Математическая статистика

Практическое задание 3

В данном задании рассматриваются свойства условного математического ожидания. В частности, рассматривается модель смеси гауссовских распределений.

Правила:

- Выполненную работу нужно отправить на почту `probability.diht@yandex.ru`, указав тему письма `"[номер группы] Фамилия Имя - Задание 3"`. Квадратные скобки обязательны. Вместо `Фамилия Имя` нужно подставить свои фамилию и имя.
- Прислать нужно ноутбук и его pdf-версию. Названия файлов должны быть такими: `3.N.ipynb` и `3.N.pdf`, где `N` - ваш номер из таблицы с оценками.
- Никакой код из данного задания при проверке запускаться не будет.
- Некоторые задачи отмечены символом *. Эти задачи являются дополнительными. Успешное выполнение большей части таких задач (за все задания) является необходимым условием получения бонусного балла за практическую часть курса.
- Баллы за каждую задачу указаны далее. Если сумма баллов за задание меньше 25% (без учета доп. задач), то все задание оценивается в 0 баллов.

Баллы за задание:

- Задача 1 - 3 балла
- Задача 2 - 1 балл
- Задача 3 - 2 балла
- Задача 4 - 7 баллов
- Задача 5* - 10 баллов

In [1]:
```
import numpy as np
import scipy.stats as sps, scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline
```

Задача 1. На вероятностном пространстве $\left(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathsf{P}\right)$, где P --- экспоненциальное распределение с параметром λ, задана случайная величина ξ по правилу $\xi(\omega) = \omega$. Сигма-алгебра $\mathcal{G}$ порождена счетной системой событий $\{B_n\}_{n\geq 1}$, где $B_n = \{n-1\leq \omega

- плотности распределения P для $\lambda \in \{1, 3, 10\}$
- ξ и $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ как функции от ω для $\lambda \in \{1, 3, 10\}$
- ξ^2 и $\mathsf{E}(\xi^2|\mathcal{G})$ как функции от ω для $\lambda \in \{1, 3, 10\}$

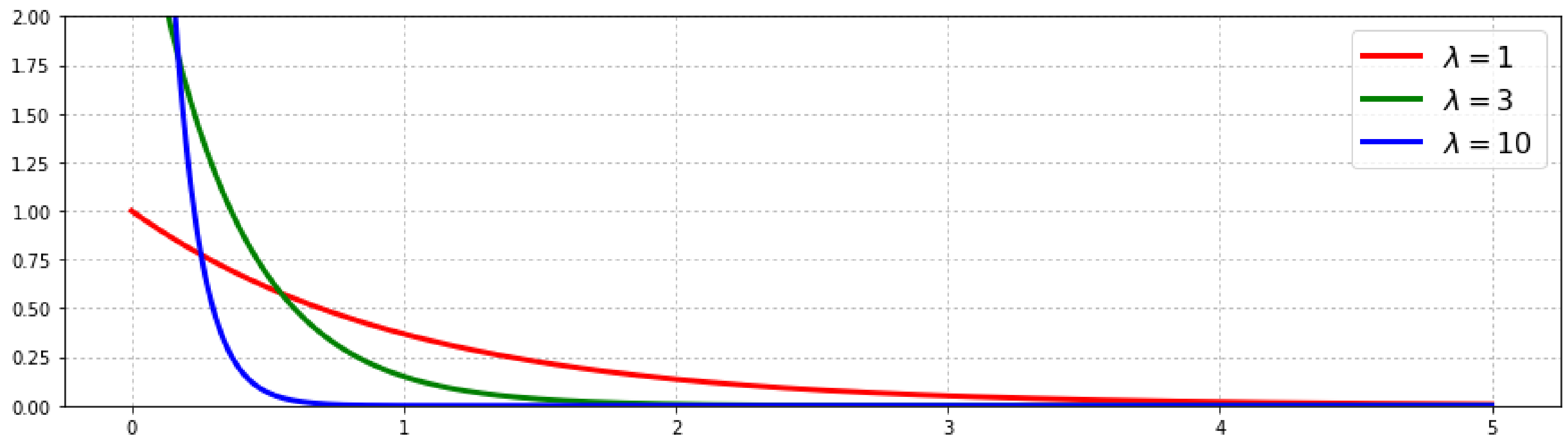
Используйте приведенный ниже шаблон. Одному и тому же значению λ во всех графиках должен соответствовать один и тот же цвет.

$$\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathsf{E}(\xi I_{\xi\in[n-1;n)})}{\mathsf{P}(\xi\in[n-1;n))} I_{B_n} = \frac{\int\limits_{n-1}^{n} x\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int\limits_{n-1}^{n} \lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\lambda(n-1)}^{\lambda n} ue^{-u}du}{\int\limits_{\lambda(n-1)}^{\lambda n} e^{-u}du} = \frac{\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\lambda(n-1)}^{\lambda n} ue^{-u}du}{\int\limits_{\lambda(n-1)}^{\lambda n} e^{-u}du} = \frac{\frac{1}{\lambda}(\lambda(-e^{-\lambda n}n+e^{-\lambda(n-1)}(n-1))-e^{-\lambda n}+e^{-\lambda(n-1)}}{e^{-\lambda(n-1)}-e^{\lambda n}}$$

$$\mathsf{E}(\xi^2|\mathcal{G}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathsf{E}(\xi^2 I_{\xi\in[n-1;n)})}{\mathsf{P}(\xi\in[n-1;n))} I_{B_n} = \frac{\int\limits_{n-1}^{n} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int\limits_{n-1}^{n} \lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{-\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_{n-1}^{n} + \frac{2}{\lambda}\int\limits_{n-1}^{n} x\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int\limits_{n-1}^{n} \lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{-\frac{n^2e^{-\lambda n}}{\lambda}+\frac{(n-1)^2e^{-\lambda(n-1)}}{\lambda}+\frac{2}{\lambda}\frac{1}{\lambda}(\lambda(-e^{-\lambda n}n+e^{-\lambda(n-1)}(n-1))-e^{-\lambda n}+e^{-\lambda(n-1)}}{e^{-\lambda(n-1)}-e^{\lambda n}}$$

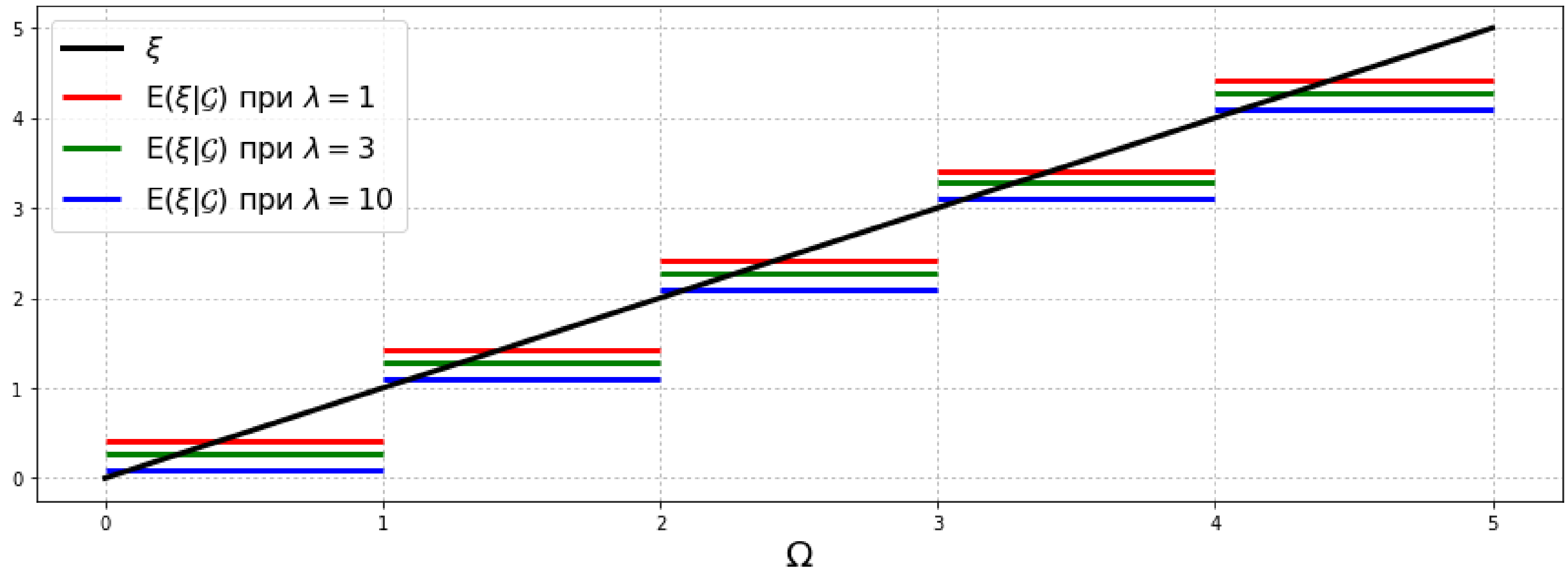
In [2]:
```
params = (
    (1, 'red'),
    (3, 'green'),
    (10, 'blue')
)
```

In [3]:
```
grid = np.linspace(0, 5, 500)
# График 1
plt.figure(figsize=(15, 4))
for l, color in params:
    plt.plot(grid, sps.expon.pdf(grid, scale=1/l), lw=3, color=color, label='$\\lambda=
{}$'.format(l))
plt.legend(fontsize=16)
plt.ylim((0, 2))
plt.grid(ls=':')
```

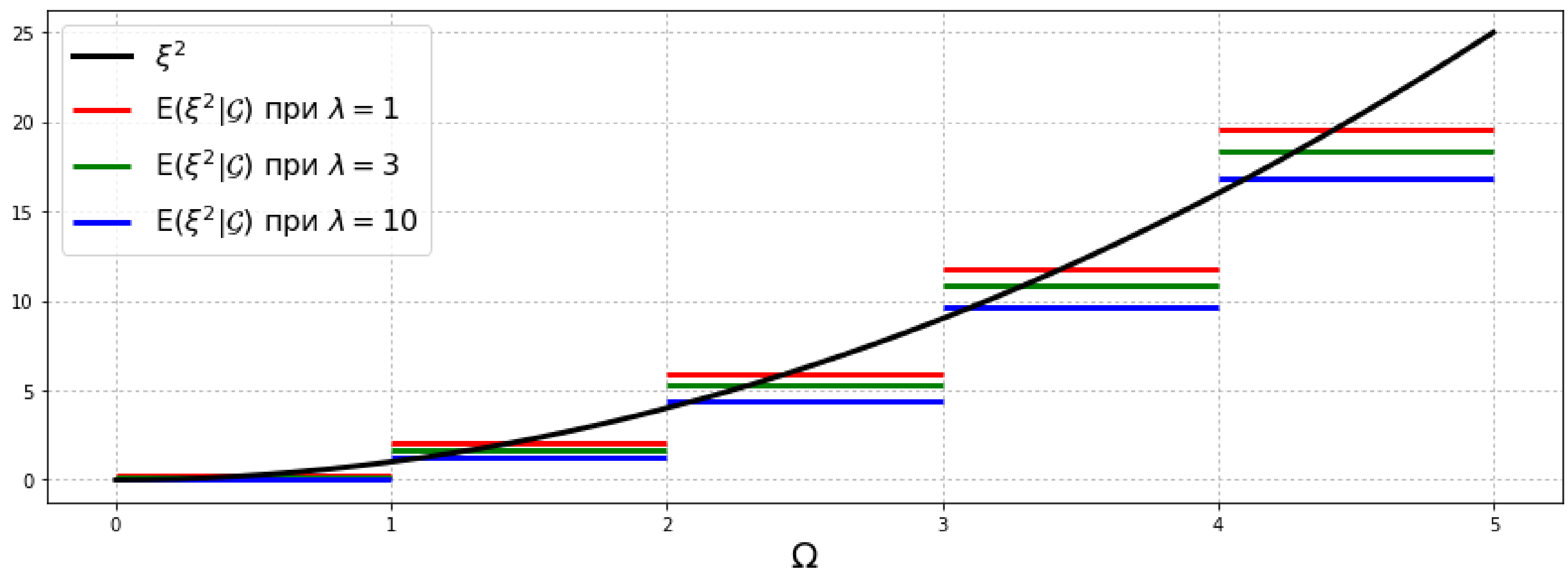


In [4]:

```
B = [i for i in range(0, 5)]

# График 2
plt.figure(figsize=(15, 5))
plt.plot(grid, grid, lw=3, label='$\\xi$', color='black')
for l, color in params:
    for i in B:  # события из сигма-алгебры
        a = i
        b = i+1
        Ex = -b*np.exp(-l*b)+a*np.exp(-l*a)-1/l*(np.exp(-l*b)-np.exp(-l*a))
        Px = np.exp(-l*a)-np.exp(-l*b)
        plt.hlines(xmin=i, xmax=(i+1), y=Ex/Px, color=color, lw=3,
                   label=('$\\mathsf{E}(\\xi|\\mathcal{G})$ при $\\lambda = ' + str(l)
                          + '$') if i == 1 else '')
plt.xlabel('$\\Omega$', fontsize=20)
plt.legend(fontsize=16)
plt.grid(ls=':')
```



In [5]:
```
# График 3 для \xi^2 аналогичен графику 2
plt.figure(figsize=(15, 5))
plt.plot(grid, grid**2, lw=3, label='$\\xi^2$', color='black')
for l, color in params:
    for i in B:  # события из сигма-алгебры
        a = i
        b = i+1
        Ex2 = -(b**2 * np.exp(-l*b)-a**2 * np.exp(-l*a))\
            -2/l*(b*np.exp(-l*b)-a*np.exp(-l*a))\
            -2/l**2 * (np.exp(-l*b)-np.exp(-l*a))
        Px = np.exp(-l*a)-np.exp(-l*b)
        plt.hlines(xmin=i, xmax=(i+1), y=Ex2/Px, color=color, lw=3,
                   label=('$\\mathsf{E}(\\xi^2|\\mathcal{G})$ при $\\lambda = ' + str(l)
                          + '$') if i == 1 else '')
plt.xlabel('$\\Omega$', fontsize=20)
plt.legend(fontsize=16)
plt.grid(ls=':')
```



Вывод: Условное матожидание есть величина, содержащая некоторую информацию о распределении и по сути являющаяся усреднением по одному из элементов разбиения сигма-алгебры.

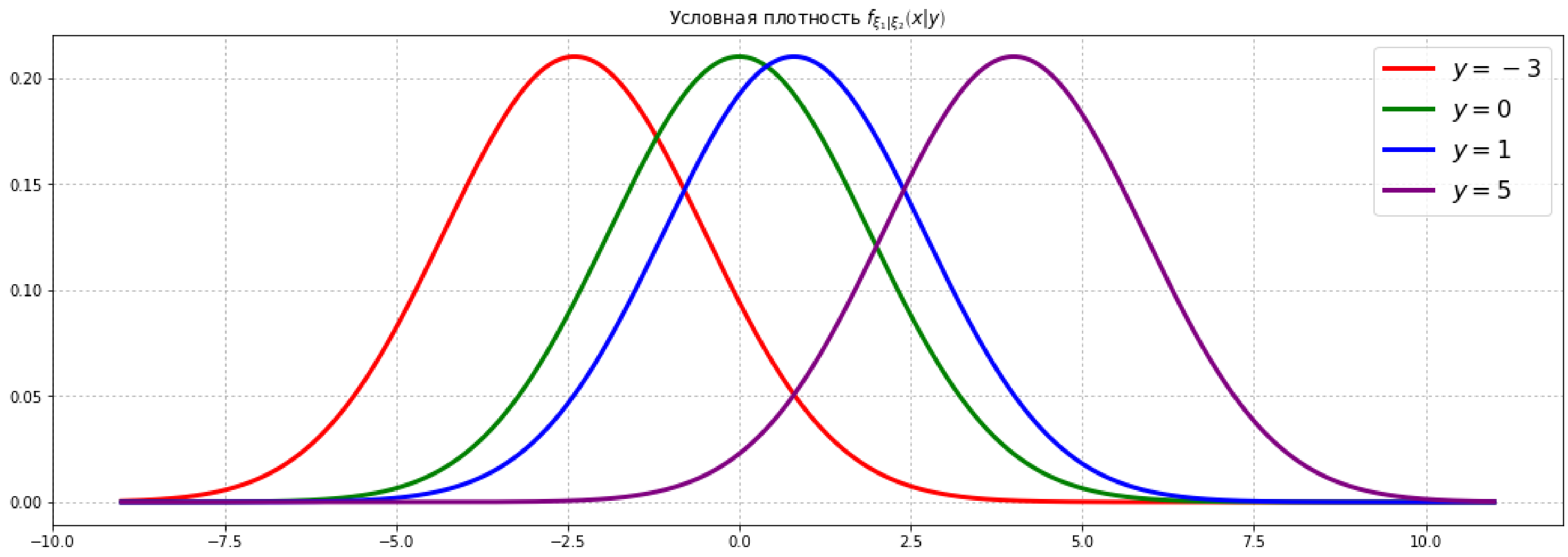
Задача 2. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2) \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, где $a = 0$ и $\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Для $y \in \{-3, 0, 1, 5\}$ постройте графики условной плотности $f_{\xi_1 | \xi_2}(x|y)$.

$$f_{\xi_1 | \xi_2}(x|y) = \frac{f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)}{f_{\xi_2}(y)}$$

$$f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{a})^T \Sigma^{-1} (x-\bar{a})}}{\sqrt{|2\pi\Sigma|}} = \frac{1}{2\pi 6} e^{-\frac{1}{36}(5(x^2+y^2)-8xy)}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dx = \frac{1}{12\pi} e^{-\frac{y^2}{20}} 6\sqrt{\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5\pi}} e^{-\frac{y^2}{20}}$$

In [6]:
```
conditions = [
    (-3, 'red'),
    (0, 'green'),
    (1, 'blue'),
    (5, 'purple')
]

grid = np.linspace(-9, 11, 5000)
# График 1
plt.figure(figsize=(18, 6))
plt.title('Условная плотность $f_{\\left.\\xi_1\\right|\\xi_2} \\left(x\\left|y\\right.\\right)$')
for y, color in conditions:
    Pjoint = 1/(12*np.pi)*np.exp(-1/36*(5*(grid**2)+5*(y**2)-8*grid*y))
    Pxi_2 = 1/(2*np.sqrt(5*np.pi))*np.exp(-(y**2)/20)
    plt.plot(grid, Pjoint/Pxi_2, lw=3, color=color, label='$y={}$'.format(y))
plt.legend(fontsize=16)
#plt.ylim((0, 2))
plt.grid(ls=':')
```



Вывод: Условная плотность сильно зависит от условия. По графику кажется, что на ширину кривой это влияет мало, но зато значительно влияет на сдвиг.

Задача 3. Имеется множество серверов, которые периодически выходят из строя. Обозначим ξ_i время между i-м моментом выхода из строя сервера и $(i+1)$-м. Известно, что величины ξ_i независимы в совокупности и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ.

Обозначим N_t --- количество серверов, которые вышли из строя к моменту времени t (в начальный момент времени $N_0 = 0$). В курсе случайных процессов будет доказано, что для любых $s < t$ величина $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s))$ и независима с N_s. При этом N_t как функция от t будет называться пуассоновским процессом интенсивности λ.

Вам нужно знать, сколько серверов нужно докупить к моменту времени t взамен вышедших из строя. В момент времени s предсказанием количества серверов, вышедших из строя к моменту времени t, будем считать величину $\mathsf{E}(N_t | N_s)$.

Сгенерируйте выборку случайных величин ξ_i для $\lambda = 1/4$ в количестве, чтобы их сумма была больше 100. Для $t = 100$ постройте графики зависимости величины $\mathsf{E}(N_t | N_s)$ от s в предоположении, что условное математическое ожидание было посчитано при значении $\lambda \in \{1/10, 1/4, 1/2, 1\}$. Нарисуйте также на графике горизонтальную прямую уровня N_{100}.

$\mathsf{E}(N_t | N_s) = \mathsf{E}(N_s + N_t - N_s | N_s) = \mathsf{E}(N_s | N_s) + \mathsf{E}(N_t - N_s | N_s) = \mathsf{E}(N_s) + \mathsf{E}(N_t - N_s) = N_s + \lambda(t-s)$ (т. к. N_s является N_s-измеримой и т. к. $N_t - N_s$ независима с N_s.

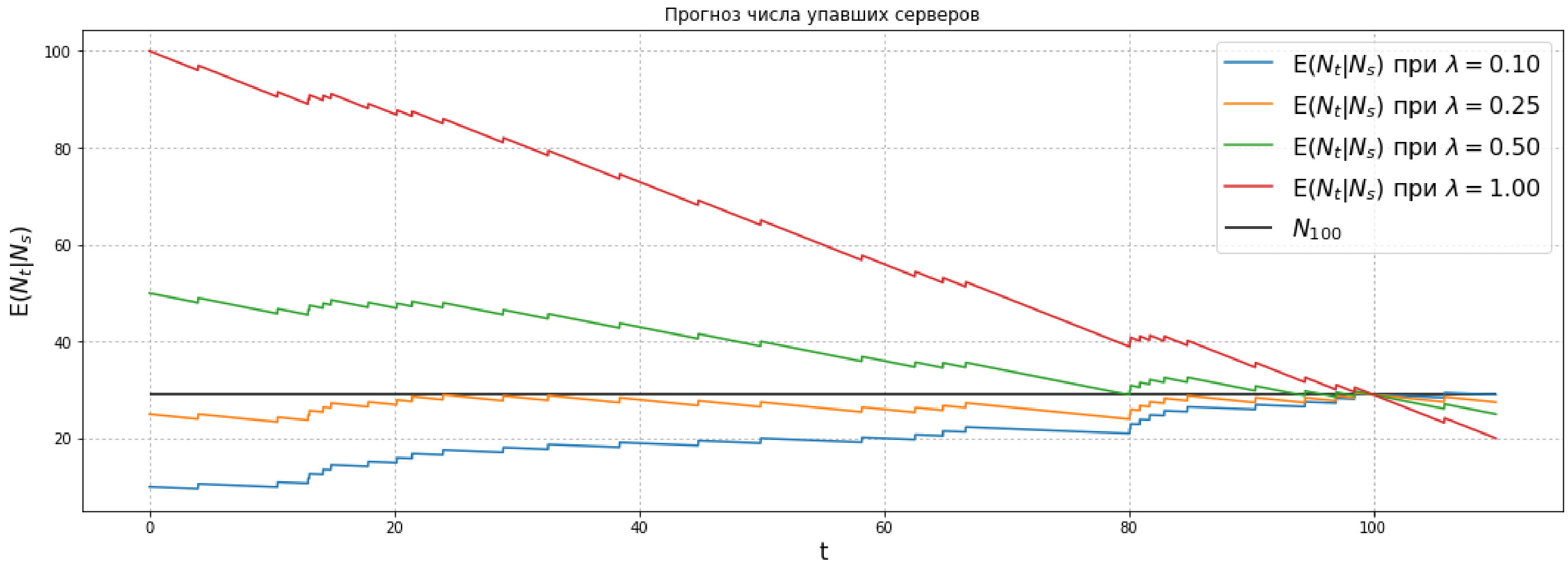
In [7]:
```
from statsmodels.distributions.empirical_distribution import ECDF
```

In [8]:

```
lambd = 1./4.
sum = 0
# Разницы во времени между выходом серверов из стороя
deltas = sps.expon.rvs(scale=1/lambd, size = 10)
while (deltas.sum() < 100):
    deltas = np.append(deltas, sps.expon.rvs(scale=1/lambd, size = 10))
print("%d значений с суммой %f"%(len(deltas), deltas.sum()))

sample = deltas.cumsum()
print(sample)
```

```
30 значений с суммой 105.782871
[   3.96986901   10.43318682   12.94121448   13.06275331   14.17508492
   14.81582322   17.85366966   20.21972593   21.44884279   23.97211429
   28.88698584   32.55147082   38.39922255   44.81839626   49.90871333
   58.18200424   62.53874942   64.8195506    66.68431116   80.05924999
   80.12447372   80.89319214   81.70772989   82.90085562   84.7888405
   90.34117645   94.39360852   96.93877456   98.4269854   105.78287097]
```

In [11]:
```
lambdas = [1/10, 1/4, 1/2, 1]
predicted_count = lambda t: ECDF(sample)(t)*len(sample)
conditional_expectation = lambda t, l : predicted_count(t)+l*(100-t)

grid = np.linspace(0, 110, 5000)
plt.figure(figsize=(18, 6))
plt.title('Прогноз числа упавших серверов')
for l in lambdas:
    plt.plot(grid, conditional_expectation(grid,l), label='$\\mathsf{E}( N_t | N_s)$ при
$\\lambda=%.2f$'%l)
plt.hlines(predicted_count(100), 0, grid[-1], label='$N_{100}$')
plt.legend(fontsize=16)
plt.xlabel('t', fontsize=16)
plt.ylabel('$\mathsf{E}( N_t | N_s)$', fontsize=16)
#plt.ylim((0, 2))
plt.grid(ls=':')
```



Вывод: На графике в момент времени t показывается наше предсказание насчёт количества упавших серверов в момент времени 100. Заметим, что чем ближе к $t = 100$ (и, соответственно, чем больше значений, по которым мы можем предсказывать), тем ближе друг к другу и тем ближе к истинному значению предсказания с разными значениями λ. При этом какие-то значения λ (в нашем случае $\frac{1}{4}$ довольно точны изначально, и нет значительного увеличения точности с приближением к $t = 100$.

Задача 4. Рассмотрим модель смеси многомерных гауссовских распределений, то есть распределение, имеющее плотность $p(x) = \sum_{k=1}^{K} p_k(x)\mathsf{P}(T = k)$, где T --- случайная величина, принимающая значения $\{1, \ldots, K\}$ и имеющая смысл номера компоненты смеси, а $p_k(x)$ --- плотность распределения $N(a_k, \Sigma_k)$.

Загрузите датасет "Ирисы Фишера", используя следующий код.

In [12]:
```
from sklearn.datasets import load_iris
data = load_iris()
```

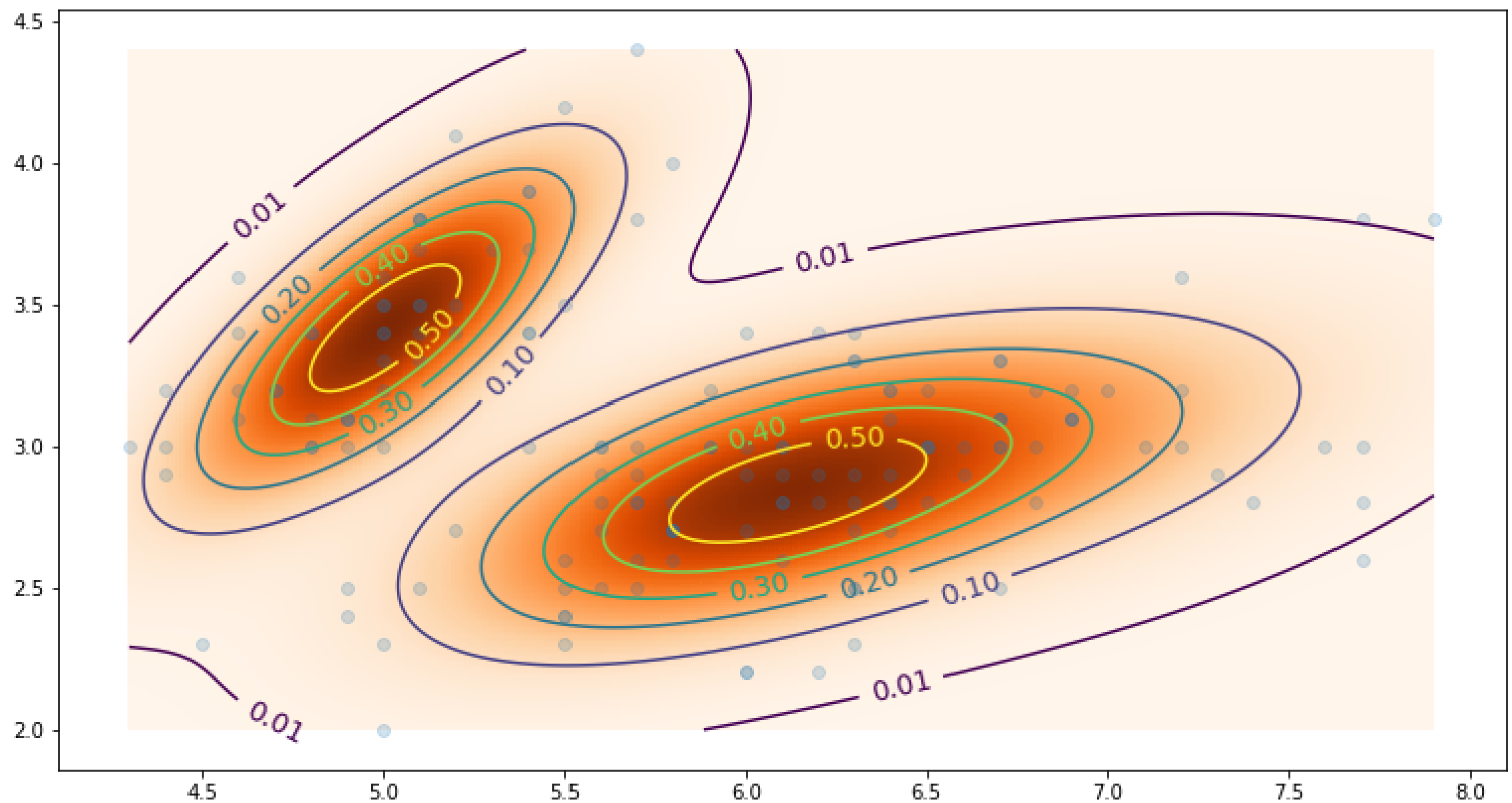
В предположении, что каждый класс имеет гауссовское распределение, оцените его параметры. Используйте для этого функции `numpy.mean` и `numpy.cov`. Проверьте, что матрица ковариаций получилась правильной --- возможно, придется предварительно поменять порядок осей (транспонировать). Напечатайте полученные оценки.

In [13]:
```
features = data.data.T
means = []
covs = []
for i in range(0, 3):
    cluster = data.data[data.target==i]

    print("For cluster %d:"%i)
    print("Mean:")
    mean = np.apply_along_axis(np.mean, 0, (cluster))
    print(mean)
    means.append(mean)
    print("Covariation matrix:")
    cov = np.cov(cluster.T)
    print(cov)
    covs.append(cov)
    print()
#print(clusters)
```

```
For cluster 0:
Mean:
[ 5.006  3.418  1.464  0.244]
Covariation matrix:
[[ 0.12424898  0.10029796  0.01613878  0.01054694]
 [ 0.10029796  0.14517959  0.01168163  0.01143673]
 [ 0.01613878  0.01168163  0.03010612  0.00569796]
 [ 0.01054694  0.01143673  0.00569796  0.01149388]]

For cluster 1:
Mean:
[ 5.936  2.77   4.26   1.326]
Covariation matrix:
[[ 0.26643265  0.08518367  0.18289796  0.05577959]
 [ 0.08518367  0.09846939  0.08265306  0.04120408]
 [ 0.18289796  0.08265306  0.22081633  0.07310204]
 [ 0.05577959  0.04120408  0.07310204  0.03910612]]

For cluster 2:
Mean:
[ 6.588  2.974  5.552  2.026]
Covariation matrix:
[[ 0.40434286  0.09376327  0.3032898   0.04909388]
 [ 0.09376327  0.10400408  0.07137959  0.04762857]
 [ 0.3032898   0.07137959  0.30458776  0.04882449]
 [ 0.04909388  0.04762857  0.04882449  0.07543265]]
```

Нарисуйте график плотности (тепловую карту) в проекции на первые две координаты и нанесите на график точки выборки. При выполнении задания полезно вспомнить решение части 3 задачи 1 задания 1. Используйте шаблон ниже.

In [19]:
```
I = np.array([0, 1])  # это можно передавать в качестве индексов
grid = np.mgrid[features[0].min():features[0].max():0.01, features[1].min():features[1].max():0.01]
densities = np.array([sps.multivariate_normal.pdf(np.dstack((grid[0], grid[1])), mean[I], cov[I][:,I])
                      for mean, cov in zip(means, covs)])
density = densities.mean(axis=0)
#print(density)
plt.figure(figsize=(13, 7))
plt.pcolormesh(grid[0], grid[1], density, cmap='Oranges')
plt.scatter(features[0], features[1], alpha=0.2)
CS = plt.contour(grid[0], grid[1], density, [0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5])
plt.clabel(CS, fontsize=14, inline=1, fmt='%1.2f', cmap='Set3')
plt.show()
```



Вычислите условное математическое ожидание $\mathsf{E}(X \,|\, I\{T \neq k\} = 1)$ для всех $k = 1, 2, 3$, где X --- случайный вектор, имеющий распределение смеси. Постройте графики условной плотности $p_{X|I\{T \neq k\}}(x|1)$ в проекции на первые две координаты. Подберите хорошие значения линий уровня.

In [15]:
```
for i in range(0, 3):
    print("Для номера компонент %d: %f", i, np.count_nonzero(data.target == i)/len(data.target))
```

```
Для номера компонент %d: %f 0 0.3333333333333333
Для номера компонент %d: %f 1 0.3333333333333333
Для номера компонент %d: %f 2 0.3333333333333333
```

То есть для каждого значения k получаем $\frac{1}{3}$.

Посчитаем матожидание для $k = 1$, для $k = 2, 3$ --- аналогично. $I_{T \neq 1}$ порождает σ-алгебру $\{\varnothing, \Omega, T \neq 1, \overline{T \neq 1}\}$, которая также порождается разбиением $\{T \neq 1, T = 1\}$, а значит можно воспользоваться формулой для разбиений.

$\mathsf{E}(X \,|\, I\{T \neq k\}) = \frac{\mathsf{E}(XI_{T=1})}{\mathsf{P}(T=1)} I_{T=1} + \frac{\mathsf{E}(XI_{T \neq 1})}{\mathsf{P}(T \neq 1)} I_{T \neq 1} = 3\mathsf{E}(XI_{T=1})(1 - I_{T \neq 1}) + \frac{1}{2}(3\mathsf{E}(XI_{T=2}) + 3\mathsf{E}(XI_{T=3}))I_{T \neq 1} = a_1(1 - I_{T \neq 1}) + \frac{1}{2}(a_2 + a_3)I_{T \neq 1}$

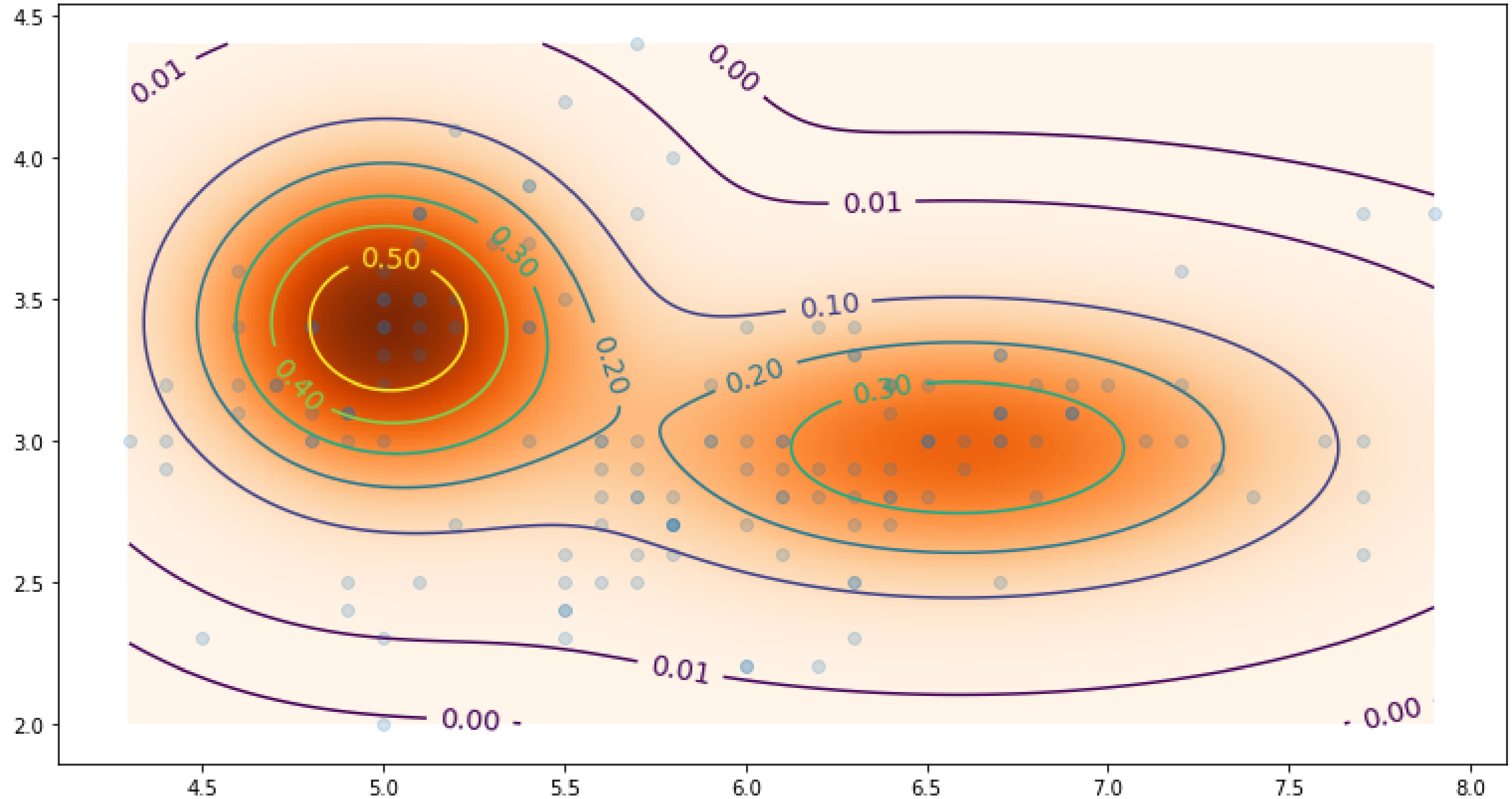
$\mathsf{E}(X \,|\, I\{T \neq k\} = 1) = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$

Условная плотность же $p_{X|I\{T \neq k\}}(x|y) = p_k(x)(1 - y) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in \{1,2,3\} \setminus \{k\}} p_i(x)\right)y$

Построить требуется $p_{X|I\{T \neq k\}}(x|1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in \{1,2,3\} \setminus \{k\}} p_i(x)\right)$

In [16]:
```python
I = np.array([0, 1])  # это можно передавать в качестве индексов
grid = np.mgrid[features[0].min():features[0].max():0.01, features[1].min():features[1].max():0.01]

for k in range(1, 4):
    plt.figure(figsize=(13, 7))
    plt.title("График условной плотности $p_{X|I\\{T \\ne k\\}}\left(x \\left| 1\\right.\\right)$ в проекции на первые две координаты при $k=%d$"%k)
    density = 1/2*(densities[k-1]+densities[k-2])
    plt.pcolormesh(grid[0], grid[1], density, cmap='Oranges')
    plt.scatter(features[0], features[1], alpha=0.2)
    CS = plt.contour(grid[0], grid[1], density, [0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5])
    plt.clabel(CS, fontsize=14, inline=1, fmt='%1.2f', cmap='Set3')
    plt.show()
```

График условной плотности $p_{X|I\{T\neq k\}}(x|1)$ в проекции на первые две координаты при $k = 1$



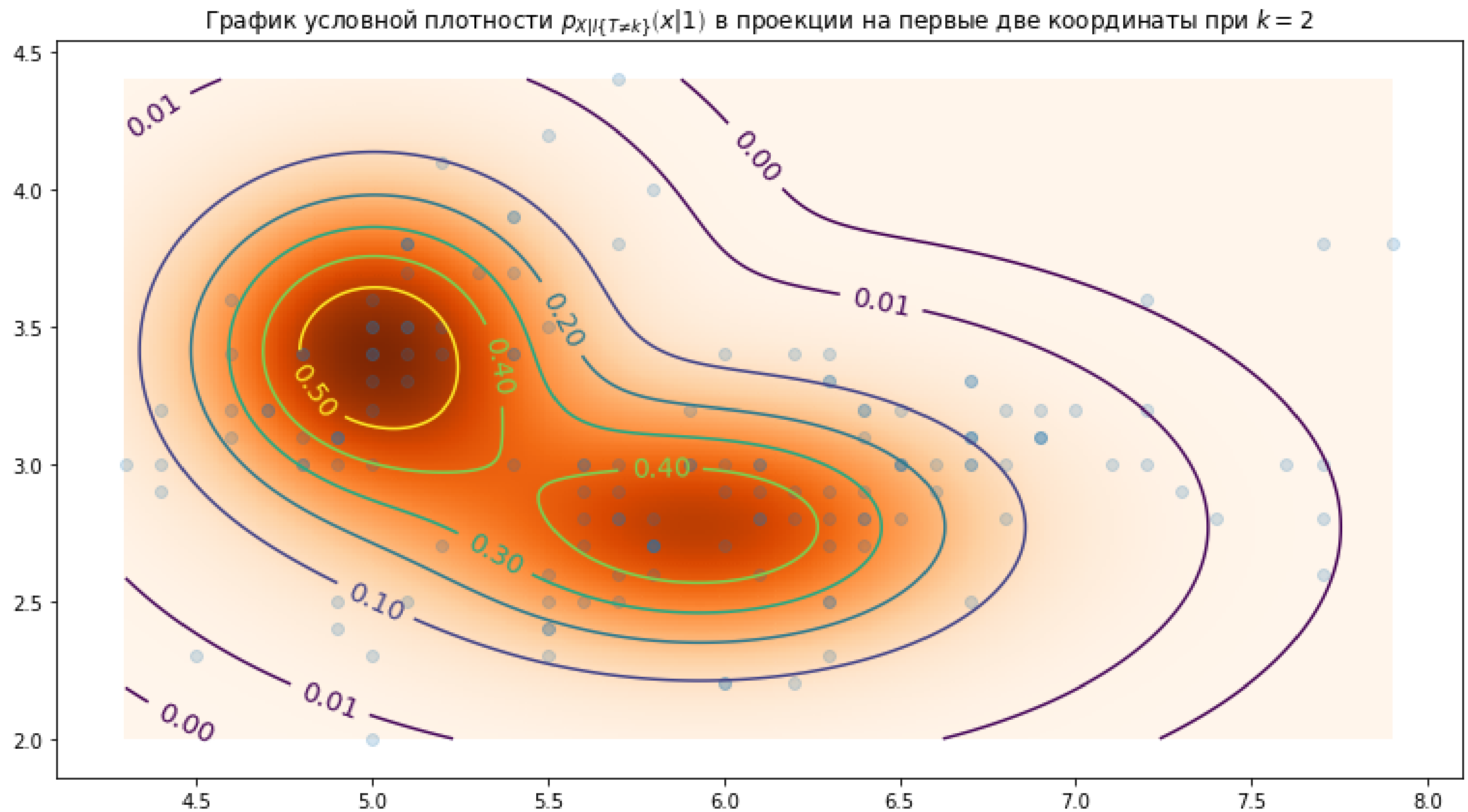
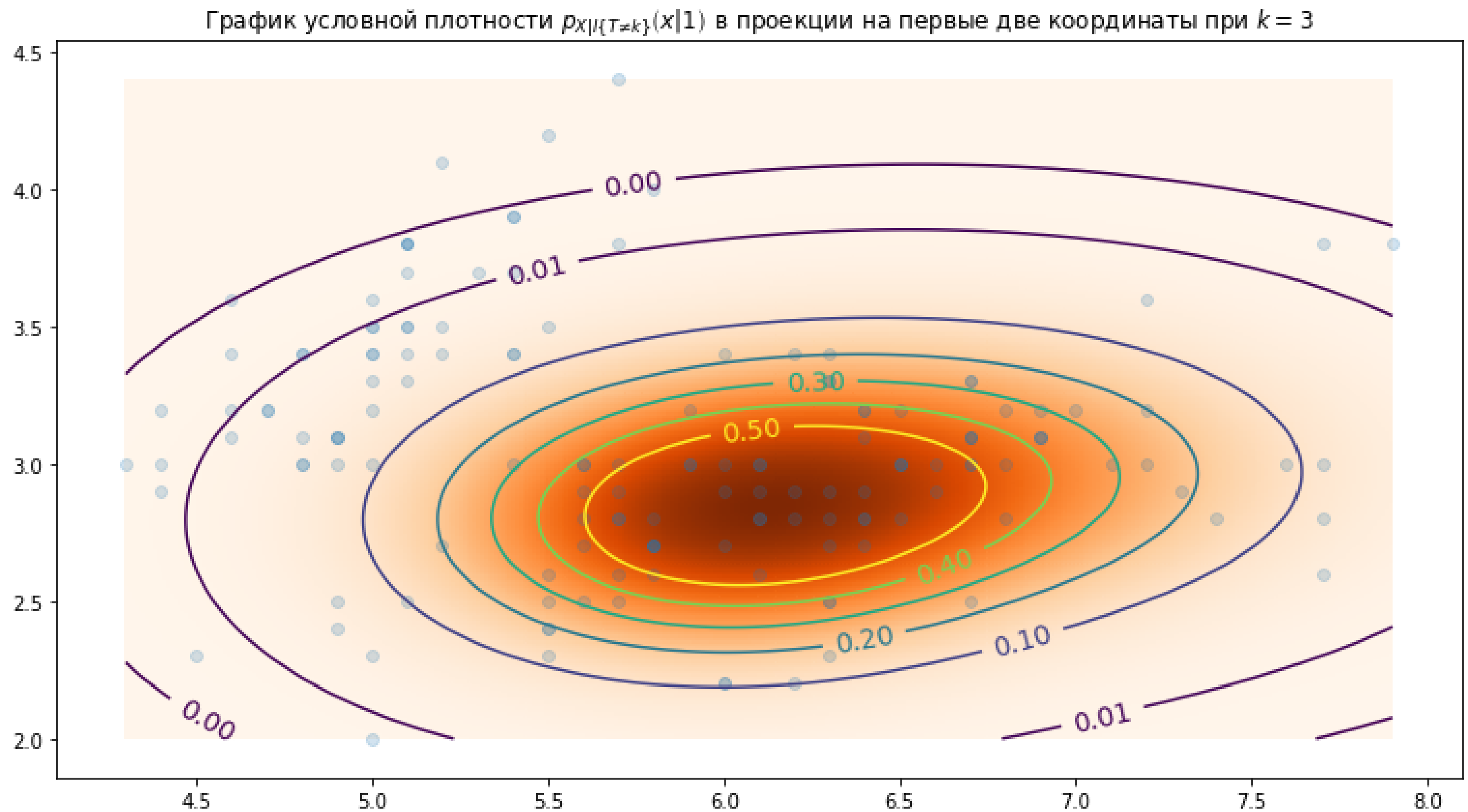


График условной плотности $p_{X|I\{T\neq k\}}(x|1)$ в проекции на первые две координаты при $k = 2$
0.01
0.00
0.01
0.20
0.40
0.50
0.40
0.30
0.10
0.01
0.00
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
4.5
5.0
5.5
6.0
6.5
7.0
7.5
8.0



Классифицируйте все пространство по принципу $k = \arg\max_k p_{X|I\{T=k\}}(x|1)$. Посчитайте долю ошибок на выборке. Нарисуйте классификацию всего пространства в проекции на пары координат (0, 1), (1, 3) и (2, 3), где закрасьте разными цветами области, которые образовались в результате классификации.

Аналогично вышеприведённому, получаем:

$$p_{X|I\{T=k\}}(x|y) = p_k(x)y + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in\{1,2,3\}\setminus\{k\}} p_i(x)\right)(1-y)$$

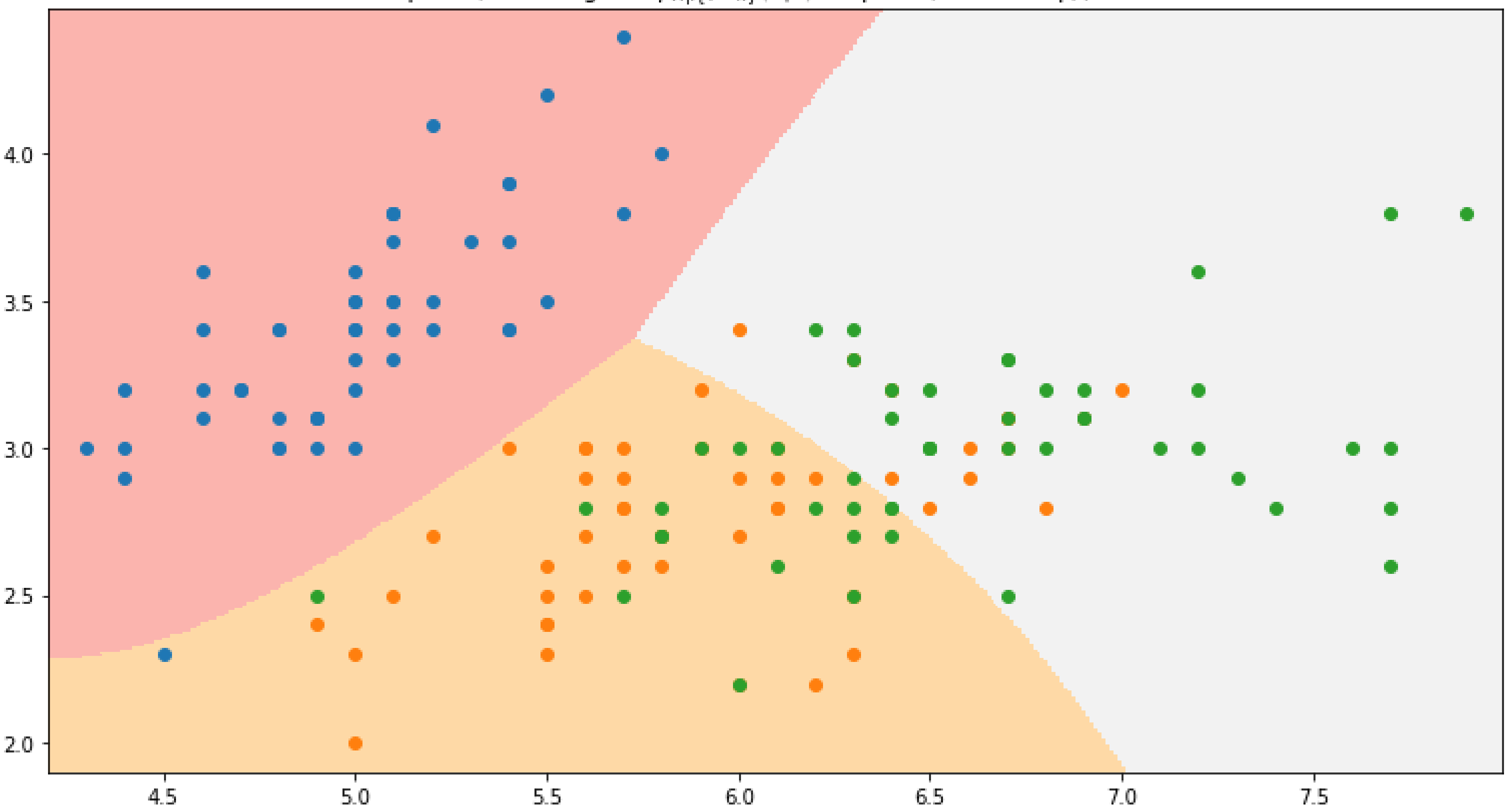
$$p_{X|I\{T=k\}}(x|1) = p_k(x)$$

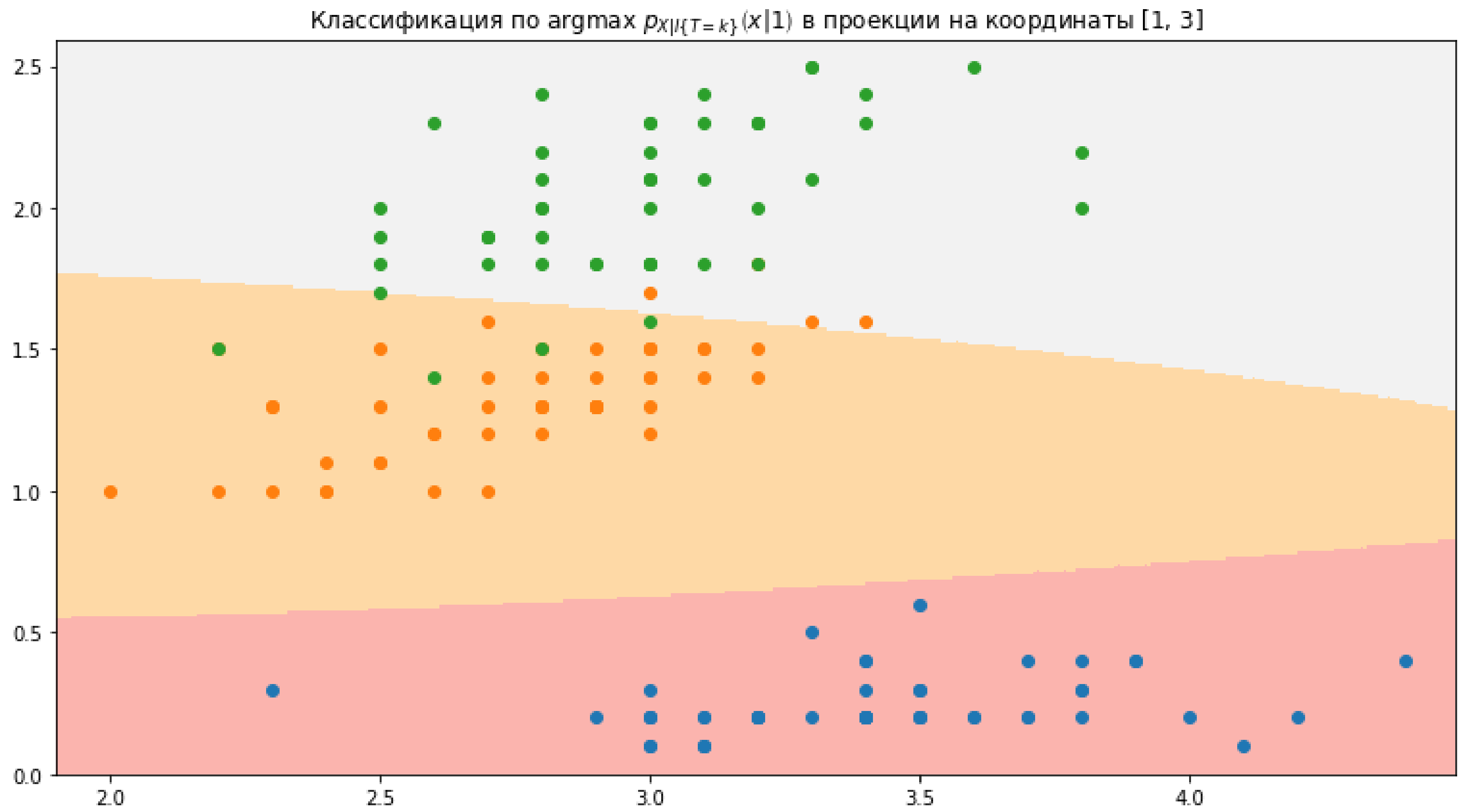
In [17]:
```
pdfs = [sps.multivariate_normal(mean=mean, cov=cov).pdf
                    for mean, cov in zip(means, covs)]

argmax = lambda x : np.argmax([pdf(x) for pdf in pdfs])

error_count = 0
for x, k in zip(data.data, data.target):
    if argmax(x) != k:
        error_count += 1
print("Доля ошибок на выборке: %f"%(error_count/len(data.target)))
```

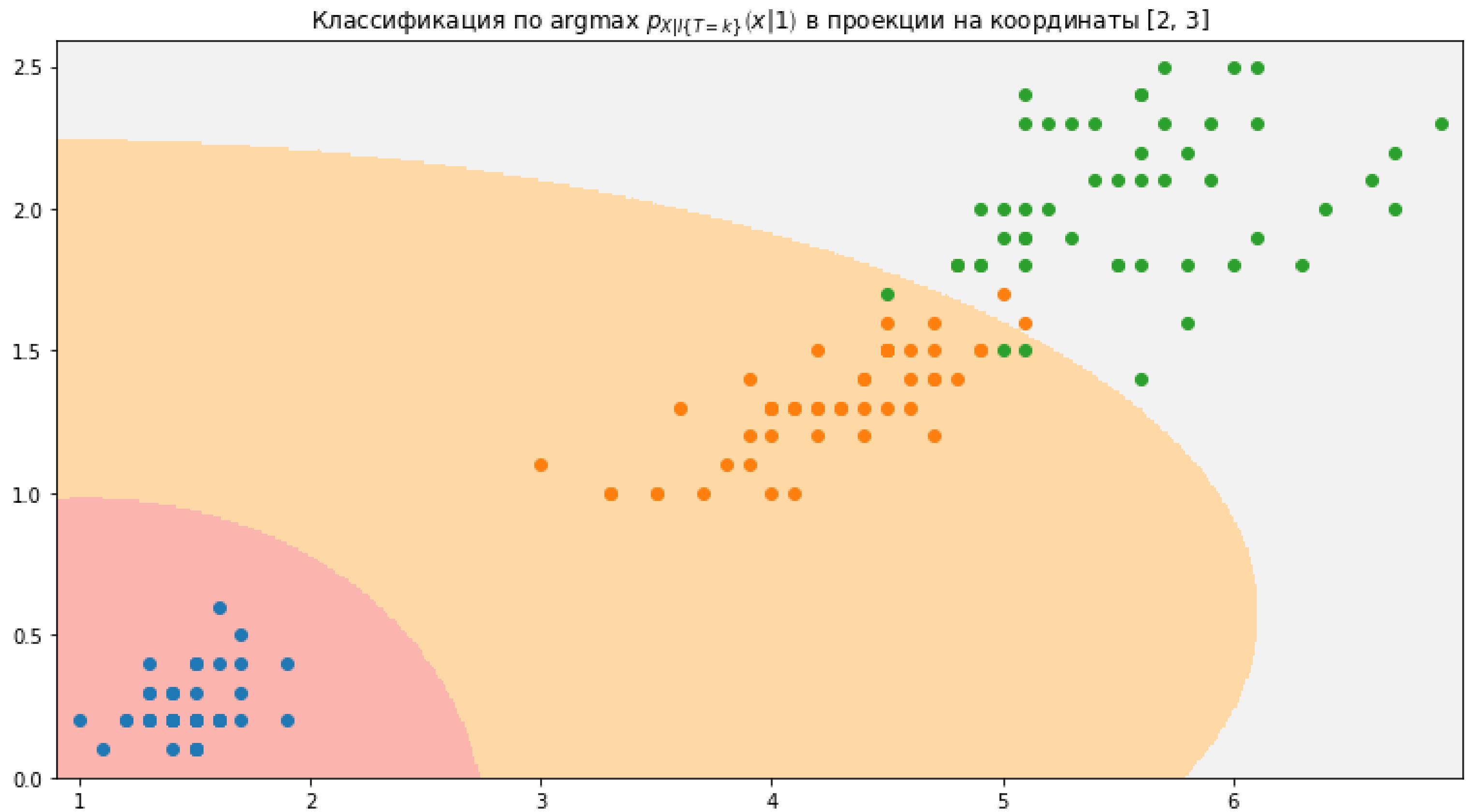
```
Доля ошибок на выборке: 0.020000
```

In [18]:
```
for i, I in enumerate([[0,1],[1,3],[2,3]]):
    plt.figure(figsize=(13, 7))
    plt.title("Классификация по argmax $p_{X|I\\{T = k\\}}\\left(x \\left| 1\\right.\\right)$ в про
екции на координаты %s"%I)
    border=0.1
    grid = np.mgrid[data.data[:, I[0]].min()-border:data.data[:, I[0]].max()+border:0.01,
                    data.data[:, I[1]].min()-border:data.data[:, I[1]].max()+border:0.01]
    pdfs = [sps.multivariate_normal(mean=mean[I], cov=cov[I, I]).pdf for mean, cov in zip(means, co
vs)]
    argmax = lambda x : np.argmax([pdf(x) for pdf in pdfs], axis=0)

    plt.pcolormesh(grid[0], grid[1], argmax(np.dstack((grid[0], grid[1]))), cmap='Pastel1')
    for j in range(0, 3):
        plt.scatter(data.data[data.target == j,I[0]], data.data[data.target == j,I[1]])
    plt.show()
```

Классификация по argmax $p_{X|I\{T=k\}}(x|1)$ в проекции на координаты [0, 1]




Классификация по argmax $p_{X|I\{T=k\}}(x|1)$ в проекции на координаты [1, 3]
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0



Вывод: Приближение с помощью смеси гауссовских распределений оказалось довольно хорошим. Ошибка составила 2%. Если смотреть в проекциях на оси, то по осям (0, 1) было много ошибок, но это компенсировалось тем, что по другим осям их было мало.

Задача 5*. В предыдущей задача информация о принадлежности наблюдения конкретной компоненте смеси была известна заранее. Как выть в случае, если такой информации нет? Задача оценки параметров распределения смеси может быть решена с помощью иттерационного ЕМ-алгоритма.

Опишите, как работает ЕМ-алгоритм (это обязательное условие, при котором эта задача будет проверяться). Затем примените ЕМ-алгоритм к Ирисам Фишера и к некоторым искусственно сгенерированным датасетам. Исследуйте, как результат зависит от параметров алгоритма. Сделайте вывод.

Разобраться в ЕМ-алгоритме помогут:

https://basegroup.ru/community/articles/em (https://basegroup.ru/community/articles/em)

http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%95%D0%9C-%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC (http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%95%D0%9C-%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC)

https://en.wikipedia.org/wiki/Expectation%E2%80%93maximization_algorithm (https://en.wikipedia.org/wiki/Expectation%E2%80%93maximization_algorithm)

Bishop, C.M. Pattern Recognition and Machine Learning, глава 9.

Реализация ЕМ-алгоритма для смеси гауссовских распределений:

http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.mixture.GaussianMixture.html#sklearn.mixture.GaussianMixture (http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.mixture.GaussianMixture.html#sklearn.mixture.GaussianMixture)