0) При реализации алгоритма разрешается использовать только библиотеки из requierments.txt

В него входит:

1. jupyter - библиотека для показа ноутбуков
2. numpy - библиотека для вычислений
3. matplotlib - библиотека для визуализации

Установка

1. Устанавливаем python3 и virtualenv
2. создаем окружение virtualenv --no-site-packages lin_prog
3. активируем окружение source activate lin_prog
4. устанавливаем зависимости pip install -r requirements.txt
5. запускаем jupyter и начинаем работать jupyter notebook

==

Задача на Симплекс метод

1) На вход Вашему функцию должны приходить:

1. число переменных = n
2. матрица A (n x m) (tsv, вещественные числа)
3. вектор b ограничений типа неравнство
4. вектор c функции полезности для задачи max cx
5. алгоритм выбора входящей переменной (правило Бленда, Лексикографический метод)
6. (не обязательный параметр) стартовую базисную точку

2) На выход программа должна выдавать:

Обязательная часть (0.3 баллов):

1. Ответ и оптимальную точку при положительных компонентах вектора b
2. Количество итераций потребовавшихся для решения задачи
3. при n=2 выдавать процесс решения (draw=True)
4. Напишите программу которая будет отвечать на вопрос оптимально ли приведенное решение, например

Дополнительная часть (0.8 балл):

1. Максимально использовать матричные вычисления (0.2 балла)
2. Работать в случае отрицательных чисел в векторе b (0.2 балла)

In [1]:
```
import numpy as np

# Не печатать в лог сообщения о делении на ноль, ибо так и должно быть
np.seterr(divide='ignore', invalid='ignore')

import logging as log
import sys
```

```python
#log.basicConfig(level=log.DEBUG, format='>%(message)s', stream=sys.stdout)
log.basicConfig(level=log.ERROR, format='>%(message)s', stream=sys.stdout)

import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.lines as mlines
%matplotlib inline

# Для тестирования было полезно, не стал удалять, но закомментировал.
# from scipy.optimize import linprog

# Важно правильно сравнивать числа с плавающей точкой
epsilon=1e-8

class eps:
    @staticmethod
    def lt(a, b):
        return a+epsilon<b

    @staticmethod
    def gt(a, b):
        return a>b+epsilon

    @staticmethod
    def le(a, b):
        return a<=b+epsilon

    @staticmethod
    def ge(a, b):
        return a>=b-epsilon

    @staticmethod
    def eq(a, b):
        return np.abs(a-b) <= epsilon

    @staticmethod
    def neq(a, b):
        return np.abs(a-b) > epsilon
```

In [2]:
```
class SP:
    def __init__(self, A, b, c, c_old=None):
        self.A = A
        b = b.reshape((-1, 1)).astype(np.float64)
```

```
        self.b = b
        self.c = c

        self.n = n = A.shape[0]
        self.m = m = A.shape[1]

        self.basis = np.array(list(range(0, n)))
        self.nonbasis = np.array(list(range(n, n+m)))

        # Сделаем симплекс-таблицу.
        self.ST = np.block([[A,  b],
                            [-c, 0]]).astype(np.float64)

        if c_old is None:
            self.c_old = None
        else:
            self.c_old = c_old

    def from_ST(self, ST, basis, nonbasis):
        self.ST = ST

    def get_solution(self):
        ST = self.ST
        basis = self.basis
        nonbasis = self.nonbasis
        n = self.n
        m = self.m

        x = np.zeros(m)
        w = np.zeros(n)
        for i in range(0, n):
            if 0<=basis[i]<n:
                w[basis[i]] = ST[:,-1][i]
            if basis[i]>=n:
                x[basis[i]-n] = ST[:,-1][i]
        log.info('x=%s, w=%s', x, w)

        if (self.A@x > self.b.reshape(1,-1)[0]+epsilon).any() or (x < -epsilon).any():
            raise Exception('Solution is infeasible')
        return x, w

    def __get_variables(self, method):
        ST = self.ST
```

```
        basis = self.basis
        nonbasis = self.nonbasis
        n = self.n
        m = self.m

        if method=='init_auxilary':
            if (eps.gt(ST[:, -1][:-1],0)).all():
                raise Exception('Problem is unbounded')
            i = np.argmin(ST[:, -1][:-1]) # "наиболее недопустимая" строчка.
            j = m-1 # т. е. всегда добавленная переменная
            log.info('j=%s'%j)
            log.info('i=%s'%i)
            return i, j
        if method=='largest_coef':
            j = np.argmin(ST[-1][:-1])
        elif method=='blend':
            ma = np.ma.masked_where(eps.ge(ST[-1, :-1], 0), nonbasis)
            if ma.count() == 0:
                raise Exception("Something")
            j = np.argmin(ma)
        elif method=='lexical':
            j = np.argmin(ST[-1][:-1]) # любой
        else:
            raise Exception('Unknown method')

        ma = np.ma.masked_where(eps.le(ST[:-1, j], 0), ST[:-1, j])
        if (ma.count() == 0):
            raise Exception('Problem is unbounded')
        mb = ST[:-1, -1] # Маска в итоге поставится сама

        ratios = abs(mb/ma)
        log.info('j=%s'%j)
        log.debug('ratios %s'%ratios)

        i = np.where(ratios == ratios.min())[0][0]

        # Если у нас есть неоднозначность выбора
        if np.count_nonzero(eps.eq(ratios,  ratios[i]))>1:
            if method=='lexical':
                # Делим каждую строчку на элемент, стоящий в столбце j.
                ratios_row = ST[:-1] / ST[:-1, j].reshape(-1,1)
                #print('ratios_row', ratios_row)
                # Чтобы восстановилось решение, дописываем номера строчек.
```

```
                ratios_row = np.hstack([ratios_row, np.arange(0, ratios_row.shape[0]).reshape(-1,1
)])
                #print(ratios_row)
                # И берём лексикографически меньшую.
                srt = np.lexsort(ratios_row[ratios == ratios.min()][:, ::-1].T)
                #print(srt)
                #print(ratios_row[srt[0]][-1])
                i = int(ratios_row[srt[0]][-1])
            elif method=='blend':
                i = np.argmin(np.ma.array(basis, mask=eps.neq(ratios, ratios[i])))
        log.info('i=%s'%i)
        return i, j

    def make_iteration(self, method):
        ST = self.ST
        basis = self.basis
        nonbasis = self.nonbasis
        n = self.n
        m = self.m

        #Разрешающий столбец
        i, j = self.__get_variables(method)

        basis[i], nonbasis[j] = nonbasis[j], basis[i]
        log.info("basis %s, nonbasis %s"%(basis, nonbasis))

        #Строим новую таблицу

        ST_ = -ST.copy()
        if self.c_old is not None:
            c_old = self.c_old.copy()

        ST_[i] = np.zeros(ST_.shape[1])
        ST_[i][j] = 1

        # S - матрица перехода
        S = np.eye(ST_.shape[1])
        S[j] = -ST[i]

        ST_ = -(np.linalg.inv(S.T)@ST_.T).T
        if self.c_old is not None:
            c_old = (np.linalg.inv(S.T)@c_old).T
```

```
        self.ST = ST_
        if self.c_old is not None:
            self.c_old = c_old

        log.info("%s"%self)
        return self

    def __str__(self):
        return "%s\nn=%s, m=%s, basis=%s, nonbasis=%s with c_old=%s"%(
            self.ST, self.n, self.m, self.basis, self.nonbasis, self.c_old)
```

In [3]:
```
def draw_all(sp, path):

    A = sp.A
    b = sp.b
    #c = sp.c

    def is_valid_solution(x):
        return (eps.le(A@x.reshape((-1,1)), b)).all() and (eps.ge(x, 0)).all()

    # Добавляем прямые ограничений типа >=0 в матрицы.
    A_plot = np.vstack([A, np.array([[1,0], [0,1]])])
    b_plot = np.vstack([b, [[0],[0]]])

    num_iter = len(path)
    plt.figure(figsize=(3, 3*(num_iter+1)))
    # Рисует ограничения, допустимые угловые точки отмечает чёрными точками, текущую - красной.
    for i, x in enumerate(path):
        plt.subplot(num_iter, 1, i+1)
        a = plt.gca()
        #plt.axes().set_aspect('equal')#, 'datalim')
        ##a.axis([-1, 17, -1, 17])
        a.set_aspect('equal')
        a.set_xlabel('X1')
        a.set_ylabel('X2')
        plt.title('Iteration %d x=(%.2f, %.2f)' % (i+1,x[0],x[1]))

        xmax, ymax = 0, 0
        # Пересечения
        for i in range(0, A_plot.shape[0]):
            for j in range(0, i):
                if i != j:
                    a_, b_ = A_plot[i]
```

```
                c_ = b_plot[i][0]
                d_, e_ = A_plot[j]
                f_ = b_plot[j][0]
                #print(a_, b_, c_, d_, e_, f_)
                x_ = (b_*f_-c_*e_)/(b_*d_-a_*e_)
                y_ = (c_*d_-a_*f_)/(b_*d_-a_*e_)
                if eps.gt(x_, xmax) and x_ != np.inf:
                    xmax = x_
                if eps.gt(y_, ymax) and y_ != np.inf:
                    ymax = y_
                #print(x_, y_)
                if is_valid_solution(np.array([x_, y_])):
                    plt.scatter([x_], [y_], color='black', zorder=10)
    plt.scatter([x[0]], [x[1]], color='red', zorder=11)

    # Ограничения в виде осей (неотрицательность переменных)
    plt.plot([0, xmax], [0, 0], color='blue')
    plt.plot([0, 0], [ymax, 0], color='blue')
    border = 0.5
    plt.xlim((-border, xmax+border))
    plt.ylim((-border, ymax+border))

    # Ограничения
    for i in range(0, A_plot.shape[0]):
        a_, b_ = A_plot[i]
        c_ = b_plot[i][0]

        if eps.lt(c_/b_, 0):
            x1, y1 = c_/a_, 0
        else:
            x1, y1 = 0, c_/b_
        if eps.gt((c_-a_*xmax)/b_, ymax):
            x2, y2 = (c_-b_*ymax)/a_, ymax
        else:
            x2, y2 = xmax, (c_-a_*xmax)/b_
        if eps.lt(y2, 0):
            x2, y2 = c_/a_, 0
        if eps.lt(x2, 0):
            x2, y2 = 0, c_/b_
        plt.plot([x1, x2], [y1, y2], color='blue')

        if eps.lt(c_/a_, 0):
            x1, y1 = 0, c_/b_
```

```python
            else:
                x1, y1 = c_/a_, 0
            if eps.lt((c_-a_*xmax)/b_, ymax):
                x2, y2 = xmax, (c_-a_*xmax)/b_
            else:
                x2, y2 = (c_-b_*ymax)/a_, ymax
            if eps.lt(y2, 0):
                x2, y2 = c_/a_, 0
            if eps.lt(x2, 0):
                x2, y2 = 0, c_/b_
            plt.plot([x1, x2], [y1, y2], color='blue', zorder=-1)

    # tight_layout() делает только хуже
    # plt.tight_layout()
    plt.show()
```

In [4]:
```
def solve_lin_prog (A, b, c, method='blend', start_point=None, draw=False):
    """
    Здесь должно быть ваше решение. У всех действий должны быть комментарии.
    Код должен быть читабельным, хорошо использовать дополнительные функции если это необходимо

    A, b, c - матрица, b - вектор ограничений типа <=, c - функция полезности, задача максимизации
    method - 'blend', 'lexical'
    start_point - точка
    draw -  true/false рисовать ли ответ, только для 2 переменных

    Вывод - вектор на котором достигается максимум, максимальное значение, число итераций
    """

    old_sp = None
    if start_point is not None:
        old_sp = SP(A, b, c)
        # Замена: y = x - start_point
        # Проблема: ограничения типа >=0 могут сломаться.
        # Решение: y = y_plus - y_minus, где y_plus, y_minus >= 0 -- новые переменные
        # Получаем задачу ЛП в два раза большего размера.
        b = b - A @ start_point
        b = np.hstack([b, start_point])
        c = np.hstack([c, -c])
        E = np.eye(A.shape[1])
        A = np.block([[A, -A],
                      [-E, E]])
```

```
sp = None

# Если есть отрицательные значения в b, запускаем инициализацию
if (eps.lt(b, 0)).any():
    log.info('INITIAL PROBLEM:')
    log.info(SP(A, b, c))

    log.info("             AUXILARY PROBLEM:")
    A_ = np.hstack([A, -np.ones((A.shape[0], 1))])
    b_ = b
    c_ = np.hstack([np.zeros(A.shape[1]), [-1]])
    sp = SP(A_, b_, c_, c_old=np.hstack([c.copy(), [0, 0]]))
    log.info(sp)

    log.info("First step")
    sp = sp.make_iteration('init_auxilary')


    iteration_number = 0
    while (eps.lt(sp.ST[-1][:-1], 0)).any():
        iteration_number += 1
        log.info('          AUXILARY ITERATION #%s'%iteration_number)

        sp = sp.make_iteration(method)

        x, w = sp.get_solution()

    # Если добавленная переменная ненулевая, задача недопустима
    if len(np.argwhere(sp.nonbasis == sp.n+sp.m-1)) == 0:
        raise Exception("Problem is infeasible")
    i = np.argwhere(sp.nonbasis == sp.n+sp.m-1)[0][0]
    sp.ST = np.delete(sp.ST, i, 1)

    sp.c = c
    sp.A = A
    sp.b = b.reshape(-1,1)
    sp.ST[-1] = -np.delete(sp.c_old, i)
    sp.nonbasis = np.delete(sp.nonbasis, i)
    sp.m -= 1
    sp.c_old = None
    sp.ST[-1][-1] *= -1
else:
```

```python
    sp = SP(A, b, c)

log.info("SOLVING PROBLEM:")
log.info(sp)

iteration_number = 0

# Начальное решение
x, w = sp.get_solution()

solutions = [x]

while (eps.lt(sp.ST[-1][:-1], 0)).any():
    iteration_number += 1
    log.info('          ITERATION #%s'%iteration_number)

    sp = sp.make_iteration(method)

    x, w = sp.get_solution()
    solutions.append(x)

log.info('FINISHED in %d iterations'%iteration_number)

log.info('path %s'%solutions)
x, w = sp.get_solution()

log.info('SOLUTIONS %s'%solutions)

if draw == True:
    if start_point is None:
        if sp.m != 2:
            raise Warning("Can't draw with dim != 2")
        draw_all(sp, solutions)
    else:
        if sp.m != 4:
            raise Warning("Can't draw with dim != 2")
        print(solutions)
        for i, x in enumerate(solutions):
            solutions[i] = x[:sp.m // 2] - x[sp.m // 2:] + start_point
        print(solutions)
        draw_all(old_sp, solutions)

if start_point is not None:
```

```
        x = x[:sp.m // 2] - x[sp.m // 2:] + start_point
        f = x @ c[:sp.m // 2]
    else:
        f = sp.c @ x

    return x, f, iteration_number
```

In [5]:

```
# Пример, который циклится
c = -np.array([-10, 57, 9, 24.])
A = np.array([[0.5, -5.5, -2.5, 9],
                     [0.5, -1.5, -0.5, 1],
                     [1, 0, 0, 0]])
b = np.array([0, 0, 1])

ans = solve_lin_prog(A, b, c, method='blend')
print(ans)
corr_ans = (np.array([ 1.,  0.,  1.,  0.]), 1.0)
assert((eps.eq(ans[0], corr_ans[0])).all() and eps.eq(ans[1], corr_ans[1]).all())
```

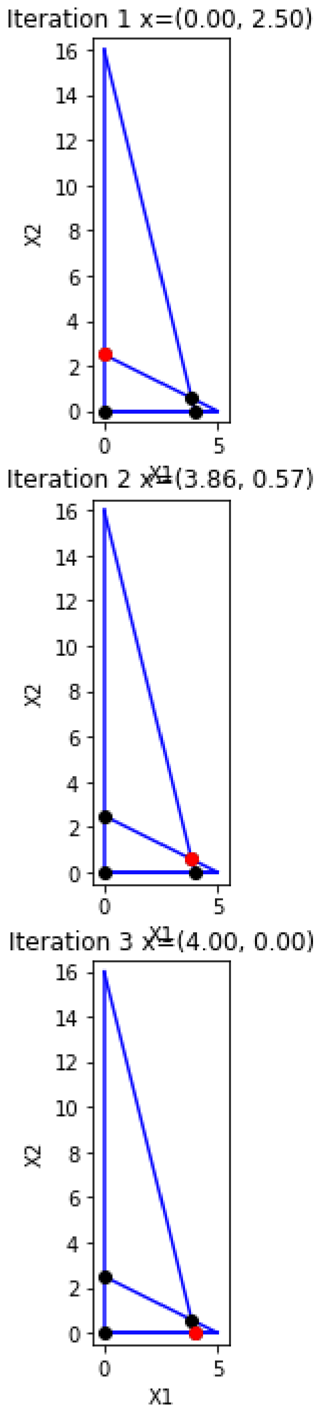
```
(array([ 1.,  0.,  1.,  0.]), 1.0, 6)
```

In [6]:

```
method = 'blend'
```

In [7]:
```
# Пример ненулевой начальной точки
A=np.array([[1,2],[2,0.5]])
b=np.array([5,8])
c=np.array([5,1])
ans = solve_lin_prog(A, b, c, draw=True, method='largest_coef', start_point=np.array([0, 5]))
corr_ans = (np.array([ 4.,  0.]), 20.0)
print(ans)
```

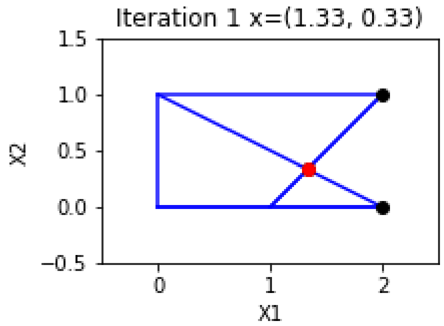
```
[array([ 0. ,  0. ,  0. ,  2.5]), array([ 3.85714286,  0.        ,  0.        ,  4.42857143]), arra
y([ 4.,  0.,  0.,  5.])]
[array([ 0. ,  2.5]), array([ 3.85714286,  0.57142857]), array([ 4.,  0.])]
```


Iteration 1 x=(0.00, 2.50)
X2
X1
Iteration 2 x=(3.86, 0.57)
X2
X1
Iteration 3 x=(4.00, 0.00)
X2
X1

```
(array([ 4.,  0.]), 20.0, 2)
```

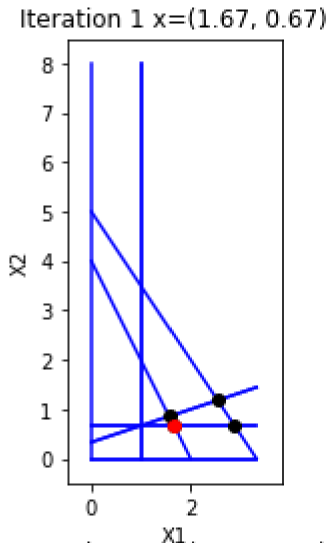
In [8]:

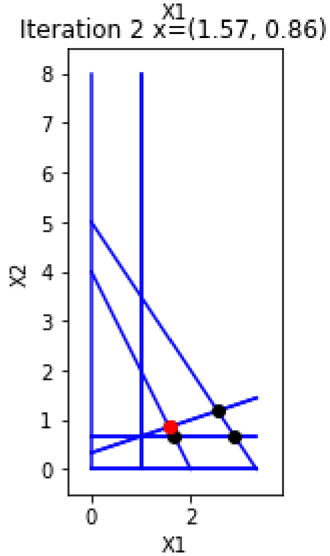
```
# Пример инициализации
A=np.array([[-1,1],[-1, -2], [0, 1]])
b=np.array([-1, -2, 1])
c=np.array([-2, -1])
ans = solve_lin_prog(A, b, c, method='largest_coef', draw=True)
corr_ans = (np.array([ 1.33333333,  0.33333333]), -3)
print(ans)
assert((eps.eq(ans[0], corr_ans[0])).all() and eps.eq(ans[1], corr_ans[1]).all())
```




```
(array([ 1.33333333,  0.33333333]), -3.0000000000000004, 0)
```

In [9]:
```
# Пример инициализации
A = np.array([[-4,-2],[-2,0], [3,2],[-1,3], [0,-3]])
b = np.array([-8,-2,10,1,-2])
c = np.array([-3,4])
ans = solve_lin_prog(A, b, c, method=method, draw=True)
print(ans)
corr_ans = (np.array([ 1.57142857,  0.85714286]), -1.2857142857142856)
assert((eps.eq(ans[0], corr_ans[0])).all() and eps.eq(ans[1], corr_ans[1]).all())
```






```
(array([ 1.57142857,  0.85714286]), -1.2857142857142856, 1)
```

In [10]:

```
# Пример неограниченной задачи
A=np.array([[-1,-1],[-2, -1]])
b=np.array([1, 2])
c=np.array([2, 1])
try:
    ans = solve_lin_prog(A, b, c, method=method, draw=True)
except Exception as e:
    print(e)
```

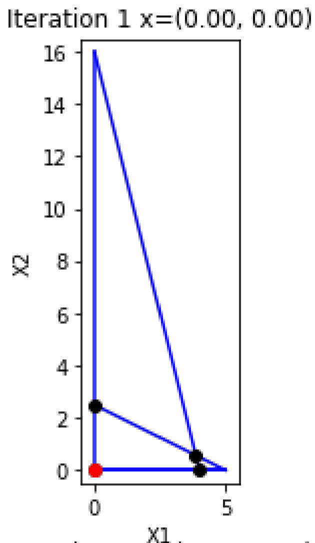
```
Problem is unbounded
```

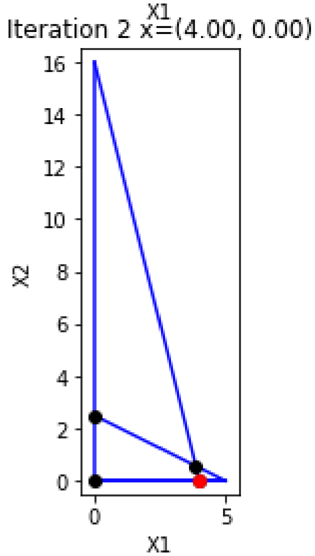
In [11]:

```
# Пример недопустимой задачи
A=np.array([[1,1],[-1, -1]])
b=np.array([1, -2])
c=np.array([-2, -1])
try:
    ans = solve_lin_prog(A, b, c, method=method, draw=True)
except Exception as e:
    print(e)
```

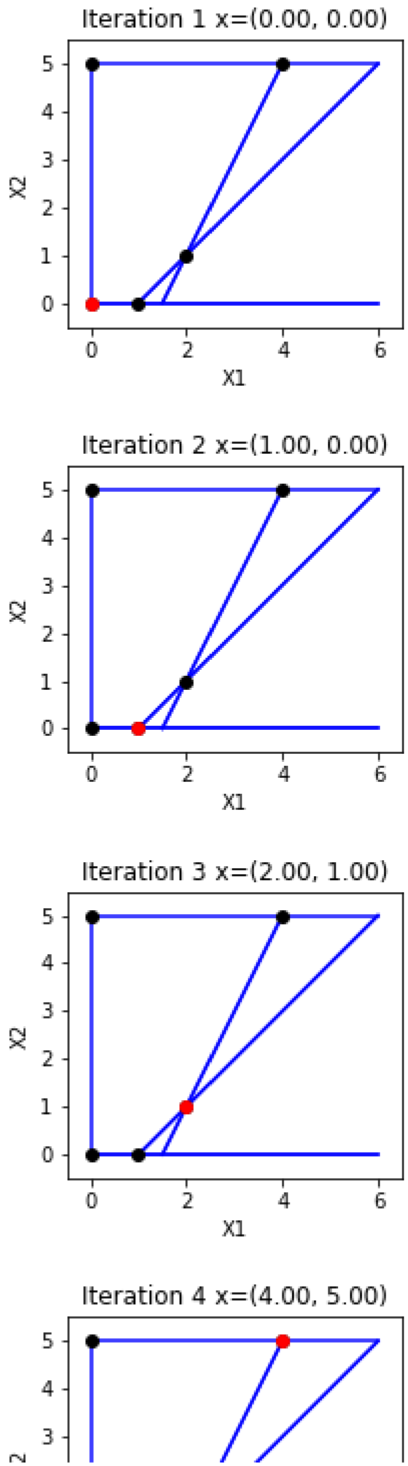
```
Problem is infeasible
```

In [12]:
```
A=np.array([[1,2],[2,0.5]])
b=np.array([5,8])
c=np.array([5,1])
ans = solve_lin_prog(A, b, c, draw=True, method=method)
print(ans)
corr_ans = (np.array([ 4.,  0.]), 20.0)
assert((ans[0] == corr_ans[0]).all() and ans[1] == corr_ans[1])

A=np.array([[1,-1],[2,-1], [0, 1]])
b=np.array([1,3,5])
c=np.array([4,3])
ans = solve_lin_prog(A, b, c, draw=True, method=method)
print(ans)
corr_ans = (np.array([ 4.,  5.]), 31.0)
assert((ans[0] == corr_ans[0]).all() and ans[1] == corr_ans[1])

A=np.array([[2,3,1],[4,1,2],[3,4,2]])
b=np.array([5, 11, 8])
c=np.array([5, 4, 3])
ans = solve_lin_prog(A, b, c, method=method)
print(ans)
corr_ans = (np.array([ 2.,  0.,  1.]), 13.0)
assert((ans[0] == corr_ans[0]).all() and ans[1] == corr_ans[1])

A=np.array([[1,1,1,1],[2,1,-1,-1],[0,-1,0,1]])
b=np.array([40, 10, 10])
c=np.array([0.5, 3,1,4])
ans = solve_lin_prog(A, b, c, method=method)
print(ans)
corr_ans = (np.array([  0.,  15.,   0.,  25.]), 145.0)
assert((ans[0] == corr_ans[0]).all() and ans[1] == corr_ans[1])
```

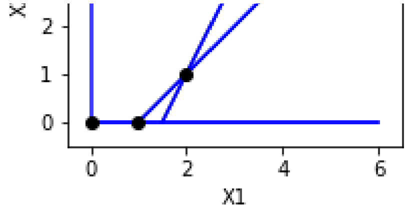





```
(array([ 4.,  0.]), 20.0, 1)
```



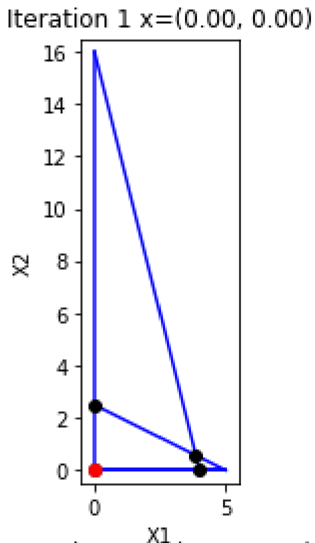
Iteration 1 x=(0.00, 0.00)
X1
X2
Iteration 2 x=(1.00, 0.00)
X1
X2
Iteration 3 x=(2.00, 1.00)
X1
X2
Iteration 4 x=(4.00, 5.00)

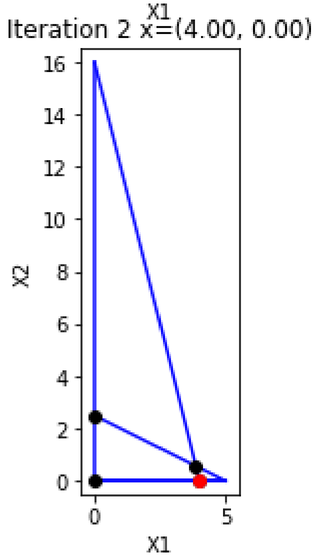



```
(array([ 4.,  5.]), 31.0, 3)
(array([ 2.,  0.,  1.]), 13.0, 2)
(array([  0.,  15.,   0.,  25.]), 145.0, 5)
```

In [13]:
```
def is_optimal (A,b,c, x):
    """
    Здесь должна быть реализована проверка оптимальности точки.
    Алгоритм должен работать для фиксированных n,m за константное время
    """
    # Если точка недопустима, она не оптимальна
    if (A@x>b).any() or (x < 0).any():
        return False

    # Берём двойственную задачу
    A_ = -A.T
    c_ = -b
    b_ = -c
    log.debug(A_, b_, c_)

    # Теорема о комплементарной фиктивности:
    # если неравенства обращаются в равенства, то соответствующие фиктивные переменные не 0,
    # соответствующие переменные двойственной задачи не 0
    not_zeros_in_primal = (x != 0)
    not_zeros_in_dual = (A@x == b)
    log.debug('mask %s'%not_zeros_in_primal, not_zeros_in_dual)
    log.debug('A_cut %s'%A_[:, not_zeros_in_dual][not_zeros_in_primal])
    log.debug('b_cut %s'%b_[not_zeros_in_primal])
    x_nonzero = (np.linalg.inv(np.matrix(A_[:, not_zeros_in_dual][not_zeros_in_primal]))@b_[not_zer
os_in_primal]).A1
    log.info("x_nonzero %s"%x_nonzero)

    x_ = np.zeros(A_.shape[1])
    x_[not_zeros_in_dual] = x_nonzero
    log.info('x %s'%x_)
    # Если для двойственной задачи её точка недопустима, то для прямой точка была не оптимальной.
    if (eps.gt(A_@x_, b_)).any() or (eps.lt(x_, 0)).any():
        return False

    return True
```

In [14]:
```
A=np.array([[1,2],[2,0.5]])
b=np.array([5,8])
c=np.array([5,1])
print(solve_lin_prog(A, b, c, draw=True))
x=np.array([4,0])
print(is_optimal(A,b,c,x))
x=np.array([0,2.5])
print(is_optimal(A,b,c,x))
x=np.array([0,0])
print(is_optimal(A,b,c,x))
```

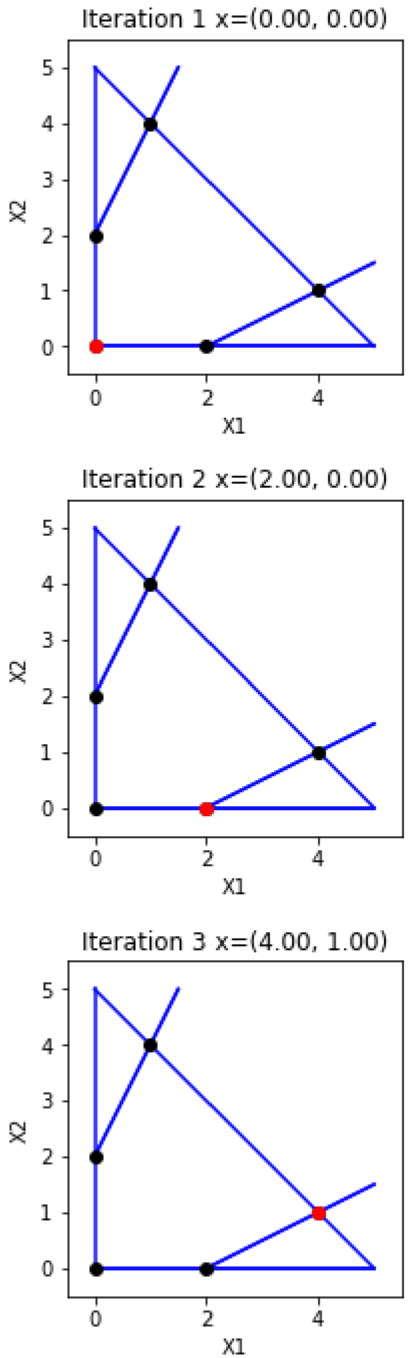





```
(array([ 4.,  0.]), 20.0, 1)
True
False
False
```

In [15]:

```
c = np.array([1, -1])
A = np.array([[-2, 1],
              [1, -2],
              [1, 1]])
b = np.array([2, 2, 5])
#x = np.array([1,4])
solve_lin_prog(A, b, c, draw=True)
x = np.array([4,1])
print(is_optimal(A,b,c,x))
x = np.array([1,4])
print(is_optimal(A,b,c,x))
x = np.array([0,2])
print(is_optimal(A,b,c,x))
x = np.array([2,0])
print(is_optimal(A,b,c,x))
x = np.array([0,0])
print(is_optimal(A,b,c,x))
```


Iteration 1 x=(0.00, 0.00)
X2
X1
Iteration 2 x=(2.00, 0.00)
X2
X1
Iteration 3 x=(4.00, 1.00)
X2
X1

```
True
False
False
False
False
```

==

Задача на МНК (0.4 балла)

- Для `method=0` решается обычным образом: $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$ (было на лекции, нет смысла объяснять). Здесь $A = \begin{pmatrix} \dots\\ \sin t_i & t_i & 1\\ \dots \end{pmatrix}$

Для всех i записывается $(a_2\sin t_i, a_1 t_i, a_0)$ как $A \cdot \begin{pmatrix}a_2\\a_1\\a_0\end{pmatrix}$

- Для `method=1` сведём к задаче линейного программирования: $\sum_i |a_2\sin t_i + a_1 t_i + a_0 - y_i^{corr}| \rightarrow \min $

$\Leftrightarrow \begin{cases} |a_2\sin t_i + a_1 t_i + a_0 - y_i^{corr}| \le y_i^{err} \forall i\\ \sum y_i^{err} \rightarrow \min \end{cases}$, где y_i^{err} -- число, обозначающее ошибку по данной координате

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2\sin t_i + a_1 t_i + a_0 - y_i^{corr} \le y_i^{err} \forall i\\ a_2\sin t_i + a_1 t_i + a_0 - y_i^{corr} \ge -y_i^{err} \forall i\\ \sum y_i^{err} \rightarrow \min \end{cases}$

Тогда задача сводится к $c^Tx \rightarrow \min\\ \begin{pmatrix} -E & A\\ -E & -A \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix}y^{corr}\\-y^{corr} \end{pmatrix}$

где $x = (y^{err}_1,\dots,y^{err}_n,a_2,a_1,a_0), c = (1, \dots, 1, 0, 0, 0)$.

Наша реализация симплекс-метода максимизирует, поэтому домножим c на -1.

- Для `method=2`: $\max_i |a_2\sin t_i + a_1 t_i + a_0 - y_i^{corr}| \rightarrow \min $ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_2\sin t_i + a_1 t_i + a_0 - y_i^{corr} \le y^{err} \forall i\\ a_2\sin t_i + a_1 t_i + a_0 - y_i^{corr} \ge -y^{err} \forall i\\ y^{err} \rightarrow \min \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ (для такой же A)

$c^Tx \rightarrow \min\\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} & A\\ \begin{pmatrix}-1\\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} & -A \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix}y^{corr}\\-y^{corr} \end{pmatrix}$

где $x = (y^{err},a_2,a_1,a_0), c = (1, 0, 0, 0)$

In [16]:
```
from math import sin
import numpy as np

"""Пусть физический закон описывается зависимостью
некоторого измеряемого значения y(x, a)
от времени и координаты x при параметрах a:"""
def y(t,a):
    return a[2]*sin(t)+a[1]*t +a[0]

def y_vector(t, a):
```

```
    return [y(t_, a) for t_ in t]

"""
Дан набор координат t размера m, значения распределены равномерно). Пусть m = 200.
"""
m = 50
t=[i*10.0/m for i in range(m)]


"""Для каждого момента времени t сгенерируйте соответствующее
значение y(t,a) при некоторых параметрах  a_0, a_1, a_2. Для примера: """
a=[10,100,1000]

def get_y (a, σ):
    """Результаты измерений отличаются от истинных значений в силу действия случайной аддитивной по
мехи
    (случайность подчиняется нормальному закону распределения N(0, σ))"""
    y_real=np.array([y(i,a) for i in t])
    y_corr=y_real+np.random.normal(0,σ,m)
    return y_real, y_corr

#todo -выбрать параметр
#σ=0.5
σ=200

# генерация значений. изначальные и с помехами
y_real, y_corr= get_y(a,σ)

def solve_overdefined_system(A, b, method=0):
    A = np.matrix(A)
    b = b
    if method == 0:
        return ((A.T@A).I @ A.T @ b).A1
    elif method == 1:
        E = np.eye(A.shape[0])
        A_ = np.bmat([[-E, A],
                      [-E, -A]]).A
        b_ = np.hstack([b, -b])
        c_ = -np.hstack([np.ones(A.shape[0]), np.zeros(A.shape[1])]) # Точно с минусом?

        # Зацикливания здесь не присходят (за все запуски мне не удалось такое получить),
        # но большое количество итераций для пивота методом Бланда вызывает накопление
        # арифметической ошибки, и выдаётся ошибка numpy про вырожденные матрицы.
```

```
        x, _, _ = solve_lin_prog(A_, b_, c_, method='largest_coef')
        return x[-A.shape[1]:]
    elif method == 2:
        # Работает и с Бландом. При этом, работает гораздо быстрее method=1 из-за более маленькой м
атрицы.
        ones = np.ones(A.shape[0]).reshape(-1,1)
        A_ = np.bmat([[-ones, A],
                      [-ones, -A]]).A
        b_ = np.hstack([b, -b])
        c_ = -np.hstack([[1], np.zeros(A.shape[1])])

        x, _, _ = solve_lin_prog(A_, b_, c_)
        return x[-A.shape[1]:]


# Я решил вынести функцию наружу для большей универсальности.
def get_params (y_corr, t, func, method=0):
    """
    По сгенерированному набору точек y_corr дайте оценку параметрам a
    закона с учетом знания общей формулы тремя различными способами:
    •   method=0 -> сумма квадратов невязок будет минимальна.
    •   method=1 -> сумма абсолютных значений невязок будет минимальна.
    •   method=2 -> максимальное абсолютное значение невязки будет минимально.

    #todo - написать ф-ю
    """
    A = np.matrix([func(t_) for t_ in t])
    return solve_overdefined_system(A, y_corr, method=method)
```

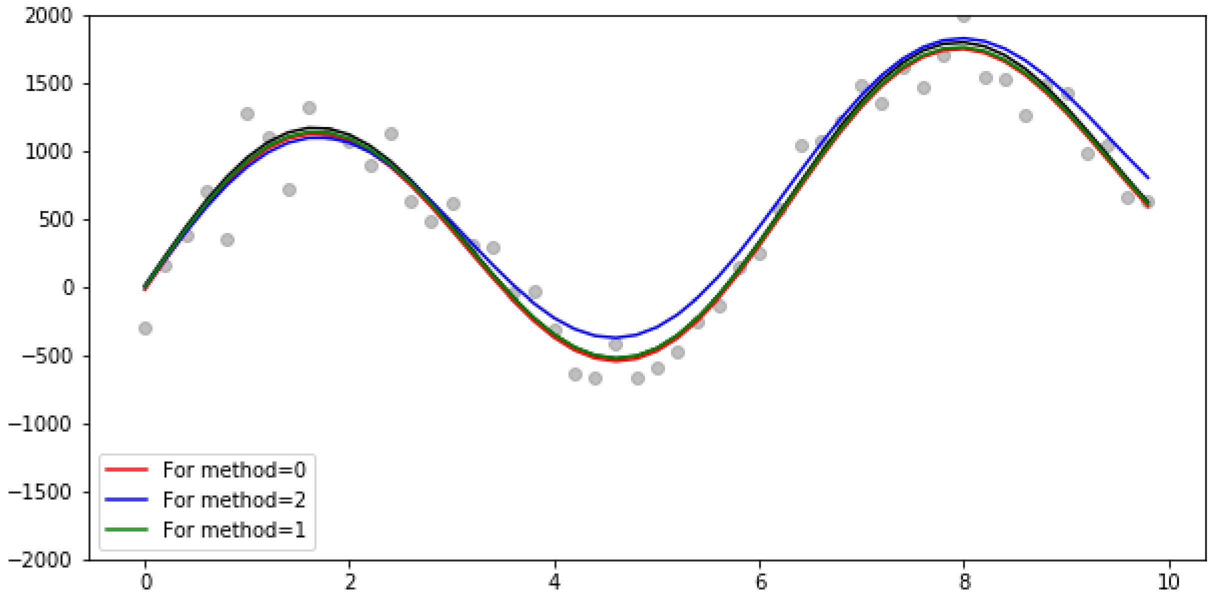
Задание 1 (0.2 балла)

1. Постройте в одной координатной плоскости графики y(t, a) и оценочные значения y(t,a*) для всех 3 методов
2. Вычислите как отличается каждый из оценочных параметров от своего истинного значения. Как меняется это отличие при изменении σ?
3. Скорректируйте y_corr[0] и y_corr[-1] пусть одно из них будет на 50 больше, а другое на 50 меньше. Постройте новые оценочные значения параметров и соответствующие графики. Какая из оценок получилась более устойчивой к выбросам?

In [17]:
```
def analyze_approximation(t, y_corr):
    plt.figure(figsize=(10, 5))
    plt.plot(t, y_vector(t, a), color='black')
    plt.scatter(t, y_corr, color='gray', alpha=0.5)

    a_est = get_params(y_corr, t, lambda t_:[1, t_, np.sin(t_)], method=0)
    print('For method=0', a_est)
    plt.plot(t, y_vector(t, a_est), color='r', label='For method=0')

    a_est = get_params(y_corr, t, lambda t_:[1, t_, np.sin(t_)], method=2)
    print('For method=2', a_est)
    plt.plot(t, y_vector(t, a_est), color='b', label='For method=2')

    a_est = get_params(y_corr, t, lambda t_:[1, t_, np.sin(t_)], method=1)
    print('For method=1', a_est)
    plt.plot(t, y_vector(t, a_est), color='g', label='For method=1')

    plt.legend()
    plt.ylim(-2000, 2000)
    plt.show()
```

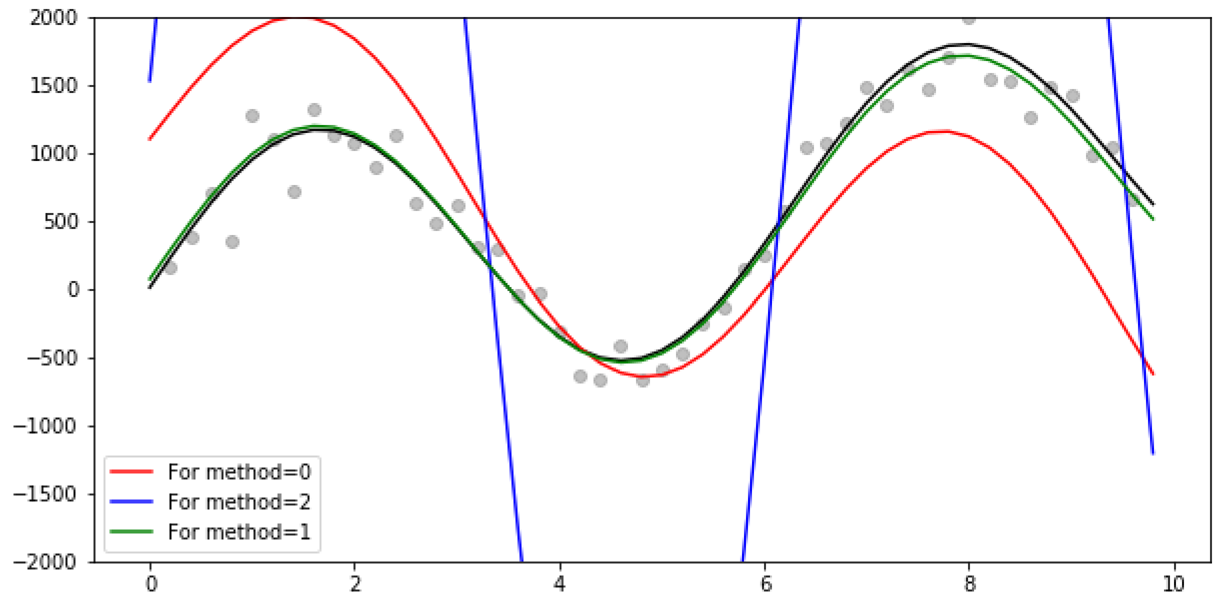
In [18]:
```
analyze_approximation(t, y_corr)
```

```
For method=0 [ -21.62417183   99.53650042  986.16028013]
For method=2 [   0.          115.96409991  910.9211384 ]
For method=1 [   0.           99.06027648  982.54206187]
```



In [19]:
```
y_corr_with_outlier = y_corr.copy()
outlier = 10000
y_corr_with_outlier[0] += outlier
y_corr_with_outlier[-1] -= outlier

analyze_approximation(t, y_corr_with_outlier)
```

```
For method=0 [ 1102.47934207  -134.48293156  1105.86161151]
For method=2 [ 1531.60779372     0.          7467.49552869]
For method=1 [   71.7526305    82.35005271   995.40820301]
```



Вывод:

Хуже всего аппроксимирует method=2, он же совсем неустойчив к выбросам.

method=1 аппроксимирует слегка лучше МНК, но более устойчив к выбросам, чем method=0.

method=0 — обычный МНК — довольно хорошо аппроксимирует и довольно устойчив к выбросам. К тому же, он не требует для своей работы симплекс-метода и поэтому работает быстрее. Кажется, что лучше использовать для практических нужд именно его и минимизировать именно в смысле наименьших квадратов, когда это возможно.

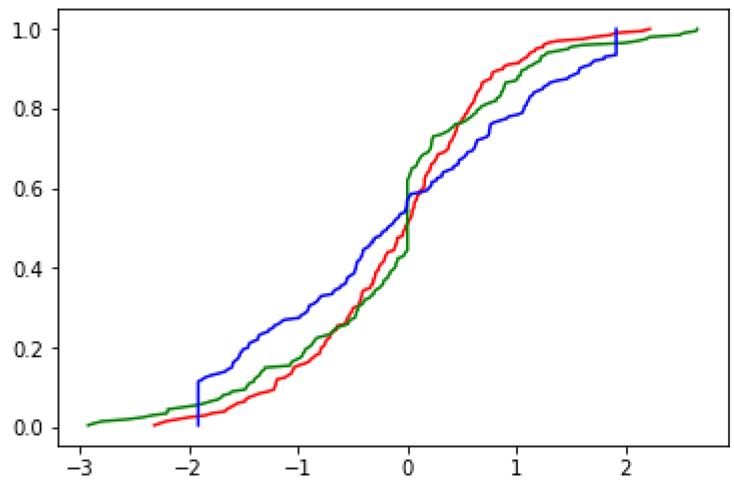
Задание 2 (0.2 балла)

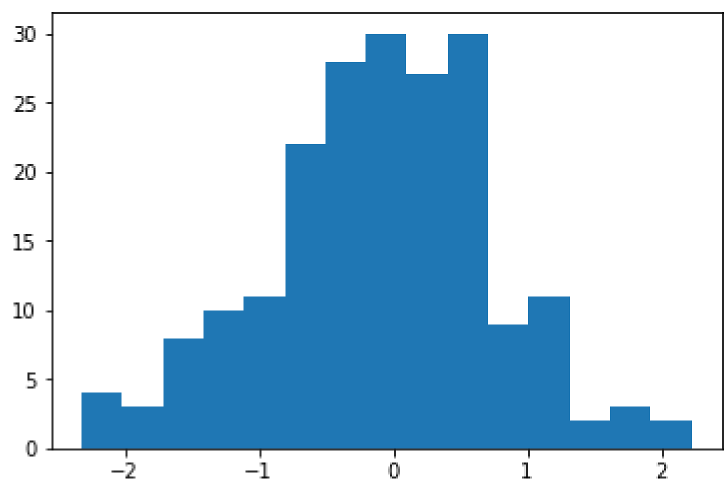
Возьмем случайную матрицу A 200x80 и случайный вектор b из распределения N(0,1).

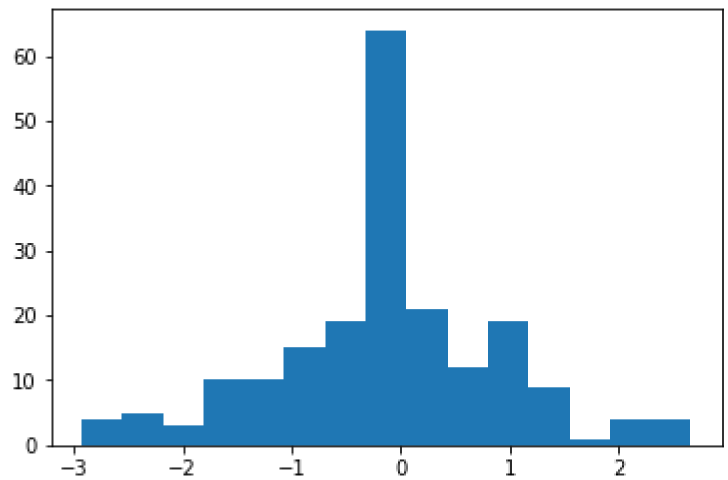
1. Решите переопределенную систему тремя способами, минимизируя l1, l2 и linf нормы вектора b – Ax.
2. Постройте распределение ошибок для каждого решения.
3. Какими свойствами обладают распределения?

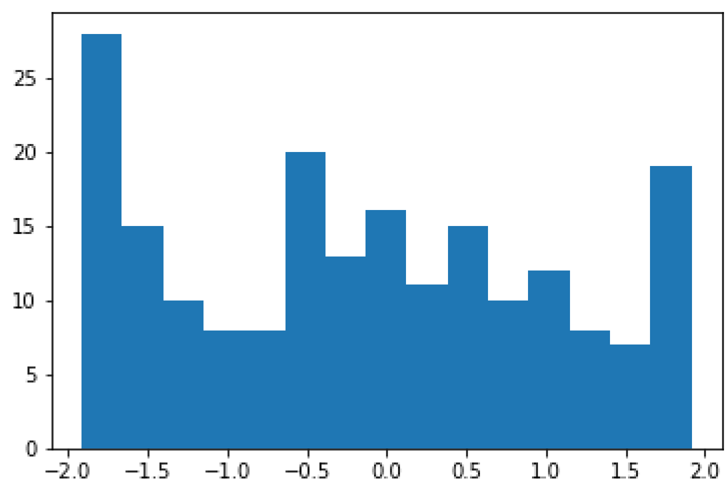
In [20]:
```
A = np.random.normal(size=(200, 80))
b = np.random.normal(size=(200))

x0 = solve_overdefined_system(A, b, method=0)
x2 = solve_overdefined_system(A, b, method=2)
x1 = solve_overdefined_system(A, b, method=1)
```

In [21]:
```
def ecdf(x):
    xs = np.sort(x)
    ys = np.arange(1, len(xs)+1)/float(len(xs))
    return xs, ys

plt.figure()
plt.plot(*ecdf(b-A@x0), color='r', label='For method=0')
plt.plot(*ecdf(b-A@x1), color='g', label='For method=1')
plt.plot(*ecdf(b-A@x2), color='b', label='For method=2')
plt.show()

nbins = 15
plt.figure()
plt.hist(b-A@x0, bins=nbins)
plt.show()
plt.hist(b-A@x1, bins=nbins)
plt.show()
plt.hist(b-A@x2, bins=nbins)

plt.show()
```


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−3
−2
−1
0
1
2


30
25
20
15
10
5
0
−2
−1
0
1
2





Вывод:

Свойства распределений:

- У method=0 оно более-менее гладкое, похоже на нормальное. При этом мы знаем, что оно и должно быть нормальным.
- У method=1 оно имеет ярко выраженный пик. Кажется, что это хорошее распределение. Большинство ошибок малы.
- У method=2 оно имеет пики по краям и слабо выраженный пик по центру. Кажется, что это плохое распределение ошибок. Много значений, у которых ошибка велика.