Il momento angolare in Meccanica Quantistica

30 ottobre 2019

Introduzione

Sappiamo bene che l'omogeneità dello spazio euclideo in una teoria non relativistica è associata a un'operatore unitario della forma

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{x}}{\hbar}\right)$$

Nell'ambito delle teorie classiche è definito il prodotto interno tra vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$$

ed è ben noto che tale prodotto è invariante sotto l'endomorfismo $\mathbf{a} \mapsto R\mathbf{a}$, dove $R \in \mathrm{O}(3)$. Limitiamoci ora al caso $R \in \mathrm{SO}(3) \subseteq \mathrm{O}(3)$ e usiamo la notazione $a'_i = R_{ij} a_j$.[1]

1 Rotazioni

1.1 Trasformazione degli autostati dell'impulso

Consideriamo gli autostati di $\hat{\mathbf{P}}$, definiti da

$$\hat{\mathbf{P}} \left|\mathbf{p}\right\rangle = \mathbf{p} \left|\mathbf{p}\right\rangle$$

Alla rotazione associata a R facciamo corrisponde la mappa sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$

$$\left|\mathbf{p}\right\rangle \to \left|R\mathbf{p}\right\rangle$$

L'interpretazione è chiara: ruotando nello spazio fisico, un autostato dell'impulso rimane autostato dell'impulso, ma il suo autovalore è il ruotato dell'autovalore originario. Si noti ora che

$$\begin{aligned}\langle R\mathbf{q}|R\mathbf{p}\rangle &= (2\pi\hbar)^3 \delta^3(R\mathbf{q} - R\mathbf{q}) = \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{|\det R|} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \\ &= \langle \mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $\det R = 1$. La trasformazione introdotta lascia quindi invariati i prodotti scalari dello spazio di Hilbert, dunque per il teorema di Wigner esiste un operatore unitario $\hat{U}(R)$ tale che

$$\hat{U}(R) \left|\mathbf{p}\right\rangle = \left|R\mathbf{p}\right\rangle$$

[1] In una teoria non relativisticamente invariante non è importante distinguere tra indici covarianti e indici controvarianti.

Sia ora $\rho\colon \mathrm{SO}(3) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ la mappa

$$R \mapsto \hat{U}(R)$$

e dimostriamo che è una rappresentazione di SO(3). Per linearità, è sufficiente considerare un autostato dell'impulso, dato che questi formano una base di $\mathcal{H}$. Si ha allora

$$\begin{aligned}\hat{U}(R_1R_2)\,|\mathbf{p}\rangle &= |R_1R_2\mathbf{p}\rangle = \\ &= \hat{U}(R_1)\,|R_2\mathbf{p}\rangle = \\ &= \hat{U}(R_1)\hat{U}(R_2)\,|\mathbf{p}\rangle\end{aligned}$$

e quindi, come voluto, ρ è una rappresentazione. Questo significa chiaramente che $\hat{U}^{-1}(R) = \hat{U}(R^{-1})$, che unito all'unitarietà porta a

$$\hat{U}^\dagger(R) = \hat{U}(R)$$

In particolare è

$$\langle\mathbf{p}|\,\hat{U}(R) = \left\langle R^{-1}\mathbf{p}\right|$$

1.1.1 Trasformazione delle funzioni d'onda

L'azione di $\hat{U}(R)$ sugli autostati dell'impulso è chiaramente identica all'azione sugli autostati della posizione. Questo significa che la funzione d'onda $\langle\mathbf{x}|\psi\rangle$ associata allo stato $|\psi\rangle$ trasforma come

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) \mapsto \psi_R(\mathbf{x}) &= \\ &= \langle\mathbf{x}|\hat{U}(R)|\psi\rangle = \\ &= \langle R^{-1}\mathbf{x}|\psi\rangle = \\ &= \psi(R^{-1}\mathbf{x})\end{aligned}$$

Nel seguito, indichiamo con $\mathcal{U}(R)$ l'operatore su $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ che trasforma le funzioni d'onda, i.e.

$$[\mathcal{U}(R)\psi](\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x})$$

1.2 Rotazioni infinitesime

Associamo a una rotazione antioraria di un angolo θ intorno all'asse $\mathbf{n}$ il vettore $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{n}$. Si sa che se θ è un angolo generico, allora un vettore $\mathbf{v}$ trasforma come

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\cos\theta + (\mathbf{n}\times\mathbf{v})\sin\theta$$

Per una rotazione infinitesima è $|\theta| \ll 1$, dunque al primo ordine si trova

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{v} + o(\theta)$$

Si trova così

$$R^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{x} + o(\theta)$$

e dunque sulle funzioni d'onda

$$\begin{aligned}[\mathcal{U}(R)\psi](\mathbf{x}) &= \psi(R^{-1}\mathbf{x}) = \\ &= \psi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{x} + o(\theta)) = \\ &= \psi(\mathbf{x}) - (\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{x})\cdot\nabla\psi(\mathbf{x}) + o(\theta) = \\ &= [(\mathbb{1} - \boldsymbol{\theta}\cdot(\mathbf{x}\times\nabla))\psi](\mathbf{x}) + o(\theta)\end{aligned}$$

D'altro canto, per il teorema di Stone è

$$\mathcal{U}(R) = \exp(-i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{L}})$$

dove $\hat{\mathbf{L}}$ è il generatore infinitesimo delle rotazioni. Per confronto, è

$$\hbar\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar\mathbf{x} \times \nabla = \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{P}}$$

dunque $\hbar\hat{\mathbf{L}}$ coincide con la definizione classica di momento angolare. In meccanica quantistica, tale operatore è noto come momento angolare orbitale, per distinguerlo dal momento angolare intrinseco o di spin. Si noti che la costante di Planck che compare nella definizione serve unicamente a rendere $\hat{\mathbf{L}}$ adimensionale. In componenti, è

$$\hat{L}_i = -i\varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\partial_k = \hbar^{-1}\varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{P}_k$$

Da cui si ricavano le regole commutazione

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= \hbar^{-2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}[\hat{x}_k\hat{P}_l, \hat{x}_m\hat{P}_n] = \\
&= \hbar^{-2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\left(\hat{x}_k[\hat{P}_l, \hat{x}_m]\hat{P}_n + \hat{x}_m[\hat{x}_k, \hat{P}_n]\hat{P}_l\right) = \\
&= i\hbar^{-1}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}(-\hat{x}_k\hat{P}_n\delta_{lm} + \hat{x}_m\hat{P}_l\delta_{kn}) = \\
&= i\hbar^{-1}(-\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jln}\hat{x}_k\hat{P}_n + \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmk}\hat{x}_m\hat{P}_l) = \\
&= i\hbar^{-1}(-(\delta_{in}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kn})\hat{x}_k\hat{P}_n + (\delta_{lj}\delta_{im} - \delta_{ij}\delta_{lm})\hat{x}_m\hat{P}_l) = \\
&= i\hbar^{-1}(\hat{x}_i\hat{P}_j - \hat{x}_j\hat{P}_i) = \\
&= i\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k
\end{aligned} \tag{1}$$

Si noti che, posto $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_i\hat{L}_i$, si ha

$$[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0$$

dato che

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j\hat{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}(\hat{L}_j\hat{L}_k + \hat{L}_k\hat{L}_j) = 0$$

1.3 Trasformazione degli operatori

L'operatore $\hat{U}(R)$ su $\mathcal{H}$ induce la mappa su $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ che manda

$$\hat{A} \mapsto \hat{A}' = \hat{U}^\dagger(R)\hat{A}\hat{U}(R)$$

Per rotazioni infinitesime, è $\hat{U}(R) = \mathbb{1} - i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{L}} + o(\theta)$, quindi è

$$\begin{aligned}
\hat{A}' &= (\mathbb{1} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{L}} + o(\theta))\hat{A}(\mathbb{1} - i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{L}} + o(\theta)) = \\
&= \hat{A} + i[\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{A}] + o(\theta)
\end{aligned}$$

Si deduce quindi che $\hat{A}$ è invariante sotto rotazioni se e solo se commuta con tutte le componenti di $\hat{\mathbf{L}}$. In tal caso diciamo che $\hat{A}$ è uno scalare.

Se invece abbiamo una tripletta $(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$ di operatori con le regole di commutazione

$$[\hat{L}_i, \hat{A}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{A}_k$$

diciamo che $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$ è un vettore. Si mostra facilmente che $\hat{\mathbf{A}}^2$ è sempre uno scalare. In particolare, la posizione, l'impulso e il momento angolare sono vettori, come si dimostra usando la definizione di $\hat{\mathbf{L}}$.

2 Autostati del momento angolare

Dalle regole di commutazione **??** è chiaro che non possiamo diagonalizzare simultaneamente le tre componenti di $\hat{\mathbf{L}}$, al contrario di quanto siamo riusciti a fare con posizione e impulso. Possiamo però diagonalizzare simultaneamente una componente di $\hat{\mathbf{L}}$ e $\hat{\mathbf{L}}^2$. Scegliamo, come di consueto, di diagonalizzare $\hat{L}_z$ e $\hat{\mathbf{L}}^2$. Dato che $\hat{L}_x$ e $\hat{L}_y$ commutano con $\hat{\mathbf{L}}^2$, ma non con $\hat{L}_z$, è noto che esiste almeno un autovalore di $\hat{\mathbf{L}}^2$ degenere.

2.1 Autostati astratti

Vediamo ora gli autostati veri e propri: in astratto, vogliamo risolvere le equazioni agli autovalori

$$\hat{L}_z \left|\ell, m\right\rangle = m \left|j, m\right\rangle, \qquad \hat{\mathbf{L}}^2 \left|\ell, m\right\rangle = \alpha_\ell \left|\ell, m\right\rangle$$

Definiamo a tal proposito gli operatori di salita e discesa

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

le cui relazioni di commutazione sono

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hat{L}_z, \qquad [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hat{L}_\pm$$

Si noti che è

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}^2 &= \left(\frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2}\right)^2 + \left(\frac{\hat{L}_+ - \hat{L}_-}{2i}\right)^2 + \hat{L}_z^2 = \\ &= \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z = \\ &= \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hat{L}_z\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\hat{L}_z\hat{L}_\pm \left|\ell, m\right\rangle &= (\pm\hat{L}_\pm + \hat{L}_\pm\hat{L}_z) \left|\ell, m\right\rangle = \\ &= (m \pm 1)\hat{L}_\pm \left|\ell, m\right\rangle \\ \hat{\mathbf{L}}^2\hat{L}_\pm \left|\ell, m\right\rangle &= \alpha_\ell\hat{L}_\pm \left|\ell, m\right\rangle\end{aligned}$$

Quindi gli operatori di salita e di discesa permettono di passare da un autospazio di $\hat{L}_z$ a un altro, rimando all'interno dello stesso autospazio di $\hat{\mathbf{L}}^2$. Notiamo ora che $\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2$ è un operatore positivo, quindi deve essere

$$\alpha_\ell^2 - m^2 \geq 0 \tag{2}$$

Sia M l'autovalore massimo per $\hat{L}_z$, a un dato ℓ. Deve essere

$$\hat{L}_+ \left|\ell, M\right\rangle = 0$$

e dunque agendo con $\hat{\mathbf{L}}^2$ si ottiene

$$\begin{aligned}\alpha_\ell \left|\ell, M\right\rangle &= \hat{\mathbf{L}}^2 \left|\ell, M\right\rangle = \\ &= (\hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hat{L}_z) \left|\ell, M\right\rangle = \\ &= M(M+1) \left|\ell, M\right\rangle\end{aligned}$$

è quindi $\alpha_\ell = M(M+1)$. Possiamo identificare ℓ con M, e scrivere semplicemente

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \left|\ell, m\right\rangle = \ell(\ell+1) \left|\ell, m\right\rangle, \qquad \hat{L}_z \left|\ell, m\right\rangle = m \left|\ell, m\right\rangle$$

Si noti che la **??** limita anche dal basso i valori di m. Questo significa che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\hat{L}_- \left|\ell, \ell - k\right\rangle = 0$$

Si deduce allora

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}^2 \left|\ell, \ell-k\right\rangle &= (\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z) \left|\ell, \ell-k\right\rangle = \\ &= ((\ell-k)^2 - (\ell-k)) \left|\ell, \ell-k\right\rangle\end{aligned}$$

deve quindi essere

$$(\ell-k)^2 - (\ell-k) = \ell(\ell+1)$$

e dunque

$$k = 2\ell$$

Questo significa che ℓ è intero o semi-intero. m può quindi assumere i $2\ell+1$ valori compresi tra $-\ell$ e ℓ, quindi l'autovalore $\ell(\ell+1)$ di $\hat{\mathbf{L}}^2$ è degenere $2\ell+1$ volte.

2.2 Elementi di matrice del momento angolare

Gli elementi di matrice di $\hat{\mathbf{L}}^2$ e $\hat{L}_z$ sono chiaramente

$$\langle \ell, m|\hat{\mathbf{L}}^2|\ell', m'\rangle = \ell(\ell+1)\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}, \qquad \langle \ell, m|\hat{L}_z|\ell', m'\rangle = m\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$$

Costruiamo anche gli elementi di matrice di $\hat{L}_\pm$. Sappiamo che

$$\hat{L}_\pm \left|\ell, m\right\rangle = k_\pm(\ell, m) \left|\ell, m \pm 1\right\rangle$$

ma dobbiamo determinare la costante moltiplicativa. Notiamo che

$$\begin{aligned}\ell(\ell+1) &= \langle \ell, m|\hat{\mathbf{L}}^2|\ell, m\rangle = \\ &= \langle \ell, m|\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z|\ell, m\rangle = \\ &= m^2 - m + \sum_{\ell', m'} \langle \ell, m|\hat{L}_+|\ell', m'\rangle\langle \ell', m'|\hat{L}_-|\ell, m\rangle = \\ &= m^2 - m + \sum_{\ell', m'} |\langle \ell, m|\hat{L}_+|\ell', m'\rangle|^2 = \\ &= m^2 - m + |k_+(\ell, m-1)|^2\end{aligned}$$

Usando la seconda scrittura di $\hat{\mathbf{L}}^2$ in termini di $\hat{L}_\pm$ e $\mathcal{L}_z$, si mostra allo stesso modo

$$\ell(\ell+1) = m^2 + m + |k_-(\ell, m-1)|^2$$

Le fasi dei due coefficienti vanno fissate. Seguiamo la convenzione di Condon-Shortley, che prende la radice positiva. In altre parole, è

$$\langle \ell, m-1|\hat{L}_-|\ell, m\rangle = \langle \ell, m|\hat{L}_+|\ell, m-1\rangle = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}$$

o, in termini delle azioni degli operatori,

$$\begin{aligned}\hat{L}_+ \left|\ell, m\right\rangle &= \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)} \left|\ell, m+1\right\rangle \\ \hat{L}_- \left|\ell, m\right\rangle &= \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)} \left|\ell, m-1\right\rangle\end{aligned}$$

2.3 Armoniche sferiche

Come spazio di Hilbert, prendiamo $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^2)$, con il prodotto interno

$$(f, g) = \int \mathrm{d}\Omega \, f^*(\Omega) g(\Omega)$$

dove $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$ è l'usuale elemento di angolo solido. Si noti che $\mathrm{d}\Omega$ è invariante sotto rotazioni, come deve essere. Infatti, è

$$\mathrm{d}^3 x = r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\Omega$$

ma $\mathrm{d}^3 x$ e r sono invarianti sotto rotazioni, dunque anche $\mathrm{d}\Omega$ lo è. In tale spazio, gli operatori $\hat{L}_\pm$, $\hat{L}_z$ e $\hat{\mathbf{L}}^2$ sono dati rispettivamente da

$$\begin{aligned}
\hat{L}_\pm &= e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\
\hat{L}_z &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\phi} \\
\hat{\mathbf{L}}^2 &= - \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]
\end{aligned}$$

Poniamo ora $\langle \theta, \phi | \ell, m \rangle = Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$. Deve essere

$$\frac{1}{i} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial\phi} = m Y_{\ell,m}$$

ossia

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = f_{\ell,m}(\theta) e^{im\phi}$$

Fisicamente è sensato richiedere $Y_{\ell,m}(\theta, \phi + 2\pi) = Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$, ma questo implica $m \in \mathbb{Z}$. Ricordando che m assume i valori $-\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$, deve essere anche $\ell \in \mathbb{N}$. Vedremo dopo come conciliare questo fatto con il risultato $2\ell \in \mathbb{N}$, ottenuto nella sezione precedente.

L'equazione per $\hat{\mathbf{L}}^2$ diventa

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f_{\ell,m}}{\partial\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} f_{\ell,m} + \ell(\ell+1) f_{\ell,m} = 0$$

e, facendo il cambio di variabile $\xi = \sin\theta$, si trova

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \left((1-\xi^2) \frac{\mathrm{d} f_{\ell,m}}{\mathrm{d}\xi} \right) - \frac{m^2}{1-\xi^2} f_{\ell,m} + \ell(\ell+1) f_{\ell,m} = 0$$

La soluzione di questa equazione è ben nota. La soluzione completa è l'armonica sferica

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos\theta)$$

dove

$$\begin{aligned}
P_\ell^m(x) &= (-)^\ell (1-x^2)^{|m|/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_\ell(x) \\
P_\ell(x) &= \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} (x^2-1)^\ell
\end{aligned}$$

sono, rispettivamente, i polinomi di Legendre generalizzati e i polinomi di Legendre.

Le armoniche sferiche formano un insieme completo e ortonormale per $\mathcal{H}$ e godono delle proprietà

$$Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) = (-)^m Y_{\ell,-m}(\theta,\phi)$$
$$Y_{\ell,m}(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-)^\ell Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

Valgono inoltre l'espansione del potenziale coulombiano

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\min\{|\mathbf{r}|,|\mathbf{r}'|\})^n}{(\max\{|\mathbf{r}|,|\mathbf{r}'|\})^{n+1}} P_n\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|}\right)$$

e la formula di somma

$$P_\ell(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')$$

dove α è l'angolo tra $(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ e $(\sin\theta'\cos\phi', \sin\theta'\sin\phi', \cos\theta')$. Si noti infine che il laplaciano in coordinate sferiche si scrive nella forma

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2} f$$

3 Gruppo delle rotazioni

Studiamo più in dettaglio SO(3). Consideriamo una rotazione infinitesima R

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon M_{ij}$$

La condizione $R^t = R^{-1}$ implica

$$M_{ij} = -M_{ji}$$

Dato che le matrice 3×3 antisimmetriche formano un sottospazio delle matrici 3×3 di dimensione 3, avremo tre generatori. Questi sono convenzionalmente

$$i\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$i\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$i\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ossia $i(\Sigma_i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}$. Le regole di commutazione per tali generatori sono

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = i\varepsilon_{ijk}\Sigma_k$$

Dunque le costanti di struttura di so(3) nella base delle matrici Σ sono ε_{ijk}. In termini dei generatori, una rotazione di $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{n}$ è

$$\exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma})$$

Infatti, preso un vettore $\mathbf{v}$ siano $\mathbf{v}_\perp$ e $\mathbf{v}_\parallel$ le componenti di $\mathbf{v}$ ortogonali e parallele a $\mathbf{n}$

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \qquad \mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

Si noti ora che

$$\begin{aligned}
(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma})\mathbf{v} &= -\theta n_i \varepsilon_{ijk} v_k \hat{x}_j = \\
&= \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v} \\
(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma})(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma})\mathbf{v} &= \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}) = \\
&= -\theta^2 \mathbf{v}_\perp
\end{aligned}$$

Notando che $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_\perp$, è chiaro che

$$(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma})^{2k}\mathbf{v} = (-)^k \theta^{2k} \mathbf{v}_\perp, \qquad (i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma})^{2k+1}\mathbf{v} = (-)^k \theta^{2k+1} \mathbf{n} \times \mathbf{v}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma})\mathbf{v} &= \mathbf{v} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-)^k}{(2k)!} \theta^{2k} \mathbf{v}_\perp + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} \theta^{2k+1} \mathbf{n} \times \mathbf{v} = \\
&= \mathbf{v} + \mathbf{v}_\perp \cos\theta + \mathbf{n} \times \mathbf{v} \sin\theta
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi una mappa suriettiva $\exp\colon \mathrm{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$.

3.1 Rappresentazioni di algebre

Premettiamo due definizioni.

Definizione 3.1. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio. L'algebra di Lie $\mathcal{GL}(V)$ degli operatori lineari su V è lo spazio $\mathrm{GL}(V)$, dotato del prodotto di Lie

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Definizione 3.2. Una rappresentazione ρ di un'algebra di Lie $\mathcal{L}$ su un $\mathbb{C}$-spazio V è un omomorfismo di algebre di Lie $\rho\colon \mathcal{L} \to \mathcal{GL}(V)$.

Da qui in poi le nozioni usuali della teoria delle rappresentazioni, come l'irriducibilità, non subiscono modifiche. Sappiamo ora che possiamo mappare tutto SO(3) a partire da so(3). Sembra quindi ragionevole cercare le rappresentazioni irriducibili di so(3) e ricavarne quelle di SO(3). Più precisamente, se $\rho\colon \mathrm{so}(3) \to \mathcal{GL}(V)$ è una rappresentazione irriducibile di so(3), vorremmo dire che esite una rappresentazione $\tilde{\rho}\colon \mathrm{SO}(3) \to \mathcal{GL}(V)$ che faccia commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{so}(3) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathcal{GL}(V) \\
\mathrm{SO}(3) \arrow[ur, "\tilde{\rho}"'] &
\end{tikzcd}$$

Iniziamo notando che abbiamo in realtà già trovato le rappresentazioni irriducibili di so(3): i suoi generatori soddisfano le stesse regole di commutazione del momento angolare, dunque ha anche le stesse rappresentazioni. Queste sono le rappresentazioni sugli spazi

$$V_\ell = \langle \{ |\ell, m\rangle : m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell \} \rangle$$

definite sui generatori da

$$\rho \colon \Sigma_i \mapsto \hat{L}_i$$

Verifichiamo l'irriducibilità: sia $W \subseteq V_\ell$ un sottospazio so(3)-invariante e non vuoto. Se $|w\rangle \in W$, sicuramente è

$$|w\rangle = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_m |\ell, m\rangle$$

Sia $\overline{m} = \min \{ m : \alpha_m \neq 0 \}$. Deve essere

$$(\rho(\Sigma_1) + i\rho(\Sigma_2))^{\ell - \overline{m}} |w\rangle \in W$$

ma questo significa ovviamente $|\ell, \ell\rangle \in W$. Preso $k \in 1, \dots, 2\ell$, è allora

$$(\rho(\Sigma_1) - i\rho(\Sigma_2))^k |\ell, \ell\rangle = |\ell, \ell - k\rangle \in W$$

e quindi $W = V_\ell$.

Prendiamo ora come candidata per $\tilde{\rho}_\ell \colon \mathrm{SO}(3) \to \mathcal{GL}(V_\ell)$ la mappa

$$\tilde{\rho}_\ell \colon \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \mapsto \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{L}})$$

dove, si intende, le matrici associate a $\hat{\mathbf{L}}$ sono quelle a fissato ℓ. C'è un problema: non tutte le $\tilde{\rho}_\ell$ appena definite sono rappresentazioni. Infatti, prendiamo $\boldsymbol{\theta} = 2\pi \hat{z}$: è $\exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{Id}$, ma è

$$\exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{L}}) |\ell, m\rangle = e^{2\pi i m} |\ell, m\rangle$$

che *non* è l'identità se m (e dunque ℓ) è semi-intero. Vediamo come si risolve questo dilemma

4 SU(2)

SU(2) è il gruppo delle matrici unitarie 2×2 con determinante 1. La più generica matrice di tale forma è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

con la condizione aggiuntiva

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Si deduce quindi che SU(2) è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 isomorfo a $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, tramite la mappa $\pi \colon \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SU}(2)$ definita da

$$\pi \colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

che è anche un isomorfismo di gruppi. Questo implica un'importante proprietà: SU(2) è semplicemente connesso. Vediamone i generatori: se $M \in \mathrm{SU}(2)$ e

$$M = 1 + i\varepsilon A + o(\varepsilon)$$

deve essere

$$1 = M^\dagger M = (1 - i\varepsilon A^\dagger)(1 + i\varepsilon A) + o(t) = 1 + i\varepsilon(A - A^\dagger) + o(\varepsilon)$$

I generatori sono quindi matrici Hermitiane. Dato che è $M = \exp(i\varepsilon A)$, se U diagonalizza A e questa ha autovalori λ_1 e λ_2, è

$$\begin{aligned}\det M &= \det(UMU^\dagger) = \\ &= \det\exp(i\varepsilon UAU^{-1}) = \\ &= e^{i\varepsilon(\lambda_1+\lambda_2)}\end{aligned}$$

otteniamo quindi la condizione $\mathrm{tr}A = 0$. Un set di generatori è dato dalle matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Chiamiamo su(2) l'algebra di Lie generata da queste matrici. Dato che

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

si deduce che, per $s_i = \sigma_i/2$, è

$$[s_i, s_2] = i\varepsilon_{ijk}s_k$$

Ma allora la mappa $\pi\colon \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$ definita da

$$\rho\colon s_i \mapsto \Sigma_i$$

è un isomorfismo di algebre di Lie. Le rappresentazioni di su(2) sono quelle già viste. Questo *non* implica in alcun modo un isomorfismo tra SU(2) e SO(3). Piuttosto, si consideri l'omomorfismo di gruppi $\rho\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ dato da

$$\rho\colon \exp\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \mapsto \exp(i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\Sigma})$$

Questa mappa è chiaramente suriettiva, ma non è iniettiva. Il suo nucleo è $\ker\rho = \{\pm 1\}$, quindi per il primo teorema di omomorfismo è $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$. Le rappresentazioni di su(2) sono estendibili a rappresentazioni di SU(2), ma solo quelle con ℓ intero sono effettivamente rappresentazioni di SO(3).

Mostriamo incidentalmente che esiste una formula chiusa per $\exp\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$. Usando le regole di moltiplicazione delle matrici di Pauli è

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 &= \theta^2 n_i n_j(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) = \\ &= \theta^2\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2k} &= \theta^{2k} \\ (\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2k+1} &= \theta^{2k+1}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ \exp\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-)^k\theta^{2k}}{2^{2k}(2k)!} + i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-)^k\theta^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!} = \\ &= \cos\frac{\theta}{2} + i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

5 Spin

Definiamo lo spin di un certo sistema come il momento angolare intrinseco, ovvero come il momento angolare nel sistema del centro di massa. Indichiamo lo spin con $\hat{\mathbf{s}}$. Le sue regole di commutazione sono quelle usuali per un momento angolare

$$[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{s}_k$$

Dobbiamo capire su quali variabili agisce $\hat{\mathbf{s}}$. Avevamo descritto l'azione del momento angolare orbitale $\hbar\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$ sugli autostati della posizione (o dell'impulso). Per $\hat{\mathbf{s}}$ invece le variabili naturali sono gli autovalori di una delle sue componenti, ad esempio $\hat{s}_z$. Per una particella libera, il momento angolare intrinseco è una sua caratteristica, quindi ha un valore ben definito. Questo significa che ci troviamo in una qualche rappresentazione di SU(2), ovvero che

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = s(s+1)$$

per un qualche s. Al solito, gli autovalori di $\hat{s}_z$ (indichiamoli con σ) assumono i valori $|\sigma| \leq s$. La funzione d'onda di uno stato generico $|\psi\rangle$ necessita allora di due coordinate, ossia la posizione e il valore di σ. Abbiamo cioè

$$\psi(\mathbf{x}, \sigma) = \langle \mathbf{x}, \sigma | \psi \rangle$$

A seconda dei gusti, si può anche dire che la funzione d'onda del sistema è in realtà un vettore di funzioni d'onda con $2s+1$ componenti, ossia la funzione d'onda è

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}, -s) \\ \psi(\mathbf{x}, -s+1) \\ \vdots \\ \psi(\mathbf{x}, s-1) \\ \psi(\mathbf{x}, s) \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare fra stati è definito in maniera naturale come

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \sum_{\sigma=-s}^{s} \varphi^*(\mathbf{x}, \sigma)\psi(\mathbf{x}, \sigma) = \int \mathrm{d}^3\,\mathbf{x}\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$$

e, al solito, $|\psi(\mathbf{x}, \sigma)|^2$ si interpreta come la densità di probabilità di trovare la particella in $\mathbf{x}$ con componente z dello spin pari a σ.

5.1 Trasformazione delle funzioni d'onda

Introduciamo le matrici $(2s+1) \times (2s+1)$ $D^{(s)}(R)$, definite da

$$D^{(s)}_{\sigma,\sigma'}(R) = \langle s, \sigma' | \hat{U}(R) | s, \sigma \rangle$$

(Si noti l'ordine inverso in σ e σ' tra primo e secondo membro. In tal modo l'azione di $\hat{U}(R)$ su un ket si ottiene in forma matriciale contraendo il secondo indice di $D^{(\ell)}(R)$, come si fa usualmente nel prodotto matrice-vettore colonna). Per tali matrici vale

$$[D^{(s)}(R)]^\dagger = D^{(s)}(R^{-1})$$

In tal modo, è

$$\begin{aligned}\hat{U}(R)\,|\mathbf{x},s,\sigma\rangle &= D^{(s)}_{\sigma,\sigma'}(R)\,\big|R\mathbf{x},s,\sigma'\big\rangle\\ \langle\mathbf{x},s,\sigma|\,\hat{U}(R) &= D^{(s)}_{\sigma,\sigma'}(R)\,\big\langle R^{-1}\mathbf{x},s,\sigma'\big|\end{aligned}$$

Quindi una funzione d'onda per una particella di spin s trasforma come

$$\psi_R(\mathbf{x},\sigma) = \langle\mathbf{x},s,\sigma|\hat{U}(R)|\psi\rangle = \sum_{\sigma'} D^{(s)}_{\sigma,\sigma'}(R)\psi(R^{-1}\mathbf{x},s,\sigma')$$

6 Momento angolare totale

Consideriamo ora il caso generale di una particella con spin e momento angolare orbitale. Sia $\hat{\mathbf{J}}$ il generatore delle rotazioni, che chiamiamo momento angolare totale. Per definizione è

$$\hat{U}(R) = \exp(i\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{J}})$$

Abbiamo visto nella sezione precedente l'azione di $\hat{U}(R)$ su una funzione d'onda. Per una rotazione infinitesima è

$$\begin{aligned}\exp(i\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{J}}) &= 1 + i\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{J}} + o(\theta)\\ D^{(s)}(R) &= 1 + i\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{s}} + o(\theta)\\ R\mathbf{x} &= \mathbf{x} - i\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{L}}\mathbf{x} + o(\theta)\end{aligned}$$

Deve quindi essere

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x},\sigma) + i\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{J}}\psi(\mathbf{x},\sigma) &= \sum_{\sigma'} D^{(s)}_{\sigma,\sigma'}(R)\left[\psi(\mathbf{x},s,\sigma') + i\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{L}}\psi(\mathbf{x},\sigma')\right] =\\ &= \psi(\mathbf{x},\sigma) + i\boldsymbol{\theta}\hat{\mathbf{L}}\psi(\mathbf{x},\sigma) + i\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{s}_{\sigma,\sigma'}\psi(\mathbf{x},\sigma')\end{aligned}$$

Il momento angolare totale è quindi

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{s}}$$

Sotto rotazioni, la grandezza conservata è $\hat{\mathbf{J}}$, mentre in generale non si conservano separatamente $\hat{\mathbf{L}}$ e $\hat{\mathbf{s}}$. Questo è dovuto al fatto che

$$[\hat{J}_i,\hat{L}_j] = [\hat{L}_i,\hat{L}_j] \neq 0$$

e analogamente per lo spin. Si noti infatti che $[\hat{L}_i,\hat{s}_j] = 0$. Dimostriamo ora un'importante proprietà sulla composizione di momenti angolari: sia $\rho_n\colon \mathrm{SU}(2)\to\mathcal{GL}(V_n)$ la rappresentazione di SU(2) di dimensione $2n+1$. Allora è

$$V_{\ell_1}\otimes V_{\ell_2} \cong \bigoplus_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} V_\ell$$

In un certo senso, questa decomposizione è analoga alle disuguaglianze che abbiamo classicamente per due vettori qualunque $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$:

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Per la dimostrazione, supponiamo wlog $\ell_1 \leq \ell_2$ e sia

$$\mathcal{B} = \{|\ell_1,m_1\rangle\otimes|\ell_2,m_2\rangle : m_1 = -\ell_1,-\ell_1+1,\ldots,\ell_1-1,\ell_1,\ m_2 = -\ell_2,-\ell_2+1,\ldots,\ell_2-1,\ell_2\}$$

la base naturale di $V_{\ell_1} \otimes V_{\ell_2}$. La componente z del momento angolare $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2 + \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{\mathbf{L}}_2$ agisce sui vettori di base come

$$\hat{L}_z \, |\ell_1, m_1\rangle \otimes |\ell_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2) \, |\ell_1, m1\rangle \otimes |\ell_2, m_2\rangle$$

Dunque l'autovalore massimo di $\hat{L}_z$ è $\ell_1 + \ell_2$, ed ha come unico autovettore $|\ell_1, \ell_1\rangle \otimes |\ell_2, \ell_2\rangle$. Più in generale, poniamo

$$\mathcal{B}_k = \{|\ell_1, m_1\rangle \otimes |\ell_2, m_2\rangle \in \mathcal{B} : m_1 + m_2 = k\}$$

In tal modo, $|\mathcal{B}_k|$ è il numero di vettori di base con momento angolare lungo z pari a k. Mostriamo alla fine della sezione che per $\ell_2 - \ell_1 \leq k \leq \ell_1 + \ell_2$ è $|\mathcal{B}_k| = \ell_1 + \ell_2 + 1 - k$. Con questo risultato abbiamo concluso: abbiamo infatti k stati con componente $\hat{L}_z$ pari a $\ell_1 + \ell_2 + 1 - k$: partendo da $|\ell_1, \ell_1\rangle \otimes |\ell_2, \ell_2\rangle$, possiamo trovare una copia di $V_{\ell_1+\ell_2}$ all'interno di $V_{\ell_1} \otimes V_{\ell_2}$ tramite l'operatore di discesa $\hat{L}_-$. Ci rimane così un vettore $|u\rangle$ indipendente da $\hat{L}_- \, |\ell_1, \ell_1\rangle \otimes |\ell_2, \ell_2\rangle$ con $\hat{L}_z$ pari a $\ell_1 + \ell_2 - 1$. Questo vettore appartiene necessariamente a una copia V_ℓ con $\ell \geq \ell_1 + \ell_2 - 1$, ma non può essere $\ell \geq \ell_1 + \ell_2$ perchè altrimenti agendo con $\hat{L}_+$ su $|u\rangle$ troveremmo altri autostati di $\hat{L}_z$, che abbiamo già mostrato che non esistono. Quindi è $\ell = \ell_1 + \ell_2 - 1$ e tramite $\hat{L}_-$ costruiamo una copia di $V_{\ell_1+\ell_2-1}$ all'interno di $V_{\ell_1} \otimes V_{\ell_2}$. Il processo continua diminuendo di 1 l'autovalore di $\hat{L}_z$. Ad ogni passaggio troviamo *una* copia di $V_{\ell_1+\ell_2-k}$ all'interno del prodotto tensoriale. Per trovare l'indice a cui fermarsi, basta ragionare per dimensioni: dato che $\dim V_\ell = 2\ell + 1$, è

$$\begin{aligned}
(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1) = \dim \bigoplus_{\ell=n}^{\ell_1+\ell_2} V_\ell = \\
&= \sum_{k=n}^{\ell_1+\ell_2} (2\ell + 1) = \\
&= \ell_1 + \ell_2 + 1 - n + 2 \sum_{\ell=0}^{\ell_1+\ell_2} \ell - 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = \\
&= \ell_1 + \ell_2 + 1 - n + (\ell_1 + \ell_2)(\ell_1 + \ell_2 + 1) - n(n-1) = \\
&= (\ell_1 + \ell_2 + 1)^2 - n^2
\end{aligned}$$

Si trova così $n = |\ell_2 - \ell_1|$, come preannunciato. Resta da mostrare la parte più importante della dimostrazione, ossia il calcolo di $|\mathcal{B}_k|$. Procediamo induttivamente su $j = \ell_1 + \ell_2 - k$: dobbiamo così mostrare $|\mathcal{B}_{\ell_1+\ell_2-j}| = j + 1$. Per $j = 0$ la tesi è vera ed è riportata sopra. Per $j \leq 0$, consideriamo l'insieme delle coppie (m_1, m_2) che risolvono $m_1 + m_2 = \ell_1 + \ell_2 - j$. Vogliamo contare le coppie che risolvono $m_1 + m_2 = \ell_1 + \ell_2 - j - 1$. FINISCI.

6.1 Coefficienti di Clebsch-Gordan

Dalla decomposizione precedente

$$V_{\ell_1} \otimes V_{\ell_2} \cong \bigoplus_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} V_\ell$$

segue che abbiamo due basi naturali di $V_{\ell_1} \otimes V_{\ell_2}$: una è $\mathcal{B}$, l'altra è chiaramente

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{|\ell_1, \ell_2; L, M\rangle : |\ell_1 - \ell_2| \leq L \leq \ell_1 + \ell_2, \, M = -L, -L+1, \ldots, L-1, L\}$$

I coefficienti del cambio di base tra $\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ sono noti come coefficienti di Clebsch-Gordan. Convenzionalmente si pone

$$|\ell_1, \ell_2; L, M\rangle = C^{L\,\ell_1\,\ell_2}_{M\,m_1\,m_2}\,|\ell_1, m_1\rangle \otimes |\ell_2, m_2\rangle$$

Ovviamente è

$$C^{L\,\ell_1\,\ell_2}_{M\,m_1\,m_2} = (\langle\ell_1, m_1| \otimes \langle\ell_2, m_2|)\,|\ell_1, \ell_2; L, M\rangle$$

Vediamo qualche proprietà: abbiamo due regole di selezione, ossia due condizioni necessarie affinché $C^{L\,\ell_1\,\ell_2}_{M\,m_1\,m_2} \neq 0$. Esse sono, per quanto visto nella sezione precedente,

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq L \leq \ell_1 + \ell_2, \qquad\qquad M = m_1 + m_2$$

Inoltre, con la convenzione scelta per le fasi degli autostati del momento angolare si hanno dei coefficienti di Clebsch-Gordan reali. Infine, sotto scambio dei due spazi prodotto si ha

$$(\langle\ell_1, m_1| \otimes \langle\ell_2, m_2|)\,|\ell_1, \ell_2; L, M\rangle = (-)^{-L+\ell_1+\ell_2}(\langle\ell_2, m_2| \otimes \langle\ell_1, m_1|)\,|\ell_2, \ell_1; L, M\rangle$$

ossia

$$C^{L\,\ell_1\,\ell_2}_{M\,m_1\,m_2} = (-)^{-L+\ell_1+\ell_2} C^{L\,\ell_2\,\ell_1}_{M\,m_2\,m_1}$$

6.2 Angoli di Eulero

Riprendiamo le matrici di rotazione

$$D^{(j)}_{m,m'}(R) = \langle j, m|\hat{U}(R)|j, m'\rangle$$

e cerchiamo un modo conveniente per calcolarle che non sia il calcolo diretto dell'esponenziale $\exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{J}})$. Sappiamo dai corsi precedenti che una rotazione si può esprimere in termini di angoli di Eulero. In particolare, se abbiamo un sistema S con assi x, y, z che viene ruotato nel sistema S' con assi x', y', z', possiamo

- ruotare di un angolo α intorno a z per portare il sistema $S_1 = S$ nel sistema S_2. L'asse y viene portato nell'asse y_2 e scegliamo α in modo che y_2 sia ortogonale al piano passante per z e z'.
- Ruotare di un angolo β intorno a y_2 per portare il sistema S_2 nel sistema S_3. Scegliamo β in modo che z venga portato in z'.
- Ruotare di un angolo γ intorno a z' per portare il sistema in $S_4 = S'$.

Se indichiamo con $\rho(\theta, \xi, S)$ una rotazione di un angolo θ intorno all'asse ξ del sistema S e con $\overline{\rho}(R, S)$ una rotazione R del sistema S, la nostra rotazione si scrive come si scrive come

$$\overline{\rho}(R, S) = \rho(\gamma, z', S_3)\rho(\beta, y_2, S_2)\rho(\alpha, z, S_1)$$

Abbiamo un'importante proprietà: se un sistema K viene ruotato in un sistema K' tramite una rotazione R_1 e in questo facciamo una rotazione R_2, abbiamo

$$\overline{\rho}(R_2, K') = \overline{\rho}(R_1, K)\overline{\rho}(R_2, K)\overline{\rho}(R_1^{-1}, K)$$

Da questo si deduce

$$\overline{\rho}(R, K)\rho(\alpha, z, S_1)\rho(\beta, y, S_1)\rho(\gamma, z, S_1)$$

e dunque

$$\exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{J}}) = e^{i\alpha\hat{J}_z}e^{i\beta\hat{\mathbf{J}}_y}e^{i\gamma\hat{\mathbf{J}}_z}$$

Si ha dunque

$$D^{(j)}_{m,m'}(R) = e^{i\alpha m} d^{(j)}_{m,m'}(\beta) e^{im'\gamma}$$

dove

$$d^{(j)}_{m,m'}(\beta) = \langle j, m | e^{i\beta \hat{J}_y} | j, m' \rangle$$

Dobbiamo quindi solo calcolare l'elemento di matrice di una rotazione intorno all'asse y per trovare quello di una rotazione generica. Esplicitamente è

$$d^{(j)}_{m,m'}(\beta) = \sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!}} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j} \sum_k (-)^k \binom{j+m'}{k} \binom{j-m'}{j-m-\mu} \left(\tan\frac{\beta}{2}\right)^{m-m'+2k}$$

dove la somma su k è estesa a tutti i valori per cui sono definiti i binomiali. Queste matrici sono tabulate nella tabelle dei coefficienti di Clebsch-Gordan.

7 Rotazione degli stati

Consideriamo ancora una volta l'azione di $\hat{U}(R)$ su uno stato $|j, m\rangle$. Intuitivamente, se $R\hat{z} = \mathbf{a}$, lo stato ruotato $\hat{U}(R)\,|j, m\rangle$ è autostato di $\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{a}$. Dimostriamolo formalmente: è

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{a})\hat{U}(R)\,|j, m\rangle &= \hat{U}(R)\hat{U}^\dagger(R)(\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{a})\hat{U}(R)\,|j, m\rangle = \\
&= a_i \hat{U}(R)(\hat{U}^\dagger(R)\hat{J}_i\hat{U}(R))\,|j, m\rangle = \\
&= a_i \hat{U}(R) R_{im} \hat{J}_m\,|j, m\rangle = \\
&= \hat{U}(R)(R\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{a})\,|j, m\rangle = \\
&= \hat{U}(R)(\hat{\mathbf{J}} \cdot R^{-1}\mathbf{a})\,|j, m\rangle = \\
&= \hat{U}(R)\hat{J}_z\,|j, m\rangle = \\
&= m\hat{U}(R)\,|j, m\rangle
\end{aligned}$$

Consideriamo ora un versore $\mathbf{n}$. A questo possiamo associare un autostato della posizione su $\mathbb{S}^2$, che indichiamo indifferentemente con le notazioni $|\mathbf{n}\rangle$ o $|\theta, \phi\rangle$. Le armoniche sferiche sono allora

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | \ell, m \rangle$$

Sotto rotazioni si ha, per quanto detto

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{n} | \hat{U}(R) | \ell, m \rangle = \\
&= \langle R^{-1}\mathbf{n} | \ell, m \rangle = \\
&= Y_{\ell,m}(R^{-1}n)
\end{aligned}$$

D'altro canto, ricordando la decomposizione in rappresentazioni irriducibili di $\hat{U}(R)$, è

$$\hat{U}(R)\,|\ell, m\rangle = D^{(\ell)}_{m,m'}(R)\,|\ell, m'\rangle$$

e quindi troviamo la legge di trasformazione

$$Y_{\ell,m}(R^{-1}\mathbf{n}) = D^{(\ell)}_{m,m'} Y_{\ell,m'}(\mathbf{n})$$

8 Tensori sferici

Definiamo un tensore sferico di rango j come un insieme di $2j+1$ operatori $\left\{\hat{T}^j_{-j}, \hat{T}^j_{-j+1}, \ldots, \hat{T}^j_{j-1}, \hat{T}^j_j\right\}$ per cui valga

$$\hat{U}(R)\hat{T}^j_m\hat{U}^\dagger(R) = D^{(j)}_{m,m'}(R)\hat{T}^j_{m'}$$

ossia

$$\hat{U}(R)\begin{pmatrix}\hat{T}^j_{-j}\\ \hat{T}^j_{-j+1}\\ \vdots\\ \hat{T}^j_{j-1}\\ \hat{T}^j_j\end{pmatrix}\hat{U}^\dagger(R) = D^{(j)}(R)\begin{pmatrix}\hat{T}^j_{-j}\\ \hat{T}^j_{-j+1}\\ \vdots\\ \hat{T}^j_{j-1}\\ \hat{T}^j_j\end{pmatrix}$$

Per una rotazione infinitesima si trova

$$[\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{J}}, \hat{T}^j_m] = (\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{J}})_{m,m'}\hat{T}^j_{m'}$$

e prendendo le varie componenti

$$\begin{aligned}[\hat{J}_z, \hat{T}^j_m] &= m\hat{T}^j_m\\ [\hat{J}_\pm, \hat{T}^j_m] &= \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\hat{T}^j_{m\pm 1}\end{aligned}$$

In particolare, dalla prima si deduce

$$\begin{aligned}(m_1-m_2)\langle j, m_1, \alpha|\hat{T}^j_m|j, m_2, \beta\rangle &= \langle j, m_1, \alpha|\hat{J}_z\hat{T}^j_m - \hat{T}^j_m\hat{J}_z|j, m_2, \beta\rangle =\\ &= m\langle j, m_1, \alpha|\hat{T}^j_m|j, m_2, \beta\rangle\end{aligned}$$

Se l'elemento di matrice è non nullo, deve quindi essere

$$m_1 = m_2 + m$$

Questo è un esempio di regola di selezione, ossia di condizione necessaria tra due stati affinché possa esserci una transizione da uno all'altro.

Vediamone un'altra: uno stato $\hat{T}^j_m\,|j_2, m_2\rangle$ trasforma sotto rotazioni come

$$\begin{aligned}\hat{U}(R)\hat{T}^j_m\,|j_2, m_2\rangle &= = \hat{U}(R)\hat{T}^j_m\hat{U}^\dagger(R)\hat{U}(R)\,|j_2, m_2\rangle =\\ &= D^{(j)}_{m,m'}(R)D^{(j_2)}_{m_2,m_2'}\hat{T}^j_{m'}\,|j_2, m_2'\rangle\end{aligned}$$

Lo stato trasforma quindi come $j\otimes j_2$. Ma allora se

$$\langle j_1, m_1|\hat{T}^j_m|j_2, m_2\rangle \neq 0$$

deve essere $|j-j_2| \leq j_1 \leq j + j_2$.

8.1 Teorema di Wigner-Eckart

C'è una stretta connessione tra i tensori sferici e i coefficienti di Clebsch-Gordan. Questa connessione è data dal teorema di Wigner-Eckart: dato un tensore sferico $\hat{T}^j$ di rango j, allora è

$$\langle j_1, m_1, \alpha|\hat{T}^j_m|j_2, m_2, \beta\rangle = \frac{\Lambda(j; j_1, \alpha; j_2, \beta)}{\sqrt{2j+1}}C^{j\,j_1\,j_2}_{m\,m_1\,m_2}$$

In altre parole, per l'elemento di matrice di una componente di un tensore sferico è

$$\langle j_1, m_1, \alpha | \hat{T}^j_m | j_2, m_2, \beta \rangle \propto (\langle j_1, m_1 | \otimes \langle j_2, m_2 |) \, | j_1, j_2; j, m \rangle$$

dove la costante di proporzionalità *non* dipende da m, m_1 e m_2. Tale costante si chiama elemento di matrice ridotto ed è usualmente scritta nella fuorviante forma

$$\Lambda(j; j_1, \alpha; j_2, \beta) = \langle j_1, \alpha || \hat{T}^j || j_2, \beta \rangle$$

Il teorema è particolarmente importante perchè

- Tiene automaticamente conto delle regole di selezione sui tensori sferici, poichè già implementate nei coefficienti di Clebsch-Gordan.
- Permette di calcolare tutti gli elementi di matrice di tutti gli operatori del tensore considerato, una volta che conosciamo un certo elemento di matrice.
- Tutti gli operatori hanno elementi di matrice proporzionali tra loro (con la costante di proporzionalità eventualmente nulla).

DIMOSTRAZIONE: DA FARE.