

**№ 1 (1.4 [Каргальцев])** Для любого числа  $u \in \mathbb{C}$  определим множество  $\mathbb{Z}[u] = \cup_{n=0}^{\infty} \{a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$ .

► а) Докажите, что  $\mathbb{Z}[u]$  является областью целостности.

То, что  $\mathbb{Z}[u]$  кольцо проверяется непосредственно. Поскольку  $\mathbb{Z}[u] \subset \mathbb{C}$  и  $\mathbb{C}$  — область целостности (потому что  $\mathbb{C}$  — поле), то и  $\mathbb{Z}[u]$  область целостности.

б) При каких  $u \in \mathbb{C}$  данное  $\mathbb{Z}[u]$  “конечномерно над  $\mathbb{Z}$ ”, то есть найдётся такое  $N$ , что  $\mathbb{Z}[u] = \cup_{n=0}^{\infty} \{a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$ ?

Покажем, что  $\mathbb{Z}[u]$  “конечномерно над  $\mathbb{Z}$ ”,  $\Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{Z}[x] : f(u) = 0, f \neq 0$  и старший коэффициент  $f(x)$  равен 1 (\*).

$\Rightarrow$

Поскольку  $u^{N+1} \in \mathbb{Z}[u] \Rightarrow \exists a_0, \dots, a_N \in \mathbb{Z} : u^{N+1} = \sum_0^N a_k u^k \Rightarrow u$  — корень  $f(x) = x^{N+1} - \sum_0^N a_k x^k$

$\Leftarrow$

Пусть  $u$  — корень многочлена  $f(x) = x^N + \sum_0^{N-1} a_k x^k$ , удовл. условию (\*). Тогда  $u^N$  выражается через меньшие степени. ( $u^N = - \sum_0^{N-1} a_k u^k$ )

Индукцией по  $k \geq N$  легко показать, что  $u^k$  выражается через  $1, u, \dots, u^{N-1}$ .

$(u^{k+1} = u \cdot u^k \xrightarrow{\text{предположение индукции}} u \cdot (\sum_0^{N-1} b_k u^k) = (\sum_1^{N-1} b_{k-1} u^k) + b_{N-1} u^N \xrightarrow{\text{база индукции}} (\sum_1^{N-1} b_{k-1} u^k) + b_{N-1} \sum_0^{N-1} -a_k u^k)$

◀

**№ 2. (1.2)** Для комплексного числа  $z \in \mathbb{C}$  введём норму  $N(z) = |z|^2$ .

а)  $N(zw) = N(z)N(w)$ .

Для каждого  $z \in D$ :

б) Верно ли, что  $N(z)$  — натуральное число?

в) Верно ли, что  $N(z) = 1 \Leftrightarrow z$  — обратим?

► а) Просто проверим:  $N(zw) = N(a_z + b_z i)(a_w + b_w i) = N(a_z a_w - b_z b_w + (a_z b_w + a_w b_z)i) = (a_z a_w - b_z b_w)^2 + (a_z b_w + b_z a_w)^2 =$  раскрыли скобки  $= (a_z^2 + b_z^2)(a_w^2 + b_w^2) = N(z)N(w)$

б) Заметим, что  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

Значит,  $|a + bi| = a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$ . Аналогично:

$\mathbb{Z}[2i] = \{a + 2bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |a + 2bi| = a^2 + 4b^2 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}i] = \{a + \sqrt{2}bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |a + \sqrt{2}bi| = a^2 + 2b^2 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{3}i] = \{a + \sqrt{3}bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |a + \sqrt{3}bi| = a^2 + 3b^2 \in \mathbb{N}$

в)  $\Rightarrow$

$N(z) = a^2 + b^2 = 1$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a-bi}{1} = a-bi = \bar{z}$ , а  $z$  и  $\bar{z}$  одновременно лежат в  $D$ , значит  $\exists z^{-1} = \bar{z}$ .

$\Leftarrow$

$zz^{-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} N(zz^{-1}) = N(z)N(z^{-1}) = 1 \\ N(z) = a^2 + b^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow N(z) = 1$

◀

**№ 3** Пример нефакториального кольца вида  $\mathbb{Z}[u]$ .

► Пример:  $\mathbb{Z}[2i]$  не является факториальным кольцом, потому что  $4 = 2 \cdot 2 = (2i)(-2i)$ , но при этом  $2 \not\sim 2i$  — противоречие с единственностью разложения в факториальном кольце.

Еще пример:  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$  (аналогичное рассуждение  $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$ ).

◀

**№ 4 (2.7 [Каргальцев])** | Простой элемент области целостности является неразложимым.

► Пусть  $p$  — простой и  $p = xy \Rightarrow x|p \wedge y|p$ . Из определения простоты  $p|x \vee p|y$ . Но тогда или  $x|p \wedge p|x$ , или  $y|p \wedge p|y$ . Тогда  $p \sim y \vee p \sim x \Rightarrow y \in K^* \vee x \in K^*$ , то есть  $p$  — неразложимый. ◀

**№ 5 (2.8)** В факториальном кольце любой неразложимый элемент является простым.

► Пусть  $x = ab$  — неразложимый.  $x = ab \Rightarrow x|ab$ .

$x$  неразложимый, значит б.о.о.  $a \in K^*$ . Тогда в силу единственности разложения  $x = ab = ap_1 \dots p_k \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x|b$ . ◀

**№ 6 (часть 2.9 [Каргальцев])** |  $K$  — евклидово кольцо. Верно ли, что если для  $a, b \neq 0$  выполнено равенство  $N(ab) = N(a)$ , то  $b$  обратим?

► Поделим  $a$  с остатком на  $ab$ :

$$a = abq + r : r = 0 \vee N(r) < N(ab)$$

$$r = a(1 - bq)$$

Если  $r = 0$ , то  $bq = 1$  и  $b$  обратим. Иначе  $N(ab) > N(r) = N(a(1 - bq)) \geq N(a) = N(ab)$ . Противоречие. ◀

**№ 7 (2.10)** Геометрический способ доказательства того, что  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $\mathbb{Z}[\omega]$  — евклидово кольцо.

► ВСТАВИТЬ КАРТИНКУ Пусть  $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ . Поделим  $a$  на  $b$  с остатком:

$$a = pb + q.$$

Надо доказать, что если  $q \neq 0$ , то  $N(q) < N(b)$ . Рассмотрим точку  $\frac{a}{b}$ , пусть ближайший к ней узел в решетке  $p$ , тогда  $\frac{a}{b} = p + \frac{q}{b}$ . Но  $\frac{q}{b}$  по модулю меньше половины диагонали единичного квадрата  $\left| \frac{q}{b} \right| \leq \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq 1$ , т.е.  $|q|^2 < |b|^2 \Rightarrow N(q) < N(b)$ , если  $\frac{q}{b}$  не совпадает с центром квадрата.

(TODO иначе)

$\mathbb{Z}[\omega]$  аналогично. ◀

**№ 9 (3.1)** а) Если  $p$  — простое целое число и существует такое  $z \in D$ , что  $N(z) = p$ , то  $z$  — неразложимый элемент.

б) Если  $p$  — простое целое число и не существует такого  $z \in D$ , что  $N(z) = p$ , то  $p$  — неразложимый элемент.

в) Если  $D$  — факториальное кольцо, то для любого неразложимого элемента  $z \in D$  либо  $N(z) = p$ , либо  $z \sim p$  для некоторого целого простого числа  $p$ .

► а) Имеем:  $z \in D$ ,  $N(z) = p$ . Пусть  $z = bc$ , тогда  $N(z) = N(b)N(c) = p \Rightarrow N(b) = 1$  или  $N(c) = 1$ , т.е.  $b \in D^*$  или  $c \in D^* \Rightarrow z$  — неразложим (исп. задачу 2в)

б) Пусть  $p = bc$ . Тогда  $N(p) = N(b)N(c) = p^2$ . Два случая:

- $N(b) = N(c) = p$  — невозможно по условию
- $N(a) = 1$ ,  $N(b) = p^2$  или  $N(a) = p^2$ ,  $N(b) = 1 \Rightarrow b \in D^*$  или  $c \in D^*$  (исп. задачу 2в).

в)  $N(z) = z\bar{z} = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$  (в силу факториальности кольца).  $z$  неразложим  $\Rightarrow \exists i: p_i | z \Rightarrow zk = p_i$

$N(p_i) = p_i^2 = N(z)N(k) \Rightarrow$  либо  $N(z) = p_i \Rightarrow z$  — неразложим, либо  $N(z) = p_i^2 \Rightarrow z \sim p_i$ . ◀

**№ 10 (2.7 [Каргальцев])** | Если  $z \in D$ ,  $z|x$ , и  $N(z) = N(x)$ , то  $z \sim x$ .

► Пусть  $x = yz$ . Тогда  $N(yz) = N(z) \Rightarrow y$  обратим (по №6) и, значит,  $x \sim z$ . ◀

**№ 11 (3.3 [Каргальцев])** | (Простые гауссовы числа) Пусть  $p$  — простое целое число.

► а) Если  $p = 4k + 3$ , то  $p$  — неразложим в  $\mathbb{Z}[i]$ .

Если  $p$  разложим, тогда  $p = z\bar{z} = Re^2z + Im^2z$ . Но число, дающее остаток 3 при делении на 4 не быть представлено в виде суммы двух квадратов (квадраты дают остаток 1 при делении на 4).

б) Если  $p = 4k + 1$ , то  $p$  — разложим в  $\mathbb{Z}[i]$ .

Если  $p = 4k + 1$ , то  $-1$  — вычет по модулю  $p$ , т.е.  $\exists x \in \mathbb{Z} : p|x^2 + 1 \Rightarrow p|(x+i)(x-i)$ . Если  $p$  — неразложим, тогда  $p$  — прост и либо  $p|(x+i)$ , либо  $p|(x-i)$ .

- $p|(x+i) \Rightarrow x+i = p(c+di) \Rightarrow 1 = pd \Rightarrow p|1$  — плохо.

- $p|(x-i) \Rightarrow x-i = p(c+di) \Rightarrow -1 = pd \Rightarrow p|1$  — плохо.

Значит,  $p$  разложим.

в) Если  $p = 4k+1$ , то  $p = z\bar{z}$ , где  $z$  — неразложим в  $\mathbb{Z}[i]$ .

Следует из предыдущего пункта и пункта г) предыдущей задачи.

г) Неразложимые элементы  $\mathbb{Z}[i]$ , не описанные в предыдущих пунктах —  $\pm 1 \pm i$ .

Неразложимые элементы, не описанные в предыдущих задачах могут иметь норму или 2, или 4. Норму 4 имеет только 2 и ассоциированные с ней, но  $2 = (1+i)(1-i)$ .

С другой стороны,  $N(\pm 1 \pm i) = 2$ , то есть силу пункта в) предыдущей задачи  $\pm 1 \pm i$  неразложимы. ◀

**№ 12 (3.10)** Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.

► Пусть  $K$  — евклидово кольцо,  $a \in K$ , причем

$$N(a) = \min_{x \in K \setminus \{0\}} N(x)$$

Предположим, что  $K \neq (a) \Rightarrow \exists b \in K \setminus (a) \Rightarrow b = aq + r$ , где либо  $r = 0$ , либо  $N(r) < N(a)$ .

- $r = 0 \Rightarrow b = aq \Rightarrow b \in (a)$  — противоречие
- $N(r) < N(a) \Rightarrow r = b - aq \in I$  — противоречие с минимальностью нормы  $a$ .

**№ 13 (3.13)** Пусть  $D = \mathbb{Z}[i]$  или  $\mathbb{Z}[\omega]$ .

а) Верно ли, что из  $a|b$  следует, что  $N(a)|N(b)$ ?

б) Верно ли, что из  $\text{НОД}(N(a), N(b)) = 1$ , следует  $\text{НОД}(a, b) = 1$ ?

в) Пусть  $\text{НОД}(N(a), N(b)) = p$  — простое целое число, причём  $p \nmid a$ ,  $p \nmid b$ . Тогда  $p$  — разложим, и если  $p = z\bar{z}$ , то либо  $z$  и  $\bar{z}$  порождает идеал  $(a, b)$ , либо  $z$  делит одно из этих чисел, а  $\bar{z}$  — другое.

► а) Верно.  $a|b \Rightarrow b = ak \Rightarrow N(b) = N(a)N(k)$  (по свойству нормы в  $D$ )  $\Rightarrow N(a) | N(b)$

б)  $\text{НОД}(N(a), N(b)) = p$

Допустим, что  $\text{НОД}(a, b) = k \notin D^*$ .

Тогда  $a = kx, b = ky$ , и

$$\left. \begin{aligned} N(a) &= N(kx) = N(k)N(x) \\ N(b) &= N(ky) = N(k)N(y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{НОД}(N(a), N(b)) \neq 1 \quad (1)$$

— противоречие. Значит,  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .

в)  $\text{НОД}(N(a), N(b)) = p$

Покажем, что  $p$  — разложим.  $N(a) = a\bar{a} = pt, p \nmid a$ ,  $p$  — простое число  $\Rightarrow$  допустим, что  $p$  неразложима:  $p | \bar{a}$  (по свойству факториального кольца). Тогда  $\bar{a} = x - iy : p \Leftrightarrow x : p, y : p \Rightarrow a : p$  — противоречие  $\Rightarrow p$  — разложим.

$$\left\{ \begin{aligned} a\bar{a} &= z\bar{z}k \\ b\bar{b} &= z\bar{z}l \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a : z \text{ и } b : \bar{z} \\ a : \bar{z} \text{ и } b : z \\ a : z \text{ и } b : z \end{cases} \quad (2)$$

В последнем случае идеал  $(t) = (a, b) \subseteq (z, \bar{z})$  — очевидно. Докажем в обратную сторону, что  $(z, \bar{z}) \subseteq (a, b)$

$$z\bar{z} = a\bar{a}\xi + b\bar{b}\eta : t$$

**№ 14 (3.14)** Умение находить порождающий элемент идеала в кольце  $\mathbb{Z}[i]$ . ◀

- Возможный вариант решения: найдем нормы двух чисел, потом найдем  $n$  — НОД этих норм. После этого переберем все числа, которые имеют норму  $n$  и проверим их на то, что они являются порождающим элементом. При этом искать можно только в первой четверти комплексной плоскости (т.к. найдя одно число, получаем сразу 4 поворота на  $\pi/2$ ). Если не один из них не подойдет, то сделаем то же самое со всеми делителями  $n$  в порядке уменьшения модуля, пока не дойдем до 1.

Рассмотрим пример:

3.14. Найти порождающий элемент  $(11 + 7i, 18 - i)$  в  $\mathbb{Z}[i]$ . *Решение.* Заметим, что  $\mathbb{Z}[i]$  — евклидово кольцо, значит, оно является КГИ  $\Rightarrow$  все идеалы главные  $\Rightarrow$  идеал  $(11 + 7i, 18 - i)$  порождается одним элементом  $(t)$ . Найдем этот элемент.

$$N(11 + 7i) = 170$$

$$N(18 - i) = 325$$

$$\text{НОД}(170, 325) = 5.$$

Перебором выясняем, что в первой четверти числу с нормой 5 соответствуют два числа:  $1 + 2i$  и  $2 + i$ .

Заметим, что  $1 + 2i$  не может быть порождающим элементом:

$$\frac{18-i}{1+2i} = \frac{(18-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dots = \frac{16}{5} - \frac{37}{5}i \notin \mathbb{Z}[i]$$

С  $2 + i$  тоже плохо:

$$\frac{11+7i}{2+i} = \frac{29}{5} + \frac{3}{5}i \notin \mathbb{Z}[i].$$

Следовательно, среди чисел с нормой 5 нет  $\text{НОД}(a, b) \Rightarrow$  его норма  $1 \Rightarrow (11 + 7i, 18 - i) = (1)$ . ◀

#### № ?? [Каргальцев]

- а) Если  $z$  — неразложимый элемент  $D$ , то существует такое простое целое число  $p$ , что  $N(z) = p$  или  $N(z) = p^2$ .  $N(z) = z\bar{z}$ . Разложим  $N(z)$  в произведение простых как натуральное число:

$$z\bar{z} = N(z) = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

Так как  $z$  неразложим, а  $D$  — евклидово, то  $z$  — прост, значит  $\exists k : z|p_k$ .

$p_k = zu \Rightarrow \bar{p}_k = \overline{zu} = \bar{z}\bar{u} \Rightarrow \bar{z}|p_k \Rightarrow N(z)|p_k^2 \Rightarrow N(z) = 1, p_k$  или  $p_k^2$ . Но так как если  $N(z) = 1$ , то  $z$  — обратим (а, следовательно, неразложим), то  $(z) = p_k \vee N(z) = p_k^2$ .

б) Если  $z$  — неразложимый элемент  $D$  и  $N(z) = p^2$ , то  $z \sim p$ .

Пусть  $\bar{z} = ab \Rightarrow z = \bar{a}\bar{b} \Rightarrow \bar{z}$  — неразложим.

$z\bar{z} = N(z) = p \cdot p$ . В силу единственности разложения на неразложимые,  $z \sim p$ .

в) Если  $N(z) = p$ , то  $z$  — неразложимый элемент  $D$ .

в  $Da|b \Rightarrow N(a)|N(b)$ .

Пусть  $a|z \Rightarrow N(a)|N(z)$ . В силу простоты  $N(z)$  либо  $N(a) = 1$  и, следовательно,  $a$  — обратимый, либо  $N(a) = N(z)$  и тогда  $a \sim z$ . То есть  $z$  неразложим.

г) Пусть  $p$  — простое целое число. Тогда есть два варианта: либо  $p$  неразложимо в  $D$ , либо  $p = z\bar{z}$ , где  $z$  — неразложимо в  $D$ . Таким образом описываются все неразложимые элементы  $D$ .

Пусть  $p$  разложимо в  $D$ . Тогда найдется такой неразложимый  $z : z|p$ . Поскольку  $z$  не ассоциирован с  $p$ ,  $N(z) \neq N(p) \Rightarrow N(z) = p$ . Тогда  $z$  — неразложимый и  $z\bar{z} = N(z) = p$ .

Любой неразложимый элемент  $D$  — либо простое целое число, либо его норма — простое целое число. ◀

#### № 15 Пусть $I \subset K$ является подмножеством, для которого выполнено следующее условие: для любых $a \in K, x \in I, y \in I$ верно, что $x + y \in I, ax \in I$ . Верно ли что это условие равносильно тому, что $I$ — идеал?

►  $\Rightarrow$ :

В предположении, что  $I$  непусто:

1.  $(I, +) \subset (K, +)$  — подгруппа по сложению.

- Замкнутость по сложению — дана по условию.
- Нейтральный по сложению лежит в  $I$ : действительно, возьмем произвольный  $x \in I$  и  $a = 0 \in K$ : тогда  $0 = ax \in I$ .

- Обратный по сложению лежит в  $I$ : т.к.  $-1 \in K$ , то  $\forall x \in I : -x = (-1) \cdot x \in I$ .

2.  $\forall a \in K, x \in I : ax \in I$  — дано по условию.

$\Leftarrow$ :

1.  $\forall x \in I, y \in I : x + y \in I$  — выполнено, т.к. идеал — подгруппа по сложению.
2.  $\forall a \in K, x \in I : ax \in I$  — выполнено по определению идеала.

№ 16 (3.17) а) Идеал  $(x, y)$  кольца  $\mathbb{Q}[x, y]$  конечно порождён, но не является главным.

б) Приведите пример области целостности  $K$  и идеала  $I$ , который не конечно порождён.

► а)  $(x, y)$  конечно порождён по определению.

Предположим, что  $(x, y)$  — главный. Тогда  $\exists f(x, y) : (x, y) = (f(x, y))$ .

Т.к.  $x \mid f(x, y), y \mid f(x, y)$ , то  $\deg f \leq 1$ .

Если  $\deg f(x, y) = 0$ , то  $f(x, y) \in \mathbb{Q}$ : при  $f(x, y) = 0$   $(f(x, y)) = 0$ , при  $f(x, y) \neq 0$   $(f(x, y)) = \mathbb{Q}[x, y]$ . Оба случая нам не подходят.

Если  $\deg f(x, y) = 1$ , то  $\exists a, b \in \mathbb{Q}^* : f(x, y) = ax = by$ , откуда  $x = a^{-1}by$ , что тоже неверно.

б)  $K = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$

$I = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$

Предположим,  $I$  конечно-порождён, т.е.  $\exists f_1, \dots, f_t \in K : I = (f_1, \dots, f_t)$ .  $f_i$  можно представить в виде  $x_1 g_i^1 + \dots + x_{N_i} g_i^{N_i}$  для некоторого  $N_i \in \mathbb{N}$ , т.к.  $f_i$  лежит в идеале  $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ . Положим  $N = \max\{N_1, \dots, N_t\}$ , тогда  $f_i = x_1 g_i^1 + \dots + x_N g_i^N$ .

Т.к.  $x_{N+1} \in I = (f_1, \dots, f_t)$ , то  $\exists a_1, \dots, a_t : x_{N+1} = a_1 f_1 + \dots + a_t f_t$ . Приравнявая  $x_1 = \dots = x_N = 0$  — на них все  $f_1, \dots, f_t$  равны 0 — и  $x_{N+1} = 1$ , приходим к противоречию.

№ 25 [Каргальцев] Докажите, что в кольце главных идеалов любая возрастающая цепочка идеалов

$$(a_1) \subset (a_2) \subset \dots \subset (a_n) \subset \dots$$

стабилизируется, то есть найдется такое  $k$ , то  $(a_k) = (a_{k+1}) = \dots$

► Поскольку  $(a_i) \subset (a_{i+1}) \Rightarrow a_{i+1} \mid a_i$ .

Возьмем  $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k)$ . покажем, что  $I$  — идеал. Пусть  $a \in I, b \in I \Rightarrow \exists k_1, k_2 : a \in (a_{k_1}), b \in (a_{k_2})$ . Тогда положим  $k = \max(k_1, k_2)$ .  $a, b \in (a_k) \Rightarrow (a + b) \in (a_k) \Rightarrow (a + b) \in I$ . Аналогично  $\forall x \in K, a \in (a_k) \Rightarrow xa \in (a_k) \Rightarrow xa \in I$ .

Поскольку  $K$  — КГИ, то существует  $x : I = (x)$ .  $x \in I \Rightarrow \exists k : x \in (a_k)$ . Но  $a_k \in (x)$ . Тогда  $x \mid a_k \wedge a_k \mid x \Rightarrow x \sim a_k$ . Но в силу вложенности это верно и для всех  $j > k$ , то есть  $\forall j \geq k, a_j \sim a_k \Rightarrow (a_j) = (a_k)$ . То есть цепочка действительно стабилизируется.