№ 1 (1.1) Для любых $a, b, c \in K$ выполнены равенства

a) $a0 = 0a = 0$

b) $a(-b) = (-a)b = -ab$

c) $(a-b)c = ac - bc$ и $a(b-c) = ab - ac$

► a) $a0 = a(0+0) = a0 + a0 \Rightarrow a0 = 0$

$0a = 0$ — аналогично.

b) $0 = a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b) \Rightarrow -ab = a(-b)$

c) $(a-b)c + bc = (a-b+b)c = ac \Rightarrow (a-b)c = ac - bc$

$a(b-c) + ac = a(b-c+c) = ab \Rightarrow a(b-c) = ab - ac$

◄

№ 2(1.2)

a) В кольце не может быть двух различных единиц.

► $1_1 \underbrace{=}_{\text{т. к.} 1_2 \text{— единица}} 1_1 \cdot 1_2 \underbrace{=}_{\text{т. к.} 1_1 \text{— единица}} 1_2$ ◄

b) Пусть кольцо с единицей содержит не меньше двух элементов. Тогда $1 \neq 0$.

► $\forall e \neq a \in K$ $a \underbrace{=}_{\text{св-во единицы}} a \cdot e \underbrace{=}_{\text{св-во нуля}} e$ ◄

c) Может ли элемент ассоциативного кольца иметь более одного обратного элемента?

► Пусть $a_1 \neq a_2$ — обратные к a элементы. Тогда $a_1aa_2 = \begin{cases} a_1 \cdot 1 = a_1 \\ 1 \cdot a_2 = a_2 \end{cases}$

Получается, они равны. ◄

№ 3(1.3, 2.4) Уметь отвечать на вопросы: является ли данное кольцо К коммутативным? ассоциативным? кольцом с единицей? область целостности? поле? евклидово кольцо? Какие в К есть обратимые элементы? неразложимые? простые?

№ 4 (2.1(в)) Обратимый элемент кольца не может быть делителем нуля.

► Пусть $a \in K$ обратим, $\exists a^{-1} \in K : aa^{-1} = 1$. Если a — делитель нуля, то $\exists 0 \neq b \in K : ab = 0$. Тогда $a^{-1}ab = \begin{cases} a^{-1} \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot b = b \neq 0 \end{cases}$. Противоречие. ◄

№ 5(2.1(д)) Если K — кольцо без делителей нуля, то возможно сокращение: если $ac = bc$ и $c \neq 0$, то $a = b$.

► $ac = bc \Leftrightarrow (a-b)c = 0 \Rightarrow$ т. к. нет делителей нуля и $c \neq 0$, д. б. $a - b = 0$, т. е. $a = b$. ◄

№ 6(2.1(г)) В конечном коммутативном кольце если ненулевой элемент не является делителем нуля, то он обратим.

► Кольцо конечно $\Rightarrow$ его элементы можно занумеровать: $a_1, \ldots, a_n$. $\forall a \neq 0$ элементы $a \cdot a_1, \ldots, a \cdot a_n$ должны быть все разные (иначе $\exists i \neq j :$ $a \cdot a_i = a \cdot a_j \Rightarrow \underbrace{a}_{\neq 0} \underbrace{(a_i - a_j)}_{\neq 0, \text{ т. к. } i \neq j} = 0$, т. е. a — делитель нуля).

Тогда $\exists i : a \cdot a_i = 1$, т. к. $1 \in K$ (т. е. $a \cdot a_1, \ldots, a \cdot a_n$ — n разных элементов кольца, а в кольце всего n элементов; значит, какое-то aa_i должно быть 1). ◄

№ 7 Конечная область целостности (состоящая из более чем одного элемента) — поле.

► В области целостности нет делителей нуля, а если в конечном коммутативном кольце элемент — не делитель нуля, то он обратим (№6). Т. е. все элементы обратимы.

Имеем $\geqslant 2$ элементов по условию. ◄

№ 8 Множество K^* обратимых элементов коммутативного кольца К является группой по умножению. Она называется **мультипликативной группой**, или **группой обратимых элементов** кольца K.

► Пусть K — кольцо, $a, b \in K^*$. Тогда $\exists a^{-1}, b^{-1} \in K^*$. Проверим групповые свойства.

1. a(bc) = (ab)c — ассоциативность в K^* следует из свойств кольца K.
2. $\exists 1 \in K^*$ (единица из K будет единицей из K^*: она лежит в K^*, т. к. $\exists 1^{-1} = 1$, ибо $1 \cdot 1 = 1$, и выполняется свойство единицы $a1 = 1a = a$).
3. $(b^{-1}a^{-1})(ab) = (ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1 \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in K^*$ — замкнутость относительно взятия обратного.
4. $\forall a, b \in K^* \hookrightarrow ab \in K^*$, т. к. $\exists (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Значит, K^* — группа по умножению. ◄

№ 9(1.5-1.7) Базовые знания про комплексные числа: сложение, умножение, модуль, аргумент, извлечение корней n-ой степени.

► **Компл'ексное число** z — это выражение вида $z = a + bi$, где a и b — числа из $\mathbb{R}$, а i — **мнимая единица**. По определению $i^2 = -1$. Число a называют **вещественной частью** комплексного числа z (пишется $a = \operatorname{Re}(z)$), а число b — **мнимой частью** z (пишется $b = \operatorname{Im}(z)$). Комплексные числа можно складывать и умножать, «раскрывая скобки и приводя подобные». Множество комплексных чисел обозначают буквой $\mathbb{C}$.

Каждому комплексному числу $z = a + bi$ сопоставим точку (a, b) и вектор (a, b). Длина этого вектора называется **модулем** числа z и обозначается $|z|$. Пусть $z \neq 0$. Угол (в радианах), отсчитанный против часовой стрелки от вектора $(1, 0)$ до вектора (a, b), называется **аргументом** числа z и обозначается $\operatorname{Arg}(z)$. Аргумент определен с точностью до прибавления числа вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Тригонометрическая форма записи. Для любого ненулевого комплексного числа z имеет место равенство $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$.

Для комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и натурального числа $n \in \mathbb{N}$ выполнена **формула Муавра** $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Для комплексного числа $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ число $\overline{z} = a - bi$ называется **комплексно-сопряжённым** к z. Выполнены следующие равенства:

$|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{zw}$.

Извлекать корни можно с помощью аналога формулы Муавра. Если $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})$. Выводится из обычной формулы Муавра, расписав возведение $z^{\frac{1}{n}}$. ◄

№ 10(2.2)

a) Докажите, что для элементов x, y области целостности K следующие условия равносильны:

(1) $x \sim y$;
(2) $x \mid y$ и $y \mid x$;
(3) множество делителей x и множество делителей y равны.

► • $(1) \Rightarrow (2) : \exists r \in K^* : x = ry \Rightarrow y|x$ по определению. Т. к. $r \in K^*$, $\exists r^{-1} \in K^* : r^{-1}x = y \Rightarrow x|y$ по определению.

• $(2) \Rightarrow (3)$: Пусть $x|y, x \,\vdots\, a$, т. е. a — делитель x. Тогда $\begin{cases} \exists c : y = xc \\ \exists b : x = ab \end{cases}$ (по опр.) $\Rightarrow y = xc = abc = a(bc) \Rightarrow y \,\vdots\, a$.

• $(3) \Rightarrow (2)$: Множества делителей x и y совпадают, $x|x \Rightarrow x$ будет во множестве делителей y, т. е. $x|y$. Симметрично, $y|x$.

• $(2) \Rightarrow (1)$: $\begin{cases} x|y \Rightarrow y = kx \\ y|x \Rightarrow x = ty \end{cases}$ Тогда $y = kty \Rightarrow kt = 1$. Значит, k и t обратимы. Значит, $x = ty, t \in K^* \Rightarrow x \sim y$ по определению.

◄

b) Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

► 1. $x \sim x$, т. к. $\exists 1 \in K^* : x = 1x$

2. $x \sim y \Rightarrow \exists r \in K^* : x = ry \Rightarrow y = r^{-1}x \Rightarrow y \sim x$

3. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow \begin{cases} \exists r_1 \in K^* : x = r_1 y \\ \exists r_2 \in K^* : y = r_2 z \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{r_1 r_2}_{\in K^*,\ \text{т. к. } (r_1r_2)^{-1} = r_2^{-1}r_1^{-1}} z \Rightarrow x \sim z$

◄

№ 11 (2.5) Если $k \in \mathbb{Z}$, то $z = a + bu \in D$ делится на k тогда и только тогда, когда a и b делятся на k.

► • $\Leftarrow$: $\begin{cases} a \,\vdots\, k \\ b \,\vdots\, k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ka' \\ b = kb' \end{cases} \Rightarrow z = a + bu = ka' + kb'u = k(a' + b'u) \Rightarrow z \,\vdots\, k$

• $\Rightarrow$: Пусть $z = a + bu = k(x_1 + x_2u + x_3u^2 + \dots)$ (по №5-6.1 у нас для требуемых u $\mathbb{Z}[u]$ конечномерно, и существует базис $x_1, \dots, x_n$ из конечного числа элементов).

В силу того, что есть базис: $\begin{cases} a = kx_1 \\ bu = k(x_2u + x_3u^2 + \dots) \Rightarrow b = k(x_2 + x_3u + \dots) \end{cases}$

Отсюда a и b делятся на k.

◀

№ 12(2.9 $\Leftarrow$) K — евклидово кольцо. Верно ли, что для $a \neq 0, b \in K^*$ выполнено равенство $N(ab) = N(a)$?

▶ $b \in K^* \Rightarrow N(a) \leqslant N(ab) \leqslant N(abb^{-1}) = N(a)$ ◀

№ 13 (3.2) Для $u = i, \omega$ и простого целого числа $p \leq 40$ выясните, существует ли $z \in \mathbb{Z}[u]$ с $N(z) = p$. Сформулируйте гипотезу о том, какие простые целые числа являются простыми в $\mathbb{Z}[u]$.

▶ Выпишем все варианты a, b с нормой $\leqslant 40$.

Зам. Можно опустить перебор по ka', kb' при $k > 1$, потому что тогда обе нормы делятся на k^2.

Зам. Можно брать только натуральные, т. к. для $\mathbb{Z}[i]$ норма не поменяется вообще, а для $\mathbb{Z}[\omega]$ $N = a^2 + ab + b^2 = a^2 - a(a+b) + (a+b)^2$, т. е. норма элемента $a - b\omega$ равна норме элемента $a + (a+b)\omega$, а такие мы уже перебрали, поскольку $a + b$ — натуральное. Для $a < 0$ симметрично.

a	b	$\mathbb{Z}[i], N = a^2 + b^2$	$\mathbb{Z}[\omega], N = a^2 - ab + b^2$
1	1	2	1
1	2	5	3
1	3	10	7
1	4	17	13
1	5	26	21
1	6	37	31
2	2	-	-
2	3	13	7
2	4	-	-
2	5	29	19
2	6	-	-
2	7	53	39
3	3	-	-
3	4	25	13
3	5	34	19
3	6	-	-
3	7	58	37
4	4	-	-
4	5	41	21
4	6	-	-
4	7	65	37
5	5	-	-
5	6	61	31
5	7	74	39
6	6	-	-

Пользуемся №3.1б (№9 exam_5-6): Пусть p — простое целое, $\forall z \in \mathbb{Z}[u] : N(z) \neq p \Rightarrow p$ неразложим в $\mathbb{Z}[u]$.

Выпишем все простые числа $\leqslant 40$ и вычеркнем те, которые являются нормой. Берём оставшиеся.

	$\mathbb{Z}[i]$			$\mathbb{Z}[\omega]$	
	2	✗	✓	2	
✓	3			3	✗
	5	✗	✓	5	
✓	7			7	✗
✓	11		✓	11	
	13	✗		13	✗
	17	✗	✓	17	
✓	19			19	✗
✓	23		✓	23	
	29	✗	✓	29	
✓	31			31	✗
	37	✗		37	✗

Гипотеза:

- у $\mathbb{Z}[i]$ — $4k+3$
- у $\mathbb{Z}[\omega]$ — $3k+2$

◀

№ 14 (3.9)

▶ a) $0 \subset K, K \subset K$ — идеалы. Они называются **тривиальными**.
  - $\{0\}$:
    1. Тривиальная группа по сложению:
       - Ассоциативность наследуется
       - 0 — нейтральный элемент, т. к. $0+a=a+0=0\ \forall a \in \{0\}$
       - $0^{-1}=0=-0$
    2. Замкнутость относительно умножения: $\forall a \in K \hookrightarrow 0a = 0 \in \{0\}$
  - K:
    1. Тривиальная группа по сложению:
       - Ассоциативность наследуется
       - 0 — нейтральный элемент, т. к. $0+a=a+0=a\ \forall a \in K$
       - $a^{-1}=-a \in K$
    2. Замкнутость относительно умножения: $\forall a \in K, b \in I = K \hookrightarrow ab \in I = K$ — по свойству кольца

b) $(a)=\{ax \mid x \in K\}$ — **главный идеал** или **идеал, порождённый одним элементом**
  1. Подгруппа по сложению:
     - $ax_1+ax_2=a(x_1+x_2) \in (a)$ — замкнутость относительно сложения
     - Ассоциативность наследуется
     - 0 — нейтральный элемент: $ax+0=0+ax=ax$
     - $ax+a(-x)=a(x-x)=a\cdot 0=0$
  2. Замкнутость относительно умножения: $\forall b \in K, ax \in (a) \hookrightarrow b\cdot ax = bx \cdot a \in (a)$

c) $(a_1,\ldots,a_n)=\{a_1x_1+\ldots+a_nx_n \mid x_1,\ldots,x_n \in K\}$ — **конечно-порождённый идеал**, то есть идеал, порождённый конечным количеством элементов.
  1. Подгруппа по сложению:
     - $(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+(a_1y_1+\cdots+a_ny_n)=a_1(x_1+y_1)+\cdots+a_n(x_n+y_n) \in I$ — замкнутость относительно сложения
     - Ассоциативность наследуется
     - $0=a_1\cdot 0+\cdots+a_1\cdot 0$ — нейтральный элемент: $ax+0=0+ax=ax$
     - $(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+(a_1(-x_1)+\cdots+a_n(-x_n))=0$
  2. Замкнутость относительно умножения: $\forall y \in K\ y\cdot(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)=a_1(x_1y)+\cdots+a_n(x_ny) \in I$

◀

№ 15(3.11) a) Докажите, что $(a) \subset (b)$ тогда и только тогда, когда $b \mid a$.

b) Докажите, что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $(a)=(b)$.

▶ a)
  - $\Leftarrow$: $b|a \Rightarrow \exists c : a = cb \Rightarrow ka = (kc)b \Rightarrow (a) \subset (b)$
  - $\Rightarrow$: $(a) \subset (b) \Rightarrow a \in (b) \Rightarrow a = cb \Rightarrow b|a$

b)
  - $\Rightarrow$: $a \sim b \Rightarrow \begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \Rightarrow (a) \subset (b) \subset (a) \Rightarrow (a) = (b)$
  - $\Leftarrow$: $(a)=(b) \Rightarrow \begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \Rightarrow a \sim b$

◀

№ 16(3.12) Пусть $I, J \subset K$ — идеалы. **Сумма** $I+J=\{x+y \mid x \in I, y \in J\}$ и **пересечение** $I \cap J$ идеалов являются идеалами.

▶ a)
  1. - $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=\underbrace{(x_1+x_2)}_{\in I}+\underbrace{(y_1+y_2)}_{\in J} \in I+J$
     - Ассоциативность следует.
     - 0 — нейтральный.
     - $(x+y)+\underbrace{(-x-y)}_{\in I+J}=(x-x)+(y-y)=0$ — обратный
  2. $\forall a \in K \hookrightarrow a(x+y)=\underbrace{ax}_{\in I}+\underbrace{ay}_{\in J} \in I+J$

b) 1. • $x, y \in I \cap J \Rightarrow \begin{cases} x, y \in I \\ x, y \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \in I \\ x + y \in J \end{cases} \Rightarrow x + y \in I \cap J$

• Ассоциативность следует.

• 0 — нейтральный

• $x \in I \cap J \Rightarrow \begin{cases} x \in I \\ x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{-1} \in I \\ x^{-1} \in J \end{cases} \Rightarrow x^{-1} \in I \cap J$ — обратный

2. $\forall a \in K \ \forall x \in I \cap J \hookrightarrow \begin{cases} x \in I \\ x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax \in I \\ ax \in J \end{cases} \Rightarrow ax \in I \cap J$

◄

№ 17(3.15) Пусть $K \neq 0$. Докажите, что K является полем тогда и только тогда, когда K не содержит нетривиальных идеалов.

► • $\Rightarrow$: Пусть K — поле, $I \subset K$ — идеал.

– $x = 0 \Rightarrow (x) = \{0\}$ — тривиальный идеал.
– $\forall x \in I, x \neq 0$, x обратим по свойству поля, значит, $I \supset (x) = (1) = K$.

• $\Leftarrow$: Пусть K — коммутативное кольцо без нетривиальных идеалов. Пусть $x \in K, x \neq 0$, — произвольный элемент. Тогда $(x) \neq \{0\}$. Значит, поскольку у нас нет нетривиальных идеалов, $(x) = K$.

В частности, $1 \in (x) = K \Rightarrow \exists x^{-1}$, т. е. элемент x обратим.

В силу произвольности x, любой ненулевой элемент обратим $\Rightarrow K$ — поле (в $K \geqslant 2$ элементов, т. к. $0 \in K$, и мы брали $0 \neq x \in K$).

◄

№ 18(4.1) Верно ли, что при гомоморфизме колец $\varphi : K \to L$ a) образ идеала $I \subset K$ является идеалом в L; b) образ $I \subset K$ является идеалом в $\varphi(K)$; c) прообраз идеала $J \subset L$ является идеалом в K?

► a) Неверно. Контрпример: $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \varphi(x) = x$ — поэлементное вложение.

$I = \mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ — тривиальный идеал. Но $\varphi(I) = \mathbb{Z}$ — не идеал в $\mathbb{Q}$, ибо, например, $\underbrace{\frac{1}{2}}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{1}_{\in\mathbb{Z}} = \frac{1}{2} \notin I$.

b) Пусть $x \in f(I), y \in f(K)$. Тогда найдутся такие x' и y', где $x' \in I, x = f(x'), y' \in K, y = f(y')$. Имеем: $xy = f(x')f(y') = f(x'y') \in F(I)$, так как $x'y' \in I$.

c) Верно. Пусть J — идеал в L. $\varphi^{-1}(J) = \{a \in K : \varphi(a) \in J\}$.

$$\forall a, b \in \varphi^{-1}(J) : \begin{cases} a + b \in \varphi^{-1}(J), \text{т. к. } \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \in J \\ \exists 0 \in \varphi^{-1}(J), \text{т. к. } \varphi(0) = 0 \text{ по свойству гомоморфизма} \\ \exists - a \in \varphi^{-1}(J), \text{т. к. } \varphi(-a) = -\varphi(a) \in J \end{cases}$$

$\forall x \in K,\ a \in \varphi^{-1}(J) \hookrightarrow \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) \in J$.

Значит, $\varphi^{-1}(J)$ — действительно идеал.

◄

№ 19(4.2)

a) Всегда ли факторкольцо коммутативного кольца является коммутативным кольцом?

► • Ассоциативность по сложению — из ассоциативности коммутативного кольца.
• $0 \in K$ — ноль в $K \Rightarrow 0 + I = I$ — ноль в K^*: $(I)(a + I) = (a + I)(I) = aI + I^2 = I$.
• Обратный по сложению: $(a + I) + (-a + I) = (-a + I) + (a + I) = I$.
• Дистрибутивность: $(a + I)(b + I + c + I) = (ab + I) + (ac + I)$.
• $1 \in K$ — единица в $K \Rightarrow 1 + I$ — единица в K^*: $(1 + I)(a + I) = (a + I)(1 + I) = a + I + aI + I^2 = a + I$.
• Ассоциативность по умножению — из ассоциативности коммутативного кольца.
• $(a + I)(b + I) = ab + aI + bI + II = ab + I = ba + I = ba + bI + aI + II = (b + I)(a + I)$ — коммутативность.

◄

b) Имеется **канонический** гомоморфизм $\varphi : K \to K/I$, который переводит $a \mapsto a + I$.

► Проверим свойства гомоморфизма:
• $\varphi(a) + \varphi(b) = a + I + b + I = (a + b) + I = \varphi(a + b)$
• $\varphi(a)\varphi(b) = (a + I)(b + I) = ab + aI + bI + II = ab + I = \varphi(ab)$

- $\varphi(1) = 1 + I = 1_{K/I}$

◀

№ 20(4.5) Пусть K — область целостности. Идеал (x) является простым тогда и только тогда, когда x прост.

► (x) — простой $\rightleftharpoons$ если $ab \in (x)$, то $\left[\begin{array}{l} a \in (x) \\ b \in (x) \end{array}\right.$

x — простой $\rightleftharpoons$ если $ab \vdots x$, то $\left[\begin{array}{l} a \vdots x \\ b \vdots x \end{array}\right.$

Но $ab \in (x) \Leftrightarrow ab \vdots x$ (ибо $(x) = \{cx \mid c \in K\}$ по определению, и $ab \in K$). ◀

№ 21(4.6 (Lecture_all.pdf теор. 3.2)) Пусть K — область целостности. Нетривиальный идеал I является максимальным тогда и только тогда, когда K/I поле.

► Знаем (№17): K/I — поле $\Leftrightarrow$ в K/I нет нетривиальных идеалов.

Рассмотрим канонический гомоморфизм $f : K \to K/I$. Заметим: $f(I) = \{0\}, f(K) = K/I$.

Лемма. Пусть $f : K \to L$ — гомоморфизм колец, $I \subset K, J \subset L$ — идеалы. Тогда a) $f(I)$ — идеал в $f(K)$, b) $f^{-1}(J)$ — идеал в K.

Используем №3-4.18.

- $\Leftarrow$: Пусть K/I — поле, но идеал I не максимальный. Тогда $\exists$ нетривиальный идеал $J \subset K : I \subset J$. По пункту а Леммы $f(J)$ — идеал в $f(K) = K/I$. При этом $I \subset J \Rightarrow \{0\} = f(I) \subset f(J)$. $f(J)$ нетривиален, ибо он не $\{0\}$ (иначе $J = I$) и не K/I (иначе $J = K$). То есть, получили в поле нетривиальный идеал. Противоречие с тем, что это поле.
- $\Rightarrow$: Пусть идеал I максимален, но K/I — не поле. Тогда должен быть нетривиальный идеал $L \subset K/I$. Его прообраз $f^{-1}(L)$ по пункту b Леммы — идеал в K. При этом $L \supset \{0\} \Rightarrow f^{-1}(L) \supset f^{-1}(\{0\}) = I$. Он нетривиален, ибо его прообраз не I (иначе $J = \{0\}$) и не K (иначе $J = K/I$). Т. е., получили нетривиальный идеал в K, содержащий I — противоречие с максимальностью I.

◀

№ 22(4.7) Пусть K — область целостности. Нетривиальный идеал I является простым тогда и только тогда, когда K/I область целостности.

►
- $\Rightarrow$: Пусть I — простой, но K/I — не область целостности. Тогда $\exists a, b \in K \setminus I : (a+I)(b+I) = ab+I = 0+I = 0_{K/I}$. Но тогда должно быть $ab \in I$, т. е. идеал не простой (вспомним, что брали $a, b \in K \setminus I$). Противоречие.
- $\Leftarrow$: Пусть I непростой, но K/I — область целостности. Тогда $\exists a, b : ab \in I$, но $a, b \notin I$. Рассмотрим $(a+I)(b+I) = ab + I \underbrace{=}_{ab \in I} I = 0_{K/I}$, т. е. K/I — не область целостности.

◀

№ 23(5.1, 5.2) Пусть K — область целостности. Рассмотрим множество пар $\tilde{K} = \{a, b\}$ элементов кольца K, где $b \neq 0$. На этом множестве введем отношение следующим образом: $\{a, b\} \sim \{c, d\}$, если $ad = bc$.

a) Докажите, что $\{a, b\} \sim \{ac, bc\}$. b) Докажите, что это отношение эквивалентности.

Элемент множества классов эквивалентности $F = \mathrm{Quot}(K)$ будем записывать как $\frac{a}{b}$ или ab^{-1}. Введем операции сложения и умножения на $F = \mathrm{Quot}(K)$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Докажите, что

c) сложение и умножение корректно определено; d) F является коммутативным кольцом; e) F является полем; f) существует инъекция $K \to F$.

► a) $a \cdot bc = b \cdot ac$ — из коммутативности.

b)
- $\{a, b\} \sim \{a, b\}$, т. к. $ab = ab$
- $\{a, b\} \sim \{c, d\} \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow \{c, d\} \sim \{a, b\}$
- $\{a, b\} \sim \{c, d\} \sim \{e, f\} \Rightarrow \begin{cases} ad = bc \\ cf = de \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} adf = bcf \\ bcf = bde \end{cases} \Rightarrow adf = bde \Rightarrow af = be \Rightarrow \{a, b\} \sim \{e, f\}$

c) Корректность определения означает, что множество замкнуто относительно операции, и что результат её всегда определён.

- Сложение:
  - $\frac{ad+bc}{bd} \in \mathrm{Quot}(K)$, т. к. $ad+bc \in K$ и $bd \in K$ по свойствам кольца K.
  - У $\frac{ad+bc}{bd}$ $bd \neq 0$, т. к. $b \neq 0$ и $d \neq 0$.
- Умножение:
  - $\frac{ac}{bd} \in \mathrm{Quot}(K)$, т. к. $a \in K$ и $bd \in K$ по свойствам кольца K.
  - У $\frac{ac}{bd}$ $bd \neq 0$, т. к. $b \neq 0$ и $d \neq 0$.

d) - Это кольцо:
  - $\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} + (\frac{cf+de}{df}) = \frac{adf+bcf+bde}{bdf} = \frac{ad+bc}{bd} + \frac{e}{f} = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f}$
  - Ноль — элемент класса эквивалентности $\{\frac{0}{a} \mid a \neq 0\}$. Возьмём $0_F := \frac{0}{1}$. Тогда $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$
  - Для $\frac{a}{b}$ обратный по сложению $\frac{-a}{b}$: $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a-a}{b} = \frac{0}{b}$
  - $\frac{a}{b}(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{cf+de}{df} = \frac{acf+ade}{bdf} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$
- Оно ассоциативно по умножению: $\frac{a}{b}(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = \frac{a}{b}(\frac{ce}{df}) = \frac{ace}{bdf} = (\frac{ac}{bd})\frac{e}{f} = (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f}$
- Единица — элемент класса эквивалентности $\{\frac{a}{a} \mid a \neq 0\}$. Возьмём $1_F = \frac{1}{1}$. Тогда $\frac{a}{b}\frac{1}{1} = \frac{1}{1}\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
- Оно коммутативно: $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d}\frac{a}{b}$

e) - Каждый ненулевой элемент имеет обратный по умножению $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$: $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$.
- Элементов $\geqslant 2$, т. к. $0 \neq 1$.

f) Возьмём $\varphi : K \to F, \varphi(a) = \frac{a}{1}$.

Это гомоморфизм: $\begin{cases} \frac{ab}{1} = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \frac{a}{1}\frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{ab}{1} \\ \frac{a+b}{1} = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a \cdot 1 + 1 \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a+b}{1} \end{cases}$

Это инъекция: $\forall a \neq b \in K \hookrightarrow \varphi(a) = \frac{a}{1} \neq \frac{b}{1} = \varphi(b)$, ибо $\frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1} \neq 0_F$.

◀

№ 24(6.1) Признак неприводимости Эйзенштейна

Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и существует такое простое число p, что:

1. старший коэффициент $f(x)$ не делится на p;
2. все остальные коэффициенты $f(x)$ делятся на p;
3. свободный член $f(x)$ не делится на p^2.

Тогда многочлен $f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел.

▶ Пусть, напротив f не неприводим над $\mathbb{Q}$. Тогда существуют два таких многочлена $g, h \in \mathbb{Q}[x]$, что $f = \tilde{g}\tilde{h}$ и $\deg \tilde{g}, \deg \tilde{h} > 0$. Положим $d_1 =$ (НОД знаменателей коэффициентов $\tilde{g}$) и $d_2 =$ (НОД знаменателей коэффициентов $\tilde{h}$). Тогда есть разложение $d_1 d_2 f = gh$, где $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ —- многочлены, полученные домножением $\tilde{g}, \tilde{h}$ на d_1, d_2 соответственно. Так как g и h примитивны, то их произведение примитивно, а значит, $d_1 d_2 = 1$ и верно просто $f = gh$.

Заметим, что $f_0 = g_0 h_0$. Так как f_0 не делится на p^2, то одно из чисел g_0, h_0 не делится на p. Пусть для определенности h_0 не делится на p, тогда g_0 делится на p. Пусть число $k > 0$ таково, что $g_0, \ldots, g_{k-1}$ делятся на p, а g_k не делится на p. По формуле коэффициентов для произведения многочленов $f_k = g_k h_0 + g_{k-1} h_1 + \ldots$. Если $k < \deg f$, то по модулю p имеем $0 = g_k h_0$, где g_k, h_0 не делятся на p. Значит, $k = \deg f > \deg g$. Это означает, что все коэффициенты g делятся на p, то есть g не примитивен. Противоречие.

Решение от Ильинского Пусть f приводим над $\mathbb{Q}$, тогда он представляется в виде произведения двух многочленов из $\mathbb{Z}[x]$ ненулевой степени g и h (воспользовались №5-6.24). Заметим сразу, что оба многочлена имеют степень, меньше, чем n.

Если g или h делятся на p, то и f делится на p, что противоречит условию. При этом ровно один из коэффициентов g_0 или h_0 не делится на p, так как иначе $g_0 h_0$ делился бы на p^2 или не делился бы на p. Будем считать, что g_0 не делится на p, а $h_0, ..., h_{k-1}$ делятся на p, h_k делится на p. Тогда коэффициент $f_k = g_0 h_k + g_1 h_{k-1} + ...$ не делится на p. Значит, k=n. Но мы уже договорились, что $k < n$ - получаем противоречие.

Пусть не так, и он приводим в $\mathbb{Q}$. По №5-6.24a, это эквивалентно приводимости в $\mathbb{Z}[x]$. Тогда, у него есть разложение $f = gh$, где $g, h \in \mathbb{Z}[x]$. Распишем: $f_n x^n + \cdots + f_1 x + f_0 = f(x) = g(x)h(x) = (g_k x^k + \cdots + g_1 x + g_0)(h_m x^m + \cdots + h_1 x + h_0), 0 < \deg g, \deg h < n$. Возьмём всё по модулю p (если мы утверждаем, что у нас равенство выполняется в $\mathbb{Z}$, то оно должно выполняться и для любого натурального модуля).

Тогда $\overline{f}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{т. к. другие члены делятся на } p}}{=} \overline{f}_n x^n$. $f(x)$ состоит из одного монома, а произведение двух многочленов — один моном $\Leftrightarrow$ оба этих многочлена тоже мономы. Отсюда $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)\overline{h}(x) = (g_k x^k)(h_m x^m)$. Рассмотрим свободный член. Если $k, m > 1$, то $a_0 = \underbrace{g_0}_{\vdots p}\underbrace{h_0}_{\vdots p} \vdots\, p^2$ (свободные члены $g(x)$ и $h(x)$ делятся на p, т. к. они зануляются, когда мы берём по модулю p) — противоречие.

◀

№ 25(указано 6.2, но на самом деле в нём точно такого пункта нет) Многочлен $x^n - p$ (p — простое число) неприводим над $\mathbb{Q}$.

► По критерию Эйзенштейна: $1 \not\vdots\, p, -p \vdots\, p, -p \not\vdots\, p^2$, где p — простое. ◀

№ 26(6.3) Характеристика поля — простое число.

► Если $\operatorname{char} F = 1$, то $1 = 0$, поле из одного элемента, что не является полем по нашей договорённости.

Если $\operatorname{char} F = mn, m, n \in \mathbb{N}, m, n > 1$, то $(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m})(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}) \underbrace{=}_{\text{по дистрибутивности}} \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \cdot n} = 0$. Но по определению характеристики, для $m, n < mn$ имеем $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m} \neq 0$ и $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \neq 0$. Получается, в поле есть делители нуля. Противоречие. ◀

№ 27(6.4(Lecture_all.pdf №6.2(3)) Если существует нетривиальный гомоморфизм полей $\varphi : F \to K$, то $\operatorname{char}(F) = \operatorname{char}(K)$.

► Гомоморфизм нетривиален $\Rightarrow$ по №29 он является инъекцией, а у инъекции $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ по лемме из №29. Так как $\varphi(1) = 1$, имеем $\varphi(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m}) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m}$.

Если $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m} = 0$ в F, то по свойству гомоморфизма и в K тоже. Получили $\operatorname{char}(K) \leqslant \operatorname{char}(F)$.

Т. к. $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, то только 0 переходит в 0, т. е. получив сложением единичек 0 в K знаем, что в F тоже 0. Отсюда $\operatorname{char}(F) \leqslant \operatorname{char}(K)$.

◀

№ 28(6.5) Любое конечное поле имеет положительную характеристику.

► Пусть F конечно, а $\operatorname{char} F = 0$. Тогда $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{k}$ для любого k будет давать элемент поля, не совпадающий с предыдущими (иначе char была бы конечна).

Получается, что F бесконечно. Противоречие. ◀

№ 29(№6.7) Нетривиальный гомоморфизм полей $\varphi : F \to L$ является инъекцией.

► **Лемма.** $\varphi : F \to L$ – инъекция $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

► • $\Rightarrow$: φ – инъекция $\rightleftharpoons \forall a \neq b \in F \hookrightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$.

  $\operatorname{Ker} \varphi = \{a \in F : \varphi(a) = 0_L\}$.

  Имеем $\varphi(0) = 0$ по свойству гомоморфизма, тогда по инъективности $\forall a \neq 0 \hookrightarrow \varphi(a) \neq \varphi(0) = 0$, т. е. $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

• $\Leftarrow$: Пусть не так. $\operatorname{Ker} \varphi \neq \{0\} \Rightarrow \exists 0 \neq a \in \operatorname{Ker} \varphi$. Тогда $\forall b \in K \hookrightarrow \varphi(b + a) = \varphi(b) + \varphi(a) = \varphi(b)$ — нарушение инъективности.

◀

Лемма. $\operatorname{Ker} \varphi$ — идеал в F

► $\operatorname{Ker} \varphi$ — подгруппа по сложению — простая проверка.

$\forall a, b \in \operatorname{Ker} \varphi \hookrightarrow ab \in \operatorname{Ker} \varphi$, т. к. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0 \cdot 0 = 0$ — замкнутость относительно умножения.

$\forall a \in F, x \in \operatorname{Ker} \varphi \hookrightarrow \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow ax \in \operatorname{Ker} \varphi$ ◀

В поле F идеал $I = \begin{cases} \{0\} \\ F \end{cases}$, т. е. $\operatorname{Ker} \varphi = \begin{cases} \{0\} \\ F \text{ — невозможно} \end{cases}$

(в последнем случае гомоморфизм тривиален, но у нас нетривиальный по условию).

◀

№ 30(№6.8) Если $K \supset F$ — расширение полей, то K является линейным пространством над F.

▶ Проверка свойств. Свойства линейного пространства следуют из аксиом поля.

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$, для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ ("коммутативность сложения");
2. $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$, для любых $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$ ("ассоциативность сложения");
3. существует такой элемент $\mathbf{0}\in V$, что $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in V$ ("существование нейтрального элемента относительно сложения"), называемый *нулевым вектором* или просто *нулём* пространства V;
4. для любого $\mathbf{x}\in V$ существует такой элемент $-\mathbf{x}\in V$, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$, называемый вектором, *противоположным* вектору $\mathbf{x}$;
5. $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ ("ассоциативность умножения на скаляр");
6. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ ("унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля F сохраняет вектор").
7. $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ ("дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров");
8. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$("дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов").

◀

№ 31(Lecture_all.pdf утв. 6.2(2)) Любое поле F нулевой характеристики содержит $\mathbb{Q}$ в качестве подполя.

▶ **Лёша пункт d с. 29**

$\operatorname{char} F=0\Rightarrow 1,1+1,1+1+1,\dots\in F\Rightarrow\mathbb{N}\subset F$

По свойству кольца у каждого элемента a есть обратный по сложению $-a\Rightarrow\mathbb{Z}\subset F$.

По свойству поля у каждого ненулевого элемента b есть обратный по умножению $\frac{1}{b}\Rightarrow\forall a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}\hookrightarrow a\frac{1}{b}=\frac{a}{b}\in F$. Отсюда $\mathbb{Q}\in F$.

Альтернативная концовка:

По №5-6.21a $\operatorname{Quot} F=F$ для поля (подставим $\operatorname{Quot} F$ вместо F).

Лемма. (используется для доказательства №5-6.21b) Если $K\subset L$, то $\operatorname{Quot} K\subset\operatorname{Quot} L$ для всех колец K и L.

▶ $K\subset L\Rightarrow\operatorname{Quot} K$ вложено в $\operatorname{Quot} L$ как множество. Инъективное отображение строится как $\varphi:\operatorname{Quot} K\to\operatorname{Quot} L$, $\frac{a}{b}\mapsto\frac{a}{b}$. Очевидно, это инъекция (по №3-4.23f). ◀

У нас $\mathbb{Z}\subset F\Rightarrow\mathbb{Q}=\operatorname{Quot}\mathbb{Z}\subset\operatorname{Quot} F=F$.

◀

№ 32 (Lecture_all.pdf утв. 6.5(2)) Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n, и $K=F[x]/(f(x))$. Тогда многочлен $f(x)$ имеет корень в K.

▶ **Лёша, с. 30, №13b** Рассмотрим $y=x+(f(x))\in K$. Тогда $f(y)=f(x+(f(x)))$. Пусть $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$. Тогда $f(y)=a_n(x+(f(x)))^n+\dots+a_1(x+(f(x)))+a_0=\underbrace{a_nx^n+\dots+a_1x+a_0}_{\in(f(x))}+(f(x))=(f(x))=0_K$. Это и значит, что $y\in K$ — корень многочлена f. ◀

№ 33 (Lecture_all.pdf утв. 6.5(1)) Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n, и $K={}^{F[x]}/_{(f(x))}$. Чему равна степень $[K:F]$ этого расширения?

▶ Обозначим смежный класс многочлена $g(x)\in F$ по идеалу $(f(x))$ как $\overline{g}(x)\in K$ (т. е. $\overline{g}(x)$ — остаток от деления $g(x)$ на $f(x)$, $\deg\overline{g}<\deg f=n$).

Рассмотрим $\overline{1},\overline{x},\dots,\overline{x}^{n-1}$. Пусть они ЛЗ, т. е. $\exists\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\in F:\lambda_0\cdot\overline{1}+\lambda_1\cdot\overline{x}+\dots+\lambda_{n-1}\cdot\overline{x}^{n-1}=0$. Но это означает, что многочлен $\lambda_0+\lambda_1x+\dots+\lambda_{n-1}x^{n-1}$ степени $<n$ делится на $f(x)$ степени n — невозможно. Поэтому $\overline{1},\overline{x},\dots,\overline{x}^{n-1}$ ЛНЗ.

В K находятся всевозможные остатки при делении на $f(x),\deg f=n$, то есть всевозможные многочлены степеней $\leqslant n-1$. Очевидно, все они порождаются какой-либо линейной комбинацией $\overline{1},\overline{x},\dots,\overline{x}^{n-1}$.

Поэтому $\overline{1},\overline{x},\dots,\overline{x}^{n-1}$ образуют базис K как линейного пространства над F, т. е. $[K:F]=n$. ◀

№ 34 (7.9,7.10) Умение находить степень расширения и минимальный многочлен для алгебраического над полем элемента.

▶ Как находить минимальный многочлен m_α? Придумать многочлен, у которого α является корнем, и доказать (например, по критерию Эйзенштейна из №24), что он неприводим. Тогда по СЭУ из опр. 29 минимального многочлена, это действительно минимальный многочлен.

По №7.1г(№30г exam_5-6), степень расширения равна степени минимального многочлена.

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$: $m = x^2 - 2 \Rightarrow \deg = 2$
- $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}) \supset \mathbb{Q}$: $m = x^7 - 5 \Rightarrow \deg = 7$
- $\mathbb{R}(2-3i) \supset \mathbb{R}$: $\deg = 2$
  $m = 9x^2 + 4 = (2-3i)(2+3i)$ — сложно доказывать неприводимость, критерий Эйзенштейна не помогает.
  Попробуем воспользоваться теоремой Виета: $\begin{cases} c = (2-3i)(2+3i) = 4 + 9 = 13 \\ b = (2-3i) + (2+3i) = 4 \end{cases}$. $m = x^2 - 4x + 13$. Тоже неудача, критерий Эйзенштейна не помогает.
  Замена $x \mapsto x + 1$: $m = (x+1)^2 - 4(x+1) + 13 = x^2 - 2x + 10$. Применяем критерий Эйзенштейна для $p = 2$ и получаем, что m неприводим.
- $\mathbb{C}(2-3i) \supset \mathbb{C}$: $\deg = 1$
  $m = x - (2-3i)$
  $N(2-3i) = 4 + 9 = 13$ — простое число, значит, $2 - 3i$ — простой элемент (по №3.1a(№5-6.9) знаем, что если норма — простое число, то элемент неразложим, а по №2.8(№5-6.5) в факториальном кольце простота эквивалентна неразложимости (по №7-8.7 евклидово кольцо факториально)).
  Применяем критерий Эйзенштейна для $p = 2 - 3i$ и получаем, что m неприводим.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$: $\deg = 4$
  $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow \alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \alpha^2 - 5 = 2\sqrt{6} \Rightarrow (\alpha^2 - 5)^2 = 24$
  $m = \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1$
  Критерий Эйзенштейна не работает. Замену подобрать не получается.
  Воспользуемся эквивалентным определением минимального многочлена m_α: это многочлен минимальной степени, обнуляющийся на α. Разложим m на линейные множители над $\mathbb{Q}$. $m = (x^2 + 2\sqrt{6} - 5)(x^2 - 2\sqrt{6} - 5) = (x - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})(x + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})(x - \sqrt{2\sqrt{6} + 5})(x + \sqrt{2\sqrt{6} + 5})$. Минимальный многочлен должен быть произведением каких-то из этих множителей и иметь коэффициенты из $\mathbb{Q}$. Произведением одной или трёх множителей он быть не может (иначе коэффициент из $\mathbb{C}$), двух — тоже (коэффициент из $\mathbb{R}$). Итого, надо брать все четыре множителя, т. е. наш найденный m и есть минимальный многочлен.
- $\mathbb{Q}(1 + \sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$: $\deg = 1$
  Лемма. $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

► $\subseteq$ очевидно.
  $\supseteq$: Рассмотрим $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ — обратный к $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (он есть, т. к. $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] \cong \mathbb{Q}\sqrt{2} + \sqrt{3})$ — полю.
  $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$, т. е. $\sqrt{3}$ лежит в кольце. Тогда $\sqrt{2} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{3}$ тоже лежит в кольце. ◄
  Тогда $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$
  $m = x - (1 + \sqrt{2})$ — степени 1, неразложимый. $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$.
- $\mathbb{Q}(\omega) \supset \mathbb{Q}$: $\deg = 2$
  $m = x^2 + x + 1$: $m(\omega) = 0$ (можно понять по картинке), неприводим по критерию Эйзенштейна после замены $x \mapsto x + 1$ для $p = 3$, $\deg m = 2$.
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) \supset \mathbb{Q}$: $\deg = 6$
  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][\omega]$ по №7.4a, имея в виду, что $F[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \cong F[\alpha_1] \ldots [\alpha_n]$ — очевидно, и что $\sqrt[3]{2}$ и ω алгебраичны над $\mathbb{Q}$.
  $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = 3$, т. к. $m = x^3 - 2$ — неприводим по критерию Эйзенштейна.
  $\omega \notin \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, т. к. в $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ нет комплексных чисел. Значит, $m = x^2 + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ по критерию Эйзенштейна.
  Итого, пользуясь №7.3(№32 exam_5-6), $3 \cdot 2 = 6$
- $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \supset \mathbb{Q}$: $\deg = 8$
  Аналогично, $4 \cdot 2 = 8$.
- $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, i) \supset \mathbb{Q}$: $\deg = 10$
  Аналогично, $5 \cdot 2 = 10$.

TODO: проставить ссылки на утверждения ◄

№ 35(6.10,8.9a,10.5) Умение описывать расширения степени 2: минимальный многочлен, поле разложения, нормальность, группа Галуа.

► На примере $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$. Степень 2. Мин. многочлен $x^2 - 2$ — степени 2. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ — поле разложения многочлена $x^2 - 2$, т. к. все его корни $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Не существует промежуточных, потому что тогда они имеют степень 1 или 2, т. е. совпадают с $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ или с $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим автоморфизмы $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Их всего 2:

$a + \sqrt{2}b \mapsto a + \sqrt{2}b$

$a + \sqrt{2}b \mapsto a - \sqrt{2}b$

Других нет, т. к. достаточно рассматривать только перестановки корней минимального многочлена:

$\sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \mapsto \mp\sqrt{2}$

Другие не рассматриваются, поскольку 1 и ЛНЗ корни многочлена образуют базис в $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ как линейном пространстве над $\mathbb{Q}$; 1 при этом должен перейти в 1, т. к. $\mathbb{Q}$ сохраняется.

Таких автоморфизмов 2 $\Rightarrow$ степень расширения 2 $\Rightarrow$ это расширение Галуа. Группа из двух элементов — $\mathbb{Z}_2$ — то группа Галуа данного расширения (других (с точностью до изоморфизма) групп из 2-х элементов не бывает). ◀

№ 36(9.1) Для производной выполнены формулы $(f+g)' = f' + g'$ и $(fg)' = f'g + fg'$.

▶ Для $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ и $g(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$:

- $(f+g)' = n(a_n + b_n)x^{n-1} + \dots + (a_2+b_2)x + (a_1+b_1) = (na_n x^{n-1} + a_2 x + a_1) + (nb_n x^{n-1} + \dots + b_2 x + b_1) = f' + g'$
- **Лемма.** $(\alpha f)' = \alpha f'$.

▶ $(\alpha f)' = (\alpha a_n x^n + \dots + \alpha a_1 x + \alpha a_0)' = \alpha a_n n x^{n-1} + \dots + \alpha a_1 = \alpha(a_n n x^{n-1} + \dots + a_1) = \alpha f'$ ◀

Если $(fg)' = f'g + fg'$ верно для $f = f_1$ и $f = f_2$, то для $f = \alpha f_1 + \beta f_2$:

$((\alpha f_1 + \beta f_2)g)' = \alpha(f_1 g)' + \beta(f_2 g)' = \alpha f_1' g + \beta f_2' g + \alpha f_1 g' + \beta f_2 g' = (\alpha f_1 + \beta f_2)' g + (\alpha f_1 + \beta f_2) g'$. Для g симметрично. Значит, достаточно проверить формулу для $f = x^m$ и $g = x^k$.

$(fg)' = (x^{m+k})' = (m+k)x^{m+k-1}$

$f'g + fg' = mx^{m+k-1} + kx^{m+k-1} = (m+k)x^{m+k-1}$

◀

№ 37 (9.2) (для $\operatorname{char} F = 0$) Многочлен f не имеет кратных корней тогда и только тогда, когда $(f, f') = 1$.

▶ Пусть $f(x) = (x-a)^m f_1(x), f_1(x) \not\vdots (x-a), m \geqslant 2$. Тогда $f'(x) = m(x-a)^{m-1} f_1(x) + (x-a)^m f_1'(x)$.

- Если $m > 1$ (кратный корень), то $f'(a) = 0$, и $(f, f') = (x-a)^{m-1} \neq 1$.
- Если $m = 1$ (корень кратности 1), то $f'(x) = (x-a)f_1'(x) + f_1(x) \Rightarrow f'(a) = f_1(a) \neq 0 \Rightarrow$ нельзя вынести никакой общий множитель $\Rightarrow (f, f') = 1$

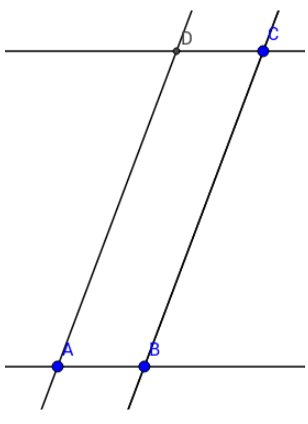
◀

№ 38(9.6) Докажите, что можно построить
а) все точки с рациональными координатами; b) ξ_n, где $n = 3, 4, 6$;

Если мы построили точки z, w, то можно ли построить точки c) $\overline{z}, -z$? d) $z + w$, $z - w$? e) $z \cdot w$?

▶ При помощи гугла учимся строить: перпендикулярную прямую (через заданную точку), параллельную прямую (через заданную точку).

Как обосновать то, что мы можем брать раствор циркуля, равный расстоянию между какими-то двумя точками, и переносить его на другое место? Пусть есть отрезок AB, и мы хотим окружность с радиусом AB и центром в т. C.



Строим параллелограмм как на рисунке. $CD = AB$.

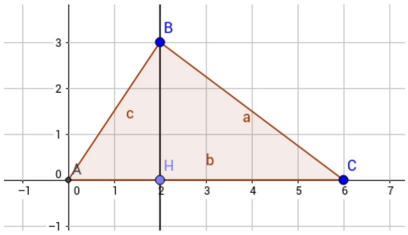
а) Берём отрезок 01 и произвольную точку A, не лежащую на нём. Проводим $0A$. На луче $0A$ начиная от точки 0 откладываем n равных отрезков произвольной длины. Пусть их концы, лежащие на $0A$, есть $A_1, \dots, A_n$ (считая от точки 0). Проводим $A_n 1 =: A_n B_n$ и параллельно ей $A_{n-1}B_{n-1}, \dots, A_1 B_1$. По теореме Фалеса $0B_1 = B_1 B_2 = \dots = B_{n-1}1$. Сделав так для любого n, получим все точки с рациональными координатами на 01, размножить на ось OX тривиально, получить так же поделенную ось OY тривиально, а т. к. любая точка однозначно задаётся проекциями и мы умеем строить перпендикуляры, можем строить любую точку с рациональными координатами.

b) Шестиугольник — откладывая на окружности хорды длиной с радиус, треугольник — по шестиугольнику, четырёхугольник — строя перпендикуляр из центра окружности, в которую он вписан.

c) Отражение относительно осей.

d) Тривиально.

e) В экспоненциальной записи: $z\omega = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2}$. Итого, надо научиться строить сумму углов и отрезок с длиной, равной произведению двух других. Сумма углов: тривиально. Произведение: пользуемся теоремой из геометрии о соотношении высоты прямоугольного треугольника со всякими другими отрезками (та, которая выводится из подобия).



Взяв $BH = h^2, AH = a^2, CH = b^2$, получим $BH^2 = AH \cdot CH \Rightarrow BH = ab$. Как строить a^2 и b^2? Взяв $BH = a^2, AH = 1, CH = x$, получим $a^2 = 1 \cdot x \Rightarrow x = a^2$.

◀

№ 39 (9.12a) Докажите невозможность **удвоения куба**, то есть построение куба объёма 2, имея куб объёма 1 с помощью циркуля и линейки.

▶ Задача сводится к построению циркулем и линейкой числа $\sqrt[3]{2}$.

Минимальный многочлен для $\sqrt[3]{2}$ есть x^3-2, неприводимый по признаку Эйзенштейна в $\mathbb{Q}$ и потому минимальный. Значит, размерность расширения $= 3 \Rightarrow$ не существует башни промежуточных расширений размерности $\leqslant 2 \Rightarrow$ по №19 exam_7-8 её нельзя построить.

◀

№ 40 (10.2) Пусть $\varphi : F \to F$ — *автоморфизм поля* F (изоморфизм поля на себя). a) Пусть $\mathrm{char} F = 0$. Верно ли, что φ сохраняет $\mathbb{Q}$? (то есть при $q \in \mathbb{Q}$ выполнено равенство $\varphi(q) = q$). b) Пусть $\mathrm{char} F = p$. Верно ли, что φ сохраняет $\mathbb{Z}_p$?

▶ a) Автоморфизм переводит единицу в единицу: $\varphi(1) = 1$ по свойствам гомоморфизма. Тогда $\forall p \in \mathbb{Z} \hookrightarrow \varphi(p) = \varphi(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p}) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = p$. Получили, что $\mathbb{Z}$ сохраняется.

Тогда $\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 1 + 1 = 2$. И так далее. Получили, что $\mathbb{Z}$ сохраняется.

Если какой-нибудь элемент $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ перевёлся не в себя, то $\varphi(\underbrace{\frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b}}_{b}) = \underbrace{\varphi(\frac{a}{b}) + \cdots + \varphi(\frac{a}{b})}_{b} \neq a$, т. е. в $\mathbb{Z}$ что-то перешло не в себя. Противоречие.

b) Да, т. к. если $m \in \mathbb{Z}_p$, то $\varphi(m) = \underbrace{\varphi(1) + \cdots + \varphi(1)}_{m} = m$

◀

№ 41 (10.4 (Lectures_all.pdf задача 9.1, утв. 9.1)) Пусть $F \subset K$ — расширение полей. Множество автоморфизмов K, оставляющих F на месте, является группой и называется группой автоморфизмов и обозначается $\mathrm{Aut}_F(K) = \mathrm{Aut}([K : F])$. a) $\mathrm{Aut}_F(K)$ — группа. b) Пусть $H \subset \mathrm{Aut}_F(K)$ — подгруппа. Тогда $K^H = \{x \in K \mid \forall h \in H \hookrightarrow h(x) = x\}$ является полем, причём $K \supset K^H \supset F$.

▶ a) Композиция автоморфизмов, сохраняющих F, — автоморфизм, сохраняющий $F \Rightarrow$ замкнутость.

id — нейтральный элемент.

Ассоциативность следует из свойств композиции.

Обратный существует, т. к. автоморфизм — биекция. Обратный сохраняет F.

b) Пусть $a, b \in K^H, h \in H$. Тогда $h(a+b) = h(a) + h(b) = a + b$, и поэтому $a + b \in K^H$. Аналогично, $ab \in K^H$. С другой стороны, $h \in H \subset G$, и поэтому h сохраняет F. Значит, $F \subset K^H$. $K^H \subset K$ по определению.

◀

№ 42 (10.5) Опишите группы автоморфизмов $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

► По №40 знаем, что автоморфизм сохраняет $\mathbb{Q}$. Значит, нужно смотреть только за тем, куда переходит $\sqrt[3]{2}$.

Куда может перейти $\sqrt[3]{2}$? В сопряжённые с ним: $\sqrt[3]{2}, \underbrace{\sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2}_{\notin\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}$. Значит, он может перейти только в себя.

$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{id\}$, т. к. все другие перестановки корней дают комплексные числа.

Рассмотрим минимальный многочлен для $\sqrt[3]{2}$: $m = x^3 - 2$. Знаем, что любой автоморфизм задаётся перестановкой корней минимального многочлена.

Пусть φ — авторморфизм. Тогда $\varphi(m_\gamma(\gamma)) = 0 \Rightarrow 0 = a_n\varphi(\gamma)^m + \cdots + a_0 \Rightarrow \varphi(\gamma)$ — корень $m_\gamma \Rightarrow$ сопряжён с γ.

Степень расширения равна степени минимального многочлена, т. е. 3. ◄

№ 43 (11.1 (Lectures_all.pdf теор. 11.1)) a) Конечное поле F характеристики p состоит из p^n элементов.

b) Поле F является полем разложения многочлена $x^{p^n} - x$.

c) Существует единственное (с точностью до изоморфизма) поле из p^n элементов.

► a) Любое конечное поле K характеристики p является расширением поля $\mathbb{Z}_p$ (по №7-8.21; можно объяснить на пальцах так: в K есть 0, 1, значит, есть $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m}$ для всех $m < p$, и в эти элементы можно построить вложение из $\mathbb{Z}_p$). Т. к. поле конечно, расширение конечно. Пусть оно имеет степень n. Тогда K является n-мерным линейным пространством над $\mathbb{Z}_p$, и поэтому состоит из p^n элементов.

b) Порядок мультипликативной группы поля K есть $p^n - 1 \Rightarrow$ по теореме Лагранжа $\forall a \in K \hookrightarrow a^{p^n-1} = 1 \Rightarrow a^{p^n} = a$. Значит, любой элемент $a \in K$ является корнем многочлена $x^{p^n} - x = 0$. Общее число этих корней не превышает p^n, значит, корни этого многочлена — в точности элементы K. Получается, над K многочлен раскладывается на линейные сомножители. Т. к. K конечно, во всех подполях K содержится меньшее число элементов $\Rightarrow$ в них многочлен не раскладывается. Значит, по определению K — поле разложения требуемого многочлена.

c) **Лемма.** Поле разложения многочлена f единственно с точностью до изоморфизма.

► Пусть не так. Тогда возьмём два различных поля разложения L и K. Их пересечение тоже будет полем разложения, ибо содержит все корни (если какой-то не содержится в пересечении, то он содержится только в одном поле разложения (БОО в K), тогда он не содержится в L — противоречие с тем, что L — поле разложения), но будет меньше. Противоречие. ◄

Т. к. по пункту b поле F есть поле разложения, оно единственно с точностью до изоморфизма.

◄

№ 44 (11.2) Найдите все неприводимые многочлены (со стар. коэффициент 1) степени 2, 3 над полем a) $\mathbb{F}_2$, b) $\mathbb{F}_3$.

► Выписываем все возможные многочлены и вычёркиваем те, которые разложимы. Если мы вычеркнули *все* разложимые (а мы умеем это делать, см. пункт a), то остались только неразложимые.

Количество M_k неприводимых многочленов степени k над $\mathbb{Z}_p$ можно посчитать по формуле $M_k = \frac{1}{k}\sum\limits_{d|k} p^d\mu(\frac{k}{d})$ (теор. 11.3 из Lecture_all), где функция Мёбиуса

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, n \text{ свободно от квадратов и разложение } n \text{ на простые состоит из чётного числа сомножителей,} \\ -1, n \text{ свободно от квадратов и разложение } n \text{ на простые состоит из нечётного числа сомножителей,} \\ 0, n \text{ не свободно от квадратов,} \end{cases}$$

$\mu(1) = 1$.

Так можно проверить результат.

a) $\mathbb{F}_2$: Неразложимые степени 1: x и $x + 1$. Разложимые степени 2 — какая-то комбинация многочленов степени 1. Оставшиеся — неразложимы. Теперь смотрим всё возможные многочлены степени 3, которые можно получить, перемножая многочлены степени 1 и многочлены степени 2.

$\deg = 2$, $M_2 = 1$: $\cancel{x^2}$, $\underbrace{\cancel{x^2+1}}_{(x+1)(x+1)}$, $\cancel{x^2+x}$, $x^2 + x + 1$

$\deg = 3$, $M_3 = 2$: $\cancel{x^3}$, $\underbrace{\cancel{x^3+1}}_{(x^2+1)(x^2+x+1)}$, $\cancel{x^3+x}$, $x^3 + x + 1$, $\cancel{x^3+x^2}$, $x^3 + x^2 + 1$, $\cancel{x^3+x^2+x}$, $\underbrace{\cancel{x^3+x^2+x+1}}_{(x^2+1)(x+1)}$

b) $\mathbb{F}_3$: Рассуждения аналогичны.

$\deg = 2,\ M_2 = 3$: $\cancel{x^2}, x^2+1, \underbrace{\cancel{x^2+2}}_{(2x+1)(2x+2)}, \cancel{x^2+x}, \underbrace{\cancel{x^2+x+1}}_{(x+2)^2}, x^2+x+2, \cancel{x^2+2x}, \underbrace{\cancel{x^2+2x+1}}_{(2x+2)^2}, x^2+2x+2$

$\deg = 3,\ M_3 = 8$:

$$\underline{x^3}, \underbrace{\cancel{x^3+1}}_{(x^2+2x+1)(x+1)}, \underbrace{\cancel{x^3+2}}_{(x^2+x+1)(x+2)}, \cancel{x^3+x}, \underbrace{\cancel{x^3+x+1}}_{(x^2+x+2)(x+2)}, \underbrace{\cancel{x^3+x+2}}_{(x^2+2x+2)(x+1)}, \cancel{x^3+2x}, x^3+2x+1, x^3+2x+2, \cancel{x^3+x^2},$$
$$\underbrace{\cancel{x^3+x^2+1}}_{(x^2+2x+2)(x+2)}, x^3+x^2+2, \cancel{x^3+x^2+x}, \underbrace{\cancel{x^3+x^2+x+1}}_{(x^2+1)(x+1)}, x^3+x^2+x+2, \cancel{x^3+x^2+2x}, x^3+x^2+2x+1,$$
$$\underbrace{\cancel{x^3+x^2+2x+2}}_{(x^2+2)(x+1)}, \cancel{x^3+2x^2}, x^3+2x^2+1, \underbrace{\cancel{x^3+2x^2+2}}_{(x^2+x+2)(x+1)}, \cancel{x^3+2x^2+x}, x^3+2x^2+x+1,$$
$$\underbrace{\cancel{x^3+2x^2+x+2}}_{(x^2+1)(x+2)}, \cancel{x^3+2x^2+2x}, \underbrace{\cancel{x^3+2x^2+2x+1}}_{(x^2+2)(x+2)}, x^3+2x^2+2x+2$$

◀

№ 45 (11.3) Постройте поле из a) 4; b) 8; c) 9 элементов.

► Для p^n: $F_{p^n} = {}^{F_p[x]}/_{(f(x))}$, где $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n (пользуемся №33: $[{}^{F[x]}/_{(f(x))} : F] = n$). Итого, надо просто найти неприводимый многочлен над F_p степени n. Как искать неприводимые многочлены рассказано в №44.

Чтобы выписать элементы кольца явно, берём все возможные многочлены нужной степени над нужным полем и делим с остатком на многочлен, по которому факторизуем (факторизация в данном случае и есть деление с остатком). То есть, нужно выписать все возможные остатки при делении на наш многочлен.

Далее пишем "таблицу умножения" по модулю многочлена. Она может быть большой, посему пишем частично, чтобы показать, что можем.

a) $4 = 2^2$ $\mathbb{F}_4 = {}^{F_2[x]}/_{(x^2+x+1)} = \{0; 1; x; 1+x\}$

$\times$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x^2 = x+1$	$x^2+x = 1$
$x+1$	0	$x+1$	$x^2+x=1$	$x^2+1 = x$

b) $8 = 2^3$ $\mathbb{F}_8 = {}^{F_2[x]}/_{(x^3+x^2+1)} = \{0; 1; x; x+1; x^2; x^2+1; x^2+x; x^2+x+1\}$
c) $9 = 3^2$ $\mathbb{F}_9 = {}^{F_3[x]}/_{(x^2+1)} = \{0; 1; 2; x; x+1; x+2; 2x; 2x+1; 2x+2\}$

◀