Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по курсовой работе
по дисциплине
«Вычислительные комплексы»

Выполнил студент
В. А. Рыженко

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург, 2020 г.

Содержание

1. Постановка задачи

Дана следующая ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [4;6] & [-9;0] & [0;12] & [2;3] & [5;9] & [-23;-9] & [15;23] \\ [0;1] & [6;10] & [-1;1] & [-1;3] & [-5;1] & [1;15] & [-3;-1] \\ [0;3] & [-20;-9] & [12;77] & [-6;30] & [0;3] & [-18;1] & [0;1] \\ [-4;1] & [-1;1] & [-3;1] & [3;5] & [5;9] & [1;2] & [1;4] \\ [0;3] & [0;6] & [0;20] & [-1;5] & [8;14] & [-6;1] & [10;17] \\ [-7;-2] & [1;2] & [7;14] & [-3;1] & [0;2] & [3;5] & [-2;1] \\ [-1;5] & [-3;2] & [0;8] & [1;11] & [-5;10] & [2;7] & [6;82] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-10;95] \\ [35;14] \\ [-6;2] \\ [30;7] \\ [4;95] \\ [-6;46] \\ [-2;65] \end{pmatrix} \tag{1}$$

Если параметризовать матрицу ИСЛАУ $\mathbf{A}$ следующим образом:

- $\mathbf{a}_{77} = [\gamma, 82]$
- $\gamma \geq 82$

То для полученной параметризованной ИСЛАУ решении субдифференциальным методом Ньютона известно. В области значений релаксационного параметра τ примерно 0.95 имеется резкое увеличение количества необходимых итераций. Необходимо провести более подробное исследование в окрестности $\gamma = 8$.

2. Теория

2.1. Субдифференциальный метод Ньютона

Данный метод используется для решения формальных решений ИСЛАУ вида $\mathbf{C}x = \mathbf{d}$, используется техника погружения:

$$sti(x) : (x_1, ..., x_n) \to (-\underline{x_1}, ... - \underline{x_n}, \underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \tag{2}$$

и вместо исходной системы решается индуцированное уравнение $\mathcal{G}(x) = 0$. Для начала работы строится некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}, k = 1, 2, ...,$ уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения $\mathcal{G}$ в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{G}(x^{(k-1)}) \tag{3}$$

где $\tau \in [0, 1]$ некоторая константа, именуемая релаксационным параметром

3. Реализация

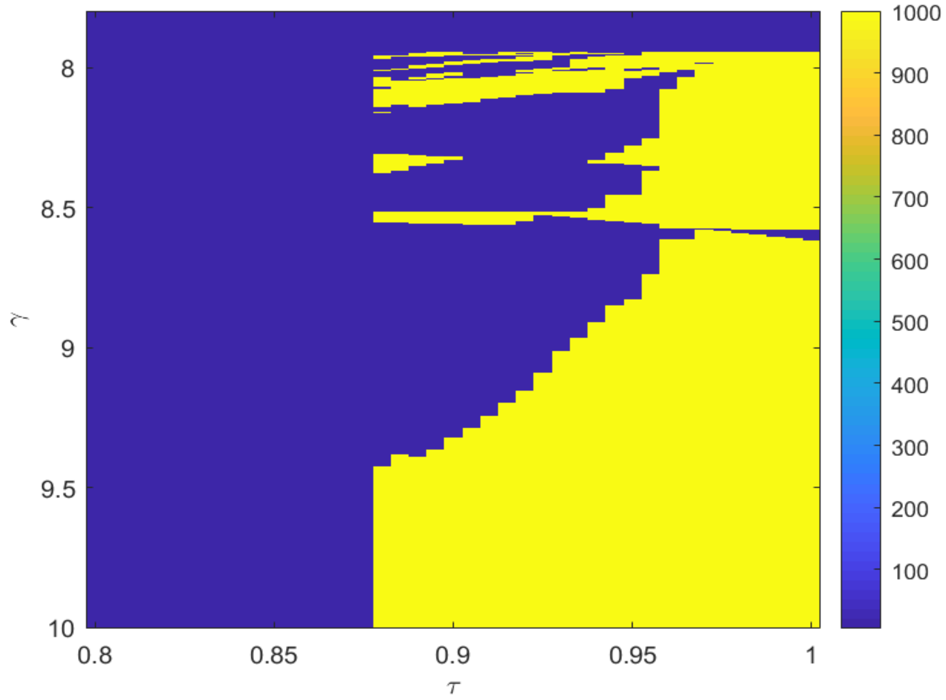
Лабораторная работа выполнена с помощью пакета прикладных програм Matlab.

4. Результаты

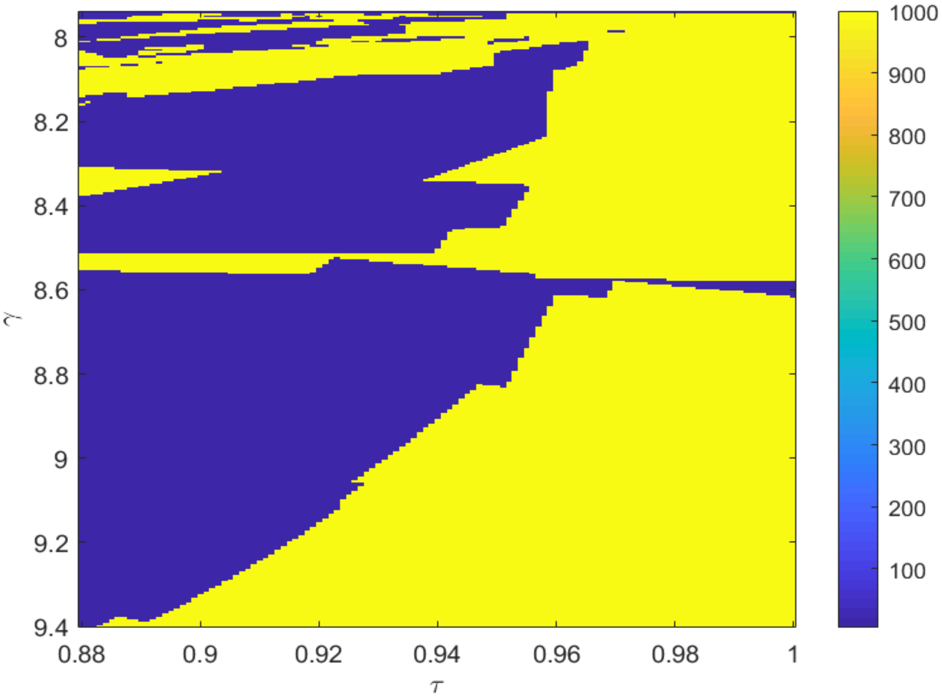
Для работы алгоритма было выбрано максимальное количество итераций равное 1000, в действительности при параметрах достигших максимального количества итераций алгоритм расходится и выбранное число является не столь существенным.

Далее рассматриваются графики зависимости количества итераций от парметров γ и τ

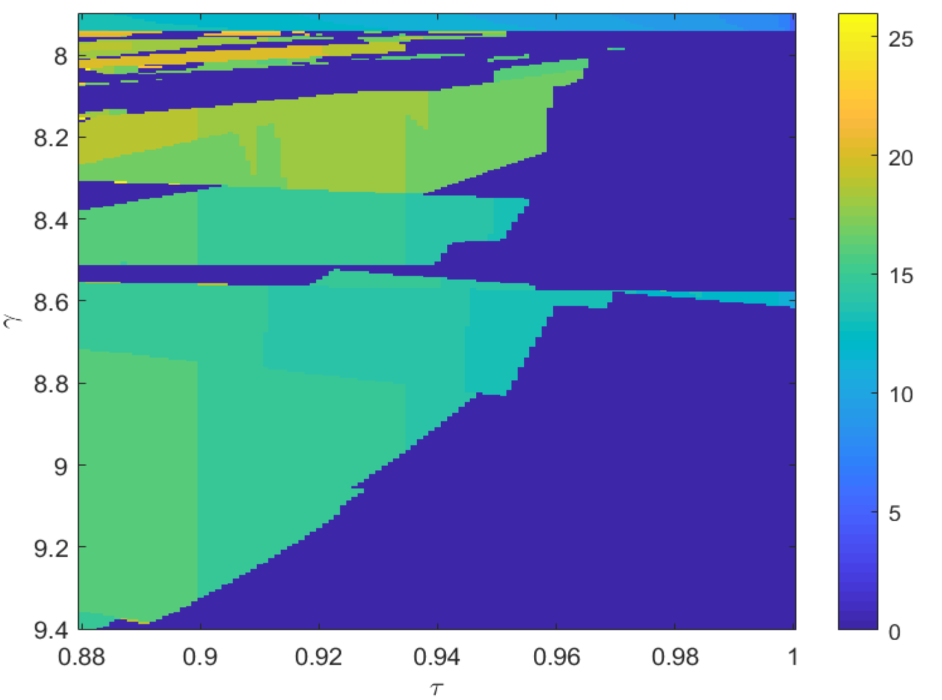
Рассмотрим первое приближение искомой окрестности



Заметна прямоугольная область, вне границ которой алгоритм точно сходится($\tau \lesssim 0.88 \vee \gamma \lesssim 7.94$), либо точно рассходится($\gamma \gtrsim 9.4 \wedge \tau \gtrsim 0.88$). Рассмотрим эту область.



Рассмотрим также график где все точки, в которых алгоритм расходится, занулены



Из представленных графиков можно заметить довольно большую область сходимости в окрестности $\gamma = 8.6$, но установить зависмость сходимости затруднительно. Также в этой области алгоритм имеет достаточно хорошую сходимость (до 25 итераций для достижения нормы вектора невязки равной 10^{-7}).

Оценим включение $Ax \in b$ для исходной ИСЛАУ, а также для задачи соответсующей парметрам, в области которых происходит скачок от разрешимости к неразрешимости.

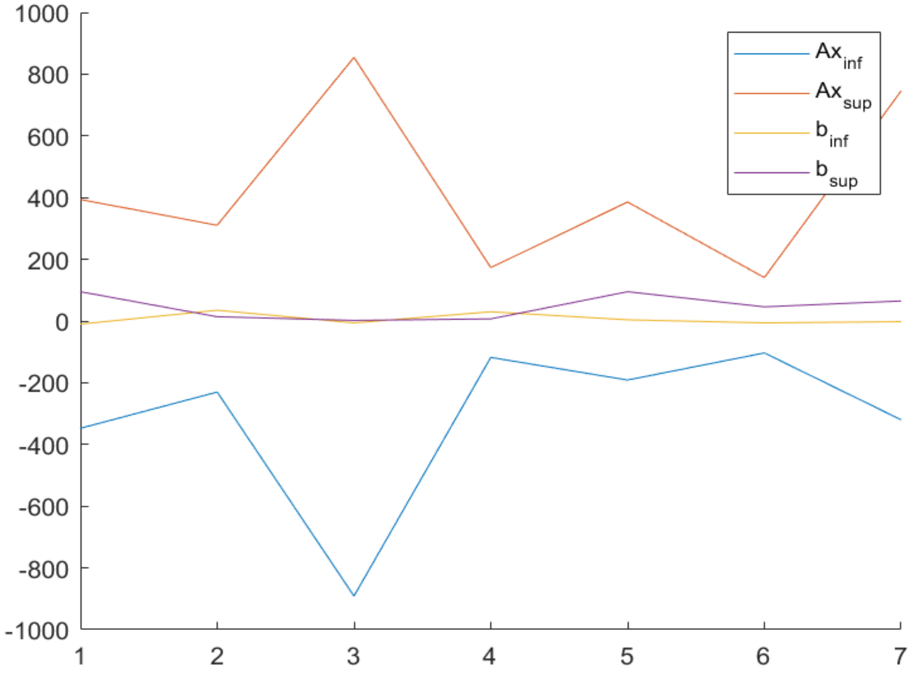


Рис. 1. Оценка решения для параметров $\gamma = 6, \tau = 1$

Вектор решения для данных параметров следующий:

$$x = \begin{pmatrix} [-1.2247, 0.5054] \\ [18.2644, -9.5175] \\ [-0.0282, 1.1608] \\ [16.4077, -14.4555] \\ [-1.3436, 3.9882] \\ [-3.5289, 4.5435] \\ [5.4309, -0.6740] \end{pmatrix} \tag{4}$$

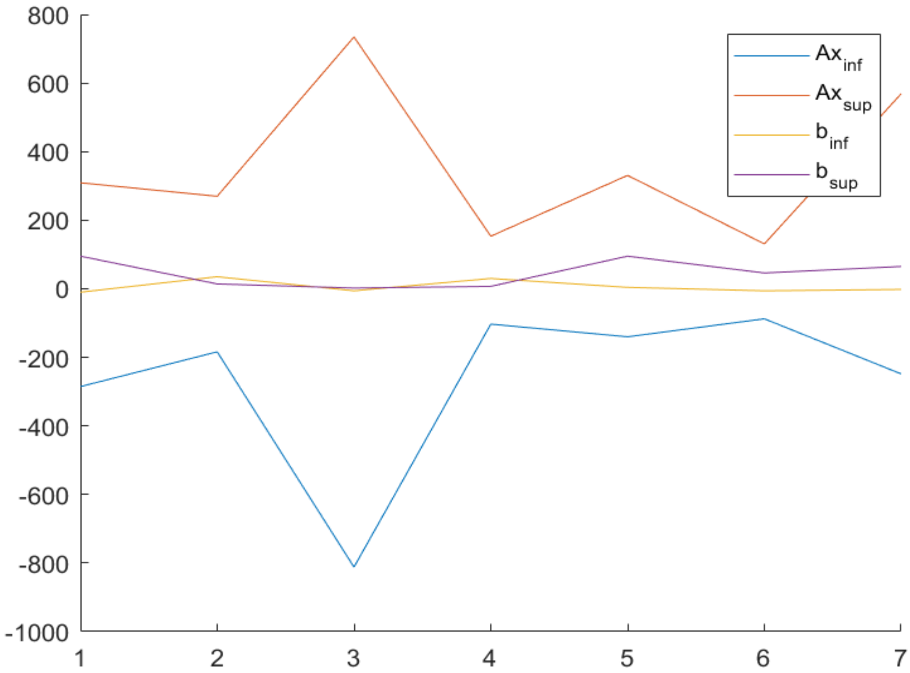


Рис. 2. Оценка решения для параметров $\gamma = 8.6, \tau = 0.9$

Вектор решения для данных параметров:

$$x = \begin{pmatrix} [-1.8162, 1.2304] \\ [16.7705, -6.6563] \\ [0.2307, 1.1036] \\ [14.8226, -13.6805] \\ [-0.4364, 3.6254] \\ [-2.9635, 3.4398] \\ [3.6198, 0.0410] \end{pmatrix} \tag{5}$$

Как видно из графиков во втором случае задача решена более точно. Это возможно связано с тем, что во втором случае $\mathbf{a}_{77}$ имеет более узкий интервал.

Рассмотрим также параметры расположенные на другом «береге» от языка нестабильности.

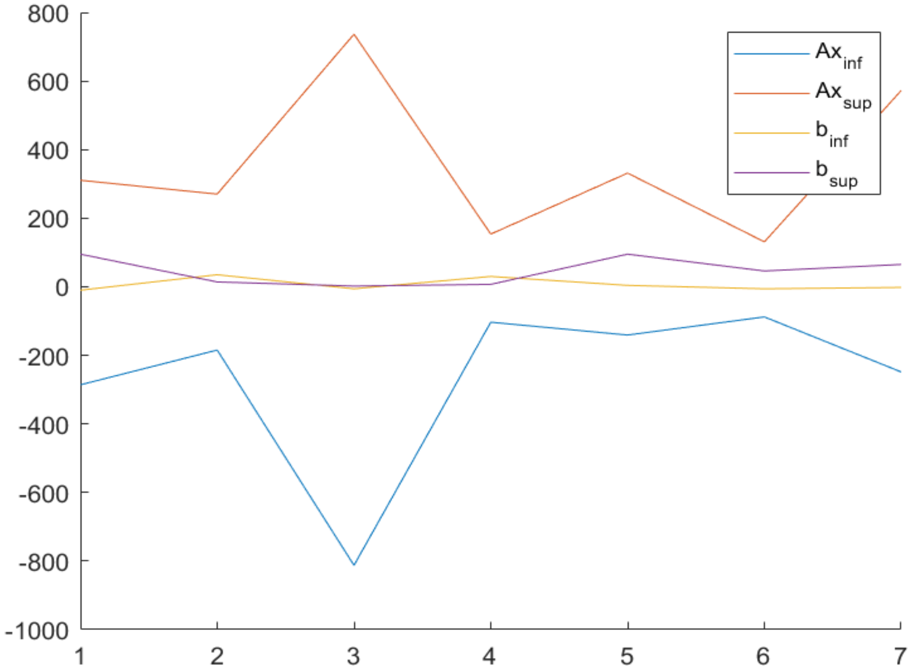
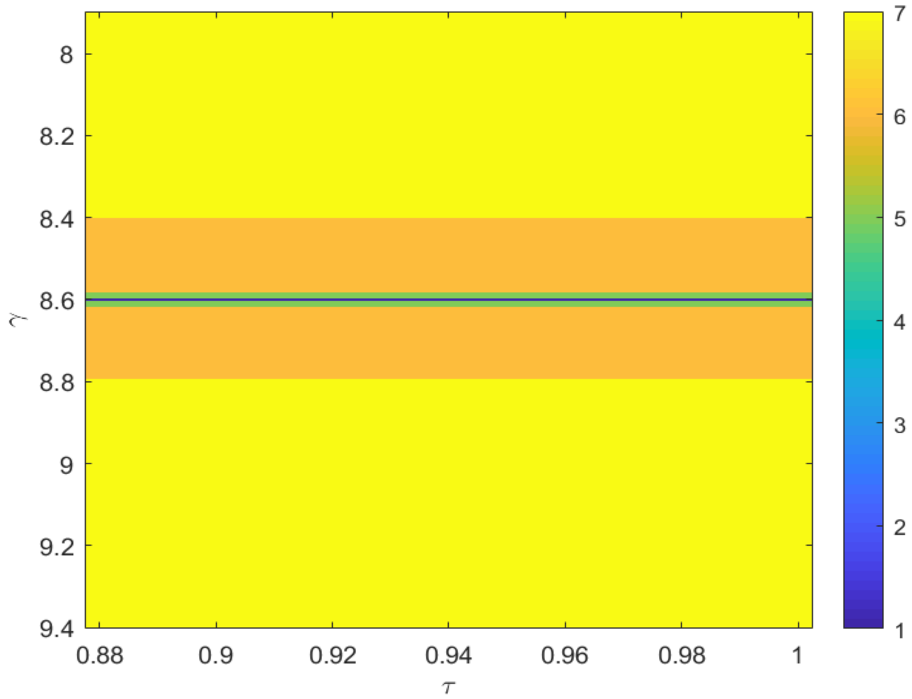


Рис. 3. Оценка решения для параметров $\gamma = 8.5, \tau = 0.9$

Вектор решения для данных параметров:

$$x = \begin{pmatrix} [-1.8065, 1.2234] \\ [16.7772, -6.7046] \\ [0.2297, 1.1039] \\ [14.8590, -13.6854] \\ [-0.4548, 3.6272] \\ [-2.9665, 3.4619] \\ [3.6559, 0.0394] \end{pmatrix} \tag{6}$$

Заметно, что различие в решениях довольно маленькие. Попробуем взять полученное решение для параметров $\gamma = 8.6\tau = 0.9$ как начальное приближение. Построим график для рассмотренной выше области γxτ



Теперь вся рассматриваемая область является областью сходимости алгоритма. Причём она является симметричной относительно $\gamma = 8.6$ по отношению к количеству итераций. Это логично, так как для $\gamma = 8.6$ первое приближение уже является решением

5. Приложения

Репозиторий на GitHub с релизацией: github.com.