

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт

по лабораторной работе №3

по дисциплине

«Вычислительные комплексы»

Выполнил студент

В. А. Рыженко

Проверил:

к.ф.-м.н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург, 2020 г.

Содержание

1. Постановка задачи	3
1.1. Конкретизация задачи и метод решения	3
1.1.1. Переопределенная ИСЛАУ	3
1.1.2. Недоопределенная ИСЛАУ	3
1.1.3. Исследование разрешимости	4
1.1.4. Оценка меры вариабельности	4
2. Реализация	4
3. Результаты	5
3.1. Переопределенная ИСЛАУ	5
3.2. Недоопределенная ИСЛАУ	6
4. Приложения	8

1. Постановка задачи

Требуется решить недоопределённую интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с матрицей 3×2 и переопределённую ИСЛАУ с матрицей 2×3 . Используемые матрицы должны совпадать с точностью до транспонирования. Для случая 3×2 построить график $Tol(x_1, x_2)$. Для случая 2×3 проанализировать решение. Построить 3-мерный образ допускового множества или его проекции на плоскости $(x_i O x_j)$. Найти допусковое множество решений, оценку variability решения \bar{v} для обоих случаев.

1.1. Конкретизация задачи и метод решения

1.1.1. Переопределённая ИСЛАУ

В качестве исходной матрицы СЛАУ была выбрана точечная матрица A и вектор x :

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 18 & 21 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Таким образом, правая часть СЛАУ была определена значениями A и x (1)

$$b = A \cdot x = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 7.5 \\ 5.5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Далее, положим величины радиусов элементов $radA$ и $radb$ равными

$$radA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, radb = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) имеем переопределённую ИСЛАУ 3×2

$$radA = \begin{pmatrix} (12, 16) & (11, 15) \\ (16, 20) & (18, 24) \\ (15, 17) & (6, 8) \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} (3, 6) \\ (4, 8) \\ (2, 6) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

1.1.2. Недоопределённая ИСЛАУ

Для задания ИСЛАУ матрица A (1) из предыдущего раздела была транспонирована, а вектор x дополнен ещё одним членом:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 16 \\ 13 & 21 & 7 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Для них была определена правая часть:

$$b = A \cdot x = \begin{pmatrix} 9.2 \\ 7.4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Далее, аналогично (4), была получена ИСЛАУ:

$$radA = \begin{pmatrix} (12, 16) & (16, 20) & (15, 17) \\ (11, 15) & (18, 24) & (6, 8) \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} (7, 12) \\ (5, 8) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

1.1.3. Исследование разрешимости

Для исследования разрешимости этих интервальной ИСЛАУ использовался распознающий функционал $Tol(x)$:

$$Tol(x) = \min_{1 \leq i \leq n} (radb_i - |midb_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j|) \quad (8)$$

Допусковое множество решений ИСЛАУ при этом задаётся условием $Tol(x) \geq 0$. Таким образом для нахождения допускового множества и проверки разрешимости системы удобно найти точку x , максимизирующую распознающий функционал, и рассмотреть её окрестность.

1.1.4. Оценка меры вариабельности

Оценка меры вариабельности ive была найдена по формуле:

$$ive(\mathbf{A}; \mathbf{b}) = \sqrt{n}(\min_{A \in \mathbf{A}} A * ||argmaxTol||) \cdot \frac{maxTol}{||b||} \quad (9)$$

Брус оценки \tilde{x} :

$$\tilde{x} = [argmaxTol - ive, argmaxTol + ive] \quad (10)$$

2. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Matlab и Python. Так как используемые методы оценок — интервальные, необходимым оказалось также привлечение библиотеки INTLAB для поддержки арифметических операций в интервальной арифметике. Программы И.А. Шарой IntLinInc2D и IntLinInc3D использовались для визуализации множества интервальных и точечных систем линейных отношений. Для нахождения экстремума распознающего функционала использована программа tolsolvty для Python.

3. Результаты

3.1. Переопределенная ИСЛАУ

Минимальное число обусловленности матрицы ИСЛАУ (4):

$$C_{min} = \min \text{cond} A = 5.0504 \quad (11)$$

Минимум достигался на матрице:

$$\begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 20 & 24 \\ 17 & 6 \end{pmatrix} \quad (12)$$

С помощью программы *tolsovlty* были найдены максимум функционала распознающего функционала *maxTol* и значение аргумента, в которой он достигался *argmaxTol*.

$$\begin{aligned} \text{maxTol} &= 0.85135 \\ \text{argmaxTol} &= (0.28378, 0.04054)^T \end{aligned} \quad (13)$$

В случае переопределённой ИСЛАУ с не слишком широкими интервалами максимум распознающего функционала обычно будет отрицательным, а допустовое множество, соответственно, пустым, что означает несовместность системы. В рассматриваемом случае, однако, матрица и вектор правой части были подобраны так, чтобы решение существовало. Так как искомый вектор x в этом случае содержит всего две компоненты, допустовое множество можно изобразить, как область на плоскости x_1 и x_2 .

Оценка меры вариабельности *ive* (9)

$$\text{ive}(\mathbf{A}; \mathbf{b}) = 0.41014 \quad (14)$$

Брус оценки \tilde{x} (10):

$$\tilde{x} = ([0.07871, 0.48885], [-0.16452, 0.24561])^T \quad (15)$$

Результат графического представления полученного бруса, множества решений и их совмещения.

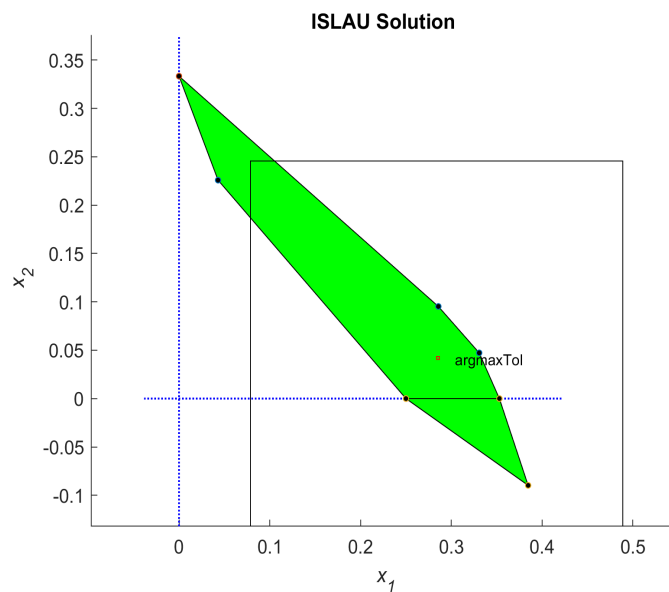


Рис. 1. Зелёным цветом изображено допустовое множество решений, чёрный квадрат - брус *ive*, красная точка - достигался максимум функционала.

Далее представлен график распознающего функционала.

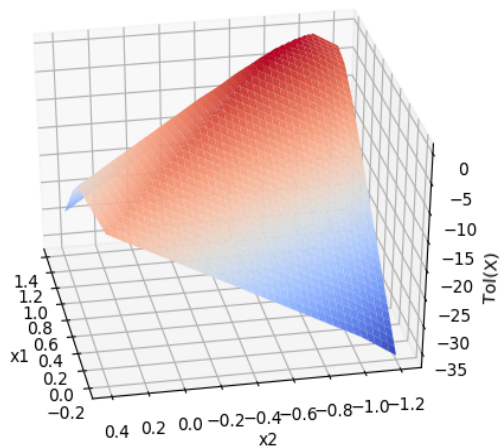


Рис. 2. Расознающий функционал

3.2. Недоопределенная ИСЛАУ

При транспонировании матрицы число обусловленности не меняется

$$C_{min} = \min \text{cond} A = 5.0504 \quad (16)$$

С помощью программы *tolsoivty* были найдены максимум функционала распознающего функционала $\max Tol$ и значение аргумента, в которой он достигался $\arg \max Tol$.

$$\begin{aligned} \max Tol &= 1 \\ \arg \max Tol &= (1.394 \cdot 10^{-6}, 0.231, 0.306)^T \end{aligned} \quad (17)$$

Оценка меры вариабельности ive (9)

$$\text{ive}(\mathbf{A}; \mathbf{b}) = 0.47586 \quad (18)$$

Брус оценки \tilde{x} (10):

$$\tilde{x} = ([-0.237930, 0.23793], [-0.00651, 0.46934], [0.06782, 0.54369])^T \quad (19)$$

Результат графического представления полученного бруса, множества решений и их совмещения.

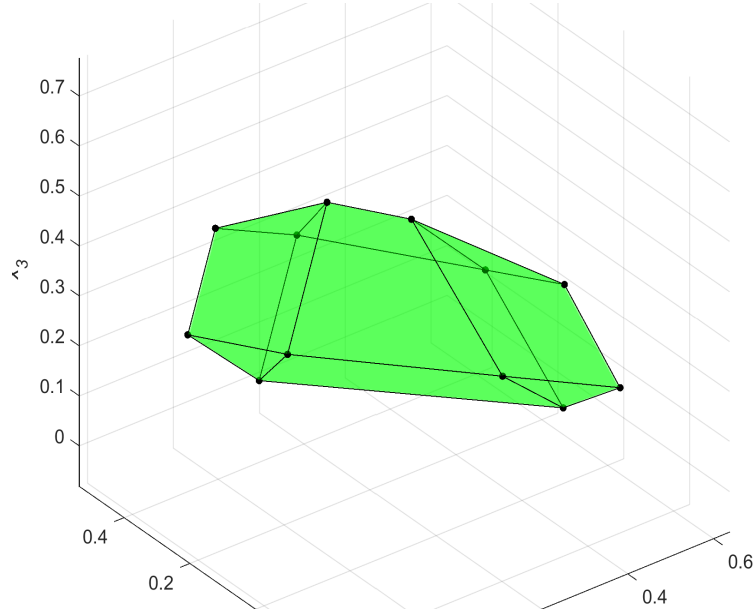


Рис. 3. Зелёным цветом изображено допустовое множество решений

Заметим, что $\arg \max Tol$ заметно отличается от x_0 . При этом $\arg \max Tol$ всё же удовлетворяет границам правой части (7), $A \cdot \arg \max Tol \subseteq b$. Такой результат - проявление неоднозначности решения обратной задачи. При этом для СЛАУ, которая в неинтервальной постановке имела бы бесконечное множество решений, методами интервального анализа получено конечное множество решений.

4. Приложения

Репозиторий на GitHub с релизацией: github.com.