Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №4
по дисциплине
«Вычислительные комплексы»

Выполнил студент
В. А. Рыженко

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург, 2020 г.

Содержание

1. Постановка задачи

Требуется решить ИСЛАУ с применением аппарата линейного программирования для проведения регуляризации рассматриваемой системы.

2. Конкретизация задачи и метод решения

При решении данной задачи имеет рассмотреть ИСЛАУ $Ax = b$ точечной марицей A и интервальной правой частью $\mathbf{b}$ при которых система не имеет решений до проведения регуляризации. В данной работе выбрана несовместная ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2.2 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [2;4] \\ [7;9] \\ [-1;1] \end{pmatrix} \tag{1}$$

В первую очередь с помощью распознающего функционала $Tol(x)$ проверяется отсутствие решений у данной системы. С помощью программы tolsolvty были найдены максимум функционала распознающего функционала $maxTol$ и значение аргумента, в которой он достигался $argmaxTol$:

$$maxTol = -1.4725; argmaxTol = \begin{pmatrix} 0.2747 \\ 0.5907 \\ 0.7876 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Поскольку $maxTol < 0$, допусковое множество ИСЛАУ пусто и система несовместна.

Далее для получения решения проводится l_1-регуляризация, заключающуюся в изменении радиусов компонент вектора $\mathbf{b}$ их поэлементным домножением на вектор масштабирующих множителей ω:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [\mathrm{mid} b_1 - \mathrm{rad} b_1; \mathrm{mid} b_1 + \mathrm{rad} b_1] \\ [\mathrm{mid} b_2 - \mathrm{rad} b_2; \mathrm{mid} b_2 + \mathrm{rad} b_2] \\ [\mathrm{mid} b_3 - \mathrm{rad} b_3; \mathrm{mid} b_3 + \mathrm{rad} b_3] \end{pmatrix} \to \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} [\mathrm{mid} b_1 - \omega_1 \mathrm{rad} b_1; \mathrm{mid} b_1 + \omega_1 \mathrm{rad} b_1] \\ [\mathrm{mid} b_2 - \omega_2 \mathrm{rad} b_2; \mathrm{mid} b_2 + \omega_2 \mathrm{rad} b_2] \\ [\mathrm{mid} b_3 - \omega_3 \mathrm{rad} b_3; \mathrm{mid} b_3 + \omega_3 \mathrm{rad} b_3] \end{pmatrix} \tag{3}$$

При этом масштабирующие множители подбираются так, чтобы регуляризованная ИСЛАУ $A \cdot x = \tilde{\mathbf{b}}$ стала разрешима, но сумма этих множителей $\sum_i \omega_i$ была минимально возможной.

Накладывая на масштабирующие множители естественное требование их неотрицательности, и введя вектор $u = \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}$, можно записать полученную задачу в виде:

$$\begin{cases} u_{4,5,6} \geq 0 \\ c \cdot u = (0,0,0,1,1,1) \cdot u = (0,0,0,1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \sum_i \omega_i = \underset{u}{min} \\ C \cdot u \leq r, \text{где } C = \begin{pmatrix} -A & -\mathrm{diag}(\mathrm{rad}(\mathbf{b})) \\ A & -\mathrm{diag}(\mathrm{rad}(\mathbf{b})) \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -mid(\mathbf{b}) \\ mid(\mathbf{b}) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4}$$

Полученная задача и решается линейным программированием с применением стандартной функции linprog пакета scipy.optimize. В результате решения определяются одновременно и необходимые масштабирующие множители, и соответствующее им появившееся в результате регуляризации решения ИСЛАУ.

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Matlab и Python. Также используется оптимизатор scipy.optimize на Python с различными методами решения задачи линейного программирования. Для нахождения экстремума распознающего функционала использована программа tolsolvty для Python.

4. Результаты

Имеем $\mathrm{rad}(\mathbf{b}) = 1$,$\mathrm{mid}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.
По:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ -2.2 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2.2 & 3 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; r = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 0 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

В результате применения стандартного linprog для решения задачи линейного программирования с использованием значений из (5) без дополнительных ограничений получны следующие результаты:

- Решение регуляризованной ИСЛАУ методом method = 'interior-point':

$$x \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6387 \\ 0.8661 \end{pmatrix}, \omega \approx \begin{pmatrix} 2.3806 \\ 2.6194 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

- Решение регуляризованной ИСЛАУ методом method = 'simplex':

$$x \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.0 \end{pmatrix}, \omega \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Можно отметить, что сумма масштабирующих коэффициентов совпала и равна 5.
Также, первые компоненты вектора решений оказались равны 0, что наводит на мысль, что рассматриваемая задача может иметь нетривиальное множество одинаково хороших решений. Попробуем наложить дополнительные ограничения.

$$x_{imin} \leq x_i \leq x_{imax} \tag{8}$$

В результате сначала было обнаружено, что если установить нижнюю границу возможных значений x_1, большую, чем ноль , $x_{1min}> 0$, то условная оптимизация сходится к $x_1 = x_{1min}$, а значение суммы масштабирующих коэффициентов увеличивается и становится больше 5. Это говорит о том, что решение с $x_1 = 0$ действительно является оптимальным и устойчивым.

5. Приложения

Репозиторий на GitHub с релизацией: github.com.