

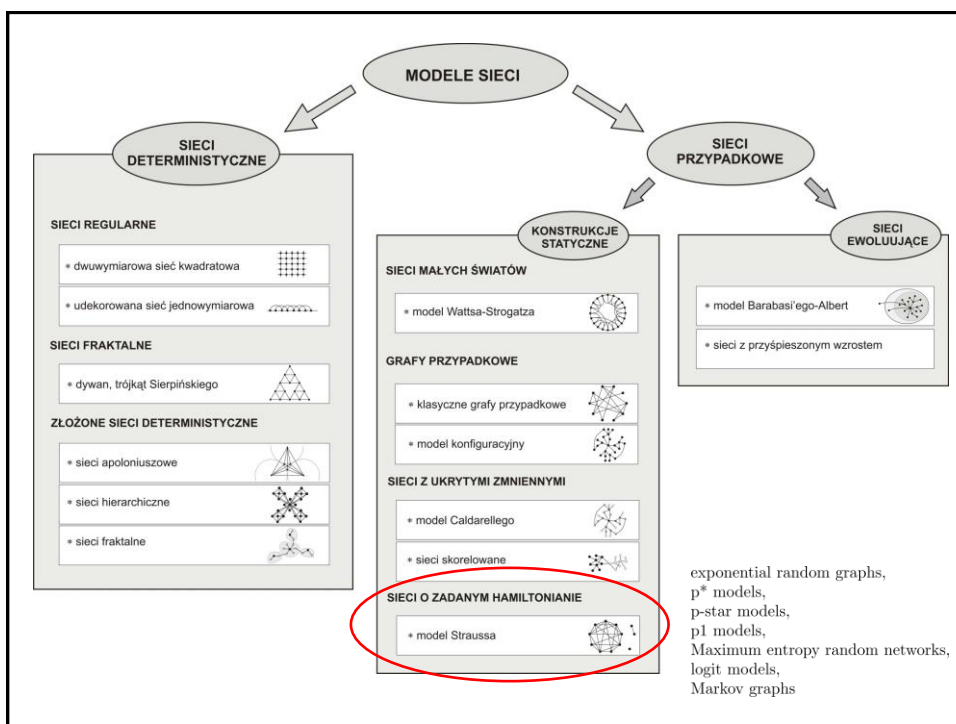
WYKŁAD 5 i 6
Modelowanie Sieci Złożonych

Wykładnicze grafy przypadkowe,
czyli sieci o zadanym hamiltonianie strukturalnym



Dr hab. Agata Fronczak, prof. PW

Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej
 Zakład Fizyki Układów Złożonych

1



2

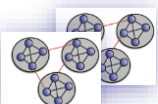
Agata Fronczak

Wykładowe grafy przypadkowe:
teoria i przykłady zastosowań
do analizy rzeczywistych sieci złożonych

CZĘŚĆ 1.

Wykładowe grafy przypadkowe
– trochę teorii

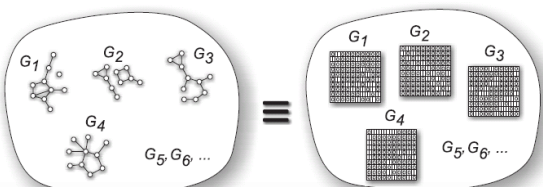
3



Zespoły statystyczne sieci przypadkowych

Sieć przypadkowa → pojedyncza sieć taka, że w jej procedurze konstrukcyjnej jest pewien element losowości;

Sieć przypadkowa → element zespołu statystycznego sieci; **Zespół statystyczny** to zbiór możliwych realizacji sieci $\{G\}$, którym to realizacjom (tj. *mikrostanom*) są przypisane odpowiednie prawdopodobieństwa $P(G)$;



Wykładowe grafy przypadkowe: sieci o zadanym hamiltonianie strukturalnym

$$P(G) = \frac{e^{\bar{H}(G)}}{Z},$$

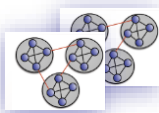
$$Z = \sum_{\{G\}} e^{\bar{H}(G)}$$

$$H(G) = \sum_r \theta_r m_r(G)$$

Besag (1974), Holland & Leinhardt (1981), Frank & Strauss (1986), Park & Newman (2004), ...

Burda et al. (od 2001), Dorogovtsev et al. (od 2003), Garlaschelli et al. (od 2005), Bianconi et al. (od 2005), Fronczak et al. (od 2006), ...

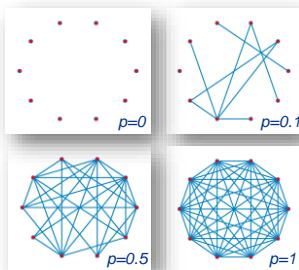
4



Przykład: Zespół klasycznych grafów przypadkowych

Procedura konstrukcyjna:

- Ustalona liczba węzłów N
- Każdą parę węzłów łączymy z prawdopodobieństwem p .



prawdopodobieństwo grafu w zespole:

$E(G)$ – liczba krawędzi w grafie

$$P(G) = p^{E(G)} (1-p)^{\binom{N}{2} - E(G)}$$

$$= \left(\frac{p}{1-p} \right)^{E(G)} (1-p)^{\binom{N}{2}}$$

$$= \frac{e^{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \cdot E(G)}}{(1-p)^{\binom{N}{2}}} = \frac{e^{H(G)}}{Z}$$

hamiltonian zespołu klasycznych grafów przypadkowych:

$$H(G) = \ln \left[\frac{1-p}{p} \right] E(G) = \theta E(G) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \ln \left(\frac{1-p}{p} \right) \\ p = \frac{1}{1+e^\theta} \end{array} \right.$$

suma statystyczna:

$$Z = \frac{1}{(1-p)^{\binom{N}{2}}} = (1+e^\theta)^{\binom{N}{2}}$$

Park & Newman (2004)

5

Zespół kanoniczny



Układ, który może wymieniać energię z otoczeniem o stałej temperaturze, $T = \text{const}$

Przestrzeń stanów układu: $\{\Omega\}$

Prawdopodobieństwo, że układ będzie przebywał w mikroście Ω

$$P(\Omega) = \frac{e^{-\beta E(\Omega)}}{Z}$$

Średnia energia układu

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

Wykładnicze grafy przypadkowe: na przykładzie klasycznego grafu przypadkowego



Graf, który wymienia krawędzie z rezerwuarem krawędzi, tj. grafem o stałej gęstości połączeń $p = \text{const}$

Przestrzeń stanów, tj. zbiór wszystkich grafów prostych o ustalonej liczbie węzłów: $\{G\}$

Prawdopodobieństwo, że układ będzie w stanie G

$$P(G) = \frac{e^{\theta E(G)}}{Z}, \quad Z = \binom{N}{2} \ln [1 + e^\theta], \quad \theta = \ln \left[\frac{1-p}{p} \right]$$

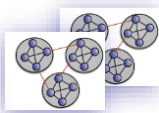
Średnia liczba krawędzi w grafie

$$\langle E \rangle = \frac{\partial \ln Z}{\partial \theta} = \binom{N}{2} p$$

Gdy potrafimy napisać hamiltonian układu, to potem własności tego układu (np. średnią energię układu $-\langle E \rangle$) można uzyskać wykonując symulacje MC (patrz wykład z KMS, MN: algorytm Metropolis).

Wcale nie musimy rozwiązywać układu w sposób ścisły, nie musimy znać sumy statystycznej ...

6



Symulacje numeryczne metodą Monte Carlo

Symulacje MC umożliwiają numeryczne badanie układów fizycznych w stanie równowagi termodynamicznej.

Podstawową rolę w symulacjach MC odgrywa generowanie (losowanie) ciągu mikrostanów (realizacji) badanego układu (np. grafu)

$$\{G_i\} = G_1, G_2, G_3, \dots$$

W tym ciągu poszczególne mikrostany układu, G_i , muszą mieć określone prawdopodobieństwo realizacji,

$$P(G_i) = \frac{e^{-\beta H(G_i)}}{Z}$$

Symulacje numeryczne polegające na bezpośrednim losowaniu ciągu $\{G_i\}$ i akceptacji poszczególnych realizacji G_i układu z prawdopodobieństwem $P(G_i)$ jest bardzo nieefektywne, ponieważ z reguły $P(G_i) \ll 1$.

W symulacjach metodą MC wspomniany ciąg mikrostanów G_1, G_2, \dots generuje się wykorzystując ergodyczny proces Markowa, w którym prawdopodobieństwo $p(i \rightarrow j)$ wygenerowania stanu G_j ze stanu G_i jest dobrane w taki sposób, by $P(G_j)$ miało określoną postać.

Newman & Barkema
Monte Carlo methods in statistical physics
Oxford University Press (1999)

Ponieważ badany układ jest w stanie równowagi musi być spełniona zależność:

$$\sum_j P(G_i) p(i \rightarrow j) = \sum_j P(G_j) p(j \rightarrow i)$$

Wg tej zależności:

W stanie równowagi częstość przejść ze stanu G_i do dowolnego innego stanu, np. G_j , musi być równa częstości przejść dowolnego stanu G_j do G_i .

Warunek równowagi szczegółowej:

$$P(G_i) p(i \rightarrow j) = P(G_j) p(j \rightarrow i)$$

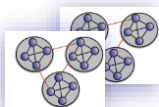
$$\frac{p(i \rightarrow j)}{p(j \rightarrow i)} = \frac{P(G_j)}{P(G_i)} = e^{-\Delta H_{ji}} = e^{\Delta H_{ji}}$$

gdzie $\Delta H_{ji} = H(G_j) - H(G_i) = -\Delta H_{ji}$

jest zmianą hamiltonianu układu, jaka nastąpiła w wyniku zmiany stanu $i \rightarrow j$ (tj. $G_i \rightarrow G_j$)

A. Fronczak, Wykładnicze grafy przypadkowe: teoria, przykłady, symulacje numeryczne (str. 16-19)
<http://www.if.pw.edu.pl/~agatka/pub/2014rozdzERG.pdf>

7



Algorytm Metropolis

Warunek równowagi szczegółowej:

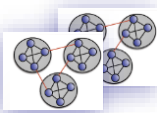
$$\frac{p(i \rightarrow j)}{p(j \rightarrow i)} = e^{\Delta H_{ji}} = e^{\Delta H_{ji}}$$

Algorytm Metropolis realizuje jedną z najprostszych postaci prawdopodobieństwa zmiany stanów $p(i \rightarrow j)$:

$$\text{gdy } \Delta H_{ji} < 0 \quad \text{wtedy } p(i \rightarrow j) = 1$$

$$\text{gdy } \Delta H_{ji} > 0 \quad \text{wtedy } p(i \rightarrow j) = e^{-\Delta H_{ji}}$$

8



Algorytm Metropolis

Warunek równowagi szczegółowej:

$$\frac{p(i \rightarrow j)}{p(j \rightarrow i)} = e^{\Delta H_{ij}} = e^{\Delta H_{ji}} \quad (*)$$

Algorytm Metropolis realizuje jedną z najprostszych postaci prawdopodobieństwa zmiany stanów $p(i \rightarrow j)$:

$$\text{gdy } \Delta H_{ij} < 0 \quad \text{wtedy } p(i \rightarrow j) = 1$$

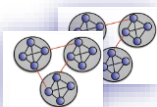
$$\text{gdy } \Delta H_{ij} > 0 \quad \text{wtedy } p(i \rightarrow j) = e^{-\Delta H_{ij}}$$

Spr. co to dokładnie znaczy?

- 1) Przejście $i \rightarrow j$ oznacza przejście $G_i \rightarrow G_j$
- 2) Zastanawiamy, czy $H(G_j) < H(G_i) \Rightarrow \Delta H_{ij} < 0$
- 3) Wg. algorytmu Metropolis powinniśmy takie przejście zaakceptować z prawdop. $p(i \rightarrow j) = 1$.

- 4) Wg. algorytmu przejście przeciwnego, gdy zaistnieje po-nale jego ~~rozważenie~~ - rozważenie przeciwnego zaakceptować z prawdop. $p(j \rightarrow i) = e^{-\Delta H_{ji}} = e^{\Delta H_{ij}}$
- 5) Dzieląc odpowiednie wyrażenie dostajemy $(*) : \frac{p(i \rightarrow j)}{p(j \rightarrow i)} = \frac{1}{e^{\Delta H_{ij}}} = e^{-\Delta H_{ij}}$

9



Klasyczne grafy przypadkowe

Przykład wykorzystania algorytmu Metropolis

Klasyczne grafy przypadkowe

$$H(G) = \theta E(G), \quad E(G) \text{ liczba krawędzi w grafie}$$

$$\theta = \ln \left[\frac{1-p}{p} \right], \quad p \text{ prawdopodobieństwo krawędzi}$$

Niech zmiana stanów $i \rightarrow j$ polega na dodawaniu lub usuwaniu krawędzi w grafie G_i oraz akceptowaniu lub odrzucaniu zmian.

$$\Delta H = H(G_j) - H(G_i) = \pm \theta$$

$+\theta$ oznacza dodanie krawędzi
 $-\theta$ oznacza usunięcie krawędzi

Dalej rozważamy sytuację, gdy $\theta > 0$, czyli gdy $p < \frac{1}{2}$

Ponieważ $\theta > 0$ wynika stąd, że:

1. dodawanie krawędzi akceptujemy z prawdopodobieństwem:

$$p(i \rightarrow j) = e^{-\theta}$$

2. usunięcie krawędzi akceptujemy zawsze:

$$p(i \rightarrow j) = 1$$

1. Symulację MC rozpoczynamy od dowolnego grafu prostego, np. od grafu pustego (tj. od pustej macierzy sąsiedztwa).

2. Losujemy dowolny element macierzy sąsiedztwa A_{ij} .

Jeśli $A_{ij} = 1$ wtedy zamieniamy: $A_{ij} = 0$

Jeśli $A_{ij} = 0$ wtedy z prawd. $e^{-\theta}$ zamieniamy: $A_{ij} = 1$

3. Sprawdzamy, jak w czasie zmienia się liczba krawędzi $E(t)$.

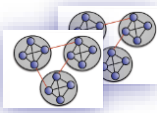
Gdy $\langle E \rangle = \text{const}$ oznacza to, że kolejne grafy w ciągu

$$\{\dots, G_t, G_{t+1}, G_{t+2}, \dots\}$$

pojawiają się z wykładniczą częstotliwością:

$$P(G) = \frac{e^{H(G)}}{Z}$$

10



Sformułowanie problemu ...

Problem: Przypuśćmy, że badamy pewną sieć rzeczywistą i chcemy stworzyć model tej sieci

Krok 1.

Ustalamy te spośród strukturalnych cech badanej sieci, które są dla nas ważne, np.

- liczba krawędzi w sieci, E .
- liczba trójkątów, T .
- sekwencja stopni węzłów: $\{k_i\} = k_1, k_2, \dots, k_N$.
- ogólnie, pewien zbiór parametrów: $\{x_i\} = x_1, x_2, \dots, x_r$.

Krok 2.

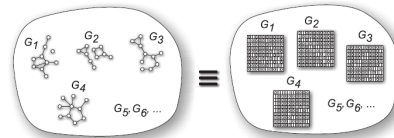
Na podstawie sieci rzeczywistej, określamy średnie wartości tych parametrów:

- (...)
- ogólnie: $\{x_i^*\} = x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$.

Krok 3.

Ustalamy zbiór możliwych realizacji badanej sieci $\{G\}$:

- zbiór wszystkich grafów prostych o zadanej liczbie węzłów
- zbiór grafów ważonych o wagach z ustalonego zbioru



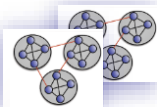
Krok 4.

Wybieramy rozkład $P(G)$ taki, by typowe realizacje zespołu sieci miały określone cechy sieci rzeczywistej.

$$\langle x_i \rangle = \sum_G x_i(G) P(G) = x_i^*$$

Pytanie: W jaki sposób wybrać $P(G)$?

11



Zasada maksymalnej entropii

M.E.J. Newman
Networks: An Introduction
 Oxford University Press, 2010

"The best choice of the probability distribution $P(G)$ is the one that maximizes the Shannon/Gibbs entropy. (...) the maximum entropy choice is best in the sense that it makes the minimum assumptions about the distribution other than those imposed upon us by the constraints."

Entropia Shannona

$$S = - \sum_G P(G) \ln P(G)$$

Więzy narzucone na zespół grafów:

$$\sum_G P(G) = 1 \quad \forall_i \quad \langle x_i \rangle = \sum_G x_i(G) P(G) = x_i^*$$

Metoda mnożników Lagrange'a:

$$\frac{\partial}{\partial P(G)} \left[S - \alpha \left(1 - \sum_{G \in \mathcal{G}} P(G) \right) - \sum_{i=1}^r \theta_i \left(x_i^* - \sum_{G \in \mathcal{G}} x_i(G) P(G) \right) \right] = 0$$

Dostajemy:

$$P(G) = \exp \left[\alpha - 1 + \sum_{i=1}^r \theta_i x_i(G) \right] \quad P(G) = \frac{e^{H(G)}}{Z},$$

gdzie

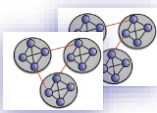
$$\text{hamiltonian: } H(G) = \sum_{i=1}^r \theta_i x_i(G)$$

$$\text{suma statystyczna: } Z = \sum_G e^{H(G)}$$

$$\text{energia swobodna: } F = \ln Z$$

$$\text{oczekiwana wartość parametru } x_i: \langle x_i \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \theta_i} = \frac{\partial F}{\partial \theta_i}$$

12



Przykład: uogólnione grafy przypadkowe (grafy o zadanej sekwencji stopni węzłów)

$$P(G) = \frac{e^{-H(G)}}{Z}$$

random graphs with a given node degree sequence,
generalized random graphs,
configuration model

$$\begin{aligned} \text{hamiltonian: } H(G) &= \sum_{i=1}^N \theta_i k_i(G) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (\theta_i + \theta_j) A_{ij}(G) \end{aligned}$$

$$\text{suma statystyczna: } Z = \prod_{i=1}^N \prod_{j=i+1}^N (1 + e^{\theta_i + \theta_j})$$

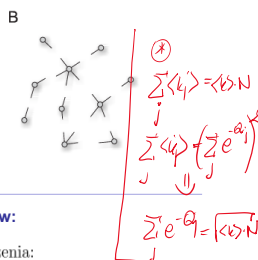
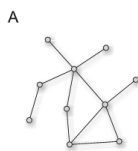
$$\text{energia swobodna: } F = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \ln [1 + e^{\theta_i + \theta_j}] = -\ln Z$$

oczekiwany stopień węzła i:

$$\langle k_i \rangle = -\frac{\partial F}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{1 + e^{\theta_i + \theta_j}} = \sum_{j=1}^N p_{ij}$$

prawdopodobieństwo istnienia połączenia między i oraz j:

$$p_{ij} = \langle A_{ij} \rangle = \frac{1}{1 + e^{\theta_i + \theta_j}}$$



W granicy rzadkich grafów:

prawdopodobieństwo połączenia:

$$p_{ij} \simeq e^{-(\theta_i + \theta_j)}$$

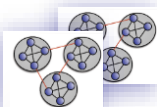
średni stopień węzła:

$$\langle k_j \rangle \simeq e^{-\theta_j} \sum_{i=1}^N e^{-\theta_i} = e^{-\theta_j} \sqrt{\langle k \rangle N}$$

$$\text{oraz: } p_{ij} \simeq \frac{\langle k_i \rangle \langle k_j \rangle}{\langle k \rangle N}, \quad \theta_i \simeq \ln \left[\frac{\sqrt{\langle k \rangle N}}{\langle k_i \rangle} \right]$$

Park & Newman (2004), Fronczak, Fronczak & Hołyst (2006)

13



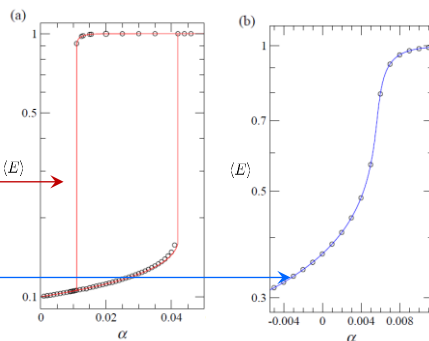
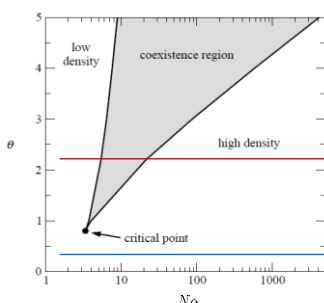
Model Straussa

Hamiltonian:

$$H(G) = \theta E(G) - \alpha T(G)$$

$E(G)$ - liczba krawędzi



$T(G)$ - liczba trójkątów



D. Strauss
On a general class of models for interaction
SIAM Rev. **28**, 513-527 (1986)

J. Park, M.E.J. Newman
Solution for the properties of a clustered network
Phys. Rev. E. **72**, 026136 (2005)

14

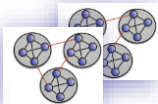
Agata Fronczak

Wykładowe grafy przypadkowe:
teoria i przykłady zastosowań
do analizy rzeczywistych sieci złożonych

CZĘŚĆ 2.

Wykładowe grafy przypadkowe – przykłady zastosowań

15



Modele blokowe

Sieci rzeczywiste o strukturze modułowej (blokowej)

Moduły (bloki) w sieciach złożonych:
gęsto połączone grupy węzłów w sieciach o mniejszej gęstości połączeń.

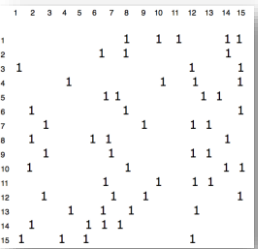
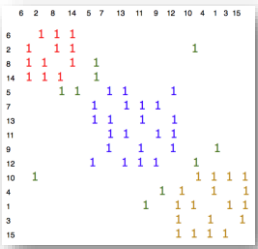
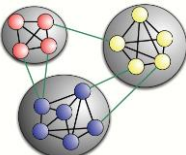
- Ludzie o podobnych zainteresowaniach
- Strony WWW o tej samej tematyce
- Proteiny pełniące podobne funkcje

Powody dla których bada się strukturę blokową:

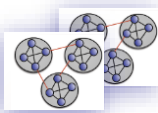
Teoretyczne i praktyczne

- Zasady organizacji sieci
- Klasyfikacja węzłów i połączeń międzywęzłowych
- Algorytmy do detekcji brakujących połączeń
- Poprawa efektywności różnych algorytmów sieciowych (wyszukiwarek, kontekstowych translatorów, systemów rekomendujących itd.)

Wielkie wyzwanie ostatniej dekady → algorytmy do detekcji bloków


→

→


16



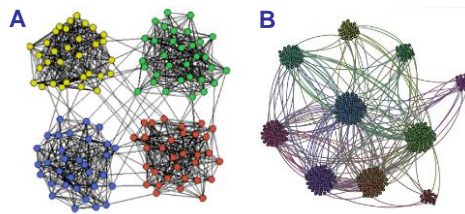
Modele sieci wykorzystywane do testowania algorytmów do detekcji modułów w sieciach rzeczywistych

A Klasyczne modele blokowe (Girvan, Newman, PNAS 2004)

N węzłów, K bloków o tej samej wielkości.
Błoki – losowo połączone klasyczne grafy przypadkowe.

B Realistyczny model sieci blokowej (Lancichinetti, Fortunato, Radicchi, PRE 2008)

Moduły o różnych wielkościach.
Potęgowy rozkład stopni węzłów.

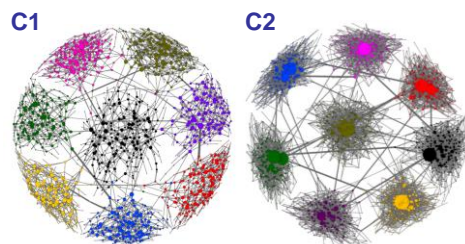


C Wykładnicze grafy przypadkowe o strukturze blokowej (Fronczak, Fronczak, Bujok, PRE 2013)

Bardzo ogólny model, który zawiera
modele A i B jako szczególne przypadki.

Model, który łatwo można implementować przy użyciu
symulacji MC.

Model, łatwy w obliczeniach analitycznych.



P. Fronczak, A. Fronczak, M. Bujok, *Exponential random graph models for networks with community structure*, Phys. Rev. E **88**, 032810 (2013). IF₂₀₁₂ = 2,313

17



Sieć handlu światowego

Dane nt. międzynarodowej wymiany handlowej
w latach 1950-2000:

<http://www.tradedata.net/>
<http://privatewww.essex.ac.uk/~ksg/exptradegdp.html>

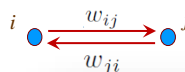
Światowa sieć handlu jest typowym reprezentantem zespołu
wykładniczych grafów przypadkowych o hamiltonianie:

$$H(G) = \sum_i \sum_{j \neq i} \theta_{ij} w_{ij}(G),$$

gdzie

$w_{ij}(G)$ reprezentuje całkowity roczny eksport $i \rightarrow j$
(lub import $j \rightarrow i$)

θ_{ij} jest polem sprzężonym z wielkością bilateralnej
wymiany handlowej



Suma statystyczna:

$$Z(\{\theta_{ij}\}) = \prod_i \prod_{j \neq i} \frac{1}{\theta_{ij}}$$

Prawdopodobieństwo sieci G w zespole:

$$P(G) = \prod_i \prod_{j \neq i} p_{ij}(w_{ij})$$

Prawdopodobieństwo, że wymiana handlowa
 $i \rightarrow j$ będzie równa w_{ij} :

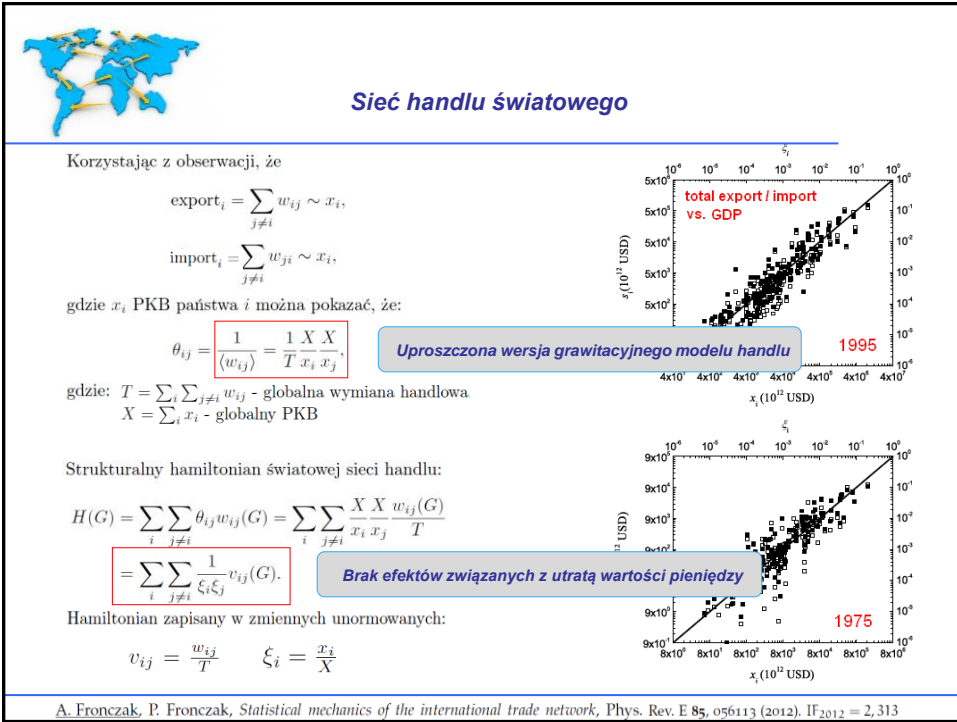
$$p_{ij}(w_{ij}) = e^{-\theta_{ij} w_{ij}}$$

Średnia wielkość wymiany z i do j :

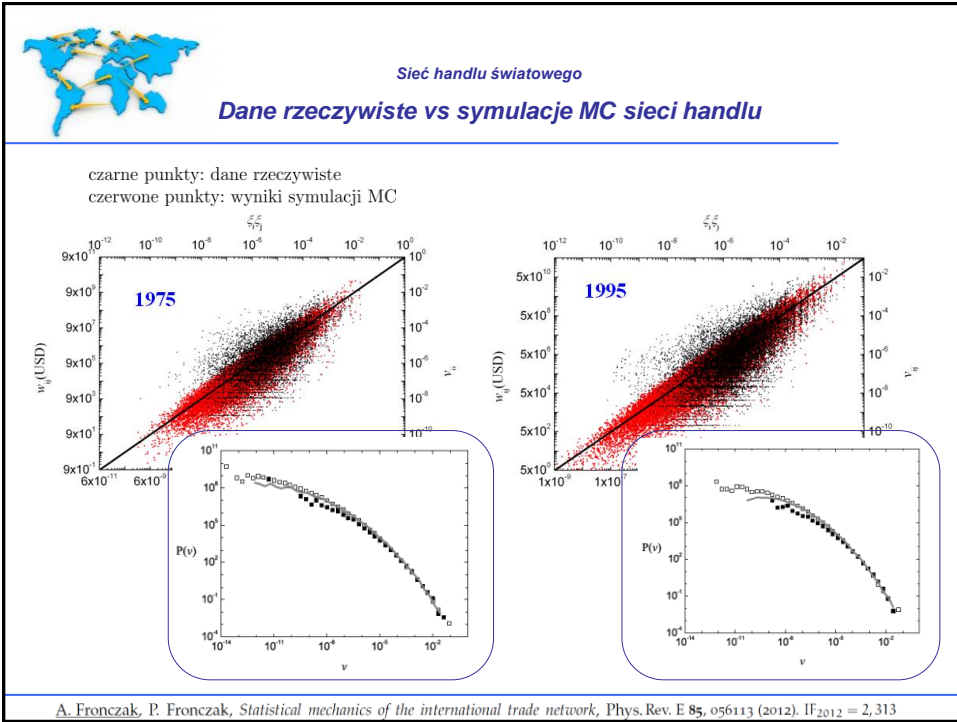
$$\langle w_{ij} \rangle = \frac{1}{\theta_{ij}}$$

A. Fronczak, P. Fronczak, *Statistical mechanics of the international trade network*, Phys. Rev. E **85**, 056113 (2012). IF₂₀₁₂ = 2,313

18



19



20



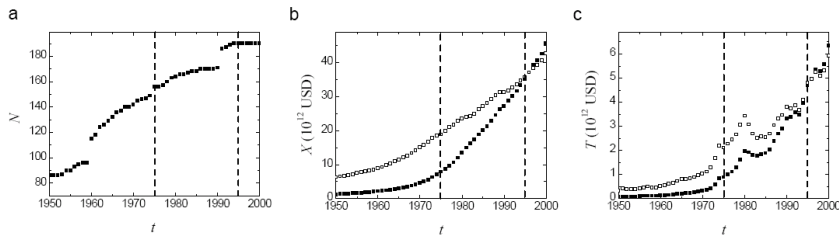
Sieć handlu światowego

Zmienność sieci w czasie, proces quasistatyczny

W każdym roku z okresu 1950-2000 badana sieć jest dobrze opisana hamiltonianem strukturalnym:

$$H(G) = \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{\xi_i \xi_j} v_{ij}(G).$$

Oznacza to, że ewolucję tej sieci w czasie można traktować jako proces quasistatyczny!



A. Fronczak, P. Fronczak, *Statistical mechanics of the international trade network*, Phys. Rev. E **85**, 056113 (2012). IF₂₀₁₂ = 2,313

21



Sieć handlu światowego

Relacja fluktuacyjno – dysypacyjna

W każdym roku z okresu 1950-2000 badana sieć jest dobrze opisana hamiltonianem strukturalnym:

$$H(G) = \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{\xi_i \xi_j} v_{ij}(G).$$

Oznacza to, że ewolucję tej sieci w czasie można traktować jako proces quasistatyczny!



Relacja fluktuacyjno-dysypacyjna
(tj. proste twierdzenie fluktuacje-odpowiedź)

$$\langle v_{ij}^2 \rangle - \langle v_{ij} \rangle^2 = -\frac{\partial \langle v_{ij} \rangle}{\partial \theta_{ij}^*},$$

gdzie $\theta_{ij}^* = \frac{1}{\xi_i \xi_j}$

prawa strona: fluktuacje eksportu v_{ij} ,

lewa strona: podatność eksportu na zmianę zewnętrznego pola θ_{ij}^* .



$$\frac{d \langle v_{ij} \rangle}{\langle v_{ij} \rangle} = \frac{d \xi_i}{\xi_i} + \frac{d \xi_j}{\xi_j}$$

Względne zmiany bilateralnej wymiany handlowej można oszacować badając względne zmiany PKB handlujących ze sobą państw

A. Fronczak, P. Fronczak, *Statistical mechanics of the international trade network*, Phys. Rev. E **85**, 056113 (2012). IF₂₀₁₂ = 2,313

22



Sieć handlu światowego

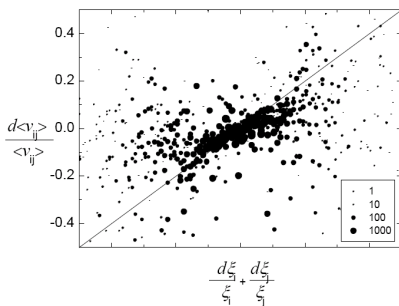
Podatność wymiany handlowej na zmianę PKB

$$\frac{d\langle v_{ij} \rangle}{\langle v_{ij} \rangle} = \frac{d\xi_i}{\xi_i} + \frac{d\xi_j}{\xi_j}$$

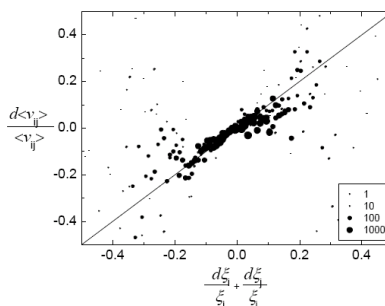
$$\frac{d\langle v_{ij} \rangle}{\langle v_{ij} \rangle} \simeq \frac{v_{ij}(T+1) - v_{ij}(T)}{v_{ij}(T)}$$

$$\frac{d\xi_i}{\xi_i} \simeq \frac{\xi_i(T+1) - \xi_i(T)}{\xi_i(T)}$$

Wszystkie dane z okresu 1950-2000. Wielkość punktów zależy od liczby krawędzi sieci wziętych do średniej.



Do sporządzenia wykresu wykorzystano tylko te dane, dla których $v_{ij} > 10^{-4}$.



A. Fronczak, P. Fronczak, *Statistical mechanics of the international trade network*, Phys. Rev. E **85**, 056113 (2012). IF₂₀₁₂ = 2,313

23

Grawitacyjny model handlu i zagadka globalizacji

ROK 2014

M. Karpiarz, P. Fronczak, A. Fronczak
International trade network: Fractal properties and globalization puzzle
Phys. Rev. Lett. vol. 113, 248701 (2014)

Grawitacyjny model handlu (Jan Tinbergen, 1962)

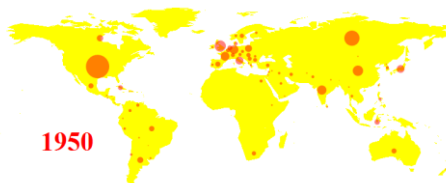
$$T_{ij} = G \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^\alpha}$$

T_{ij} wielkość handlu (eksportu/importu) między i oraz j

r_{ij} odległość geograficzna między i oraz j

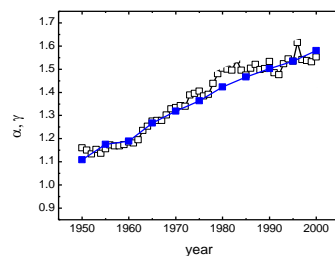
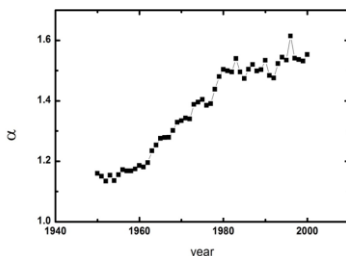
Q_i PKB (ang. GDP) państwa i

Wymiar fraktalny sieci handlu ● powierzchnia \sim PKB



1950

Zagadka globalizacji: Rola odległości rośnie w czasie, chociaż koszty związane z odległością maleją (ang. *death of distance*).



24

Dziękuję za uwagę!

