

№ 1 (1.4 [Каргальцев]) Для любого числа $u \in \mathbb{C}$ определим множество $\mathbb{Z}[u] = \cup_{n=0}^{\infty} \{a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$.

► а) Докажите, что $\mathbb{Z}[u]$ является областью целостности.

То, что $\mathbb{Z}[u]$ кольцо проверяется непосредственно. Поскольку $\mathbb{Z}[u] \subset \mathbb{C}$ и \mathbb{C} — область целостности (потому что \mathbb{C} — поле), то и $\mathbb{Z}[u]$ область целостности.

б) При каких $u \in \mathbb{C}$ данное $\mathbb{Z}[u]$ “конечномерно над \mathbb{Z} ”, то есть найдётся такое N , что $\mathbb{Z}[u] = \cup_{n=0}^{\infty} \{a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$?

Покажем, что $\mathbb{Z}[u]$ “конечномерно над \mathbb{Z} ”, $\Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{Z}[x] : f(u) = 0, f \neq 0$ и старший коэффициент $f(x)$ равен 1 (*).

\Rightarrow

Поскольку $u^{N+1} \in \mathbb{Z}[u] \Rightarrow \exists a_0, \dots, a_N \in \mathbb{Z} : u^{N+1} = \sum_0^N a_k u^k \Rightarrow u$ — корень $f(x) = x^{N+1} - \sum_0^N a_k x^k$

\Leftarrow

Пусть u — корень многочлена $f(x) = x^N + \sum_0^{N-1} a_k x^k$, удовл. условию (*). Тогда u^N выражается через меньшие степени. ($u^N = -\sum_0^{N-1} a_k u^k$)

Индукцией по $k \geq N$ легко показать, что u^k выражается через $1, u, \dots, u^{N-1}$.

$(u^{k+1} = u \cdot u^k \xrightarrow{\text{предположение индукции}} u \cdot (\sum_0^{N-1} b_k u^k) = (\sum_1^{N-1} b_{k-1} u^k) + b_{N-1} u^N \xrightarrow{\text{база индукции}} (\sum_1^{N-1} b_{k-1} u^k) + b_{N-1} \sum_0^{N-1} -a_k u^k)$

◀

№ 2. (1.2) Для комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ введём норму $N(z) = |z|^2$.

а) $N(zw) = N(z)N(w)$.

Для каждого $z \in D$:

б) Верно ли, что $N(z)$ — натуральное число?

в) Верно ли, что $N(z) = 1 \Leftrightarrow z$ — обратим?

► а) Просто проверим: $N(zw) = N(a_z + b_z i)(a_w + b_w i) = N(a_z a_w - b_z b_w + (a_z b_w + a_w b_z)i) = (a_z a_w - b_z b_w)^2 + (a_z b_w + b_z a_w)^2 =$ раскрыли скобки $= (a_z^2 + b_z^2)(a_w^2 + b_w^2) = N(z)N(w)$

б) Заметим, что $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

Значит, $|a + bi| = a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$. Аналогично:

$\mathbb{Z}[2i] = \{a + 2bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |a + 2bi| = a^2 + 4b^2 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}i] = \{a + \sqrt{2}bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |a + \sqrt{2}bi| = a^2 + 2b^2 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{3}i] = \{a + \sqrt{3}bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |a + \sqrt{3}bi| = a^2 + 3b^2 \in \mathbb{N}$

в) \Rightarrow

$N(z) = a^2 + b^2 = 1$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a-bi}{1} = a-bi = \bar{z}$, а z и \bar{z} одновременно лежат в D , значит $\exists z^{-1} = \bar{z}$.

\Leftarrow

$zz^{-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} N(zz^{-1}) = N(z)N(z^{-1}) = 1 \\ N(z) = a^2 + b^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow N(z) = 1$

◀

№ 3 Пример нефакториального кольца вида $\mathbb{Z}[u]$.

► Пример: $\mathbb{Z}[2i]$ не является факториальным кольцом, потому что $4 = 2 \cdot 2 = (2i)(-2i)$, но при этом $2 \not\sim 2i$ — противоречие с единственностью разложения в факториальном кольце.

Еще пример: $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$ (аналогичное рассуждение $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$).

◀

№ 4 (2.7 [Каргальцев]) | Простой элемент области целостности является неразложимым.

► Пусть p — простой и $p = xy \Rightarrow x|p \wedge y|p$. Из определения простоты $p|x \vee p|y$. Но тогда или $x|p \wedge p|x$, или $y|p \wedge p|y$. Тогда $p \sim y \vee p \sim x \Rightarrow y \in K^* \vee x \in K^*$, то есть p — неразложимый. ◀

№ 5 (2.8) В факториальном кольце любой неразложимый элемент является простым.

► Пусть $x = ab$ — неразложимый. $x = ab \Rightarrow x|ab$.

x неразложимый, значит б.о.о. $a \in K^*$. Тогда в силу единственности разложения $x = ab = ap_1 \dots p_k \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x|b$. ◀

№ 6 (часть 2.9 [Каргальцев]) | K — евклидово кольцо. Верно ли, что если для $a, b \neq 0$ выполнено равенство $N(ab) = N(a)$, то b обратим?

► Поделим a с остатком на ab :

$$a = abq + r : r = 0 \vee N(r) < N(ab)$$

$$r = a(1 - bq)$$

Если $r = 0$, то $bq = 1$ и b обратим. Иначе $N(ab) > N(r) = N(a(1 - bq)) \geq N(a) = N(ab)$. Противоречие. ◀

№ 7 (2.10) Геометрический способ доказательства того, что $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\omega]$ — евклидово кольцо.

► ВСТАВИТЬ КАРТИНКУ Пусть $a, b \in \mathbb{Z}[i]$. Поделим a на b с остатком:

$$a = pb + q.$$

Надо доказать, что если $q \neq 0$, то $N(q) < N(b)$. Рассмотрим точку $\frac{a}{b}$, пусть ближайший к ней узел в решетке p , тогда $\frac{a}{b} = p + \frac{q}{b}$. Но $\frac{q}{b}$ по модулю меньше половины диагонали единичного квадрата $\left| \frac{q}{b} \right| \leq \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq 1$, т.е. $|q|^2 < |b|^2 \Rightarrow N(q) < N(b)$, если $\frac{q}{b}$ не совпадает с центром квадрата.

(TODO иначе)

$\mathbb{Z}[\omega]$ аналогично. ◀

№ 9 (3.1) а) Если p — простое целое число и существует такое $z \in D$, что $N(z) = p$, то z — неразложимый элемент.

б) Если p — простое целое число и не существует такого $z \in D$, что $N(z) = p$, то p — неразложимый элемент.

в) Если D — факториальное кольцо, то для любого неразложимого элемента $z \in D$ либо $N(z) = p$, либо $z \sim p$ для некоторого целого простого числа p .

► а) Имеем: $z \in D$, $N(z) = p$. Пусть $z = bc$, тогда $N(z) = N(b)N(c) = p \Rightarrow N(b) = 1$ или $N(c) = 1$, т.е. $b \in D^*$ или $c \in D^* \Rightarrow z$ — неразложим (исп. задачу 2в)

б) Пусть $p = bc$. Тогда $N(p) = N(b)N(c) = p^2$. Два случая:

- $N(b) = N(c) = p$ — невозможно по условию
- $N(a) = 1$, $N(b) = p^2$ или $N(a) = p^2$, $N(b) = 1 \Rightarrow b \in D^*$ или $c \in D^*$ (исп. задачу 2в).

в) $N(z) = z\bar{z} = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ (в силу факториальности кольца). z неразложим $\Rightarrow \exists i: p_i | z \Rightarrow zk = p_i$

$N(p_i) = p_i^2 = N(z)N(k) \Rightarrow$ либо $N(z) = p_i \Rightarrow z$ — неразложим, либо $N(z) = p_i^2 \Rightarrow z \sim p_i$. ◀

№ 10 (2.7 [Каргальцев]) | Если $z \in D$, $z|x$, и $N(z) = N(x)$, то $z \sim x$.

► Пусть $x = yz$. Тогда $N(yz) = N(z) \Rightarrow y$ обратим (по №6) и, значит, $x \sim z$. ◀

№ 11 (3.3 [Каргальцев]) | (Простые гауссовы числа) Пусть p — простое целое число.

► а) Если $p = 4k + 3$, то p — неразложим в $\mathbb{Z}[i]$.

Если p разложим, тогда $p = z\bar{z} = Re^2z + Im^2z$. Но число, дающее остаток 3 при делении на 4 не быть представлено в виде суммы двух квадратов (квадраты дают остаток 1 при делении на 4).

б) Если $p = 4k + 1$, то p — разложим в $\mathbb{Z}[i]$.

Если $p = 4k + 1$, то -1 — вычет по модулю p , т.е. $\exists x \in \mathbb{Z} : p|x^2 + 1 \Rightarrow p|(x+i)(x-i)$. Если p — неразложим, тогда p — прост и либо $p|(x+i)$, либо $p|(x-i)$.

- $p|(x+i) \Rightarrow x+i = p(c+di) \Rightarrow 1 = pd \Rightarrow p|1$ — плохо.

- $p|(x-i) \Rightarrow x-i = p(c+di) \Rightarrow -1 = pd \Rightarrow p|1$ — плохо.

Значит, p разложим.

в) Если $p = 4k+1$, то $p = z\bar{z}$, где z — неразложим в $\mathbb{Z}[i]$.

Следует из предыдущего пункта и пункта г) предыдущей задачи.

г) Неразложимые элементы $\mathbb{Z}[i]$, не описанные в предыдущих пунктах — $\pm 1 \pm i$.

Неразложимые элементы, не описанные в предыдущих задачах могут иметь норму или 2, или 4. Норму 4 имеет только 2 и ассоциированные с ней, но $2 = (1+i)(1-i)$.

С другой стороны, $N(\pm 1 \pm i) = 2$, то есть силу пункта в) предыдущей задачи $\pm 1 \pm i$ неразложимы. ◀

№ 12 (3.10) Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.

► Пусть K — евклидово кольцо, $a \in K$, причем

$$N(a) = \min_{x \in K \setminus \{0\}} N(x)$$

Предположим, что $K \neq (a) \Rightarrow \exists b \in K \setminus (a) \Rightarrow b = aq + r$, где либо $r = 0$, либо $N(r) < N(a)$.

- $r = 0 \Rightarrow b = aq \Rightarrow b \in (a)$ — противоречие
- $N(r) < N(a) \Rightarrow r = b - aq \in I$ — противоречие с минимальностью нормы a .

№ 13 (3.13) Пусть $D = \mathbb{Z}[i]$ или $\mathbb{Z}[\omega]$.

а) Верно ли, что из $a|b$ следует, что $N(a)|N(b)$?

б) Верно ли, что из $\text{НОД}(N(a), N(b)) = 1$, следует $\text{НОД}(a, b) = 1$?

в) Пусть $\text{НОД}(N(a), N(b)) = p$ — простое целое число, причём $p \nmid a$, $p \nmid b$. Тогда p — разложим, и если $p = z\bar{z}$, то либо z и \bar{z} порождает идеал (a, b) , либо z делит одно из этих чисел, а \bar{z} — другое.

► а) Верно. $a|b \Rightarrow b = ak \Rightarrow N(b) = N(a)N(k)$ (по свойству нормы в D) $\Rightarrow N(a) | N(b)$

б) $\text{НОД}(N(a), N(b)) = p$

Допустим, что $\text{НОД}(a, b) = k \notin D^*$.

Тогда $a = kx, b = ky$, и

$$\left. \begin{aligned} N(a) &= N(kx) = N(k)N(x) \\ N(b) &= N(ky) = N(k)N(y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{НОД}(N(a), N(b)) \neq 1 \quad (1)$$

— противоречие. Значит, $\text{НОД}(a, b) = 1$.

в) $\text{НОД}(N(a), N(b)) = p$

Покажем, что p — разложим. $N(a) = a\bar{a} = pt, p \nmid a$, p — простое число \Rightarrow допустим, что p неразложима: $p | \bar{a}$ (по свойству факториального кольца). Тогда $\bar{a} = x - iy \dot{p} \Leftrightarrow x \dot{p}, y \dot{p} \Rightarrow a \dot{p}$ — противоречие $\Rightarrow p$ — разложим.

$$\left\{ \begin{aligned} a\bar{a} &= z\bar{z}k \\ b\bar{b} &= z\bar{z}l \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a \dot{z} \text{ и } b \dot{\bar{z}} \\ a \dot{\bar{z}} \text{ и } b \dot{z} \\ a \dot{z} \text{ и } b \dot{z} \end{cases} \quad (2)$$

В последнем случае идеал $(t) = (a, b) \subseteq (z, \bar{z})$ — очевидно. Докажем в обратную сторону, что $(z, \bar{z}) \subseteq (a, b)$

$$z\bar{z} = a\bar{a}\xi + b\bar{b}\eta \dot{t}$$

№ 14 (3.14) Умение находить порождающий элемент идеала в кольце $\mathbb{Z}[i]$. ◀

- Возможный вариант решения: найдем нормы двух чисел, потом найдем n — НОД этих норм. После этого переберем все числа, которые имеют норму n и проверим их на то, что они являются порождающим элементом. При этом искать можно только в первой четверти комплексной плоскости (т.к. найдя одно число, получаем сразу 4 поворота на $\pi/2$). Если не один из них не подойдет, то сделаем то же самое со всеми делителями n в порядке уменьшения модуля, пока не дойдем до 1.

Рассмотрим пример:

3.14. Найти порождающий элемент $(11 + 7i, 18 - i)$ в $\mathbb{Z}[i]$. *Решение.* Заметим, что $\mathbb{Z}[i]$ — евклидово кольцо, значит, оно является КГИ \Rightarrow все идеалы главные \Rightarrow идеал $(11 + 7i, 18 - i)$ порождается одним элементом (t) . Найдем этот элемент.

$$N(11 + 7i) = 170$$

$$N(18 - i) = 325$$

$$\text{НОД}(170, 325) = 5.$$

Перебором выясняем, что в первой четверти числу с нормой 5 соответствуют два числа: $1 + 2i$ и $2 + i$.

Заметим, что $1 + 2i$ не может быть порождающим элементом:

$$\frac{18-i}{1+2i} = \frac{(18-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dots = \frac{16}{5} - \frac{37}{5}i \notin \mathbb{Z}[i]$$

С $2 + i$ тоже плохо:

$$\frac{11+7i}{2+i} = \frac{29}{5} + \frac{3}{5}i \notin \mathbb{Z}[i].$$

Следовательно, среди чисел с нормой 5 нет $\text{НОД}(a, b) \Rightarrow$ его норма $1 \Rightarrow (11 + 7i, 18 - i) = (1)$. ◀

№ ?? [Каргальцев]

- а) Если z — неразложимый элемент D , то существует такое простое целое число p , что $N(z) = p$ или $N(z) = p^2$. $N(z) = z\bar{z}$. Разложим $N(z)$ в произведение простых как натуральное число:

$$z\bar{z} = N(z) = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

Так как z неразложим, а D — евклидово, то z — прост, значит $\exists k : z|p_k$.

$p_k = zu \Rightarrow \bar{p}_k = \overline{zu} = \bar{z}\bar{u} \Rightarrow \bar{z}|p_k \Rightarrow N(z)|p_k^2 \Rightarrow N(z) = 1, p_k$ или p_k^2 . Но так как если $N(z) = 1$, то z — обратим (а, следовательно, неразложим), то $(z) = p_k \vee N(z) = p_k^2$.

б) Если z — неразложимый элемент D и $N(z) = p^2$, то $z \sim p$.

Пусть $\bar{z} = ab \Rightarrow z = \bar{a}\bar{b} \Rightarrow \bar{z}$ — неразложим.

$z\bar{z} = N(z) = p \cdot p$. В силу единственности разложения на неразложимые, $z \sim p$.

в) Если $N(z) = p$, то z — неразложимый элемент D .

в $Da|b \Rightarrow N(a)|N(b)$.

Пусть $a|z \Rightarrow N(a)|N(z)$. В силу простоты $N(z)$ либо $N(a) = 1$ и, следовательно, a — обратимый, либо $N(a) = N(z)$ и тогда $a \sim z$. То есть z неразложим.

г) Пусть p — простое целое число. Тогда есть два варианта: либо p неразложимо в D , либо $p = z\bar{z}$, где z — неразложимо в D . Таким образом описываются все неразложимые элементы D .

Пусть p разложимо в D . Тогда найдется такой неразложимый $z : z|p$. Поскольку z не ассоциирован с p , $N(z) \neq N(p) \Rightarrow N(z) = p$. Тогда z — неразложимый и $z\bar{z} = N(z) = p$.

Любой неразложимый элемент D — либо простое целое число, либо его норма — простое целое число. ◀

№ 15 Пусть $I \subset K$ является подмножеством, для которого выполнено следующее условие: для любых $a \in K, x \in I, y \in I$ верно, что $x + y \in I, ax \in I$. Верно ли что это условие равносильно тому, что I — идеал?

► \Rightarrow :

В предположении, что I непусто:

1. $(I, +) \subset (K, +)$ — подгруппа по сложению.

- Замкнутость по сложению — дана по условию.
- Нейтральный по сложению лежит в I : действительно, возьмем произвольный $x \in I$ и $a = 0 \in K$: тогда $0 = ax \in I$.

- Обратный по сложению лежит в I : т.к. $-1 \in K$, то $\forall x \in I : -x = (-1) \cdot x \in I$.

2. $\forall a \in K, x \in I : ax \in I$ — дано по условию.

\Leftarrow :

1. $\forall x \in I, y \in I : x + y \in I$ — выполнено, т.к. идеал — подгруппа по сложению.
2. $\forall a \in K, x \in I : ax \in I$ — выполнено по определению идеала.

№ 16 (3.17) а) Идеал (x, y) кольца $\mathbb{Q}[x, y]$ конечно порождён, но не является главным.

б) Приведите пример области целостности K и идеала I , который не конечно порождён.

► а) (x, y) конечно порождён по определению.

Предположим, что (x, y) — главный. Тогда $\exists f(x, y) : (x, y) = (f(x, y))$.

Т.к. $x \in (f(x, y)), y \in (f(x, y))$, то $\deg f \leq 1$.

Если $\deg f(x, y) = 0$, то $f(x, y) \in \mathbb{Q}$: при $f(x, y) = 0$ $(f(x, y)) = 0$, при $f(x, y) \neq 0$ $(f(x, y)) = \mathbb{Q}[x, y]$. Оба случая нам не подходят.

Если $\deg f(x, y) = 1$, то $\exists a, b \in \mathbb{Q}^* : f(x, y) = ax = by$, откуда $x = a^{-1}by$, что тоже неверно.

б) $K = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$

$I = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$

Предположим, I конечно-порождён, т.е. $\exists f_1, \dots, f_t \in K : I = (f_1, \dots, f_t)$. f_i можно представить в виде $x_1 g_i^1 + \dots + x_{N_i} g_i^{N_i}$ для некоторого $N_i \in \mathbb{N}$, т.к. f_i лежит в идеале (x_1, \dots, x_n, \dots) . Положим $N = \max\{N_1, \dots, N_t\}$, тогда $f_i = x_1 g_i^1 + \dots + x_N g_i^N$.

Т.к. $x_{N+1} \in I = (f_1, \dots, f_t)$, то $\exists a_1, \dots, a_t : x_{N+1} = a_1 f_1 + \dots + a_t f_t$. Приравнявая $x_1 = \dots = x_N = 0$ — на них все f_1, \dots, f_t равны 0 — и $x_{N+1} = 1$, приходим к противоречию.

№ 17 (4.3) Умение находить факторкольца.

№ 18 (4.8) Пусть $J \subset I \subset K$ — цепочка вложенных идеалов в кольце K . Тогда кольцо $(K/J)/(I/J)$ изоморфно K/I .

► Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : K/J \rightarrow K/I, x + J \mapsto x + I$.

Гомоморфизм корректен, т.к. независимо от выбора представителя x получим одно и то же: $x + J = y + J \Rightarrow x - y \in J \Rightarrow x - y \in I \Rightarrow x + I = y + I$.

φ — сюръекция, т.к. $\forall a + I \in K/I : \exists x = a : \varphi(a) = a + I$.

Значит, по теореме о гомоморфизме: $(K/J)/\ker \varphi \cong K/I$.

Т.к. $\ker \varphi = \{x + J : x + I = I\} = \{x + J : x \in I\} = I/J$, то $(K/J)/(I/J) \cong K/I$, ч.т.д..

№ 19 (4.9) В кольце главных идеалов любой простой идеал максимален.

► Пусть (p) — простой идеал в КГИ K . Пусть I — идеал в K : $(p) \subset I \subset K$.

I — порождён одним элементом $\Rightarrow I = (x) \Rightarrow p \mid x$ по задаче 15а) на 3-4.

Т.к. (p) — простой идеал, то p — простой элемент (по задаче 20 на 3-4) $\Rightarrow x \sim p$ или $x \in K^*$.

Если $x \sim p \Rightarrow I = (x) = (p)$. Если $x \in K^* \Rightarrow I = (x) = K$.

Таким образом, $\nexists I : (p) \subsetneq I \subsetneq K \Rightarrow (p)$ — максимален.

№ 25 [Каргальцев] Докажите, что в кольце главных идеалов любая возрастающая цепочка идеалов

$$(a_1) \subset (a_2) \subset \dots \subset (a_n) \subset \dots$$

стабилизируется, то есть найдется такое k , то $(a_k) = (a_{k+1}) = \dots$

► Поскольку $(a_i) \subset (a_{i+1}) \Rightarrow a_{i+1} | a_i$.

Возьмем $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k)$. покажем, что I — идеал. Пусть $a \in I, b \in I \Rightarrow \exists k_1, k_2 : a \in (a_{k_1}), b \in (a_{k_2})$. Тогда положим $k = \max(k_1, k_2)$. $a, b \in (a_k) \Rightarrow (a + b) \in (a_k)$ ((a_k) — идеал) $\Rightarrow (a + b) \in I$. Аналогично $\forall x \in K, x a \in (a_k) \Rightarrow x a \in I$.

Поскольку K — КГИ, то существует $x : I = (x)$. $x \in I \Rightarrow \exists k : x \in (a_k)$. Но $a_k \in (x)$. Тогда $x | a_k \wedge a_k | x \Rightarrow x \sim a_k$. Но в силу вложенности это верно и для всех $j > k$, то есть $\forall j \geq k, a_j \sim a_k \Rightarrow (a_j) = (a_k)$. То есть цепочка действительно стабилизируется. ◀