# МП и ТП

**Опр. 1.** Пусть $X$ — некоторое мн-во. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ наз-ся **метрикой** в мн-ве $X$, если:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0 \forall x, y \in X$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in X$
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in X$

Множество $X$ с введённой на нём метрикой $\rho$ называется **метрическим пространством** $(X, \rho)$.

**Опр. 2.** Пр-во $Y$ наз-ся **подпространством** пр-ва $X$, если $Y \subset X$, и на $Y$ берётся **индуцированная метрика** $\rho_Y(y_1, y_2) = \rho_X(y_1, y_2) \forall y_1, y_2 \in Y$.

**Опр. 3. Расстояние между множествами** есть $\rho(A, B) = \inf\limits_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$

**Опр. 4.** Мн-во $S$ из метр. пр-ва $(X, \rho)$ наз-ся **всюду плотным** в $X$, если его замыкание совпадает с $X$, т. е. $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists y \in S : \rho(x, y) < \varepsilon$.

**Опр. 5.** МП $(X, \rho)$ наз-ся **сепарабельным**, если в нём существует счётное всюду плотное мн-во.

**Опр. 6.** Пусть $X$ — некоторое сем-во множеств. Семейство $\tau$ подмножеств мн-ва $X$ наз-ся **топологией**, если:

1. $X \in \tau$ и $\emptyset \in \tau$
2. $\forall$ семейства подмн-в $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \tau \hookrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$
3. $\forall$ конечного семейства подмн-в $U_k \mid k \in \overline{1, N} \subset \tau \hookrightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{N} U_k \in \tau$

Мн-во $X$ со введённой на нём топологией $\tau$ наз-ся **топологическим пр-вом (ТП)** $(X, \tau)$.

**Опр. 7.** Пусть $(X, \tau)$ — ТП. Любое мн-во $U \in \tau$ наз-ся **открытым**($\tau$-открытым) в ТП $(X, \tau)$. Топология $\tau$ называется **семейством открытых подмн-в** мн-ва $X$.

**Опр. 8.** Пусть $(X, \tau)$ — ТП. Для любого $x \in X$ **окрестностью** $x$ называется произвольное $\tau$-открытое множество, содержащее $x$.

**Опр. 9.** Пусть $(X, \tau)$ — ТП, $S \subset X$. **Открытым покрытием** мн-ва $S$ наз-ся сем-во $\tau$-открытых мн-в $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, т. ч. $S \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

# ПМП

**Опр. 10.** П-ть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ элементов МП $(X, \rho)$ наз-ся **фундаментальной** (или $\rho$-фундаментальной), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m > N \hookrightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

**Опр. 11.** МП $(X, \rho)$ наз-ся **полным**, если любая фундаментальная п-ть из $(X, \rho)$ сх-ся.

**Опр. 12.** МП $(X, \rho)$ наз-ся **связным**, если $X$ нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

**Опр. 13.** Пусть $(X, \rho)$ — МП. **Открытым шаром** с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ наз-ся мн-во $B_R(x) = B(x, R) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < R\}$. **Замкнутым шаром** с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ наз-ся мн-во $\overline{B}_R(x) = \overline{B}(x, R) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant R\}$.

**Опр. 14.** Мн-во $M \subset X$, где $(X, \rho)$ — МП, наз-ся **открытым**, если $\forall x_0 \in M \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$. Обычно обозначается $G$.

**Опр. 15.** Пусть $(X, \rho)$ — МП и $M \subset X$. Точка $x_0 \in X$ наз-ся **точкой прикосновения** мн-ва $M$, если $\forall \epsilon > 0 \hookrightarrow B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$.

**Опр. 16.** Пусть $(X, \rho)$ — МП и $M \subset X$. Точка $x_0 \in X$ наз-ся **предельной точкой** мн-ва $M$, если $\exists y \in B_eps(x_0) \cap M : y \neq x$.

**Опр. 17.** Пусть $(X, \rho)$ — МП и $M \subset X$. Множество $[M]$(или $\overline{M}$) наз-ся **замыканием** мн-ва $M$, если оно получено добавлением к $M$ всех его точек прикосновения.

**Опр. 18.** Мн-во $M \subset X$, где $(X, \rho)$ — МП, наз-ся **замкнутым**, если $[M] = M$. Обычно обозначается $F$.

**Опр. 19.** Лебегово пр-во $l_p$ для $1 \leqslant p < +\infty$ состоит из числовых п-тей вида $x = (x_1, x_2, \dots)$

$l_p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty\}$

с нормой $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p}$ и метрикой $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p$.

**Полное сепарабельное**

**Опр. 20.** Лебегово пр-во $l_\infty$. С нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$ и метрикой $\rho_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$. **Полное несепарабельное**

**Опр. 21.** Пр-во $C[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbb{R} \mid x \text{ непрерывно на } [a,b]\}$ непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ и метрикой $\rho_C(x,y) = \|x-y\|_C$.

**Полное сепарабельное связное**

**Теор. 1 Достаточное условие несепарабельности МП.** Пусть в МП $(X,\rho)$ существует несчётное подмножество $A_0$ и $\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall a, b \in A_0, a \neq b, \hookrightarrow \rho(a,b) \geqslant \varepsilon_0$. Тогда МП $(X,\rho)$ является несепарабельным.

**Теор. 2 2.1, Принцип вложенных шаров.** Пусть $X$ — ПМП, $\{B_n := \overline{B}(x_n, r_n)\}$ — п-ть замкн. вложенных шаров, $r_n \to 0$. Тогда $\exists! x \in \bigcap\limits_n B_n$.

**Теор. 3 2.2, Бэр.** Пусть $X$ — ПМП, тогда $X$ нельзя представить в виде $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, где $M_n$ — нигде не плотное множество.

**Опр. 22.** Пусть $(X,\rho)$ — МП. Отображение $f : X \to X$ наз-ся **сжимающим**, если $\exists\alpha \in (0,1) : \forall x, y \in X \hookrightarrow \rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\rho(x,y)$.

**Опр. 23.** Пусть X — некоторое мн-во, $f : X \to X$ — отображение. Точка $x_o \in X$ наз-ся **неподвижной** для отображения $f$, если $f(x_0) = x_0$.

**Теор. 4 2.3, Банаха о сжимающих отображениях.** Пусть $(X,\rho)$ — ПМП, $f : X \to X$ — сжимающее отображение. Тогда $f$ имеет единственную неподвижную точку.

**Опр. 24.** Пусть $(X_1,\rho_1)$ и $(X_2,\rho_2)$ — МП. Отображение $\varphi : X_1 \to X_2$ называется **изометрией**, если $\varphi$ — биекция и $\forall x_1, y_1 \in X_1 \hookrightarrow \rho_1(x_1,y_1) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(y_1))$. Если между МП $X_1$ и $X_2$ существует изометрия, они называются **изометричными**.

**Опр. 25.** ПМП $(Y,d)$ наз-ся **пополнением** МП $(X,\rho)$, если $\exists Z \subset Y$, $Z$ — всюду плотное в $Y$, т. ч. МП $(X,\rho)$ и $(Z,d)$ изометричны.

**Теор. 5 2.4, Хаусдорф.** Пусть $X$ — неполное МП, тогда $\exists$ ПМП $Y$ — пополнение $X$

**Опр. 26.** Пусть $(X,\rho)$ — МП. Мн-во $A \subset X$ наз-ся **плотным в мн-ве** $B \subset X$, если $B \subset \overline{A}$, т. е. $\forall b \in B \forall\varepsilon > 0 \exists a \in A : \rho(a,b) < \varepsilon$.

$A$ наз-ся **всюду плотным**, если $A$ плотно в $X$.

$A$ **нигде не плотно**, если оно не плотно ни в одном шаре, т. е. в каждом шаре $B \subset R$ содержится другой шар $B', B' \cap A = \emptyset$.

# КМП и КТП

**Опр. 27.** Пусть $(X,\tau)$ — ТП. Мн-во $S \subset X$ наз-ся **компактным**, если любое открытое покрытие мн-ва $S$ содержит конечное подпокрытие

**Опр. 28.** Пусть $(X,\tau)$ — ТП. Говорят, что п-ть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ **сх-ся по топологии** $\tau$ к элементу $x \in X$, если $\forall U(x) \exists N : \forall n > N \hookrightarrow x_n \in U(x)$. Обозначается $x_n \to^{\tau}_{n\to\infty} x$.

**Опр. 29.** Пусть $X$ — ТП. $\{B_\alpha\}$ наз-ся **центрированной системой множеств (ЦС)**, если любая их конечная подсистема имеет непустое пересечение.

**Теор. 6 3.1, Критерий компактности топологических пространств.** Пусть $X$ — ТП. Тогда $X$ — компакт $\Leftrightarrow$ в $X$ любая ЦС замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

**Опр. 30.** Пусть $(X,\rho)$ — МП. Мн-во $S \subset X$ наз-ся **вполне ограниченным**, если $\forall\varepsilon > 0 \exists$ конечный набор точек $x_1, \ldots, x_N \in S : S \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B_\varepsilon(x_k)$. Указанный набор точек называется **конечной $\varepsilon$-сетью** мн-ва S.

**Теор. 7 3.2, Критерий компактности метрических пространств.** Пусть $X$ — МП. Тогда СУЭ:

1. $X$ — компакт
2. МП $X$ — полное и ВО
3. мн-во $X$ явл. секвенциально компактным (т. е. из любой п-ти $\{x_n\} \subset X$ можно выделить сходящуюся п-пть
4. любое бесконечное множество в $X$ имеет предельную точку

**Сл-вие. 7.1.** Если $X$ — МП, то $M \subset X$ — компактно $\Rightarrow M$ — замкн.

**Сл-вие. 7.2.** Если $X$ — ПМП, то $M \subset X$ — компактно $\Leftrightarrow M$ — замкн. и ВО.

**Сл-вие. 7.3.** Если $X = \mathbb{R}^n$, то $M \subset X$ — компактно $\Leftrightarrow M$ — замкн. и огр.

**Опр. 31.** Пусть $(X, \rho)$ — МП. Мн-во $M \subset X$ наз-ся **ограниченным**, если $\exists x_0 \in X : \exists r > 0 : M \subset B_r(x_0)$.

**Опр. 32.** Мн-во метрического пространства наз-ся **предкомпактом**, если его замыкание компактно.

**Опр. 33.** Сем-во функций $S \subset C[a, b]$ наз-ся **равномерно ограниченным**, если $\exists c : \forall f \in S \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant c$.

**Опр. 34.** Сем-во функций $S \subset C[a, b]$ наз-ся **равностепенно непрерывным**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall f \in S \forall x, x' \in [a, b] \hookrightarrow |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

**Теор. 8 3.3, Теорема Арцела-Асколи.** Пусть $X$ — КМП. Тогда сем-во ф-ий $S \subset C(X)$ предкомпактно в пр-ве $C(X) \Leftrightarrow$ оно равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.

**Опр. 35.** Пр-во $C^k[a, b]$ k раз непр. дифф. ф-ий $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{C^k} = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{x\in[a,b]} |x^{(i)}(t)|$.

# ЛНП

**Опр. 36.** Непустое мн-во $L$ наз-ся **линейным** (или **векторным**) пр-вом над $M$, если: $\forall x, y, z \in L \forall \alpha, \beta \in M$:

1. однозначно определён элемент $x + y \in L$:
   (a) $x + y = y + x$
   (b) $x + (y + z) = (x + y) + z$
   (c) $\exists 0 \in L : x + 0 = 0 + x = x$
   (d) $\exists (-x) \in L : x + (-x) = 0$
2. однозначно определён элемент $\alpha x \in L$:
   (a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
   (b) $\exists 1 \in L : 1x = x$
   (c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
   (d) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

В зависимости от $M$ различают действительные ($M = \mathbb{R}$) и комплексные ($M = \mathbb{C}$) линейные нормированные пространства.

**Опр. 37.** Пусть $X$ — комплексное ЛП. Ф-ия $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ наз-ся **нормой** в $X$, если:

1. $\forall x \in X \hookrightarrow \|x\| \geqslant 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \forall t \in \mathbb{R}\, \|tx\| = |t|\, \|x\|$
3. $\forall x, y \in X \hookrightarrow \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)

Любое пр-во с фиксированной в нём нормой будем называть **линейным нормированным пространством (ЛНП)**.

**Опр. 38.** $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на ЛП $E$ наз. **эквивалентными**, если $\exists c_1, c_2 \geqslant 0 : \forall x \in E \hookrightarrow c_1 \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2 \|x\|_2$.

**Опр. 39.** Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — нормы на ЛП $E$. $\|\cdot\|_1$ **слабее** $\|\cdot\|_2$, если $x_n \xrightarrow[\|\cdot\|_2]{} x \Rightarrow x_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} x$.

**Теор. 9 4.1, Рисс.** Пусть $E$ — НП, $\dim E = \infty$. Тогда $S(0, 1)$ — единичная сфера — не является компактной (даже не является ВО).

**Опр. 40.** Полное НП наз-ся **банаховым (БП)**(обычно обозначается $B$) .

**Опр. 41.** ЛП наз-ся **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

**Опр. 42.** ЛП $L'$ наз-ся **подпространством** ЛП $L$, если $L' \subset L$ и операции сложения векторов и умножения вектора на число определены так же, как в $L$.

**Опр. 43. Линейной комбинацией (ЛК)** в-ров $x_1, \ldots, x_n$ наз-ся любой в-р вида $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — числовые множители.

**Опр. 44.** ЛК наз. **нетривиальной**, если хотя бы один из коэф. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ отличен от нуля.

**Опр. 45.** В-ры $x_1, \ldots, x_n$ наз-ся **линейно зависимыми (ЛЗ)**, если $\exists$ нетрив. ЛК, равная 0. Иначе они называются **линейно независимыми (ЛНЗ)**.

**Опр. 46.** ЛП наз-ся **n-мерным**, если в нём $\exists$ n ЛНЗ в-ров, а любые $n + 1$ в-ров ЛЗ. В таком случае эти $n$ в-ров наз-ся базисом.

**Опр. 47.** ЛП наз-ся **бесконечномерным**, если $\forall n \in \mathbb{N}$ в нём $\exists$ $n$ ЛНЗ в-ров.

**Опр. 48.** Пусть задана некоторая система эл-тов ЛП $L$. Совокупность всех ЛК этой системы наз-ся её **линейной оболочкой**.

**Опр. 49.** Система эл-тов $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ наз-ся **полной** в пр-ве $X$, если её ЛО плотна в $X$, т. е. если $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n} \subset \{x_\alpha, \alpha \in A\} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\| < \varepsilon$.

**Опр. 50.** П-ть эл-тов $e_1, e_2, \dots$ ЛНП $X$ наз-ся **базисом** пр-ва $X$, если каэдый эл-т $x \in X$ имеет единственное разложение по этой системе, т. е. $\exists! \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} : x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Здесь ряд сх-ся к эл-ту $x$ по норме пр-ва $X$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \hookrightarrow \left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\| < \varepsilon$.

**Опр. 51.** Пр-во $c$ сходящихся п-тей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с операциями сложения и умножения на число и нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{k \in N} |x_k|$.

**Опр. 52.** Пр-во $c_0$ сходящихся п-тей, эл-ты которых стремятся к 0, $x = (x_1, x_2, \dots)$ с операциями сложения и умножения на число и нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{k \in N} |x_k|$.

**Опр. 53.** Пусть $X$ — комплексное ЛП. **Скалярным произведением** в $X$ наз-ся отображение $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$, т. ч.:

1. $\forall x \in X \hookrightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$ и $(x, x) \geqslant 0$;
2. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall x, y \in X \hookrightarrow (x, y) = \overline{(y, x)}$;
4. $\forall x, y, z \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \hookrightarrow (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

**Опр. 54.** ЛП с фиксированным в нём скалярным произведением наз-ся **евклидовым**.

**Утв. 1.** Пусть $X$ — евклидово пр-во. Тогда величина $\|x\| = \sqrt{(x, x)}, x \in X$, удовлетворяет определению нормы в $X$. Такая норма называется **нормой, порождённой скалярным произведением**.

**Опр. 55.** ЕП, полное относительно нормы, порождённой скалярным произв., наз. **гильбертовым пр-вом (ГП)** (обычно обозначается $H$).

**Теор. 10 4.2.** Пусть $E$ — ЛНП. Тогда норма в $E$ порождена скалярным произведением $\Leftrightarrow$ выполняется **равенство параллелограмма**: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

**Теор. 11 4.3, Рисса о проекциях.** Пусть $H$ — ГП, $M \subset H$ — подпр-во. Тогда $H = M \oplus M^\perp$, где $M^\perp = \{y \mid (m, y) = 0 \forall m \in M\}$ — **аннулятор**.

**Теор. 12 4.4.** Пусть $H$ — ГП над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $e = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ОНС. Тогда СУЭ:

1. $e$ — базис
2. $e$ — полная система
3. $e^\perp = \{0\}$
4. $\forall x \in H$ справедливо равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum |(x, e_n)|^2$.

**Теор. 13 Рисса-Фишера.** Пусть $H$ — ГП, $\{e_n\}$ — ОНС. Тогда $\sum \alpha_n e_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum |\alpha_n|^2$ сх-ся.

# ЛОО

**Опр. 56.** Пусть $L$ — действительное ЛП, и $x, y \in L$. Назовём **замкнутым отрезком** в L, соединяющим точки $x$ и $y$, совокупность $\{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1\}$. Отрезок без концевых точек $x, y$ называется **открытым отрезком**. Мн-во $M \subset L$ наз-ся выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками $x$ и $y$ содержит соединяющий их отрезок.

**Опр. 57.** Пусть $X, Y$ — ЛП. Линейное отображение $A : X \to Y$ наз-ся **линейным оператором**.

**Опр. 58.** Пусть $X, Y$ — ЛП, $A : X \to Y$ — линейный оператор. **Ядром** линейного оператора $A$ наз-ся подпр-во из $X$ вида $\operatorname{Ker} A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$. **Образом** (или **мн-вом значений**) оператора $A$ наз-ся подпр-во из $Y$ вида $\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in X\}$.

**Опр. 59.** Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Лин. опер. $A : X \to Y$ наз. **ограниченным**, если $\forall$ ограниченного мн-ва $S \subset X$ его образ $A(S)$ является ограниченным в $Y$.

**Теор. 14 5.1.** Пусть $E_1, E_2$ — ЛНП, $A : E_1 \to E_2$: — лин. опер. Тогда $A$ — непр. $\Leftrightarrow A$ — огр.

**Опр. 60.** Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. **Нормой** лин. опер. $A : X \to Y$ наз-ся $\|A\| = \inf\{k \mid \|Ax\|_Y \leqslant k \|x\|_X \forall x \in X\}$.

**Утв. 2.** Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП, $A : X \to Y$ — лин. опер. Тогда $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y$

**Утв. 3.** $\|A\| < +\infty \Leftrightarrow$ лин. опер. $A$ ограничен.

**Теор. 15 5.2.** Пусть $E_1, E_2$ — ЛНП. Обозначим $L(E_1, E_2)$ — мн-во лин. огр. операторов. Если на нём определить функции "+" и "$\cdot$", оно будет ЛП. Тогда:

1. Оно будет ЛНП, если $\|A\|$ сделать нормой в $L(E_1, E_2)$
2. Оно будет БП, если $E_2$ — БП.

**Сл-вие. 15.1.** $E$ — БП $\Rightarrow L(E)$ — БП.

**Сл-вие. 15.2.** $E$ — НП $\Rightarrow L(E, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ — БП.

**Теор. 16 5.3.** Пусть $E_1$ — ЛНП, $E_2$ — БП. $D(A) :=$ {линейное многообразие в $E, D(A)$ всюду плотно в $E$}, где $A$ — лин. огр. оп., $A : D(A) \to E_2$.

Тогда $\exists! \tilde{A} \in L(E_1, E_2) : \begin{cases} \tilde{A} \mid_{D(A)} = A \\ \left\| \tilde{A} \right\| = \|A\| \end{cases}$.

**Теор. 17 5.4, Банах-Штейнгауз, "принцип равномерной ограниченности".** Пусть $E_1$ — БП, $E_2$ — НП, $A_n \in L(E_1, E_2) : \forall x \in E_1 \sup\limits_n \|A_n x\| < \infty$.

Тогда $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$

**Теор. 18 сл-вие 5.4, полнота $L(E_1, E_2)$ в смысле поточечной сх-ти).** Пусть $E_1, E_2$ — БП, $\{A_n\} \subset L(E_1, E_2)$, и $\forall x \in E_1 \{A_n x\}$ — фунд.

Тогда $\exists A \in L(E_1, E_2) : A_n \to A$ поточечно.

**Теор. 19 сл-вие 5.4, критерий поточ. сх-ти лин. огр. оператора.** Пусть $E_1, E_2$ — БП, $\{A_n\} \subset L(E_1, E_2)$, и $A \in L(E_1, E_2)$ — лин. огр. опер.

Тогда $A_n \to A$ поточ. $\Leftrightarrow \begin{cases} \{\|A_n\|\} \text{ огр.} \\ A_n x \to Ax \forall x \in S : \overline{[S]} = E_1 \end{cases}$

**Опр. 61.** $L_1$ — ЛНП функций с нормой $\|f\|_{L_1} = \int |f(x)| dx$.

**Полное лин. норм., но не евклидово**

## Обр. опер.

**Опр. 62.** Пусть $E_1, E_2$ — ЛП, $A : E_1 \to E_2$. На $\operatorname{Im} A = \{y \in E_2 \mid \exists$ решение $Ax = y$ в $E_1\}$ определён **обратный оператор** $A^{-1}$, если $\forall y \in \operatorname{Im} A \exists! x \in E_1 : Ax = y$.

**Теор. 20 6.1.** Пусть $E_1, E_2$ — ЛП, $A \in L(E_1, E_2)$.

Тогда $\exists A^{-1} \in L(\operatorname{Im} A, E_1) \Leftrightarrow \exists M > 0 : \|Ax\| \geqslant m \|x\| \forall x \in E_1$.

**Теор. 21 6.2.** Пусть $E$ — БП, $A \in L(E) : \|A\| < 1$.

Тогда $\exists (I + A)^{-1} \in L(E)$.

**Теор. 22 6.3.** Пусть $E_1$ — БП, $E_2$ — НП, $A \in L(E_1, E_2), \exists A^{-1} \in L(E_2, E_1), \Delta A \in L(E_1, E_2) : \|\Delta A\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$.

Тогда $\exists (A + \Delta A)^{-1} \in L(E_2)$.

**Теор. 23 6.4, Банаха об обратном операторе.** Пусть $E_1, E_2$ — БП, $A \in L(E_1, E_2)$, $A$ — биекция.

Тогда $\exists A^{-1} \in L(E_2, E_1)$.

## Сопряжённое пространство

Следующий семестр.