

Опр. 1. Пусть X — некоторое мн-во. Функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **метрикой** в мн-ве X , если:

1. $\rho(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in X$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in X$

Множество X с введённой на нём метрикой ρ называется **метрическим пространством** (X, ρ) .

Опр. 2. Мн-во S из метр. пр-ва (X, ρ) наз-ся **всюду плотным** в X , если его замыкание совпадает с X , т. е. $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists y \in S : \rho(x, y) < \varepsilon$.

Опр. 3. МП (X, ρ) наз-ся **сепарабельным**, если в нём существует счётное всюду плотное мн-во.

Опр. 4. П-ть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов МП (X, ρ) наз-ся **фундаментальной** (или ρ -фундаментальной), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m > N \hookrightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Опр. 5. МП (X, ρ) наз-ся **полным**, если любая фундаментальная п-ть из (X, ρ) сх-ся.

Опр. 6. МП (X, ρ) наз-ся **связным**, если X нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Опр. 7. Пусть (X, ρ) — МП. **Открытым шаром** с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ наз-ся мн-во $B_R(x) = B(x, R) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < R\}$. **Замкнутым шаром** с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ наз-ся мн-во $\bar{B}_R(x) = \bar{B}(x, R) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq R\}$.

Опр. 8. Мн-во $M \subset X$, где (X, ρ) — МП, наз-ся **открытым**, если $\forall x_0 \in M \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$.

Опр. 9. Пусть (X, ρ) — МП и $M \subset X$. Точка $x_0 \in X$ наз-ся **точкой прикосновения** мн-ва M , если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$.

Опр. 10. Пусть (X, ρ) — МП и $M \subset X$. Множество $[M]$ (или \bar{M}) наз-ся **замыканием** мн-ва M , если оно получено добавлением к M всех его точек прикосновения.

Опр. 11. Мн-во $M \subset X$, где (X, ρ) — МП, наз-ся **замкнутым**, если $[M] = M$.

Опр. 12. Лебегово пр-во l_p для $1 \leq p < +\infty$ состоит из числовых п-тей вида $x = (x_1, x_2, \dots)$

$$l_p = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty\}$$

с нормой $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p}$ и метрикой $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p$.

Полное сепарабельное

Опр. 13. Лебегово пр-во l_∞ . С нормой $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|$ и метрикой $\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$. **Полное несепарабельное**

Опр. 14. Пр-во $C[a, b] = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ непрерывно на } [a, b]\}$ непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ и метрикой $\rho_C(x, y) = \|x - y\|_C$.

Полное сепарабельное связное

Теор. 1 **Достаточное условие несепарабельности МП.** Пусть в МП (X, ρ) существует несчётное подмножество A_0 и $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall a, b \in A_0, a \neq b, \hookrightarrow \rho(a, b) \geq \varepsilon_0$. Тогда МП (X, ρ) является несепарабельным.

Опр. 15. Пусть (X, ρ) — МП. Отображение $f : X \rightarrow X$ наз-ся **сжимающим**, если $\exists \alpha \in (0, 1) : \forall x, y \in X \hookrightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$.

Опр. 16. Пусть X — некоторое мн-во, $f : X \rightarrow X$ — отображение. Точка $x_0 \in X$ наз-ся **неподвижной** для отображения f , если $f(x_0) = x_0$.

Теор. 2 **Банаха о сжимающих отображениях.** Пусть (X, ρ) — ПМП, $f : X \rightarrow X$ — сжимающее отображение. Тогда f имеет единственную неподвижную точку.

Опр. 17. Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — МП. Отображение $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ называется **изометрией**, если φ — биекция и $\forall x_1, y_1 \in X_1 \hookrightarrow \rho_1(x_1, y_1) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(y_1))$. Если между МП X_1 и X_2 существует изометрия, они называются **изометричными**.

Опр. 18. Пусть (X, ρ) — МП. Мн-во $A \subset X$ наз-ся **всюду плотным в мн-ве** $B \subset X$, если $\forall b \in B \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \rho(a, b) < \varepsilon$.

Опр. 19. ПМП (Y, d) наз-ся **пополнением** МП (X, ρ) , если $\exists Z \subset Y, Z$ — всюду плотное в Y , т. ч. МП (X, ρ) и (Z, d) изометричны.

Опр. 20. Пусть X — некоторое сем-во множеств. Семейство τ подмножеств мн-ва X наз-ся **топологией**, если:

1. $X \in \tau$ и $\emptyset \in \tau$
2. \forall семейства подмн-в $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \tau \hookrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$
3. \forall конечного семейства подмн-в $U_k \mid k \in \overline{1, N} \subset \tau \hookrightarrow \bigcup_{k=1}^N U_k \in \tau$

Мн-во X со введённой на нём топологией τ наз-ся **топологическим пр-вом (ТП)** (X, τ) .

Опр. 21. Пусть (X, τ) — ТП. Любое мн-во $U \in \tau$ наз-ся **открытым**(τ -открытым) в ТП (X, τ) . Топология τ называется **семейством открытых подмн-в** мн-ва X .

Опр. 22. Пусть (X, τ) — ТП. Для любого $x \in X$ **окрестностью** x называется произвольное τ -открытое множество, содержащее x .

Опр. 23. Пусть (X, τ) — ТП, $S \subset X$. **Открытым покрытием** мн-ва S наз-ся сем-во τ -открытых мн-в $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, т. ч. $S \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Опр. 24. Пусть (X, τ) — ТП. Мн-во $S \subset X$ наз-ся:

1. **компактным (бикомпактным)**, если любое открытое покрытие мн-ва S содержит конечное подпокрытие
2. **счётно-компактным**, если любое счётное открытое покрытие мн-ва S содержит конечное подпокрытие
3. **секвенциально компактным**, если любая п-ть эл-тов мн-ва S содержит п-ть, сходящуюся по топологии τ к некоторому эл-ту S

Опр. 25. Пусть (X, τ) — ТП. Говорят, что п-ть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ **сх-ся по топологии τ** к элементу $x \in X$, если $\forall U(x) \exists N : \forall n > N \hookrightarrow x_n \in U(x)$. Обозначается $x_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty}^\tau x$.

Теор. 3. Бикомпактность Счётная компактность Секвенциальная компактность

Опр. 26. Пусть (X, ρ) — МП. Мн-во $S \subset X$ наз-ся **вполне ограниченным**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечный набор точек $x_1, \dots, x_N \in S : S \subset \bigcup_{k=1}^N B_\varepsilon(x_k)$. Указанный набор точек называется **конечной ε -сетью** мн-ва S .

Теор. 4 Критерий компактности. Пусть (X, ρ) — МП, $S \subset X$. Тогда СУЭ:

1. S — компакт
2. МП (S, ρ) — полное и ВО (если (X, ρ) полное, то достаточно замкнутости S)
3. мн-во S явл. секвенциально компактным

Теор. 5 Критерий компактности. МП компактно \Leftrightarrow любая п-ть его точек не содержит сходящуюся п-ть.

Опр. 27. Пусть (X, ρ) — МП. Мн-во $M \subset X$ наз-ся **ограниченным**, если $\exists x_0 \in X : \exists r > 0 : M \subset B_r(x_0)$.

Опр. 28. Мн-во метрического пространства наз-ся **предкомпактом**, если его замыкание компактно.

Опр. 29. Сем-во функций $S \subset C[a, b]$ наз-ся **равномерно ограниченным**, если $\exists c : \forall f \in S \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq c$.

Опр. 30. Сем-во функций $S \subset C[a, b]$ наз-ся **равностепенно непрерывным**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall f \in S \forall x, x' \in [a, b] \hookrightarrow |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Теор. 6 Теорема Арцела-Асколи. Сем-во ф-ий $S \subset C[a, b]$ предкомпактна в пр-ве $C[a, b] \Leftrightarrow$ она равномерно ограничена и равностепенно непрерывна.

Опр. 31. Пр-во $C^k[a, b]$ k раз непр. дифф. ф-ий $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{C^k} = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |x^{(i)}(t)|$.

Опр. 32. Непустое мн-во L наз-ся **линейным** (или **векторным**) пр-вом, если оно удовлетворяет: TODO

Опр. 33. Пусть X — комплексное ЛП. Ф-ия $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **нормой** в X , если: TODO

Любое пр-во с фиксированной в нём нормой будем называть ЛНП.

Опр. 34. Полное НП наз-ся **банаховым (БП)** (обычно обозначается B).

Опр. 35. ЛП наз-ся **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Опр. 36. ЛП L' наз-ся **подпространством** ЛП L , если $L' \subset L$ и операции сложения векторов и умножения вектора на число определены так же, как в L .

Опр. 37. Линейной комбинацией (ЛК) в-ров x_1, \dots, x_n наз-ся любой в-р вида $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — числовые множители.

Опр. 38. ЛК наз. **нетривиальной**, если хотя бы один из коэф. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ отличен от нуля.

Опр. 39. В-ры x_1, \dots, x_n наз-ся **линейно зависимыми (ЛЗ)**, если \exists нетрив. ЛК, равная 0. Иначе они называются **линейно независимыми (ЛНЗ)**.

Опр. 40. ЛП наз-ся **n-мерным**, если в нём $\exists n$ ЛНЗ в-ров, а любые $n + 1$ в-ров ЛЗ. В таком случае эти n в-ров наз-ся базисом.

Опр. 41. ЛП наз-ся **бесконечномерным**, если $\forall n \in \mathbb{N}$ в нём $\exists n$ ЛНЗ в-ров.

Опр. 42. Пусть задана некоторая система эл-тов ЛП L . Совокупность всех ЛК этой системы наз-ся её **линейной оболочкой**.

Опр. 43. Система эл-тов $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ наз-ся **полной** в пр-ве X , если её ЛО плотна в X , т. е. если $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n} \subset \{x_\alpha, \alpha \in A\} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \left\| x - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon$.

Опр. 44. П-ть эл-тов e_1, e_2, \dots ЛНП X наз-ся **базисом** пр-ва X , если каэдый эл-т $x \in X$ имеет единственное разложение по этой системе, т. е. $\exists! \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty : x = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n e_n$. Здесь ряд сх-ся к эл-ту x по норме пр-ва X . TODO

Опр. 45. Пр-во c сходящихся п-тей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с операциями сложения и умножения на число и нормой $\|x\|_C = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

Опр. 46. Пр-во c_0 сходящихся п-тей, эл-ты которых стремятся к 0, $x = (x_1, x_2, \dots)$ с операциями сложения и умножения на число и нормой $\|x\|_C = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

Опр. 47. Пусть X — комплексное ЛП. **Скалярным произведением** в X наз-ся отображение $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, т. ч.:

1. $\forall x \in X \hookrightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$ и $(x, x) \geq 0$;
2. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall x, y \in X \hookrightarrow (x, y) = \overline{(y, x)}$;
4. $\forall x, y, z \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \hookrightarrow (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

Опр. 48. ЛП с фиксированным в нём скалярным произведением наз-ся **евклидовым**.

Утв. 1. Пусть X — евклидово пр-во. Тогда величина $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in X$, удовлетворяет определению нормы в X . Такая норма называется **нормой, порождённой скалярным произведением**.

Опр. 49. ЕП, полное относительно нормы, порождённой скалярным произв., наз. **гильбертовым пр-вом (ГП)** (обычно обозначается H).

Опр. 50. Пусть L — действительное ЛП, и $x, y \in L$. Назовём **замкнутым отрезком** в L , соединяющим точки x и y , совокупность $\{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$. Отрезок без концевых точек x, y называется **открытым отрезком**. Мн-во $M \subset L$ наз-ся выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит соединяющий их отрезок.

Опр. 51. Пусть X, Y — ЛП. Линейное отображение $A : X \rightarrow Y$ наз-ся **линейным оператором**.

Опр. 52. Пусть X, Y — ЛП, $A : X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Ядром линейного оператора A наз-ся подпр-во из X вида $\text{Ker } A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$. Образом (или мн-вом значений) оператора A наз-ся подпр-во из Y вида $\text{Im } A = \{Ax \mid x \in X\}$

Опр. 53. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Лин. опер. $A : X \rightarrow Y$ наз. **ограниченным**, если \forall ограниченного мн-ва $S \subset X$ его образ $A(S)$ является ограниченным в Y .

Утв. 2. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП, $A : X \rightarrow Y$ — лин. опер. Тогда СУЭ:

1. A непрерывен в X
2. A непрерывен в нуле
3. A ограничен
4. $\exists R > 0 : A(B_1^X(0)) \subset B_R^Y(0)$, где $B_r^X(x) = \{z \in X \mid \|z - x\|_X \leq r\}$.

Опр. 54. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. **Нормой** лин. опер. $A : X \rightarrow Y$ наз-ся $\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$.

Утв. 3. TODO

Опр. 55. $\|A\| < +\infty \Leftrightarrow$ лин. опер. A ограничен.

Опр. 56.