. Sei $\mathcal{B}_n(t)$ eine Funktion, die einem Baum ihre Blätteranzahl übergibt. Des weiteren nehme an, dass die beiden Aussagen, die wir beweisen wollen stimmen. Wir nennnen einen beliebigen vollständigen Binärbaum t der Höhe h, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_n(t) = \mathcal{K}_n(t) \\
\iff &2^h - 1 = \mathcal{B}_n(t) - 1 \\
\iff &2^h = \mathcal{B}_n(t) \\
\iff &\mathcal{B}_n(t) = \mathcal{B}_n(t) \\
\iff &wahr
\end{aligned}$$

Somit müssen wir nur eine Eigenschaft zeigen, um die andere zu zeigen.

Beweis mittels Bauminduktion

Definiere folgende Aussagen für die erwähnten Binärbaume t_1, t_2, einen beliebigen Binärbaum t und den zusammengesetzten Binärbaum $t_0 := node(t_1, t_2)$:
(1.): $\mathcal{K}_n(t) = \mathcal{B}_n(t) - 1$
IA.: $\mathcal{K}_n(node(empty, empty)) = \mathcal{B}_n(node(empty, empty)) - 1$
IH.: $\mathcal{K}_n(t_1) = \mathcal{B}_n(t_1) - 1 \wedge \mathcal{K}_n(t_2) = \mathcal{B}_n(t_2) - 1$
IS.: $\mathcal{K}_n(t_1) = \mathcal{B}_n(t_1) - 1 \wedge \mathcal{K}_n(t_2) = \mathcal{B}_n(t_2) - 1 \Longrightarrow \mathcal{K}_n(t_0) = \mathcal{B}_n(t_0) - 1$

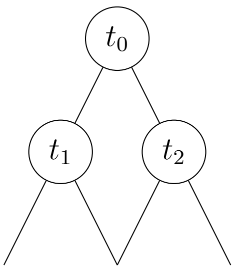
IA.

Wir werden nun den Induktionsanfang zeigen:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{K}_n(node(empty, empty)) = \mathcal{B}_n(node(empty, empty)) - 1 && \mid \text{Setze ein} \\
\Longleftrightarrow\ & 1 = 2 - 1 && \mid \text{Rechne aus} \\
\Longleftrightarrow\ & wahr
\end{aligned}$$

IS.

Wir werden nun den Induktionsschritt zeigen:



Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{K}_n(t_0) && \mid \text{Definition von } t_0 \\
&= K_n(node(t_1, t_2)) && \mid \text{Regeln in Binärbaumen} \\
&= \mathcal{K}_n(t_1) + \mathcal{K}_n(t_2) + 1 && \mid \textbf{IH.} \\
&= \mathcal{B}_n(t_1) - 1 + \mathcal{B}_n(t_2) - 1 + 1 && \mid \text{Rechne aus} \\
&= \mathcal{B}_n(t_1) + \mathcal{B}_n(t_2) - 1 && \mid \text{Def. } t_0 \text{ und Regeln in Binärbaumen} \\
&= \mathcal{B}_n(t_0) + 1
\end{aligned}$$

Somit haben wir **IS.** und **IA.** gezeigt, also gilt **(1.)**. Da **(1.)** logisch äquivalent zu $\mathcal{K}_n(t) = 2^h - 1$ ist, sind somit beide Eigenschaften gezeigt. $\square$