AOD - sprawozdanie nr 2

Wiktor Bachta

Listopad 2024

1 Zadanie 1

Model ten rozwiązuje problem minimalizacji kosztów zakupu paliwa dla przedsiębiorstwa lotniczego, które musi dostarczyć określoną ilość paliwa na lotniska od różnych dostawców. Model oparty jest na programowaniu liniowym i wykorzystuje bibliotekę JuMP do optymalizacji.

Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienne decyzyjne x_{ij}, które reprezentują ilość paliwa dostarczanego przez firmę i na lotnisko j, gdzie:

$$x_{ij} \geq 0$$

oraz x_{ij} jest liczbą całkowitą.

Funkcja celu

Celem jest minimalizacja całkowitego kosztu dostarczenia paliwa. Koszt dostarczenia jednego galonu paliwa przez dostawcę i na lotnisko j jest zapisany w macierzy kosztów c_{ij}. Funkcja celu wyraża się następująco:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

gdzie:

- m: liczba dostawców,
- n: liczba lotnisk.

Ograniczenia

1. **Ograniczenia zapotrzebowania na paliwo na każdym lotnisku**: Każde lotnisko j wymaga określonej ilości paliwa, oznaczonej jako d_j. Dla każdego lotniska j formułujemy ograniczenie:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

2. **Ograniczenia produkcyjne dostawców**: Każdy dostawca i ma ograniczoną ilość paliwa, którą może dostarczyć (zdefiniowaną jako p_i). Sformułowanie tych ograniczeń dla każdego dostawcy i wygląda następująco:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq p_i$$

2 Zadanie 2

Model ten rozwiązuje problem optymalizacji produkcji zakładu, który może wytwarzać cztery różne wyroby w ograniczonych ilościach, uwzględniając czas przetwarzania na trzech różnych maszynach oraz popyt rynkowy. Celem modelu jest maksymalizacja zysku.

Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienne decyzyjne x_{ij}, które reprezentują ilość kilogramów wyrobu P_i, produkowanego na maszynie M_j, gdzie:

$$x_{ij} \geq 0$$

oraz x_{ij} jest liczbą całkowitą.

Funkcja celu

Celem jest maksymalizacja zysku, który można wyrazić jako różnicę między przychodem ze sprzedaży wyrobów a kosztami zmiennymi, które obejmują koszty materiałów oraz koszty pracy maszyn. Funkcja celu przyjmuje postać:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ((p_i - m_i) \cdot x_{ij} - k_j \cdot t_{ij} \cdot x_{ij})$$

gdzie:

- p_i: cena sprzedaży wyrobu P_i,
- m_i: koszt materiałowy na kilogram wyrobu P_i,
- k_j: koszt pracy maszyny M_j za minutę,
- t_{ij}: czas przetwarzania jednego kilograma wyrobu P_i na maszynie M_j.

Ograniczenia

1. **Ograniczenia dostępności czasu pracy maszyn**: Każda maszyna M_j jest dostępna tylko przez określoną liczbę minut tygodniowo, oznaczoną jako c_j. Dla każdej maszyny M_j formułujemy ograniczenie:

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq c_j$$

2. **Ograniczenia popytu rynkowego**: Każdy produkt P_i ma maksymalny popyt rynkowy, oznaczony jako d_i. Dla każdego wyrobu P_i formułujemy ograniczenie:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq d_i$$

3 Zadanie 3

Model ten rozwiązuje problem optymalizacji produkcji i magazynowania towarów w firmie, która posiada ograniczoną zdolność produkcyjną w trybie podstawowym oraz dodatkowym, przy czym produkcja dodatkowa wiąże się z wyższym kosztem jednostkowym. Firma musi spełnić zapotrzebowanie w każdym z okresów przy minimalizacji kosztów produkcji i magazynowania.

Zmienne decyzyjne

Wprowadzamy następujące zmienne decyzyjne:

- x_j: liczba jednostek wyprodukowanych w trybie podstawowym w okresie j, gdzie $x_j \geq 0$,

- y_j: liczba jednostek wyprodukowanych w trybie dodatkowym w okresie j, gdzie $y_j \geq 0$,
- s_j: liczba jednostek towaru przechowywanych w magazynie na koniec okresu j, gdzie $s_j \geq 0$.

Funkcja celu

Celem jest minimalizacja łącznych kosztów produkcji i magazynowania towaru. Funkcja celu przyjmuje postać:

$$\min \sum_{j=1}^{K} (c_j x_j + o_j y_j + h s_j)$$

gdzie:

- c_j: koszt produkcji jednej jednostki w trybie podstawowym w okresie j,
- o_j: koszt produkcji jednej jednostki w trybie dodatkowym w okresie j,
- h: koszt magazynowania jednej jednostki towaru przez jeden okres.

Ograniczenia

1. **Ograniczenia zdolności produkcyjnych**:

   $$x_j \leq b_j$$

   $$y_j \leq a_j$$

   gdzie b_j i a_j to odpowiednio maksymalna liczba jednostek produkowanych w trybie podstawowym i dodatkowym w okresie j.

2. **Ograniczenia zapotrzebowania na towar**: Liczba jednostek towaru przechowywanych na koniec okresu $j+1$ musi zapewnić spełnienie zapotrzebowania w kolejnym okresie, zatem:

   $$s_{j+1} = s_j + x_j + y_j - d_j$$

   gdzie d_j to zapotrzebowanie w okresie j.

3. **Ograniczenia magazynowe**: Przechowywana liczba jednostek towaru na koniec każdego okresu nie może przekroczyć maksymalnej pojemności magazynu:
$$s_j \leq S$$
gdzie S to maksymalna liczba jednostek, które mogą być przechowywane.

4. **Warunki początkowe i końcowe**: Na początku pierwszego okresu stan magazynu wynosi $s_1 = s_0$, gdzie s_0 to początkowa liczba jednostek towaru. Na koniec ostatniego okresu $s_{K+1} = 0$, co oznacza, że na koniec cyklu produkcyjnego magazyn ma zostać opróżniony.

4 Zadanie 4

Problem ten dotyczy znalezienia najtańszego połączenia między dwoma miastami w sieci połączeń, gdzie całkowity czas przejazdu nie może przekroczyć zadanego limitu.

Model matematyczny

Model ten jest reprezentowany przez skierowany graf $G = (N, A)$, gdzie:

- N: zbiór miast, numerowanych od 1 do 10,
- A: zbiór połączeń między miastami, każdy w postaci (i, j, c_{ij}, t_{ij}), gdzie c_{ij} to koszt przejazdu, a t_{ij} to czas przejazdu.

Zmienne decyzyjne

- x_{ij}: zmienna decyzyjna, która przyjmuje wartość 1, jeśli połączenie z miasta i do miasta j jest używane w optymalnej ścieżce, i 0 w przeciwnym przypadku.

Funkcja celu

Minimalizacja całkowitego kosztu przejazdu:
$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Ograniczenia

1. **Ograniczenie dotyczące istniejących połaczeń**:

$$x_{ij} = 0 \quad \text{jeżeli nie ma połączenia z i do j}$$

2. **Ograniczenie czasu przejazdu**:

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq T$$

gdzie T to maksymalny dopuszczalny czas przejazdu.

3. **Warunek wyjścia z miasta początkowego** i°:

$$\sum_{j:(i^\circ,j)\in A} x_{i^\circ j} = 1$$

4. **Warunek dotarcia do miasta docelowego** j°:

$$\sum_{i:(i,j^\circ)\in A} x_{ij^\circ} = 1$$

5. **Warunek przepływu dla pozostałych miast**: Każde miasto $k \in N$, poza i° i j°, ma tyle samo połączeń wchodzących, ile wychodzących:

$$\sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = \sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik}$$

Część (a) Rozwiązanie dla przykładowego problemu

Dane dla egzemplarza problemu to:

- $N = \{1, \ldots, 10\}$,
- $i^\circ = 1$, $j^\circ = 10$,
- $T = 15$,
- Krawędzie wraz z kosztami c_{ij} i czasami t_{ij}:
$(1,2,3,4), (1,3,4,9), (1,4,7,10), (1,5,8,12), (2,3,2,3), (3,4,4,6), (3,5,2,2), (3,10,6,11), (4,5,1,1), (4,7,3,5), (5,6,5,6), (5,7,3,3), (5,10,5,8), (6,1,5,8), (6,7,2,2), (6,10,7,11), (7,3,4,6), (7,8,3,5), (7,9,1,1), (8,9,1,2), (9,10,2,2)$.

Po zastosowaniu modelu kodem w Julia (JuMP), wyznaczamy optymalną ścieżkę minimalizującą koszt przejazdu w zadanym czasie T.

Część (b) Propozycja własnego egzemplarza problemu

Tworzymy problem z co najmniej 10 miastami i krawędziami tak dobranymi, aby najtańsza trasa spełniająca ograniczenie czasu miała co najmniej 3 krawędzie i większy koszt niż najtańsza trasa bez ograniczeń. Przykład może obejmować:

- $N = \{1, \ldots, 10\}$,
- $i^\circ = 1$, $j^\circ = 10$, $T = 12$,
- Krawędzie: $(1, 2, 5, 4), (2, 3, 4, 2), (3, 10, 7, 6), (1, 4, 6, 5), (4, 10, 4, 4)$.

Rozwiązując model, znajdziemy ścieżkę spełniającą ograniczenia czasu oraz drugą, najtańszą trasę bez tego ograniczenia.

Część (c) Czy zmienne całkowitoliczbowe są konieczne?

Ograniczenie na całkowitoliczbowość jest potrzebne. Bez tego model nie zapewni wyraźnego wyboru połączeń w ścieżce, co prowadziłoby do wyników w postaci ułamkowej – czyli częściowych przejazdów między miastami. Przykładowo, dla ścieżki $(1 \to 2), (2 \to 10)$ przy założeniu minimalizacji kosztów bez ograniczeń, optymalizacja mogłaby wyznaczyć połączenia z wartościami ułamkowymi, co jest nielogiczne dla problemu tras przejazdu.

Część (d) Usunięcie ograniczenia czasu i wpływ na poprawność rozwiązania

Jeśli usuniemy ograniczenie na czas przejazdu, otrzymana ścieżka minimalizująca koszty niekoniecznie będzie spełniać wcześniejsze ograniczenie czasowe. Zatem, mimo że rozwiązanie optymalizacyjne bez ograniczeń będzie miało najniższy koszt, nie zawsze będzie dopuszczalne, jeśli wciąż zależy nam na spełnieniu limitu czasu T.

5 Zadanie 5

Model ten rozwiązuje problem przydziału radiowozów do trzech dzielnic w miasteczku, z uwzględnieniem minimalnych i maksymalnych liczby radiowozów dla każdej zmiany oraz minimalnych wymagań dla dzielnic i zmian. Model oparty jest na programowaniu liniowym i wykorzystuje bibliotekę JuMP do optymalizacji.

Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienne decyzyjne x_{ijk}, które reprezentują liczbę radiowozów przydzielonych do dzielnicy i w zmianie j, gdzie:

$$x_{ijk} \geq 0$$

oraz x_{ijk} jest liczbą całkowitą.

Funkcja celu

Celem jest minimalizacja całkowitej liczby radiowozów. Funkcja celu wyraża się następująco:

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ijk}$$

gdzie:

- 3: liczba dzielnic (p1, p2, p3),
- 3: liczba zmian.

Ograniczenia

1. **Ograniczenia minimalnej liczby radiowozów dla każdej zmiany**: Dla każdej zmiany j muszą być dostępne określone liczby radiowozów, oznaczone jako m_j. Ograniczenia te mają postać:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ijk} \geq m_j$$

2. **Ograniczenia minimalnej liczby radiowozów dla dzielnic**: Każda dzielnica i powinna mieć przypisaną określoną minimalną liczbę radiowozów, oznaczoną jako d_i. Ograniczenie dla każdej dzielnicy ma postać:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ijk} \geq d_i$$

3. **Ograniczenia maksymalnej liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy**: Dla każdej dzielnicy i i każdej zmiany j nie może być więcej radiowozów niż maksymalna liczba, oznaczona jako M_{ij}:

$$x_{ijk} \leq M_{ij}$$

6 Zadanie 6

Model ten rozwiązuje problem rozmieszczenia kamer w terenie składowym, w którym kontenery z cennym ładunkiem muszą być monitorowane. Teren podzielony jest na siatkę o wymiarach $m \times n$, a kamery muszą być umieszczone w taki sposób, aby każdy kontener był monitorowany przez co najmniej jedną kamerę. Celem jest minimalizacja liczby użytych kamer.

Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienne decyzyjne x_{ij}, które reprezentują, czy kamera jest umieszczona w kwadracie (i, j):

$$x_{ij} \geq 0$$

oraz x_{ij} jest liczbą całkowitą (0 lub 1).

Funkcja celu

Celem jest minimalizacja liczby kamer:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

gdzie:

- m: liczba wierszy w siatce,
- n: liczba kolumn w siatce.

Ograniczenia

1. **Ograniczenie dotyczące kontenerów**: Dla każdego kontenera (i, j) musi być spełniony warunek, że suma kamer w zasięgu wynosi co najmniej 1:

$$\sum_{k=max(i-k,1)}^{min(i+k,m)} \sum_{l=max(j-k,1)}^{min(j+k,n)} x_{kl} \geq 1$$

   gdzie k to zasięg kamery.

2. **Ograniczenie dotyczące braku kamer w kontenerach**: Nie można umieszczać kamer w kwadratach zajmowanych przez kontenery:

$$x_{ij} = 0 \quad \text{jeżeli } containers_{ij} = 1$$