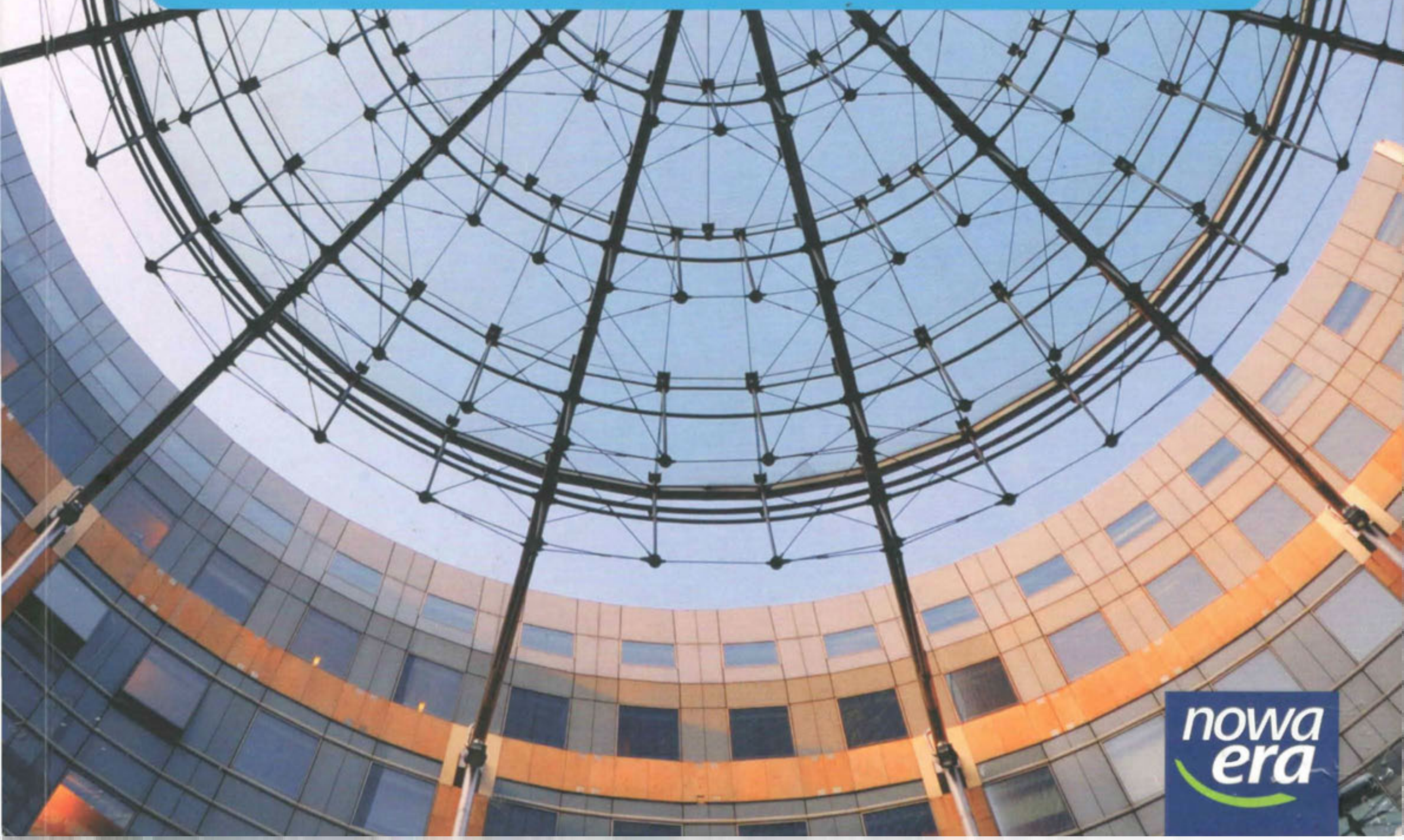
NOWE ZADANIA

teraz matura

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

ZBIÓR ZADAŃ I ZESTAWÓW MATURALNYCH



nowa era

Wojciech Babiański • Lech Chańko • Joanna Czarnowska
Barbara Mojsiewicz • Jolanta Wesołowska

teraz matura

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony

ZBIÓR ZADAŃ I ZESTAWÓW MATURALNYCH

nowa era
Twoje mocne strony

teraz matura

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony

ZBIÓR ZADAŃ I ZESTAWÓW MATURALNYCH

nowa era

ISBN 978-83-267-3520-2

Konsultacje merytoryczne: Małgorzata Jarosławska, Jacek Klisowski, Artur Miśkiewicz, Agnieszka Suska
Opracowanie merytoryczne i redakcja merytoryczna: Anna Drążek, Małgorzata Trzeciak
Opracowanie redakcyjne: Anna Dubiel
Redakcja językowa: Zofia Psota, Janusz Uhma
Korekta językowa: Magdalena Stec
Nadzór artystyczny: Kaia Juszczak
Projekt okładki: Małgorzata Gregorczyk, Maciej Galiński
Projekt graficzny: Małgorzata Gregorczyk, Maciej Galiński, Paulina Tomaszewska, Ewa Kaletyn, Aleksandra Szpunar
Skład systemem TEX: Dorota Chańko
Rysunki: Dorota Chańko
Fotografia na okładce: BE&W/MJS Media/Alamy/Deco

Nowa Era Sp. z o.o.
Al. Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
Tel.: 22 570 25 80; faks: 22 570 25 81
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Druk i oprawa: ArtDruk Kobyłka

Spis treści

1. Zadania powtórzeniowe

2. Zestawy maturalne

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
1. **Liczby rzeczywiste**
2. **Wyrażenia algebraiczne**

Vademecum, 1. s. 16–21, 2. s. 37–38

Przy każdym dziale znajdują się odnośniki do omówienia zagadnień teoretycznych w publikacji *Teraz matura. Vademecum. Matematyka. Poziom rozszerzony*, Nowa Era, 2015.

Każdy dział pierwszej części zbioru został podzielony na zestawy:
Zestaw A – zadania powtórzeniowe,
Zestaw B – zadania zamknięte,
Zestaw C – zadania z kodowaną odpowiedzią,
Zestaw D – zadania otwarte.

W drugiej części zbioru znajduje się 10 zestawów maturalnych.

Część trzecia zawiera odpowiedzi do wszystkich zadań oraz modele rozwiazań zadań otwartych.

W sekcji „Schematy oceniania zadań otwartych” przedstawiono na przykładach kryteria oceniania zadań otwartych.

Zbiór kończą uaktualnione tablice wzorów matematycznych Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (CKE). Tablice te będą dostępne dla uczniów na egzaminie maturalnym.

Symbolem CKE oznaczono zadania pochodzące z „Informatora CKE”, „Przykładowego arkusza maturalnego CKE” lub z matur z lat ubiegłych. Rozwiązania tych zadań zostały opracowane na podstawie materiałów CKE.
Symbolem CKE oznaczono zadania pochodzące z matur CKE z danego roku (2015–2018).

Zadania powtórzeniowe

1. Liczby, zbiory i wartość bezwzględna

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
1. Liczby rzeczywiste
2. Wyrażenia algebraiczne
zob.
Vademecum, 1. s. 16–21, 2. s. 37–38

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 148

1. Oblicz.

a) $\left(\left(\sqrt{13}+2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sqrt{13}-2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$

b) $\dfrac{64^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{8}}{0{,}5^{-4}\cdot\sqrt[4]{4}}-\log_4^2 32-\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{6}$

c) $3^{\log_9 27}+\log_{\frac{1}{3}}9-\sqrt{3}^{\log_3 16}$

d) $\dfrac{\left(6^{-1}-\sqrt{3}^{-4}\right):\left(0{,}5^{-2}+\sqrt[3]{-8^{-1}}\right)}{\log_8 0{,}5\cdot\log_{32}2-1\frac{2}{3}:\left(-2\frac{1}{2}\right)}$

2. Oblicz.

a) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2$

b) $\sqrt{2(2-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{2(2+2\sqrt{2})^2}$

c) $\left[\left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

d) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

3. Wykaż, że zachodzi równość.

a) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\sqrt{4(7-4\sqrt{3})}=3$

b) $\sqrt{9-4\sqrt{2}}+1=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}+2\left(\sqrt[4]{5}+1\right)=\left(1+\sqrt[4]{5}\right)^2$

d) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}}$

4. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\dfrac{6}{3-2\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{2}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$

5. Uprość wyrażenie.

a) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^4+2x^3y+x^2y^2}}$, $x,y>0$

b) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $x,y>0$

c) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$, $x\neq y$

d) $\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}-\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}$, $x>1$

6. Wykaż, że dla $x>0$ i $y>0$ prawdziwa jest nierówność:

a) $2xy\leqslant x^2+y^2$, b) $\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$, c) $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{2x}\geqslant 2$.

7. Uzasadnij, że suma:

a) trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3,

b) czterech kolejnych liczb podzielnych przez 4 jest podzielna przez 8,

c) pięciu kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 15.

8. a) Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

b) Wykaż, że sześcian sumy dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielny przez 64.

9. Dana jest liczba trzycyfrowa x. Liczba y powstaje przez zamianę cyfry jedności z cyfrą setek w liczbie x. Uzasadnij, że różnica liczb x i y jest podzielna przez 9 oraz przez 11.

10. Znajdź dwie liczby naturalne podzielne przez 31, których suma jest równa 155.

11. Rozłóż daną liczbę na czynniki pierwsze.

a) 180 b) 864 c) 924 d) 2520

12. Oblicz największy wspólny dzielnik oraz najmniejszą wspólną wielokrotność liczb x i y.

a) $x = 8$, $y = 52$
c) $x = 20$, $y = 135$
e) $x = 504$, $y = 588$
b) $x = 24$, $y = 64$
d) $x = 22$, $y = 125$
f) $x = 12$, $y = 1680$

13. a) Przez jaką liczbę należy podzielić liczby 331 i 459, aby w obu przypadkach otrzymać resztę z dzielenia równą 11?

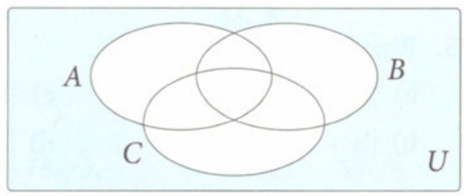
b) Przez jaką liczbę należy podzielić liczby 589 i 667, aby otrzymać reszty z dzielenia równe odpowiednio 1 i 7?

14. Wyznacz dwie kolejne liczby naturalne, których różnica kwadratów jest równa 65.

15. a) Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych a i b, dla których $a^2 - b^2 = 36$.

b) Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych a i b, dla których $a^2 - b^2 = 15$.

16. Umieść na diagramie (takim, jak przedstawiony na rysunku obok) liczby naturalne od 1 do 10, jeśli:
$A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$,
$A \cap C = \{6, 8\}$, $B \cap C = \emptyset$, $A \setminus C = \{3, 4, 7, 9\}$,
$B \setminus C = \{2, 3, 4\}$.



17. Wyznacz zbiory $(A \cap B) \setminus C$ oraz $(A \setminus B) \cap C$.

a) $A = (-2; 3)$, $B = \langle -1; 5 \rangle$, $C = (-\infty; 0\rangle$

b) $A = (-\infty; 7)$, $B = \langle 4; 6)$, $C = (2; \infty)$

c) $A = \langle 2; 4 \rangle$, $B = (2; 6)$, $C = (-\infty; 2\rangle$

d) $A = \langle 0; 7 \rangle$, $B = (-2; 3\rangle \cup (4; 6)$, $C = (-\infty; -4\rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$

18. Wyznacz zbiory $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, $A' \cap B'$, $A' \cup B'$.

a) $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = (0; 4)$
c) $A = (-1; 0\rangle$, $B = \langle 2; \infty)$
b) $A = (-\infty; 4\rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle$
d) $A = \langle 1; 6 \rangle$, $B = (2; 3\rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$

19. Wyznacz zbiory $(A \setminus B)'$ oraz $A' \setminus B'$.

a) $A = \langle -2; 4 \rangle$, $B = \langle 0; \infty)$

b) $A = (-\infty; 5)$, $B = \langle -1; 2 \rangle \cup (4; 6)$

20. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = (-\infty; \sin 150^\circ \rangle$, $B = (\cos(-90^\circ); \operatorname{tg} 240^\circ)$

b) $A = \left\langle \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}; 9^{\log_3 2} \right\rangle$, $B = \left(8^{-\frac{2}{3}}; 8^{\frac{2}{3}}\right)$

21. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A' \cap B'$.

$$A = \{x \in \mathbf{R}\colon |x-1| = 1 - x\},\ B = \{x \in \mathbf{R}\colon |2x-1| = 2x - 1\}$$

22. Wyznacz zbiór $A \setminus B$, jeżeli $A = \left\langle -\sqrt{2} \cdot 0{,}5^{-\frac{3}{2}}; 6 \right\rangle$ i $B = \{x \in \mathbf{R}\colon |x-1| > 4\}$.

23. Korzystając z własności wartości bezwzględnej, wykaż, że dla podanych wartości x prawdziwa jest równość.

a) $|6x - 9| \cdot \dfrac{4}{|6 - 4x|} = 6$ dla $x \neq \frac{3}{2}$

b) $3\sqrt{x^2 + 8x + 16} + \sqrt{36 - 36x + 9x^2} = 18$ dla $x \in \langle -4; 2 \rangle$

c) $\dfrac{\sqrt{4x^2 + 16x + 16}}{x + 2} = 2$ dla $x > -2$

d) $\dfrac{\sqrt{36 - 24x + 4x^2} + |x - 3|}{\sqrt{9 - 6x + x^2}} = 3$ dla $x \neq 3$

24. Rozwiąż równanie.

a) $||x| - 1| = 3$

b) $||x| + 3| = 1$

c) $||x + 1| - 3| = 2$

d) $||x - 2| + x| = 4$

e) $|x - 1| + |x| = 2$

f) $|2x + 2| + 3x = |x| + 2$

25. Rozwiąż nierówność.

a) $|5 - |x|| > 3$

b) $||x + 1| - x| \leqslant 2$

c) $|x - 2| - |x| < 4$

d) $|x + 5| - |x - 2| \leqslant 3$

e) $|x + 3| - |x - 1| > 1$

f) $|x - 2| - |x + 3| \geqslant 1 + x$

26. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} < 4 - x$

b) $2\sqrt{x^2 + 2x + 1} > x + 4$

27. Rozwiąż nierówność $||x + \cos 60^\circ| + |x - \operatorname{tg} 45^\circ|| < 4$.

28. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $|x - 1| = m$ ma dwa pierwiastki różnych znaków.

29. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań równania $|x + y| = |x| + |y|$.

30. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań nierówności $|y| \leqslant |x - 1|$.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 148

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba $\left(\sqrt[3]{25}+4+\sqrt[3]{40}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{5}-2\right)$ jest równa:

A. $\log_2 0{,}125$, **B.** $\log_2 0{,}25$, **C.** $\log_2 0{,}5$, **D.** $\log_2 5$.

Zadanie 2. (1 pkt) CKE 2018
Dane są liczby: $a=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, $b=\frac{1}{2\sqrt[4]{8}}$, $c=\sqrt[4]{8}$, $d=\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ oraz $k=2^{-\frac{1}{4}}$. Prawdziwa jest równość:

A. $k=a$, **B.** $k=b$, **C.** $k=c$, **D.** $k=d$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Liczbą przeciwną do liczby $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ jest:

A. $-2-\sqrt{5}$, **B.** $2-\sqrt{5}$, **C.** $\sqrt{5}-2$, **D.** $\sqrt{5}+2$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Dane są liczby $x=2^{8\sqrt{3}+6}$ i $y=2^{4\sqrt{3}+5}$. Wówczas:

A. $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$, **B.** $y=2\sqrt{x}$, **C.** $y=4\sqrt{x}$, **D.** $y=8\sqrt{x}$.

Zadanie 5. (1 pkt) CKE 2015
Na rysunku przedstawiony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|2x-8|\leqslant 10$.

Stąd wynika, że:

A. $k=2$, **B.** $k=4$, **C.** $k=5$, **D.** $k=9$.

Zadanie 6. (1 pkt) CKE 2015
Liczba $\left(3-2\sqrt{3}\right)^3$ jest równa:

A. $27-24\sqrt{3}$, **B.** $27-30\sqrt{3}$, **C.** $135-78\sqrt{3}$, **D.** $135-30\sqrt{3}$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Wyrażenie $|2\sqrt{3}-x|-|x-\sqrt{3}|$ dla $x\in(2;3)$ jest równe:

A. $\sqrt{3}$, **B.** $3\sqrt{3}$, **C.** $-2x$, **D.** $3\sqrt{3}-2x$.

Zadanie 8. (1 pkt)
Kwadrat różnicy rozwiązań równania $\left|\frac{3}{2}x-1\right|=2$ jest równy:

A. $1\frac{7}{9}$, **B.** $3\frac{1}{9}$, **C.** $3\frac{7}{9}$, **D.** $7\frac{1}{9}$.

Zadanie 9. (1 pkt)
Ile rozwiązań ma równanie $|2|x+3|-3|=3$?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 149

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Liczbę $\frac{60\sqrt{8}+\sqrt{6}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ zapisano w postaci $m+n\sqrt{3}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi.
Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $m-n$.

Zadanie 2. (2 pkt)
Oblicz $a=\frac{(5{,}2\cdot 10^{-6})\cdot(5{,}1\cdot 10^{8})}{(1{,}7\cdot 10^{4})\cdot(1{,}3\cdot 10^{-3})}$ i $b=\left(\left(1\frac{2}{3}\right)^{-9}:\left(8\frac{1}{3}\right)^{-4}\right)\cdot\left(5\frac{2}{5}\right)^{-2}$.
Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby ab.

Zadanie 3. (2 pkt)
Dane są liczby: $k=3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11^6$, $l=2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 13^6$, $m=2^2\cdot 5^4\cdot 14$ i $n=2\cdot 7^3\cdot 11^3\cdot 44$. Liczba a jest największym wspólnym dzielnikiem liczb k i l, a liczba b – największym wspólnym dzielnikiem liczb m i n. Oblicz $\frac{a}{b}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt) CKE 2015
Dane są liczby a, b takie, że $a-b=4$ i $ab=7$. Oblicz a^3b+ab^3. Zakoduj w kratkach poniżej kolejno, od lewej do prawej, cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 5. (2 pkt)
Liczba r jest najmniejszą liczbą rzeczywistą spełniającą nierówność $\left|\frac{x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right|\leqslant\sqrt{2}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby r.

Zadanie 6. (2 pkt) CKE
Liczba n jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą równanie:

$$2|x+57|=|x-39|$$

Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $|n|$.

Zadanie 7. (2 pkt)
Liczba a jest iloczynem wszystkich liczb spełniających równanie $\left|\frac{1}{2}|x+1|-4\right|=3$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby a.

Zestaw D. Zadania otwarte

◀ odpowiedzi i modele – s. 149

Zadanie 1. (4 pkt) CKE

Porównaj liczby a^b oraz b^a, gdzie $a = \left[(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right]^2$, $b = \frac{81^{-1}\cdot\sqrt{3}}{27^{-2}\cdot\sqrt[4]{9}}$.

Zadanie 2. (4 pkt)

Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ jest całkowita.

Zadanie 3. (5 pkt)

Uporządkuj rosnąco wartości a, b, c i d, jeżeli: $|1+3a| + \sqrt{2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}^{\log_2 \frac{1}{9}}$,

$c = \sin 390^\circ + \cos 540^\circ$, $d = \sqrt{12-8\sqrt{2}} - \frac{1}{2}|5-4\sqrt{2}|$.

Zadanie 4. (3 pkt) CKE 2015

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$.

Zadanie 5. (4 pkt)

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej k liczba $(k^3+k^2)(k^2+3k+2)(k+2)$ jest podzielna przez 36.

Zadanie 6. (3 pkt) CKE

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.

Zadanie 7. (3 pkt)

Wykaż, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ zachodzi nierówność $\frac{9x^4+1}{x^2} \geqslant 6$.

Zadanie 8. (2 pkt) CKE

Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $ab \leqslant \frac{1}{4}$.

Zadanie 9. (3 pkt) CKE 2015

Wykaż, że jeżeli $a > b \geqslant 1$, to $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$.

Zadanie 10. (5 pkt)

Rozwiąż nierówność $|x-2| + \sqrt{x^2+2x+1} < 5$.

Zadanie 11. (4 pkt) CKE

Rozwiąż nierówność $|2x+4| + |x-1| \leqslant 6$.

Zadanie 12. (4 pkt)

Dane jest równanie $|mx| + |m| = 4$, w którym x jest niewiadomą.

a) Rozwiąż równanie dla $m = 2$.

b) Dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązania?

Zadanie 13. (4 pkt) CKE

Rozwiąż nierówność $|x^2 - 3x + 2| \geqslant |x - 1|$.

Zadanie 14. (4 pkt) CKE

Wykaż, że prawdziwa jest równość $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3$.

Zadanie 15. (3 pkt) CKE

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leqslant 2$.

Zadanie 16. (3 pkt) CKE

Uzasadnij, że jeżeli $2a + b \geqslant 0$, to $2a^3 + b^3 \geqslant 3a^2b$.

Zadanie 17. (3 pkt)

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

$$(x+1)(x+2) + (y+1)(y+2) + 1 \geqslant (x+2)(y+2)$$

Zadanie 18. (3 pkt) CKE

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$$

Zadanie 19. (3 pkt) CKE

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność:

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geqslant 0$$

Zadanie 20. (3 pkt)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Zadanie 21. (4 pkt) CKE

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geqslant \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

Zadanie 22. (3 pkt)

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczba $(k^2 - 1)(k^2 + 2k)$ jest podzielna przez 24.

Zadanie 23. (3 pkt) CKE

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

2. Funkcje. Funkcja liniowa

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
1. Funkcje
2. Równania i nierówności

Vademecum, 1. s. 97–102, 2. s. 59–64

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 153

1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Oblicz $f(1-\sqrt{3})$, $f(2-\sqrt{3})$, $f\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+1}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2} + \frac{1}{x^2-9}$

c) $f(x) = \sqrt{-x} - \sqrt{2-x}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{3-0{,}5x}}{\sqrt{4+x}} - \frac{3}{|x|-3}$

3. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{3-x} - 3\sqrt{x+1}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4\sqrt{2}x+8}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

4. Dana jest funkcja $f(x) = x - |x|$. Zapisz wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres.

a) $g(x) = f(x+1)$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = -f(x) + 2$

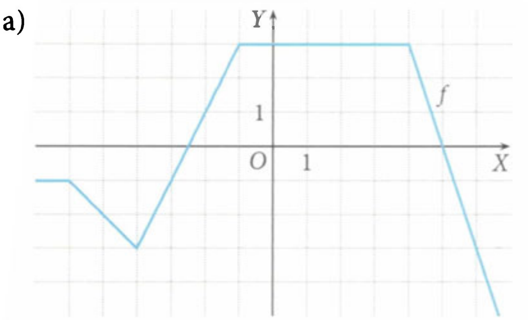
d) $g(x) = -f(-x)$

e) $g(x) = |f(x)|$

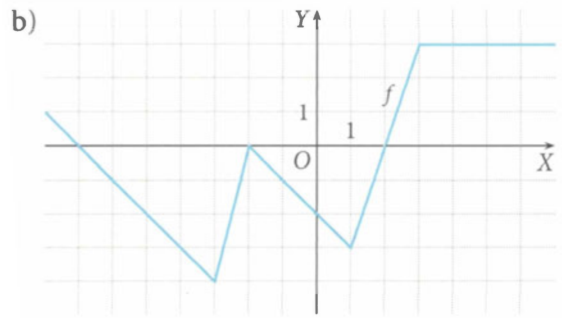
f) $g(x) = f(|x|)$

5. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = |f(-x)|$ i $h(x) = f(1-|x|)$. Odczytaj z wykresów przedziały monotoniczności funkcji f, g i h.

a)



b)



6. Funkcja f, określona na przedziale $\langle -6; 6\rangle$, dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in \langle -6; -3\rangle \\ 1-x & \text{dla } x \in (-3; 3) \\ x-5 & \text{dla } x \in \langle 3; 6\rangle \end{cases}$$

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x+2) - 1|$. Określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

b) Naszkicuj wykres funkcji $h(x) = f(1-x)$ i określ jej dziedzinę.

7. Naszkicuj wykresy funkcji f oraz $g(x) = f(2-x)$.

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

b) $f(x) = x - 2\sqrt{x^2}$

c) $f(x) = ||x| - 2|$

d) $f(x) = \left|\sqrt{(x-1)^2} - 3\right|$

8. Wyznacz wzór funkcji liniowej f, która dla każdej liczby rzeczywistej x spełnia warunek:

a) $f(x+1) = 2x - 3$,

b) $f(-x+3) = x + 5$.

9. a) Miejsca zerowe dwóch funkcji liniowych są liczbami przeciwnymi. Wykresy tych funkcji przecinają się w punkcie $(2, 4)$ i wraz z osią OX ograniczają trójkąt o polu 12. Wyznacz wzory tych funkcji.

b) Miejsca zerowe dwóch funkcji liniowych są liczbami odwrotnymi. Wykresy tych funkcji przecinają się w punkcie $(0, 3)$ i wraz z osią OX ograniczają trójkąt o polu 4. Wyznacz wzory tych funkcji.

10. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb (x, y) spełniająca nierówność $x + y \geqslant 1$?

a) $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} my - 9x = -4 \\ mx - y = m \end{cases}$

11. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru a.

a) $1 + 4x = 6a - x$

b) $3x - 1 = a + 2 - ax$

c) $2x - a = ax + 1$

d) $a^2x - 2 = 4x + a$

12. Naszkicuj wykres funkcji f i określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = |x| - |x-1|$

b) $f(x) = |x+2| + |x-2|$

c) $f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

d) $f(x) = ||x-1| - 3|$

13. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 2|x| + 4y = -2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2|x| + y = 0 \\ x - |y| = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ 4|x| - y = 1 \end{cases}$

14. Podaj liczbę elementów zbioru A.

a) $A = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbf{C} \text{ i } 2x - y + 2 \geqslant 0 \text{ i } x - 2y - 2 < 0 \text{ i } x \leqslant 0\}$

b) $A = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbf{C} \text{ i } x - 3y + 2 > 0 \text{ i } 2x - y + 1 < 0 \text{ i } y > 0\}$

15. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań układu nierówności.

a) $\begin{cases} 2x + y - 4 \leqslant 0 \\ |x| + y \geqslant 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |x - y| \leqslant 6 \\ |y| \geqslant |x| \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - |x| \leqslant 1 \\ |x| + |y| \leqslant 2 \end{cases}$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 156

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Prosta l przechodzi przez punkty $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ i $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$. Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej l jest równy:

A. $-\frac{13}{10}$, **B.** $-\frac{11}{12}$, **C.** $\frac{12}{11}$, **D.** $\frac{10}{13}$.

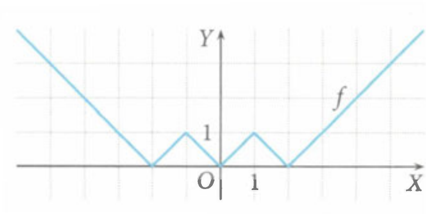
Zadanie 2. (1 pkt)
Dla jakiej wartości parametru m prosta przechodząca przez punkty $A(1, -3)$ i $B(3m+1, -3m)$ jest prostopadła do prostej $2x - 3y + 3 = 0$?

A. $m = -2$ **B.** $m = -\frac{3}{2}$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 3$

Zadanie 3. (1 pkt) CKE 2015
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ ||x+3| - 4| & \text{dla } x > 0 \end{cases}$
Równanie $f(x) = 1$ ma dokładnie:

A. jedno rozwiązanie, **B.** dwa rozwiązania, **C.** cztery rozwiązania, **D.** pięć rozwiązań.

Zadanie 4. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = |||x| - 1| - 1|$. Funkcja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dana jest wzorem $g(x) = ||2x| - 2|$. Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g?



A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 5. (1 pkt) CKE 2018
Równanie $||x| - 2| = |x| + 2$

A. nie ma rozwiązań,
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie,
C. ma dokładnie dwa rozwiązania,
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Zadanie 6. (1 pkt)
Ile liczb całkowitych należy do dziedziny funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 6}{\sqrt{4 - x}} + \sqrt{8 - |x+1|}$?

A. 13 **B.** 10 **C.** 8 **D.** 6

Zadanie 7. (1 pkt)
Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest malejącą funkcją liniową taką, że $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$. Jeśli $g(x) = f\left(-\frac{3}{2} - 2x\right)$, to miejsce zerowe funkcji g jest równe:

A. $\frac{3}{4}$, **B.** $-\frac{3}{4}$, **C.** $-\frac{5}{6}$, **D.** $-\frac{7}{12}$.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 156

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Liczba a jest współczynnikiem kierunkowym prostej przechodzącej przez punkty $A\left(\sqrt{5}-2, 3\right)$ i $B\left(3-\sqrt{5}, 1-4\sqrt{5}\right)$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby a.

Zadanie 2. (2 pkt)
Liczby m_1 i m_2, gdzie $m_1 < m_2$, są takimi wartościami parametru m, dla których proste $(m+1)x + 3my + 6 = 0$ i $mx + (3-m)y + m^2 = 0$ są równoległe. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $100m_2$.

Zadanie 3. (2 pkt)
Do zbioru X należą punkty leżące na prostej $y = \frac{3}{4}x + 400$, których współrzędne (x, y) spełniają następujące warunki: x i y są liczbami całkowitymi oraz $x < 0$ i $y > 0$. Wyznacz liczbę elementów zbioru X. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)
Liczba m jest najmniejszą, a liczba n – największą liczbą całkowitą należącą do dziedziny funkcji:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-3-x}}{\sqrt{6-|x+2|}}$$

Oblicz $\frac{m}{n}$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 5. (2 pkt)
Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = |x|$ o wektor:

$$\vec{v} = \left[\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2}\right]$$

Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji g. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $|x_1 - x_2|$.

Zadanie 6. (2 pkt)
Dane są funkcje $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 2 \\ x-1 & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$ oraz $g(x) = -f(-x)$.

Oblicz $a = g(-\sqrt{5}) \cdot g(-\sqrt{3}) \cdot g(-\sqrt{2})$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $|100a|$.

Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi i modele – s. 156

Zadanie 1. (3 pkt)
Dla jakiej wartości parametru m rozwiązaniem równania $|x-1| = m+2$ jest para liczb o przeciwnych znakach?

Zadanie 2. (4 pkt)
Naszkicuj wykresy funkcji f oraz $g(x) = |f(x)|$. Podaj liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$ w zależności od parametru m, jeżeli:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x < 1 \\ \sqrt{x} - 2 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Zadanie 3. (4 pkt)
Naszkicuj wykresy funkcji f oraz $g(x) = f(1-x)$, jeżeli:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2}x^3 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

Z wykresu odczytaj rozwiązanie nierówności $g(x) \geqslant 0$.

Zadanie 4. (4 pkt)
Dla jakich wartości parametru m proste $(m+1)x - my - 4 = 0$ i $3x + (2-m)y - 6m = 0$ przecinają się w punkcie leżącym na osi OX?

Zadanie 5. (4 pkt) CKE
Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$.

a) Dla $a = 2008$ i $b = 2009$ zbadaj, czy do wykresu tej funkcji należy punkt $P = (2009, 2009^2)$.

b) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór:

$$A = \{(x,y)\colon x \in \langle -1; 3\rangle,\ y = -\tfrac{1}{2}x + b,\ b \in \langle -2; 1\rangle\}$$

Zadanie 6. (4 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = |x+4| - |x-2|$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Podaj jej miejsca zerowe.

c) Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

Zadanie 7. (6 pkt)
Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ 2x - y = m \end{cases}$$

jest para liczb (x, y) spełniająca nierówność $|x - y| \leqslant 1$?

Zadanie 8. (4 pkt) CKE 2016
Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których wykresy funkcji f i g, określonych wzorami $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = 5 - ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich.

3. Funkcja kwadratowa

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
1. Funkcje
2. Równania i nierówności

zob.
Vademecum, 1. s. 102–105, 2. s. 64–68

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 159

1. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y = x^2 + 4x - 5$ przez symetrię względem:
   a) osi OX, b) osi OY, c) punktu $O(0,0)$, d) prostej $y = -5$.

2. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji g?
   a) $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$ b) $g(x) = 2x^2 + 2x$ c) $g(x) = 2x^2 + 4x - 2$

3. Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -x^2$ o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór funkcji h, którą otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $-2\vec{u}$.
   a) $g(x) = -(x+1)^2 - 6$ b) $g(x) = -x^2 - x$ c) $g(x) = -x^2 + 6x + 4$

4. Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u}$. Naszkicuj wykres otrzymanej funkcji i podaj jej wzór.
   a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $\vec{u} = [1,3]$ b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$, $\vec{u} = [-1,-2]$

5. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ w przedziale $\langle 0;4\rangle$.

6. Dana jest funkcja $f(x) = mx^2 + (m-6)x + 8 - m$. Dla jakich wartości parametru m zbiór wartości tej funkcji jest równy $(-\infty;18\rangle$?

7. Dla jakich wartości parametru m funkcja:
   a) $f(x) = (3+m)x^2 - mx + m$ ma najmniejszą wartość równą -3,
   b) $f(x) = (2-m)x^2 + mx + m - 4$ ma największą wartość równą 2?

8. Dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji f należy do podanego przedziału?
   a) $f(x) = x^2 + x + m^2 - m + \frac{1}{4}$, $\langle 2;6\rangle$ b) $f(x) = (m-1)x^2 + 3mx + 4 + 2m$, $(-\infty;0)$

9. Ile rozwiązań ma równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, jeżeli $a \neq 0$ i $a - b + 2c = 0$?

10. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (4-2m)x + m + 10 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tych samych znaków?

11. Dla jakich wartości parametru m równanie:
    a) $(2-m)x^2 + (3-m)x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne,
    b) $mx^2 + (2m+1)x + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

12. Wyznacz wartości b i c, dla których miejsca zerowe x_1 i x_2 funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ spełniają warunki:

a) $x_1 = 1$, $x_1x_2 = -2$,

b) $x_1 = 2$, $x_1 + x_2 = 3$,

c) $x_1x_2 = 6$, $x_1^2 + x_2^2 = 13$,

d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$, $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 10$.

13. Wyznacz wartości parametru m, dla których dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 równania $(4-m)x^2 + (m-4)x + 2 = 0$ spełniają nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$.

14. a) Wyznacz wartości parametru m, dla których suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (m+2)x + 3m - 2 = 0$ jest większa od 7.

b) Wyznacz wartości parametru m, dla których kwadrat sumy dwóch różnych pierwiastków równania $(4-m)x^2 + mx - m = 0$ jest większy od 1.

c) Wyznacz wartości parametru m, dla których suma odwrotności kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 2mx - x - 1 = 0$ jest równa 3.

15. Suma dwóch różnych miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest równa 4, a suma ich odwrotności jest równa $-\frac{1}{3}$. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli $f(0) = -12$.

16. Dla jakich wartości parametru m dana nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą?

a) $x^2 + (m+1)x + 3m + 3 > 0$

b) $(m+4)x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$

c) $-x^2 + (2+m)x - 2m - 1 \leqslant 0$

d) $(m^2-4)x^2 + 2mx - 1 < 0$

17. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $(x^2-9)\sqrt{x-2} = 0$

e) $\sqrt{4x-7} = x - 1$

f) $\sqrt{2x+5} - 1 = x$

18. Rozwiąż równanie.

a) $|x^2 - 6| = 2$

b) $x^2 - |4x+8| + 3 = 0$

c) $x^2 + |x| - 12 = 0$

d) $|x^2-4| + |x^2-1| = 4x + 1$

19. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 3|x+6| > 0$

b) $x^2 - |x-3| \geqslant 2x + 3$

c) $\sqrt{4-x^2} > x + 2$

d) $\sqrt{x^2+7} > \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}$

20. Naszkicuj wykres funkcji f. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = |x^2 + 2x| - 4$

b) $f(x) = |x^2 - 9| - 2x$

c) $f(x) = |x^2 - 4| + x^2$

d) $f(x) = |x^2 - 4| - |x + 2|$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 160

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Punkt $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + bx + c$$

Wynika stąd, że wyrażenie $8b - 6c$ przyjmuje wartość równą:

A. -3, **B.** -2, **C.** 2, **D.** 3.

Zadanie 2. (1 pkt)
Suma kwadratów pierwiastków równania $\sqrt{6}x^2 - \sqrt{6} = 3x$ jest równa:

A. $\frac{7}{2}$, **B.** $\frac{9}{2}$, **C.** $\frac{11}{2}$, **D.** $\frac{13}{2}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Jednym z rozwiązań równania $x^2 + x + c = 0$ jest liczba $\frac{2-\sqrt{5}}{4}$. Wynika stąd, że liczba c należy do przedziału:

A. $\left\langle -1; -\frac{1}{2}\right)$, **B.** $\left\langle -\frac{1}{2}; 0\right)$, **C.** $\left\langle 0; \frac{1}{2}\right)$, **D.** $\left\langle \frac{1}{2}; 1\right)$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Jeden z pierwiastków trójmianu kwadratowego $y = 4x^2 + bx - 7$ jest o 4 większy od drugiego. Oś symetrii paraboli będącej wykresem tego trójmianu może być dana równaniem:

A. $x = \frac{3}{2}$, **B.** $x = \frac{5}{2}$, **C.** $x = \frac{7}{2}$, **D.** $x = \frac{9}{2}$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Parabole dane równaniami $y = -x^2 - 4x + 3$ i $y = x^2 + 2x - 5$ przecinają się w punktach (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Iloczyn $x_1 x_2 y_1 y_2$ jest równy:

A. 12, **B.** 16, **C.** 18, **D.** 24.

Zadanie 6. (1 pkt)
Suma odwrotności pierwiastków równania $\frac{2}{13}x^2 - 2\frac{3}{4}x + 2\frac{4}{5} = 0$ jest równa:

A. $\frac{25}{26}$, **B.** $\frac{35}{36}$, **C.** $\frac{45}{46}$, **D.** $\frac{55}{56}$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + 3x - 3 = 0$ jest liczbą podzielną przez:

A. 4, **B.** 5, **C.** 6, **D.** 7.

Zadanie 8. (1 pkt)
Do paraboli, do której należą punkty $A(-2, -3)$ i $B(4, 1)$, nie może należeć punkt:

A. $(-4, 10)$, **B.** $(-1, -3)$, **C.** $(9, 10)$, **D.** $(10, 5)$.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 160

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ o wektor $\left[\frac{17}{4}, \frac{17}{4}\right]$. Parabola będąca wykresem funkcji g ma wierzchołek w punkcie (p, q). Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $|pq|$.

Zadanie 2. (2 pkt)
Funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2, które są liczbami odwrotnymi takimi, że $x_1 < x_2$ oraz $x_1 + x_2 = 4$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_1.

Zadanie 3. (2 pkt)
Oblicz wartość parametru k, dla którego zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + 3x + k - 3$ jest przedział $\langle -2; \infty)$. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby k.

Zadanie 4. (2 pkt)
Liczba $\frac{18-\sqrt{7}}{2}$ jest jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(4, 6)$. Liczba x_2 jest drugim miejscem zerowym tej funkcji. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_2.

Zadanie 5. (2 pkt)
Liczba p jest równa kwadratowi różnicy pierwiastków równania $x^2 + 4x - \frac{1}{4} = 0$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby p.

Zadanie 6. (2 pkt)
Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -1$ i $x_2 = 12$. Oblicz największą wartość tej funkcji. Zakoduj kolejno, od lewej do prawej, cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (2 pkt)
X jest zbiorem całkowitych wartości parametru m, dla których równanie $|-x^2 + 2|x| + 5| = m$ ma cztery rozwiązania. Oblicz sumę sześcianów liczb należących do zbioru X. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zestaw D. Zadania otwarte

◂ odpowiedzi – s. 160
modele – s. 161

Zadanie 1. (4 pkt)
Rozwiąż nierówność $|x^2 - x| - |x - 5| \leqslant 3$.

Zadanie 2. (2 pkt)
Liczby -1 i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f. Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

Zadanie 3. (5 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^3 + 9x^2} - 3x$. Rozwiąż nierówność $f(x) > 0$.

Zadanie 4. (3 pkt)
Zbadaj liczbę pierwiastków równania $x^2 + 2x + |x^2 + 2x| = m$ w zależności od wartości parametru m.

Zadanie 5. (4 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |(x - p)^2 + 2p|$ dla $p = -2$. Dla jakich wartości parametru p równanie $f(x) = 6$ ma dokładnie trzy rozwiązania?

Zadanie 6. (3 pkt)
Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność:

$$20x^2 - 24mx + 18m^2 \geqslant 4x + 12m - 5$$

Zadanie 7. (5 pkt)
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(1 - m)x + 2$$

przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

Zadanie 8. (4 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{(m-2)x^2 + (m-2)x + 1}$. Dla jakich wartości parametru m jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych?

Zadanie 9. (4 pkt)
Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (3 - m)x^2 + mx - m$ przyjmuje wartości ujemne dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

Zadanie 10. (5 pkt)
Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (m - 4)x - 4m = 0$ jest cztery razy większa od sumy tych pierwiastków?

Zadanie 11. (5 pkt)
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m + 2)x + \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których iloczyn i suma są liczbami przeciwnymi?

Zadanie 12. (3 pkt)
Zapisz wzór funkcji f, która każdej liczbie $n \in \mathbf{N}_+$ przyporządkowuje największą liczbę całkowitą x spełniającą nierówność $x^2 - 2nx - 8n^2 < 0$.

Zadanie 13. (3 pkt)
Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji $f(n) = x_1 + x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $nx^2 - (n+2)x + n + 2 = 0$.

Zadanie 14. (4 pkt)
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi – cosinusem tego samego kąta?

Zadanie 15. (5 pkt)
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

Zadanie 16. (5 pkt)
Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$.

Zadanie 17. (6 pkt)
Dla jakich wartości parametru m jedno z rozwiązań równania $\frac{16}{m^2}x^2 - 6mx + m^2 = 0$ jest sześcianem drugiego rozwiązania? Znajdź te rozwiązania.

Zadanie 18. (5 pkt)
Wyznacz wartości parametru m, dla których zbiorem wartości funkcji:

$$f(x) = \tfrac{1}{4}mx^2 + (m-1)x - m^2 + m + 1$$

jest przedział $\langle 1; \infty)$.

Zadanie 19. (6 pkt)
Dla jakich wartości parametru m trójmian kwadratowy $y = (m+1)x^2 + 2x - 4m + 1$ ma przynajmniej jeden pierwiastek dodatni?

Zadanie 20. (7 pkt)
Dla jakich wartości parametru m pierwiastkami równania $x^2 - 2mx - m^2 - 2m + 4 = 0$ są dwie różne liczby ujemne x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$?

Zadanie 21. (6 pkt)
Dane jest równanie $(x+3)[x^2 + (p+4)x + (p+1)^2] = 0$ z niewiadomą x.

a) Rozwiąż to równanie dla $p = 1$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których równanie to ma tylko jedno rozwiązanie.

Zadanie 22. (4 pkt) CKE
Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2+4x+4} \geqslant 11-\sqrt{x^2-6x+9}$.

Zadanie 23. (5 pkt) CKE
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(m+1)x^2-3mx+m+1=0$ ma dwa różne pierwiastki takie, że ich suma jest nie większa niż 2,5.

Zadanie 24. (6 pkt) CKE 2015
Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{m^2+m-6}{m-5}x^2-(m-2)x+m-5$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz całkowite wartości parametru m, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

Zadanie 25. (6 pkt) CKE 2015
Dany jest trójmian kwadratowy $f(x)=x^2+2(m+1)x+6m+1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1-x_2|<3$.

Zadanie 26. (4 pkt) CKE 2016
Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania:

$$k^2x^2+(k-1)x+1=0, \text{ gdzie } k \neq 0$$

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x)=2^m$.

Zadanie 27. (5 pkt) CKE 2017
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie:

$$4x^2-6mx+(2m+3)(m-3)=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2, przy czym $x_1<x_2$, spełniające warunek:

$$(4x_1-4x_2-1)(4x_1-4x_2+1)<0.$$

Zadanie 28. (6 pkt) CKE 2017
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-3mx+2m^2+1=0$ ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty;3)$.

Zadanie 29. (6 pkt) CKE 2018
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+(m+1)x-m^2+1=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), spełniające warunek $x_1^3+x_2^3>-7x_1x_2$.

Zadanie 30. (6 pkt) CKE
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+(2m-5)x+2m+3=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 takie, że $(x_1+x_2)^2 \geqslant x_1^2 \cdot x_2^2 \geqslant x_1^2+x_2^2$.

4. Wielomiany

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
1. Wyrażenia algebraiczne
2. Równania i nierówności

zob.
Vademecum, 1. s. 38–40, 2. s. 54–58, 69

odpowiedzi – s. 169

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + x^2 - 2 = 0$
c) $4x^3 - x^2 - 8x + 2 = 0$
e) $3x^3 + x^2 + x = 2$
b) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
d) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
f) $x^6 + x^4 - 17x^2 + 15 = 0$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 - x + 6 > 0$
c) $2x^3 + x^2 - 10x - 5 < 0$
e) $2x^4 - 3x^2 + 1 < 0$
b) $2x^3 - 12 \leqslant x^2$
d) $3x^3 - x^2 + 6x - 2 \leqslant 0$
f) $x^6 - 7x^3 - 8 \geqslant 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $|x^3 - x^2| = x$
b) $|x^3 - x| + x^2 - 1 = 0$
c) $|8x^3 - 1| = x - 8x^2$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $|x^2 - 2x| \geqslant x^3$
b) $|x^3 - 8| > x^2 + 2x + 4$
c) $\sqrt{x^4 - x^2} \leqslant 4 - x^2$

5. Dla jakich wartości parametru m część wspólna przedziałów:

a) $A = (-\infty; m^3 + 11m\rangle$ i $B = \langle 6m^2 + 6; \infty)$ jest zbiorem jednoelementowym,
b) $A = (-\infty; m^3 - m\rangle$ i $B = \langle 2m - 2; \infty)$ jest zbiorem pustym?

6. Wyznacz zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$, jeśli:

$$A = \{x \in \mathbf{R}\colon 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x \geqslant 0\} \text{ i } B = \{x \in \mathbf{R}\colon x^5 + x^4 - 3x^3 > x^2 - 2x\}$$

7. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $w(x) = x^9 + ax + b$ jest podzielny przez $x^2 - 1$?

8. Wyznacz wartość parametru p tak, by reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q była równa r.

a) $w(x) = x^4 + p^2x^3 + px^2 - x + 3,\ \ q(x) = x - 1,\ \ r = 5$
b) $w(x) = |p|x^3 + x^2 + |p - 1|x + 3,\ \ q(x) = x + 1,\ \ r = 1$

9. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q, a następnie zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$, gdzie $r(x)$ jest resztą z tego dzielenia.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5,\ \ q(x) = 2x - 1$
b) $w(x) = 3x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x - 1,\ \ q(x) = x^2 - 1$
c) $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x - 4,\ \ q(x) = 2x^2 + 2$

10. Liczba 2 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 1$ wynosi 3. Wyznacz wzór tego wielomianu.

11. Dla jakiej wartości p reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa r?

a) $w(x) = 2x^3 - px^2 + x + 1,\ q(x) = x + 2,\ r = \sin \frac{13}{6}\pi$

b) $w(x) = x^3 - p^2x^2 + 2,\ q(x) = x + \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2},\ r = \frac{15}{8}$

12. Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^3 + px^2 - x + 2$ przez $x - 3$ jest równa 8. Wyznacz wartość parametru p oraz wszystkie pierwiastki tego wielomianu.

13. a) Pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^3 + px^2 + qx + 6$ są liczby 1 i -3. Wyznacz wartości współczynników p i q oraz trzeci pierwiastek wielomianu w.

b) Pierwiastkami wielomianu czwartego stopnia są liczby 2 i -2. Wielomian ten jest podzielny przez trójmian $q(x) = x^2 + 2x - 3$. Napisz wzór tego wielomianu, jeżeli wiadomo, że do jego wykresu należy punkt $P(-1, 24)$.

14. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez trójmian $p(x) = x^2 - 4x - 5$, wiedząc, że liczba 5 jest pierwiastkiem wielomianu w oraz $w(-1) = 6$.

15. a) Reszta z dzielenia wielomianu w przez $x - 3$ jest równa 14, a reszta z dzielenia w przez $x + 2$ wynosi 4. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu w przez trójmian $q(x) = x^2 - x - 6$.

b) Reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 1$ jest równa 3, przez $x + 2$ jest równa 6, a przez $x - 3$ wynosi 21. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian $q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

16. Liczba 3 jest pierwiastkiem równania $x^3 - (p + 1)x^2 + 3x + 2p + 1 = 0$. Wyznacz wartość parametru p oraz pozostałe pierwiastki tego równania.

17. a) Dla jakich wartości parametrów p i q liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $x^3 + px^2 + qx + 4 = 0$?

b) Dla jakich wartości parametrów p, q i r liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem równania $x^4 + px^3 + qx^2 + rx - 4 = 0$?

18. Dane są wielomiany $w(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 8$ i $q(x) = (x - 2)^2$. Wyznacz wartości parametrów a i b, dla których wielomian w jest podzielny przez wielomian q.

19. Wyznacz wszystkie wartości parametrów m i n, dla których dziedziną funkcji:

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - x - 6)(x^2 + mx - 2nx - 2mn)}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych.

20. Dla jakiej wartości parametru p wielomian $w(x) = x^3 + px^2 + 2x$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2 i x_3 spełniające warunki $2x_1 = x_2$ oraz $x_3 = 1 - x_1$?

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 169

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Wielomian $w(x) = 2x^3 - bx^2 - 1$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$. Wynika stąd, że:
A. $b = -3$, **B.** $b = -1$, **C.** $b = 1$, **D.** $b = 3$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Równanie $2x^3 - x^2 - 2x + 6 = 0$ ma pierwiastek wymierny należący do przedziału:
A. $(-6;-2\rangle$, **B.** $(-2;0\rangle$, **C.** $(0;2\rangle$, **D.** $(2;6\rangle$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{4}$ przez dwumian $q(x) = x + \frac{3}{4}$ jest równa:
A. $-3\frac{1}{4}$, **B.** $-2\frac{3}{4}$, **C.** $-2\frac{1}{4}$, **D.** $-1\frac{3}{4}$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = \sqrt{6}x^3 - \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}$ przez dwumian $x - a$ jest liczbą wymierną dla:
A. $a = \sqrt{6}$, **B.** $a = 2\sqrt{3}$, **C.** $a = \sqrt{3}$, **D.** $a = \sqrt{2}$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Jeśli wielomian $w(x) = 2x^3 - x - b$ jest podzielny przez dwumian $q(x) = x - a + 1$, to zachodzi równość:
A. $b = 2(a+1)^3 - a + 1$, **C.** $b = 2(a-1)^3 - a + 1$,
B. $b = 2(a+1)^3 + a - 1$, **D.** $b = 2(a-1)^3 + a - 1$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Zbiorem rozwiązań nierówności $(x^2 - 4)(x^2 - x - 6) \leqslant 0$ jest zbiór:
A. $(-\infty;-2\rangle \cup \langle 2;3\rangle$, **C.** $\langle -2;3\rangle$,
B. $\langle -2;2\rangle \cup \{3\}$, **D.** $\{-2\} \cup \langle 2;3\rangle$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $(x^2 - 6)(x + 6)^2 \leqslant 0$?
A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Zadanie 8. (1 pkt)
Dany jest wielomian $w(x) = (x^2 - (2a-2)x - 4a)(x^2 - x - 12)$. Liczba 4 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w dla:
A. $a = 4$, **B.** $a = 2$, **C.** $a = -2$, **D.** $a = -4$.

Zadanie 9. (1 pkt)
Wielomian $w(x) = 6x^3 + 3x^2 - 5x + p$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$ dla p równego:
A. 4, **B.** -2, **C.** 2, **D.** -4.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 169

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Liczby x_1, x_2, x_3, gdzie $x_1 < x_2 < x_3$, są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^3 - 6x + 4$. Oblicz $\frac{x_2}{x_3}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonego ilorazu.

Zadanie 2. (2 pkt)
Oblicz sumę pierwiastków równania $(x^2 - 7)(14x^3 - 13x^2 - 12x) = 0$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego wyznaczonej liczby.

Zadanie 3. (2 pkt)
Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^3 - 2x^2 + ax + \frac{3}{4}$ przez dwumian $x - 2$ jest równa 1. Oblicz wartość współczynnika a. W poniższe kratki wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)
Wyznacz wartość parametru a, dla której reszta z dzielenia wielomianu:

$$w(x) = x^3 - 37ax + x - \frac{1}{8}a^2 + 3$$

przez dwumian $q(x) = x + 2$ przyjmuje największą wartość. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 5. (2 pkt)
Dany jest wielomian $w(x) = 6x^3 - 4x^2$. Liczba a jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x + 3$, a liczba b jest resztą z dzielenia tego wielomianu przez $x - 2$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $|2a - b|$.

Zadanie 6. (2 pkt)
Liczba S jest sumą wszystkich liczb całkowitych spełniających nierówność:

$$(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 60x + 500) \leqslant 0$$

Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby S.

Zadanie 7. (2 pkt)
Liczba n jest największą liczbą naturalną, dla której liczba $\frac{n}{30\sqrt{2}}$ należy do zbioru rozwiązań nierówności $(x^2 - 4)(x^2 + 8x + 12) < 0$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby n.

Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi – s. 169
modele – s. 170

Zadanie 1. (3 pkt)
Dla jakich wartości x liczba $x^3 + x^2 + x$ jest nie mniejsza od liczby $3x^2 + 3x + 3$?

Zadanie 2. (3 pkt)
Jednym z pierwiastków wielomianu $w(x) = (m-1)x^3 + x^2 - 3mx - m$ jest liczba 2. Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki wielomianu w.

Zadanie 3. (4 pkt)
Dla jakich wartości parametru m wielomian $w(x) = 2x^3 - (m+7)x^2 + (m^2 - 2m + 7)x + 6$ jest podzielny przez dwumian $q(x) = x - m$?

Zadanie 4. (4 pkt)
Dla jakich wartości parametrów m i n liczba 2 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^4 - 5x^3 + mx^2 + 4x + n$?

Zadanie 5. (6 pkt)
Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $(m+1)x^4 - (m+1)x^2 + 4m = 0$ ma cztery różne pierwiastki.

Zadanie 6. (3 pkt)
Wielomian $w(x) = x^3 + (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})x^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15})x + \sqrt{30}$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Oblicz sumę kwadratów pierwiastków tego wielomianu.

Zadanie 7. (5 pkt)
Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru $p \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ wielomian:
$$w(x) = px^3 + x^2(p-2) - x(1+2p)$$
ma trzy pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 8. (3 pkt)
Dla jakich wartości parametru p wielomian $w(x) = x^3 + x^2(p+3) + 4px$ ma dokładnie jeden pierwiastek?

Zadanie 9. (4 pkt)
Wykaż, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$ wielomian $w(x) = x^3 - (a-b)x^2 - 2b(a+b)x$ jest podzielny przez dwumian $q(x) = x - a - b$.

Zadanie 10. (4 pkt)
Pierwiastkami wielomianu w o współczynnikach całkowitych są liczby -3, -2 i -1. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $w(n)$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 11. (6 pkt)
Wielomian $w(x) = x^3 + mx^2 + nx + 4$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 1$ jest równa 8. Wyznacz wzór wielomianu w, a następnie rozwiąż nierówność $w(x) \geqslant x^2 - x$.

Zadanie 12. (5 pkt)
Wykaż, że pierwiastkami wielomianu $w(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$ są liczby $x_1 = 2\sin\frac{5\pi}{3}$, $x_2 = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt[4]{8}}{2}\right)$ oraz $x_3 = \sqrt{2}^{\log_2 3}$.

Zadanie 13. (4 pkt)
Wyznacz wartość parametru m, dla której reszta z dzielenia wielomianu:

$$w(x) = 2x^9 + m^3x^8 + (m^2 - 2)x^5 - 4m(1 + m)x^2 + 3mx$$

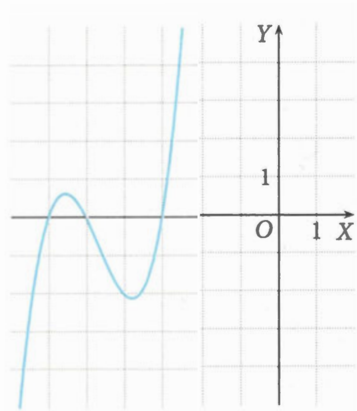
przez dwumian $x + 1$ jest równa 1.

Zadanie 14. (5 pkt)
Wielomian $w(x) = x^7 - 3mx^4 + (2m^2 - 4)x$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Wyznacz wartość parametru m, dla której suma sześcianów pierwiastków wielomianu w jest równa 6.

Zadanie 15. (6 pkt) CKE
Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a, b i c. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

Zadanie 16. (4 pkt) CKE
Pierwiastkami wielomianu stopnia trzeciego są liczby 1, 3, 5. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej tego wielomianu jest równy $\frac{1}{2}$. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 24.

Zadanie 17. (4 pkt) CKE
Wielomian trzeciego stopnia f, którego fragment wykresu przedstawiono na rysunku, spełnia warunek $f(0) = 90$. Wielomian g dany jest wzorem $g(x) = x^3 - 14x^2 + 63x - 90$. Wykaż, że $g(x) = -f(-x)$ dla $x \in \mathbf{R}$.



Zadanie 18. (6 pkt)
Dla jakich wartości parametrów a, b i c wielomian:

$$w(x) = x^5 + ax^4 - bx^3 - 3bx^2 + 2cx + 12$$

jest podzielny przez wielomian $q(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$?

Zadanie 19. (5 pkt)
Wykaż, że dla dowolnego $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ równanie $-x^3 + x^2(2 - m^2) + x(2m^2 + 4) - 8 = 0$ ma trzy pierwiastki. Dla jakiej wartości parametru m suma pierwiastków tego równania jest równa -7?

5. Funkcje wymierne

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
1. Funkcje
2. Równania i nierówności

zob.
Vademecum, 1. s. 106–107, 2. s. 55–56, 58

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

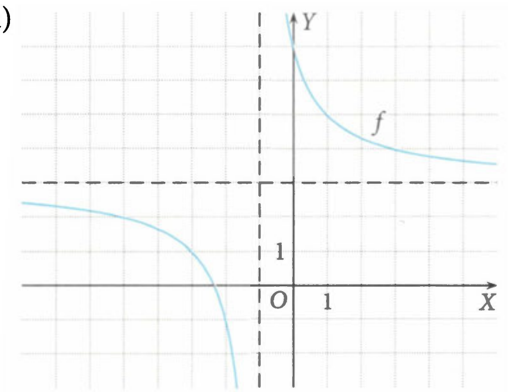
odpowiedzi – s. 174

1. Określ dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2x+4}{mx+2}$ dla:
   a) $m = 0$, b) $m = 1$, c) $m = 2$.

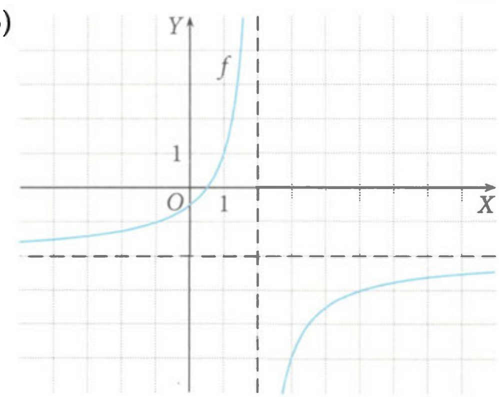
2. Określ wartości parametru m, dla których funkcja f jest homograficzna, oraz te, dla których jest liniowa.
   a) $f(x) = \frac{3x-1}{mx-2}$ b) $f(x) = \frac{4x+m}{2x-1}$ c) $f(x) = \frac{mx-4}{3x+2}$

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$. Wyznacz współczynniki a, p i q oraz przedziały monotoniczności tej funkcji. Podaj wzór funkcji f i wyznacz jej miejsca zerowe.

a)



b)



4. Wykres funkcji g powstał przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór funkcji g, określ jej dziedzinę i zbiór wartości. Naszkicuj wykres funkcji g i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości należące do przedziału $(0;2)$.
   a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [1,2]$ c) $f(x) = -\frac{3}{x-1}$, $\vec{u} = [2,-1]$
   b) $f(x) = \frac{4}{x}$, $\vec{u} = [0,-2]$ d) $f(x) = \frac{-4}{2x-1}$, $\vec{u} = [-\frac{7}{2}, 2]$

5. Podaj współrzędne wektora, o jaki trzeba przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji g.
   a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{2x+5}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = \frac{6x-6}{x-2}$
   b) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{1-3x}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{1}{3x}$, $g(x) = -\frac{6x+1}{3x+1}$

6. Podaj przykład funkcji homograficznej, której wykres ma ten sam środek symetrii co hiperbola o równaniu podanym niżej, ale nie ma z nią punktów wspólnych.

   a) $y = \frac{2x+3}{x-1}$ b) $y = \frac{8-2x}{x+3}$ c) $y = \frac{x+4}{2x+1}$ d) $y = \frac{-x}{2x-1}$

7. Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OY. Podaj równania asymptot wykresu funkcji g i zapisz wzór tej funkcji. Rozwiąż równanie $f(x) = g(x)$.

   a) $f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{2-3x}{x}$

   b) $f(x) = \frac{2x-11}{x-3}$ d) $f(x) = \frac{4x-6}{6x-9}$

8. Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{3x+2}{x+2}$ względem prostej o podanym równaniu. Określ dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji g. Zapisz jej wzór w postaci $g(x) = \frac{a}{x-p} + q$.

   a) $y = 0$ b) $x = -2$ c) $y = -3$ d) $y = -x - 5$

9. a) Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x} - 2$ przesunięto o wektor $\vec{u} = [4, 4]$ i otrzymano wykres funkcji g. Oblicz a, jeżeli funkcje te mają wspólne miejsce zerowe.

   b) Jeśli wykres funkcji $f(x) = \frac{-4}{x-p} + \frac{3}{5}$ przesuniemy o wektor $\vec{v} = \left[2\frac{1}{2}b + 4\frac{1}{2}, \frac{2}{3}b + \frac{2}{5}\right]$, to otrzymamy hiperbolę, której środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

10. Z podanego równania wyznacz y jako funkcję x. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji. Wymień wszystkie pary liczb całkowitych (x, y), które spełniają dane równanie.

   a) $xy + y - 6 = 0$ c) $xy + 4y + 3x + 11 = 0$

   b) $xy - x + 2y = 0$ d) $xy - 2x - 2y + 8 = 0$

11. Z równania $(a+1)xy + y = x - a$ wyznacz y jako funkcję x. Dla jakiej wartości parametru a jest to funkcja homograficzna? Wyznacz wartość parametru a, dla której zbiorem wartości tej funkcji jest $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

12. Sprawdź, ile punktów wspólnych mają podane krzywe.

   a) $y = \frac{1}{x} - 1$, $y = x^2 + 2x - 3$ b) $y = \frac{3}{x} - 1$, $y = \frac{3}{x-4} + 3$

13. Wyznacz wartości parametru m, dla których wykresy funkcji f i g nie mają punktów wspólnych.

   a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = mx$ c) $f(x) = \frac{m}{x}$, $g(x) = -x + 2$

   b) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = mx + 1$ d) $f(x) = \frac{m}{x}$, $g(x) = m - x$

14. Wyznacz wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = \frac{2x-4}{mx+2}$ b) $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2-m}$ c) $f(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x^2+mx+1}$

15. Wyznacz wartości parametru m, dla których zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $(-2;0)$.

a) $\frac{6}{x} < m$ b) $\frac{2}{x+2} > m$ c) $\frac{m}{x} > 6$

16. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 - 2(m+2)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

17. Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m-1)x^2 + 4(m+1)x + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2, które spełniają nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > m$?

18. Dana jest funkcja $f(x) = (m+1)x^2 + mx + 1$. Dla jakich wartości parametru m jej największą wartością jest liczba 2?

19. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{4-x^2} + \frac{1}{x+2} = 2$ c) $\frac{x}{x+3} + \frac{x-1}{3-x} = \frac{x+6}{9-x^2}$

b) $\frac{9-2x}{9x^2-12x+4} - \frac{x}{3x-2} = 0$ d) $\frac{x}{x+5} + \frac{2}{x} = \frac{5+8x}{x^2+5x}$

20. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12} \leqslant 0$ c) $\frac{x}{2x-1} - \frac{3-2x}{x} < -1$

b) $\frac{x^2+6x+8}{x^3-4x} \geqslant 0$ d) $\frac{3}{2x-1} - 1 > \frac{1}{x-2}$

21. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2}{|3x-1|} > 1$ b) $\frac{5}{|x-7|} \leqslant 4$ c) $\frac{3}{|x|-1} \geqslant 2$

22. Rozwiąż algebraicznie oraz graficznie nierówność.

a) $\left|\frac{2x-2}{x-4}\right| > 4$ b) $\left|\frac{x}{x+4}\right| \leqslant 3$ c) $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > x-1$

23. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{8}{x-2} = |x|$ b) $\frac{12}{|x-4|} = x$ c) $\left|\frac{x}{x+4}\right| = 1$ d) $\frac{1}{|x+1|} = \frac{2}{|2x-3|}$

24. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{|x-1|}{x-1} \geqslant x$ b) $\frac{x+2}{|x+2|} < \frac{2}{x-1}$ c) $\frac{|x|}{x-1} > x$ d) $\frac{|x-2|}{x} < x$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 175

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Wykres funkcji $f(x) = \frac{-3}{x-4} + 2$ przesunięto o wektor $[-3, -4]$. Środkiem symetrii otrzymanej hiperboli jest punkt:

A. $(-4, 2)$, **B.** $(-7, -2)$, **C.** $(1, -2)$, **D.** $(4, 2)$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Funkcja $f(x) = \frac{6x-2k}{4x+3}$ nie jest funkcją homograficzną dla pewnej liczby k należącej do przedziału:

A. $\left(-3\frac{1}{2}; -2\frac{1}{2}\right)$, **B.** $\left(-2\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$, **C.** $\left(-1\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, **D.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Ile liczb całkowitych należy do zbioru wartości funkcji $f(x) = \frac{6}{|x|+2}$?

A. 2 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 12

Zadanie 4. (1 pkt)
Ile punktów wspólnych ma prosta $y = x$ z wykresem funkcji $f(x) = \left|\frac{2-2x}{x-4}\right|$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 5. (1 pkt)
Dane są funkcje $f(x) = x^2 + q$ i $g(x) = \frac{(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)}{x^4-13x^2+36}$. Wykresy funkcji f i g nie mają punktów wspólnych dla:

A. $q \in \{-9, -4\}$, **B.** $q \in \{-8, -3\}$, **C.** $q \in \{-6, -4\}$, **D.** $q \in \{-4, -2\}$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Dla której z podanych liczb wyrażenie $\frac{2x^2-7x+6}{x-2}$ przyjmuje najmniejszą wartość?

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$, **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **C.** $\sqrt{2}$, **D.** $2\sqrt{2}$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Ile rozwiązań ma równanie $\frac{2x^3-2x^2+4x}{x^3-25x} = \frac{x-1}{x-5}$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 8. (1 pkt)
Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $\frac{x^2-16}{x^2-11x+28} \leqslant 0$?

A. 10 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 7

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 175

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Wykres funkcji $f(x) = \frac{-2x+3}{6x-5} + 3$ ma asymptoty: pionową $x = p$ i poziomą $y = q$. Wyznacz iloczyn $p \cdot q$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2. (2 pkt)
Wykres funkcji $g(x) = \frac{x+2}{3x-3}$ powstał przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x+1}$ o wektor $[a, b]$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $a + b$.

Zadanie 3. (2 pkt)
Liczby x_1, x_2, gdzie $x_1 < x_2$, spełniają równanie $\frac{2x-3}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 1$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_1.

Zadanie 4. (2 pkt)
Zbiór A jest zbiorem liczb spełniających równanie $\frac{(16x^2-9)(x^2-2x-3)}{16x^2-24x+9} = 0$. Wyznacz średnią arytmetyczną liczb należących do zbioru A. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 5. (2 pkt)
Oblicz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność $\left|\frac{3n+4}{4n+5} - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{3600}$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby n.

Zadanie 6. (2 pkt)
Wyznacz wartość parametru p, dla której zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{3}{5} - \frac{1}{x} > 7p$ jest przedział $(-1; 0)$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby p.

Zadanie 7. (2 pkt)
Liczba n jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której liczba $\frac{n}{150}$ należy do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{x^2-9}{x^2-2} < 0$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby n.

Zadanie 8. (2 pkt)
Liczba n jest największą liczbą naturalną, która spełnia nierówność $\frac{2x^2-9x+6}{x^2-6x+9} < 1$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku liczby $\frac{n}{\sqrt{99}}$.

Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi i modele – s. 175

Zadanie 1. (4 pkt)
Rozwiąż nierówność $f(x+1) < f(x)$, gdzie $f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$.

Zadanie 2. (7 pkt)
Wyznacz zbiór $A' \cap B'$, wiedząc, że:

$$A = \left\{x \in \mathbf{R}\colon \frac{x+10}{x} < 3\right\},\ B = \{x \in \mathbf{R}\colon x^3 + 10x^2 \leqslant x^4 - 8x\}$$

Zadanie 3. (5 pkt)
Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie hiperboli o równaniu $y = \frac{3}{2x}$. Asymptotami tego wykresu są proste $x = a$ oraz $y = b$, gdzie $a = \log_{\sqrt{3}}\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}\right)$ oraz $b = \log_2 3 \cdot \log_3 8$. Podaj wzór funkcji f i wyznacz jej miejsce zerowe.

Zadanie 4. (5 pkt)
Asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x+a}{x+b}$ jest prosta $x = -1$.

a) Oblicz b i podaj równanie asymptoty poziomej wykresu funkcji f.

b) Oblicz a, jeżeli wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{2}{x}$.

Zadanie 5. (4 pkt)
Iloczyn liczb x i y jest o 2 większy od ich sumy. Przedstaw y jako funkcję zmiennej x. Podaj dziedzinę tej funkcji i jej zbiór wartości.

Zadanie 6. (5 pkt)
Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \left|\frac{4}{x} - p\right|$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f dla $p = 2$ oraz odczytaj z niego rozwiązania równania $f(x) = 2$.

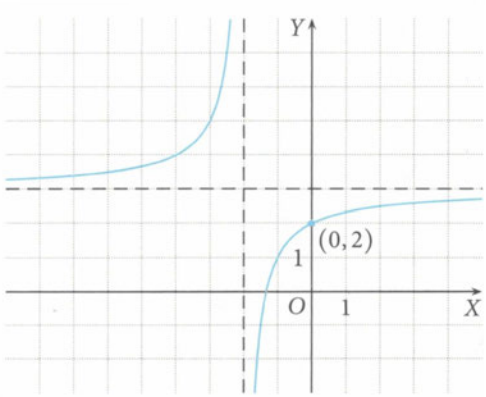
b) Wykaż, że równanie $\left|\frac{4}{x} - p\right| = p$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnej liczby $p > 0$.

Zadanie 7. (5 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{3x+a}{x+b}$$

a) Oblicz a i b.

b) Rozwiąż nierówność $f(x) < f(x-1)$.



Zadanie 8. (4 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = 2 - \frac{4}{x}$. Rozwiąż nierówność

$$\frac{f(x+1)}{f(x-1)} > 0.$$

Zadanie 9. (4 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{12}{|x| + 2} - 3$. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m^2$ ma dwa rozwiązania.

Zadanie 10. (6 pkt)
Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ oraz $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$ i podaj ich zbiory wartości.

Zadanie 11. (4 pkt)
Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 + 2x - 3}$ i $g(x) = f(x) + |f(x)|$.

Zadanie 12. (5 pkt)
Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $|x + 3| = \frac{m}{m - 4}$ ma dwa pierwiastki różnych znaków.

Zadanie 13. (5 pkt)
Wykres funkcji $f(x) = \frac{8}{x}$ przesunięto o wektor $\vec{u} = [-2, 1]$. Wykaż, że tak otrzymana hiperbola ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą o równaniu $y = x^2 + 4x + 5$.

Zadanie 14. (5 pkt)
Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$.

a) Wyznacz współczynniki a, b i c, jeżeli wykres funkcji f jest symetryczny do wykresu funkcji $g(x) = \frac{2x + 4}{x + 3}$ względem prostej $y = 2$.

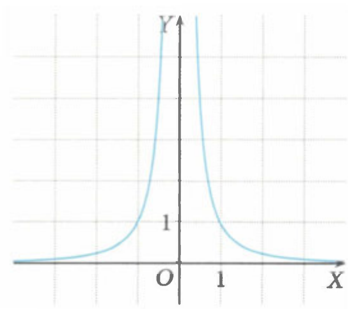
b) Rozwiąż równanie $f(x) - g(x) = 2$.

Zadanie 15. (6 pkt)
Funkcja f przyporządkowuje liczbie m sumę odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $mx^2 - 2mx + m - 2 = 0$.

a) Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f.

b) Dla jakich wartości parametru m funkcja f przyjmuje wartości większe od 4?

Zadanie 16. (5 pkt)
Punkty P i Q o tej samej rzędnej należą do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (rysunek obok). Punkt R należy do prostej $y = -4$. Wykaż, że pole trójkąta PQR jest większe lub równe 4.



Zadanie 17. (7 pkt)
Wykresy funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ i $g(x) = ax^2 - b$ przecinają się w punktach A i B. Punkt $S\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ jest środkiem odcinka AB.

a) Oblicz współrzędne punktów A i B oraz współczynniki a i b.

b) Z wykresów funkcji f i g odczytaj rozwiązania nierówności $f(x) \geqslant g(x)$.

6. Trygonometria

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
Trygonometria
zob. Vademecum, s. 161–170

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 181

1. W której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta α, jeżeli $\sin\alpha\cdot\cos\alpha>0$ oraz $\sin\alpha+\cos\alpha<0$?

2. Oblicz.

a) $\frac{\sin 150^\circ}{\cos 120^\circ}$ b) $\frac{\operatorname{tg}225^\circ-\operatorname{tg}315^\circ}{\sin 135^\circ\cdot\cos 135^\circ}$ c) $\frac{\sin^2 240^\circ}{\cos 300^\circ}$

3. Oblicz.

a) $\sin 810^\circ$ c) $\operatorname{tg}570^\circ$ e) $\sin(-240^\circ)$ g) $\operatorname{tg}(-510^\circ)$
b) $\cos 765^\circ$ d) $\cos 1080^\circ$ f) $\cos(-690^\circ)$ h) $\sin 2010^\circ$

4. Kąt α jest kątem środkowym w okręgu o promieniu r opartym na łuku o długości l. Uzupełnij tabelę.

r	6	8		3	9			4
l	2π	14π	2π			14	11π	
α (w stopniach)					320°		$82^\circ30'$	$11^\circ15'$
α (w radianach)			$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{7}{12}\pi$		

5. Oblicz.

a) $\sin\frac{3}{4}\pi$ c) $\operatorname{tg}\frac{7}{6}\pi$ e) $\cos 11\pi$ g) $\sin\frac{19}{2}\pi$
b) $\cos\frac{2}{3}\pi$ d) $\sin\left(-\frac{20}{3}\pi\right)$ f) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$ h) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$

6. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej x.

a) $\cos x=0{,}6$ i $x\in\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$ c) $\operatorname{tg}x=2{,}4$ i $x\in\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$
b) $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ d) $\operatorname{tg}x=-\frac{8}{15}$ i $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

7. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego rozwiązania nierówności $f(x)>0$.

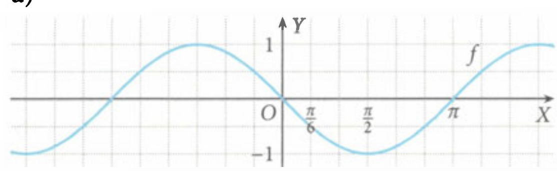
a) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ c) $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ e) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
b) $f(x)=\cos\frac{x+\pi}{2}$ d) $f(x)=\sin(2x+\pi)$ f) $f(x)=\operatorname{tg}2x$

8. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego wartość największą funkcji f oraz jej wartość najmniejszą.

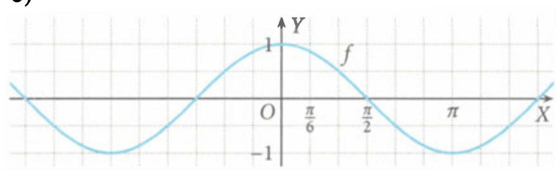
a) $f(x)=1-\sin x$ c) $f(x)=1-2\sin x$ e) $f(x)=2-2\cos 2x$
b) $f(x)=3+2\sin x$ d) $f(x)=4\cos\frac{x}{2}$ f) $f(x)=3\cos x-2$

9. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f, który otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \sin x$. Podaj wzór funkcji f oraz odczytaj z wykresu rozwiązania równania $f(x) = 1$.

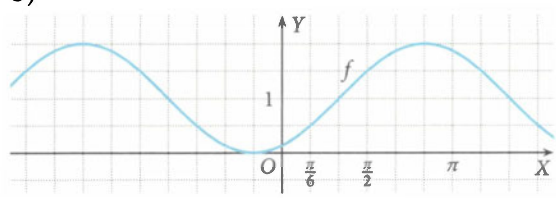
a)



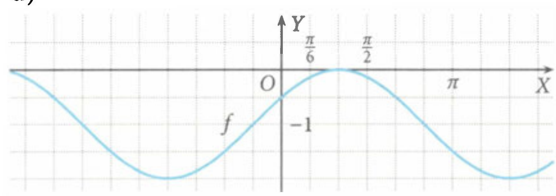
c)



b)



d)



10. Oblicz $\sin 2x$ oraz $\cos 2x$, jeśli:

a) $\sin x = \frac{4}{5}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

b) $\cos x = \frac{1}{5}$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$,

c) $\operatorname{tg} x = -3$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

d) $\cos x = -\frac{1}{3}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

11. Oblicz $\sin x$ i $\cos x$, jeśli:

a) $\cos 2x = \frac{1}{8}$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $\sin 2x = \frac{12}{13}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$,

c) $\sin x + \cos x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

12. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jej zbiór wartości.

a) $f(x) = 1 + |\cos x|$

b) $f(x) = 2|\sin x| - 3$

c) $f(x) = 1 - |\operatorname{tg} x|$

d) $f(x) = 2\left|\sin \frac{x}{2}\right|$

e) $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$

f) $f(x) = |2\sin x - 1|$

13. Naszkicuj wykres funkcji f w podanym zbiorze.

a) $f(x) = 2\cos x \cdot |\sin x|$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

b) $f(x) = 2\sin x - \sqrt{1 - \cos^2 x}$, $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$

c) $f(x) = \sin 2x \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}}$, $x \in (0; 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$

14. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$ oraz nierówność $f(x) < g(x)$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $g(x) = \sin \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1 - \cos x$

15. Wyznacz daną wartość w zależności od $a = \cos 26°$.

a) $\cos 52°$

b) $\sin 64°$

c) $\sin 13°$

d) $\sin 19°$

16. Oblicz.

a) $\sin\frac{\pi}{12}$

b) $\cos\frac{5}{12}\pi$

c) $\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ$

d) $\sin\frac{3}{8}\pi \cdot \cos\frac{3}{8}\pi$

e) $\sin 43^\circ \cdot \cos 47^\circ + \sin 47^\circ \cdot \cos 43^\circ$

f) $\cos\frac{2}{9}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{2}{9}\pi \cdot \sin\frac{\pi}{9}$

g) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}$

h) $\cos\frac{7}{12}\pi + \sin\frac{7}{12}\pi$

17. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\text{tg}^2 x \cdot \frac{\cos x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\cos x}$

b) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

c) $\cos 2x(1 + \text{tg}\, x\, \text{tg}\, 2x) = 1$

d) $\frac{1}{1-\cos 2x} - \frac{1}{1+\cos 2x} = \frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}$

e) $\frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) - \cos(x-y)} = -\frac{1}{\text{tg}\, x}$

f) $\cos^2(x+y) - \cos^2(x-y) = -\sin 2x \sin 2y$

18. Uprość wzór funkcji f i zbadaj jej monotoniczność w przedziale $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

a) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin(\pi - x)\cdot\cos(\pi + x)$

b) $f(x) = \sin(-x)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + \cos(-x)\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)$

c) $f(x) = \left|1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos(2\pi - x)\right|$

19. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1-\sin 2x}{2} = 1$

b) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = 1$

c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

d) $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

e) $|1 - \sqrt{2}\sin x| = 2$

f) $|2\sin 3x - 3| = 4$

20. Rozwiąż równanie.

a) $(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 3$

b) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

c) $\text{tg}^2 x = \sqrt{3}\,\text{tg}\, x$

d) $2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x = 1$

e) $\sin 2x + \cos x = 0$

f) $4\cos^2 x - \cos 2x = 2$

g) $\cos x \sin 2x = 2\sin x$

h) $2\sin x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x - 1)$

21. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

a) $2\sin^2 x\cos x = \sin x$

b) $\sin 2x\cos x - \sin x\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos 3x\cos x = 1 - \sin 3x\sin x$

d) $4\,\text{tg}\, x\cos^2 x = 1$

22. Rozwiąż równanie.

a) $2\sin^2 x - 7\sin x - 4 = 0$

b) $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$

c) $\sqrt{2}\sin x - 2\cos^2 x = 0$

d) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

e) $3\cos x = 3\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos x$

f) $\sqrt{3}\cos 2x + 9\cos x + 4\sqrt{3} = 0$

23. Rozwiąż równanie.

a) $\cos 4x + \cos 2x = 0$
b) $\sin 5x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$
c) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
d) $\sin x + \cos x = 1$

24. Rozwiąż równanie.

a) $\cos 5x - \sin 3x = \cos x$
b) $\sin x - \sin 2x - \sin 3x = 0$
c) $\sin 4x - \cos 6x = \cos 2x$
d) $\sin 4x - \cos 4x = \sin x - \cos x$
e) $\cos 5x + \sin 6x = \cos 3x - \sin 2x$
f) $\sin 8x - \cos 2x = \cos 8x - \sin 2x$

25. Rozwiąż nierówność dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$
c) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x \leqslant -1$
d) $\sin \frac{x}{2} \geqslant 0$
e) $2\cos 2x < -1$
f) $\mathrm{tg}\, 2x > 1$
g) $\frac{\sqrt{2} - \cos x}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2}$
h) $\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x < -1$
i) $\sin x \cos x < \frac{\sqrt{3}}{4}$

26. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin^2 x < 1$
b) $4\cos^2 x \geqslant 1$
c) $3\,\mathrm{tg}^2 x - 1 > 0$
d) $|2\sin x - 1| < 1$
e) $|2\cos x + 1| < 2$
f) $\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} < 2$

27. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$
b) $f(x) = \sqrt{\sqrt{2}\cos x + 1}$
c) $f(x) = \sqrt{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}}$
d) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

28. Oblicz.

a) $\mathrm{tg}\, \alpha$, jeśli $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$
b) $\cos \frac{\alpha}{2}$, jeśli $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ i $\alpha \in (\pi; 2\pi)$
c) $\mathrm{tg}\, \alpha$, jeśli $\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 5$

29. Dla jakiej wartości parametru a równanie ma rozwiązanie?

a) $\sin x = \frac{2a - 1}{3 - a}$
b) $\cos^2 x = \frac{a^2 - 3a + 2}{a + 1}$
c) $2\sin^2 x + a^2 - 9 = 0$

30. Wyznacz zbiór wartości funkcji f i oblicz, dla których argumentów ta funkcja przyjmuje wartość 1.

a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$
b) $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

31. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin(x + |x|)$ dla $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$. Dla jakich argumentów ta funkcja przyjmuje wartości mniejsze od $\frac{1}{2}$?

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 183

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Jeśli punkt $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$ należy do ramienia kąta α, to wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha$ jest równa:

A. $-\frac{\sqrt{17}}{17}$, **B.** $-\frac{2\sqrt{17}}{17}$, **C.** $-\frac{3\sqrt{17}}{17}$, **D.** $-\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Dany jest kąt o mierze $97°30'$. Miara łukowa tego kąta jest równa:

A. $\frac{13}{24}\pi$, **B.** $\frac{17}{24}\pi$, **C.** $\frac{19}{32}\pi$, **D.** $\frac{21}{32}\pi$.

Zadanie 3. (1 pkt) CKE
Równanie $\sin^2 x = \sin x$ w przedziale $\langle 0; \pi\rangle$:

A. ma dokładnie 1 rozwiązanie,
B. ma dokładnie 2 rozwiązania,
C. ma dokładnie 3 rozwiązania,
D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 4. (1 pkt)
Funkcja f: $\langle 0; 10\rangle \to \mathbf{R}$ dana jest za pomocą wzoru $f(x) = \cos\pi x$. Suma wszystkich miejsc zerowych tej funkcji jest równa:

A. 50, **B.** 90, **C.** 100, **D.** 105.

Zadanie 5. (1 pkt) CKE 2016
Wartość wyrażenia $\sin^2 75° - \cos^2 75°$ jest równa:

A. $-\frac{1}{2}$, **B.** $\frac{1}{2}$, **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Wartość wyrażenia $\cos\frac{13}{12}\pi \cdot \cos\frac{11}{4}\pi + \sin\frac{13}{12}\pi \cdot \sin\frac{11}{4}\pi$ jest równa:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **B.** $\frac{1}{2}$, **C.** $-\frac{1}{2}$, **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, to wartość wyrażenia $9\sin 2\alpha$ jest równa:

A. $4\sqrt{2}$, **B.** $6\sqrt{2}$, **C.** $4\sqrt{3}$, **D.** $6\sqrt{3}$.

Zadanie 8. (1 pkt) CKE 2015
Każda liczba x należąca do przedziału otwartego $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ spełnia nierówność:

A. $\operatorname{tg} x > \sin x$, **B.** $\cos x > \sin x$, **C.** $\cos x > \operatorname{tg} x$, **D.** $\operatorname{tg} x > \cos x$.

Zadanie 9. (1 pkt)
Największa wartość funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$ jest równa:

A. 1, **B.** $\sqrt{2}$, **C.** $\frac{3}{2}$, **D.** 2.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 183

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Punkt $P(x_0, y_0)$ leży w IV ćwiartce układu współrzędnych na ramieniu końcowym kąta α. Oblicz sumę $x_0 + y_0$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$ oraz odległość punktu P od początku układu współrzędnych jest równa 625. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 2. (2 pkt)
Wyznacz kąt wypukły, który wskazówki zegara tworzą o godzinie 14.20. Odczytaj z tablic wartość sinusa tego kąta. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku otrzymanej liczby.

Zadanie 3. (2 pkt)
Oblicz:

$$\frac{3\sin 1575^\circ - 4\cos 450^\circ}{\cos 720^\circ - \sin(-600^\circ)}$$

Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)
Oblicz $\sin 2\alpha$, jeśli $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 5. (2 pkt)
Wyznacz najmniejsze dodatnie rozwiązanie równania $\cos\left(3\pi x + \frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2} = 0$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 6. (2 pkt)
Oblicz sumę pięćdziesięciu najmniejszych dodatnich liczb spełniających równanie $\sin 4\pi x = 1$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 7. (2 pkt)
Ile rozwiązań równania $\sin x|\cos x| = \frac{1}{4}$ należy do przedziału $\langle 0; 172\pi\rangle$? Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności wyznaczonej liczby.

Zadanie 8. (2 pkt)
Oblicz $\cos(270^\circ + \alpha)$, wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi – s. 183
modele – s. 184

Zadanie 1. (5 pkt)
Oblicz wartość wyrażenia $\cos 35^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 130^\circ \cdot \sin 395^\circ$, nie korzystając z tablic ani kalkulatora.

Zadanie 2. (5 pkt)
Wyznacz rozwiązania równania $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$ należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

Zadanie 3. (5 pkt)
Wyznacz największą liczbę ujemną spełniającą równanie $\cos x - \sin x \operatorname{tg} x = 1$.

Zadanie 4. (4 pkt) CKE
Rozwiąż równanie $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$.

Zadanie 5. (4 pkt)
Wyznacz wszystkie liczby całkowite z przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$, które należą do zbioru rozwiązań nierówności $6\sin^2 x + 2\cos 2x \geqslant 3$.

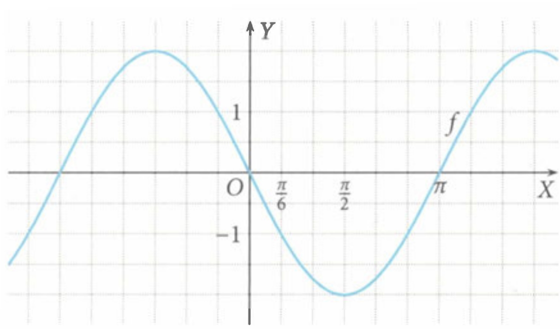
Zadanie 6. (3 pkt)
Oblicz $\sin 2x$, jeśli $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Zadanie 7. (4 pkt)
Oblicz $\cos 4x$, jeśli $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$.

Zadanie 8. (3 pkt) CKE
Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, spełniające równanie $\sin 5x - \sin x = 0$.

Zadanie 9. (3 pkt) CKE
Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość $4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1 + 3\cos^2 2\alpha$.

Zadanie 10. (4 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = a\cos(x - p)$. Wyznacz a i p. Rozwiąż nierówność $f(x) \geqslant -\sqrt{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$.



Zadanie 11. (5 pkt)
Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = 1 + \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania w przedziale $\langle \pi; 2\pi\rangle$.

Zadanie 12. (6 pkt)
Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 1 + 2\cos x - \sin^2 x$. Znajdź argument, dla którego funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość.

Zadanie 13. (4 pkt)
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \dfrac{\sin x(\operatorname{tg} x + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)}$. Uzasadnij, że przyjmuje ona tylko wartości nieujemne.

Zadanie 14. (6 pkt)
Dla jakich wartości parametru m równanie:

$$\sin x \cdot \cos\left(x - \tfrac{\pi}{5}\right) + 3 = 4\sin m - \sin\left(x - \tfrac{\pi}{5}\right) \cdot \cos x$$

nie jest sprzeczne?

Zadanie 15. (5 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$ dla $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.

Zadanie 16. (6 pkt)
Niech A będzie zbiorem rozwiązań równania $2\sin x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\cos x + \sin 2x$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana liczba ze zbioru A jest ujemna.

Zadanie 17. (5 pkt)
Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $\sin^2 4x = 4 - \frac{m + 10}{2m}$ ma rozwiązania.

Zadanie 18. (4 pkt)
Dla jakich wartości parametru a równanie $|3 - 4\sin x| = a^2 + 3$ jest sprzeczne?

Zadanie 19. (6 pkt)
Dane jest równanie $\sin x(\sin^2 x - p) = 0$ z parametrem p.

a) Rozwiąż to równanie w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$, gdy $p = 0{,}5$.

b) Dla jakich wartości p równanie to ma trzy różne rozwiązania w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$?

Zadanie 20. (4 pkt)
Ile jest dodatnich rozwiązań równania $1 - |x - 4| = 2\sin m$ w zależności od parametru m?

Zadanie 21. (4 pkt)
Narysuj wykres funkcji $f(x) = \dfrac{\sin x - |\cos x|}{\cos x}$ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Odczytaj z wykresu rozwiązania nierówności $f(x) \geqslant 0$.

Zadanie 22. (4 pkt)
Narysuj wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$$

dla $x \in \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$. Odczytaj z wykresu rozwiązania równania $f(x) = \sqrt{3}$.

Zadanie 23. (3 pkt)
Sprawdź, czy równość $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \sin^2 2x$ jest tożsamością trygonometryczną.

Zadanie 24. (3 pkt) CKE
Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest tożsamość $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2}$.

Zadanie 25. (4 pkt) CKE
Rozwiąż równanie $2\operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 26. (4 pkt) CKE 2015
Rozwiąż równanie $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$, dla $x \in (-\pi; 0)$.

Zadanie 27. (4 pkt)
Wyznacz wszystkie liczby x należące do przedziału $\langle 0; 3\pi \rangle$ i spełniające równanie:

$$2 + \cos 2x = 5\sin x$$

Zadanie 28. (4 pkt) CKE 2017
Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 29. (4 pkt)
Wyznacz rozwiązania równania $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ należące do przedziału $\langle 0; 4\pi \rangle$.

Zadanie 30. (4 pkt) CKE 2017
Rozwiąż równanie $3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 31. (4 pkt)
Rozwiąż równanie $\sin 4x - \sin 2x = 2\cos 2x - 1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 32. (4 pkt) CKE 2018
Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$.

Zadanie 33. (4 pkt)
Rozwiąż nierówność $(3\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\sin x - \pi) < 0$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 34. (4 pkt) CKE 2016
Rozwiąż nierówność $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 35. (3 pkt) CKE 2016
Rozwiąż nierówność $(2\sin x - 3)(2\sin x + 1) > 0$ w przedziale $(0; 2\pi)$.

7. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
1. Funkcje
2. Liczby rzeczywiste
zob.
Vademecum, 1. s. 108–109, 2. s. 20–21

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 192

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych. Określ monotoniczność funkcji f.

   a) $f(x) = 2^{x-1} - 2$
   b) $f(x) = 2 + 4^{x+1}$
   c) $f(x) = 1 - 2^{-x}$
   d) $f(x) = 8 \cdot 2^x - 4$
   e) $f(x) = 9 \cdot 3^{1-x} + 2$
   f) $f(x) = \frac{1}{3}(3^{-x} - 9)$

2. Naszkicuj wykres funkcji f. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą tej funkcji w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa pierwiastki?

   a) $f(x) = |1 - 2^x|$
   b) $f(x) = \left|3^{x+1} - 4\right|$
   c) $f(x) = \left|2^{2-x} - 3\right|$

3. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = a^{x-2} + p$. Wyznacz a i p, jeżeli do jej wykresu należą punkty $A(3, p+2)$ oraz $B\left(2\log_2 4, 1\right)$.

4. Wykres funkcji $f(x) = \frac{2^{x-1} - 8}{4}$ jest symetryczny względem osi OX do wykresu funkcji g. Zapisz wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres. Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości dodatnie?

5. Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 2$ jest symetryczny względem osi OY do wykresu funkcji g. Zapisz wzór funkcji g. Rozwiąż nierówność $f(x) \geqslant g(x)$.

6. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.

   a) $f(x) = 2^{x+2}$, $g(x) = 3x + 5$
   b) $f(x) = 1 - 2^x$, $g(x) = x^2 - 2x$
   c) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$
   d) $f(x) = \left|3^{x+3} - 1\right|$, $g(x) = 4x + 12$

7. Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt A. Naszkicuj wykres funkcji g i wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

   a) $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $g(x) = |2 - f(x-1)|$
   b) $A(2\log_2 3, 9)$, $g(x) = |f(x+1) - 3|$

8. Rozwiąż równanie.

   a) $4 \cdot 2^{x-3} = 4^{x-3}$
   b) $9^{x^2+6} = 27^{4x-2}$
   c) $(0{,}4)^{3-x} \cdot (2{,}5)^x = 0{,}16$
   d) $9^{x+1} + 3^{2x+4} = 7290$

9. Dla jakich wartości parametru m dane równanie ma pierwiastek dodatni?

   a) $9^x = m + 1$
   b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x = 2^m$
   c) $2x + 4 = 2^{m-1}$

10. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1?

a) $f(x)=2^{3x}-7$ b) $f(x)=0{,}25\cdot 4^{2x}-3$ c) $f(x)=(1-2^x)\left(1+2^{x+2}\right)$

11. Przedstaw daną liczbę w postaci logarytmu o podstawie 2.

a) $\log_{16}81$ b) $\log_{\sqrt{2}}17$ c) $\log_{0{,}25}0{,}04$ d) $\log_{2\sqrt{2}}9$

12. Oblicz.

a) $\log_4(\log 100)$

b) $\log_8\left(\log_{\sqrt{3}}9\right)+\log_8\left(\log_{\sqrt{2}}2\right)$

c) $25^{\log_5 2}-2^{2+2\log_2 3}$

d) $\log_4 81\cdot\log_3 64$

e) $\log_5 16\cdot\log_4 27\cdot\log_3 25$

f) $\log_9 16\cdot\log_{\sqrt{2}}27$

13. Uzasadnij równość.

a) $\log_3 4-\log_9 4=\log_3 2$

b) $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}2}+\dfrac{1}{\log_3 2}=0$

c) $\log_8 27+\log_4 9=\log_2 9$

d) $\dfrac{2}{\log_{2\sqrt{2}}3}+\dfrac{1}{\log_4 9}=4\log_3 2$

14. Przedstaw dane wyrażenie za pomocą a, jeśli $a=\log_3 4$.

a) $\log_3 16$ c) $\log_4 9$ e) $\log_3 5\cdot\log_5 4$

b) $\log_3 8$ d) $\log_{12}16$ f) $\log_9 49\cdot\log_7 12$

15. Oblicz x.

a) $2\log_3 x=\log_9 16$ b) $\log_{25}x=\log_{\sqrt{5}}10$ c) $\log_{\frac{1}{3}}x=\log_9 12$

16. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x,y), dla których prawdziwa jest podana równość. Otrzymany zbiór przesuń o wektor $\vec{u}=[-2,1]$.

a) $\log_4 x+\log_4 y=1$ c) $\log_x y=\log_y x$ e) $\log(x+y)=\log x+\log y$

b) $\log_2 y-\log_2 x=2$ d) $\log_y(x-1)^2=2$ f) $\log_{(x+1)}(y+1)=2$

17. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x)=\log_2(x^2-8x+12)$

b) $f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x^3-2x^2+3x-6)$

c) $f(x)=\log\dfrac{2x}{x+2}+\log_{0{,}5}(1-2x)$

d) $f(x)=\log_{(x-3)}4-\log_{(x-2)}(4-x)$

e) $f(x)=\log_{x^2}(-x^2-2x+8)$

f) $f(x)=\log_{(x^2-1)}(x^4-5x^3+3x^2+9x)$

18. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych?

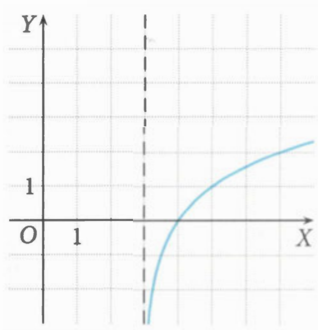
a) $f(x)=\log(mx^2-4x+m+3)$ b) $f(x)=\log_{0{,}5}\left|mx^2+2\sqrt{2}x+m+1\right|$

19. Zbadaj monotoniczność funkcji f w zależności od wartości parametru m.

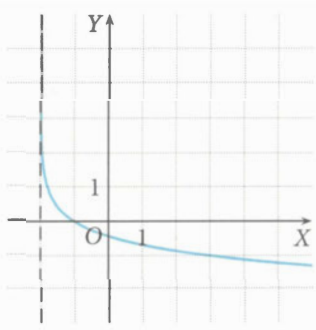
a) $f(x)=\log_{(2m+3)}x$ b) $f(x)=-\log_{(m-4)}x$

20. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_a (x - p)$. Wyznacz a i p. Napisz wzór funkcji g, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OX.

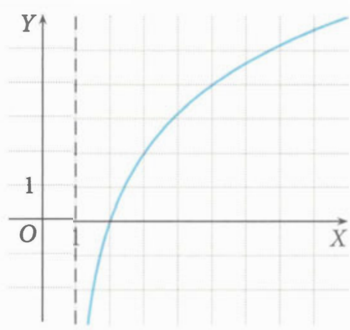
a)



b)



c)



21. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = \log_2 (x + 2)$

b) $f(x) = \log_3 (x - 1) - 1$

c) $f(x) = \log_{0,5} (0{,}25x)$

d) $f(x) = 1 + 2\log_2 \frac{1}{\sqrt{x}}$

22. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \log_5 (x^2 + 2x - 2)$

b) $f(x) = \log_{0,2} \frac{x}{2x - 1}$

c) $f(x) = 2\log x + \log (2 - x)$

d) $f(x) = \log_3 (x + 1) - \log_3 (2 - x)$

23. Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

a) $f(x) = |1 - \log_2 (x + 2)|$

b) $f(x) = |\log_3 (x + 1) + 2|$

c) $f(x) = |\log_{\frac{1}{5}} (x + 5)|$

d) $f(x) = 1 - |\log_2 (x + 4)|$

24. Dla jakich wartości parametru m równanie ma pierwiastek dodatni?

a) $\log_5 (x + 5) = m$

b) $\log_{0,5} (x + 4) = \frac{m}{m + 1}$

c) $1 - 3x = \log_3 m$

d) $3 + 2x = \log_{\frac{1}{3}} m$

25. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$ oraz nierówność $f(x) < g(x)$.

a) $f(x) = \log_2 x,\ g(x) = x - 1$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3},\ g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f(x) = 2 + \log_2 x,\ g(x) = 3 - \log_3 (x + 2)$

d) $f(x) = |1 + \log_{\frac{1}{2}} x|,\ g(x) = 8 - |2^x - 9|$

26. Oblicz x.

a) $\log_3 x = 2 - \log_{\frac{1}{3}} 2$

b) $\log_{0,1} x = -2 + \log 5 + \log 4$

c) $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = -\log_{0,5} 3$

d) $\log_2 x - \log_{0,5} x = -2\log_{0,5} 5$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 193

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)

Liczba $\frac{128 \cdot 12^{2\sqrt{3}+3}}{16^{\sqrt{3}+4} \cdot 9^{\sqrt{3}+2}}$ jest równa:

A. $\frac{1}{12}$, **B.** $\frac{1}{18}$, **C.** $\frac{1}{24}$, **D.** $\frac{1}{36}$.

Zadanie 2. (1 pkt)

Punkt $(-2, 2)$ należy do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$. Do wykresu tej funkcji należy też punkt:

A. $(6, \frac{1}{4})$, **B.** $(6, \frac{1}{8})$, **C.** $(8, \frac{1}{8})$, **D.** $(8, \frac{1}{32})$.

Zadanie 3. (1 pkt)

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{1}{0{,}6^{|x|}}$ jest przedział:

A. $\langle 0{,}6; \infty)$, **B.** $\langle 1; \infty)$, **C.** $(0; 0{,}6\rangle$, **D.** $(0; 1\rangle$.

Zadanie 4. (1 pkt) CKE 2018

Wartość wyrażenia $2\log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5}$ jest równa:

A. -1, **B.** 0, **C.** 1, **D.** 2.

Zadanie 5. (1 pkt)

Równość $\log_{\sqrt{2}}(2 + \log_2 p) = 0$ jest spełniona dla pewnej liczby p należącej do przedziału:

A. $\langle \frac{1}{4}; \frac{3}{4})$, **B.** $\langle \frac{3}{4}; \frac{5}{4})$, **C.** $\langle \frac{5}{4}; \frac{7}{4})$, **D.** $\langle \frac{7}{4}; \frac{9}{4})$.

Zadanie 6. (1 pkt)

Jeśli $a = \log_2 3$ i $b = \log_2 5$, to $\log_2 13\frac{8}{9}$ jest równy:

A. $3a + 2b$, **B.** $3b + 2a$, **C.** $3a - 2b$, **D.** $3b - 2a$.

Zadanie 7. (1 pkt)

Jeśli $\log_3 2 = m$, to wartość wyrażenia $\log_{\sqrt{2}} 3 + \log_4 9$ jest równa:

A. $\frac{3}{m}$, **B.** $\frac{2}{m}$, **C.** $\frac{3m}{2}$, **D.** $\frac{2m}{3}$.

Zadanie 8. (1 pkt)

Suma kwadratów liczb będących miejscami zerowymi funkcji $f(x) = \log_{2\sqrt{2}}(|x| - 2)$ jest równa:

A. 4, **B.** 8, **C.** 16, **D.** 18.

Zadanie 9. (1 pkt)

Ile dodatnich liczb naturalnych należy do zbioru wartości funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(|x| + \frac{1}{16}\right)$?

A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 193

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Dana jest liczba $a = \left(3^{-0,5} + 9^{-0,25}\right)^{0,5} : \left(\frac{1}{6}\right)^{-0,5}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby a.

Zadanie 2. (2 pkt)
Punkt $\left(8, \frac{1}{625}\right)$ należy do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$. Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $x = -8\frac{1}{2}$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 3. (2 pkt) CKE
Oblicz $\log_3 \sqrt[4]{27} - \log_3\left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right)$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)
Znajdź liczbę a spełniającą warunek $\log_{(a-\sqrt{3})} 3 = 2$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 5. (2 pkt)
Oblicz sumę odwrotności liczb $a = \log_{\sqrt[3]{2}} 6$ i $b = \log_{\sqrt[3]{3}} 6$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 6. (2 pkt)
Wyznacz liczbę p, dla której spełniona jest równość:

$$\log_9\left(\log_8\left(\log_{\frac{1}{6}} p\right)\right) = -\frac{1}{2}$$

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby p.

Zadanie 7. (2 pkt)
Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = |\log_{\sqrt{6}} 10x| - 1$. Oblicz sumę $x_1 + x_2$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (2 pkt)
Ile liczb całkowitych należy do dziedziny funkcji $f(x) = \log(1000 - \frac{3}{8}x^2)$? Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi i modele – s. 193

Zadanie 1. (5 pkt)
Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ i $g(x) = |f(x-3) - 4|$. Podaj wartość najmniejszą i wartość największą funkcji g w przedziale $\langle 3; 6 \rangle$.

Zadanie 2. (5 pkt)
Wyznacz liczbę rozwiązań równania $\left|\frac{3^{x+1} - 1}{3^x}\right| = m$ w zależności od parametru m.

Zadanie 3. (4 pkt)
Liczby $3^x + \frac{2}{9}$, 3^x, 3^{x-1} są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz x.

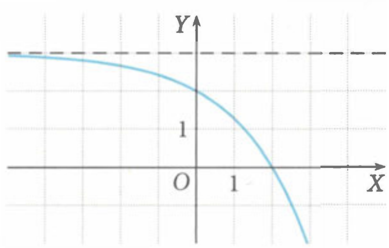
Zadanie 4. (5 pkt)
Oblicz wartość funkcji $f(x) = |2^{x-1} - 3|$ dla argumentu $x_0 = \log_2 5 + \log_2 5 \cdot \log_5 2$. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od $f(x_0)$?

Zadanie 5. (4 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = -a^x + 3$$

Wyznacz a i naszkicuj wykres funkcji:

$$g(x) = a^{|x-1|}$$



Zadanie 6. (3 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3(3x + 3)$. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 2?

Zadanie 7. (3 pkt) CKE
Niech $m = \log_{21} 7$. Wykaż, że $\log_7 27 = \frac{3(1-m)}{m}$.

Zadanie 8. (4 pkt)
Uzasadnij nierówność $\frac{1}{\log_3 4} + \log_8 4\sqrt{3} < 2$.

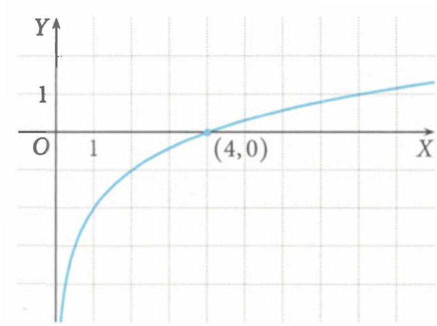
Zadanie 9. (5 pkt)
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = a + \log_p x$$

a) Wyznacz a i p.

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x+2)|$.

c) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości większe od 1?



Zadanie 10. (4 pkt)
Wyznacz dziedzinę oraz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_{0,4} \frac{x+3}{6-x}$.

Zadanie 11. (4 pkt)
Liczby $\log 2$, $\log(x+2)$, $\log(x+6)$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Zadanie 12. (5 pkt)
Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór par (x, y) spełniających równanie $\log_2 |y| = 2 - \log_2 x$.

Zadanie 13. (3 pkt)
Rozwiąż równanie $\log_2(3 - 2\log_9 x) = 1$.

Zadanie 14. (4 pkt)
Wykaż, że jeśli $8^x = 27$ i $y = -\log_4 9$, to $2^{x-2y} = 27$.

Zadanie 15. (4 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = \log\left(\frac{1}{2}x^2 + (m+1)x - m - 1\right)$. Dla jakich wartości parametru m dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych?

Zadanie 16. (4 pkt)
Wyznacz wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = \log_{\frac{m+1}{m}} x$ jest malejąca.

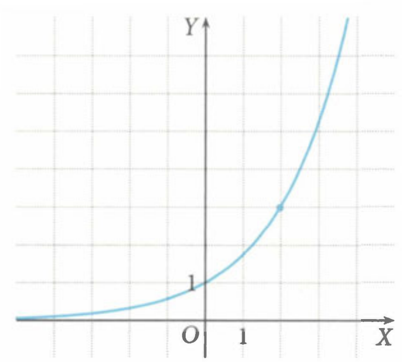
Zadanie 17. (3 pkt)
Oblicz $\log_{ab} 4$, jeżeli $\log_a 4 = 3$ oraz $\log_b 4 = 8$.

Zadanie 18. (3 pkt)
Wyznacz wartość parametru a, dla której równanie $2x^2 + 2x - \log_2 a = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 19. (4 pkt) CKE
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla $x \in \mathbf{R}$.

a) Oblicz a.

b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$ i podaj wszystkie wartości parametru $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.



Zadanie 20. (5 pkt)
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{(2x+6)} \frac{x-3}{x+2}$.

Zadanie 21. (5 pkt) CKE
Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(8x - x^2\right)$.

Zadanie 22. (4 pkt)
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \dfrac{\log_4(16 - x^2)}{\log_4(x^2 - 3)}$.

Zadanie 23. (3 pkt) CKE 2015
Niech $a = \log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64 = \dfrac{6a}{1-a}$.

8. Ciągi

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
Ciągi
zob. Vademecum, s. 135–142

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 200

1. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne, a które są większe od 3?

   a) $a_n = n^3 - 5n^2 - 5n + 25$ b) $a_n = \frac{6n-16}{2n-7}$ c) $a_n = 4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

2. Oblicz sumę wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:

   a) $a_n = 2n - 18$, a suma trzech końcowych wyrazów ciągu jest równa 60,

   b) $a_n = 3n - 5$ oraz ciąg ma nieparzystą liczbę wyrazów, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 78.

3. Suma dwudziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa trzynastemu wyrazowi tego ciągu. Oblicz stosunek wartości pierwszego wyrazu do różnicy ciągu oraz trzynasty wyraz tego ciągu.

4. a) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 7, a jego różnica wynosi 2. Suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest dwa razy mniejsza od sumy kolejnych n wyrazów. Oblicz n.

   b) Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest trzy razy mniejsza od sumy kolejnych sześciu wyrazów tego ciągu. Oblicz pierwszy wyraz ciągu, jeżeli $a_2 \cdot a_3 = 15$.

5. Suma n $(n > 1)$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa wyrazowi a_n. Stosunek różnicy tego ciągu do pierwszego wyrazu wynosi $-\frac{1}{4}$. Oblicz n oraz piąty wyraz ciągu.

6. Wykaż, że jeżeli suma pięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych ciągu arytmetycznego jest równa 110, to szósty wyraz ciągu wynosi 22. Oblicz różnicę tego ciągu, jeżeli suma pierwszych dziesięciu jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 420.

7. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n). Dzieląc wyraz dziesiąty przez wyraz siódmy, otrzymujemy 3 i resztę 1. Oblicz iloczyn dziesięciu początkowych wyrazów ciągu $b_n = (0{,}125)^{a_n}$.

8. S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n). Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

   a) $S_n = n^2 - 5n$ b) $S_n = n^2 - 5n + 1$ c) $S_n = n^3 + 1$

9. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu, jeżeli suma m początkowych jego wyrazów o numerach:

   a) parzystych jest równa $6m^2 - 4m$, b) nieparzystych jest równa $3m^2 + m$.

10. Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego zachodzi równość.

a) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$ b) $S_{n+3} - S_n = 3(S_{n+2} - S_{n+1})$

11. Suma trzech początkowych wyrazów rosnącego ciągu geometrycznego jest równa sumie odwrotności tych wyrazów. Oblicz te wyrazy, jeżeli szósty wyraz ciągu jest równy 16.

12. Oblicz iloraz monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli:

a) $a_4 = a_3 + 8,\ a_1 + a_2 + a_3 = 14,$ b) $a_3 = 3,\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 108.$

13. a) Wykaż, że jeżeli suma czterech początkowych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego jest dziewięć razy większa od sumy kolejnych czterech wyrazów tego ciągu, to iloraz ciągu jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $\frac{1}{2}$ jest szesnaście razy większa od sumy kolejnych n wyrazów tego ciągu. Oblicz pierwszy wyraz ciągu, jeżeli $a_{2n} = 640$.

14. Iloczyn dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych rosnącego ciągu geometrycznego (a_n) jest 32 razy większy od iloczynu dziesięciu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych. Oblicz szósty wyraz ciągu, jeżeli suma kwadratów wyrazów pierwszego i drugiego jest równa 30.

15. Suma k początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 3, a suma $2k$ początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 18. Oblicz sumę $3k$ początkowych wyrazów tego ciągu.

16. Suma logarytmów dziesiętnych trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 3, a suma wyrazów drugiego i trzeciego wynosi 11. Oblicz $\log a_{100}$.

17. Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym. Czy jest to ciąg arytmetyczny lub geometryczny? Jeśli tak, oblicz sumę dziesięciu pierwszych jego wyrazów.

a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \sqrt{2}a_n$ b) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + 5$ c) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2^n a_n$

18. Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), o różnicy $r \neq 0$, jest równa 20. Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 - m^2x + 3m - 1$ oraz różnicę r, jeśli $f(a_1) = f(a_{10}) = 0$.

19. Wyznacz współczynniki b i c wielomianu:

a) $w(x) = x^3 - 7x^2 + bx + c$, jeżeli ma on trzy pierwiastki, które są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 2$,

b) $w(x) = x^3 + 3x^2 + bx + c$, jeżeli ma on trzy pierwiastki, które są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 1.

20. a) Niech $a_n = n^2$. Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem arytmetycznym.

b) Niech $f(x) = 3x^2 + x - 2$. Wykaż, że ciąg $b_n = f(n+1) - f(n)$ jest ciągiem arytmetycznym.

21. Wyznacz te wartości x, dla których ciąg arytmetyczny o wyrazach:

a) $x + y,\ x + 2y,\ x^2 + 2x + 2y - 2$ jest rosnący,

b) $y - x,\ \frac{y}{x},\ xy$ jest malejący.

22. Oblicz sumę stu początkowych wyrazów ciągu (a_n), $n \geqslant 1$.

a) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ b) $a_n = n\cos(n\pi)$

23. Oblicz sumę wszystkich miejsc zerowych funkcji f należących do przedziału $\langle 0; 20\pi\rangle$.

a) $f(x) = \cos x$ b) $f(x) = \sin 2x$

24. Wyznacz wszystkie wartości $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$, dla których liczby $2\sin 2x$, $\cos^2 x$ i $\cos 2x$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

25. Oblicz sumę pięćdziesięciu najmniejszych dodatnich rozwiązań równania.

a) $\cos^3 x = \cos x$ b) $2\sin^4 x = 3\sin^2 x - 1$

26. Pierwszy wyraz rosnącego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 1. Wyznacz iloraz tego ciągu, jeżeli jego wyrazy spełniają równanie:

$$\frac{a_3}{2a_3 + 3a_2} + \frac{2}{3} = \frac{a_3}{2a_3 - 3a_2}$$

27. Wyrazy pierwszy i trzeci rosnącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 5, a drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest o 10 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznacz te ciągi.

28. Drugi, dziewiąty i trzydziesty siódmy wyraz rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, a ich suma jest równa 147. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego.

29. Dla jakich n spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$?

a) $a_n = \frac{4}{n^2},\ g = 0,\ \varepsilon = 0{,}01$ b) $a_n = 3 - \frac{2}{n^3},\ g = 3,\ \varepsilon = 0{,}001$

30. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = 2\left(3 - \frac{9}{n^3}\right) - 3\left(1 + \frac{7}{n^2}\right)$ c) $a_n = \left(\frac{13}{n^3} - 1\right)\left(4 - \frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2$

b) $a_n = \left(2 - \frac{10}{n}\right)\left(3 + \frac{8}{n^2}\right)$ d) $a_n = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right)}$

31. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{12n^2 - 9n + 4}{9n^2 + 6n + 2}$ c) $a_n = \frac{(n-2)(n+3)}{2n^2 - 3n}$ e) $a_n = \frac{(2+n^4)(1-n)}{n^4 + n + 1}$

b) $a_n = \frac{4n^2 + n - 10}{1 - 3n - n^2}$ d) $a_n = \frac{(1-3n)^3}{6n^3 - n^2 + n}$ f) $a_n = \frac{(2n^2 + 3n)(n-1)}{(n^2 - 4)(n+2)}$

32. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 4n + 3}}{n}$ c) $a_n = \frac{1 - 2\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 12}$ e) $a_n = 3n - \sqrt{9n^2 + n}$

b) $a_n = \frac{6n + 9}{\sqrt{3n^2 + 6n - 1}}$ d) $a_n = \frac{1 + 2\sqrt{n}}{n + 12}$ f) $a_n = \sqrt{4n^2 + n} - \sqrt{4n^2 - n}$

33. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{1 + 3 + \ldots + (2n-1)}{2 + 4 + 6 + \ldots + 2n}$ c) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$

b) $a_n = \frac{1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2)}{(3n-1)(2n+1)}$ d) $a_n = \frac{n}{1 - 3n^3} + \frac{2n}{1 - 3n^3} + \frac{3n}{1 - 3n^3} + \ldots + \frac{n^2}{1 - 3n^3}$

34. Wyznacz wartość parametru p, dla której granicą ciągu $a_n = \frac{pn + 1}{(p+1)n + 1}$ jest g.

a) $g = \frac{1}{2}$ b) $g = -2$ c) $g = 0$ d) $g = -\infty$

35. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{(p+1)n^2 + pn}{(p^2 - 1)n^2 + 3n + 1}$ w zależności od parametru p.

36. Oblicz sumę szeregu geometrycznego.

a) $0{,}36 + 0{,}0036 + 0{,}000036 + \ldots$ c) $\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \ldots$

b) $16 - 8 + 4 - 2 + \ldots$ d) $-32 + 24 - 18 + \ldots$

37. Dla jakich wartości parametru p szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny?

a) $q = 1 - \frac{6}{p}$ b) $q = p^2 - 2p$ c) $q = \frac{p-4}{p+2}$

38. Rozwiąż równanie.

a) $4 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \ldots = \frac{8}{2x - 1}$ c) $\left(\frac{2}{2-x}\right) + \left(\frac{2}{2-x}\right)^2 + \left(\frac{2}{2-x}\right)^3 + \ldots = \frac{6x}{x^2 - 9}$

b) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots = \frac{x-2}{x}$ d) $2^x + 2^{x-2} + 2^{x-4} + \ldots = \frac{1}{6}$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 201

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej $y = ax + 4$, $a < 0$. Prosta ta wraz z osiami układu współrzędnych tworzy trójkąt o polu 12. Dla jakiego n zachodzi równość $a_n = -2$?

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Zadanie 2. (1 pkt)
W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_4 = 2$ i $a_7 = 6\frac{3}{4}$. Wówczas:

A. $a_3 = \frac{4}{3}$, **B.** $a_3 = \frac{9}{8}$, **C.** $a_3 = \frac{3}{4}$, **D.** $a_3 = \frac{2}{3}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
W sześciowyrazowym ciągu arytmetycznym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 186. Trzeci wyraz tego ciągu wynosi:

A. 60, **B.** 62, **C.** 68, **D.** 72.

Zadanie 4. (1 pkt)
Granica ciągu $a_n = \frac{(1-2n)^2(1-n)}{n^3}$ jest równa:

A. -4, **B.** -2, **C.** 2, **D.** 4.

Zadanie 5. (1 pkt)
Ciąg (a_n) ma granicę równą 1. Wskaż ciąg, którego granicą jest liczba 2.

A. $\frac{2a_n+1}{a_n+1}$ **B.** $\frac{2a_n-1}{(a_n+1)^2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2a_n+2}}{2a_n-1}$ **D.** $\frac{2a_n^2}{a_n+1}$

Zadanie 6. (1 pkt) CKE 2017
Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{4}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

A. $\frac{3}{7}$, **B.** $\frac{1}{7}$, **C.** $\frac{7}{3}$, **D.** 7.

Zadanie 7. (1 pkt)
Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa S, a jego pierwszy wyraz wynosi $\frac{1}{2}$. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego o takim samym pierwszym wyrazie i ilorazie o połowę mniejszym jest równa:

A. $\frac{2S}{2S+1}$, **B.** $\frac{1}{2S-1}$, **C.** $\frac{3}{4}S$, **D.** $\frac{1}{2}S$.

Zadanie 8. (1 pkt)
W nieskończonym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich każdy wyraz jest cztery razy większy od sumy wszystkich wyrazów następujących po nim. Iloraz q tego ciągu jest równy:

A. $\frac{1}{5}$, **B.** $\frac{1}{4}$, **C.** $\frac{1}{3}$, **D.** $\frac{1}{2}$.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 201

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Liczby x, y, 10 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, natomiast liczby 10, $y+5$, $2x$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz x i y. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $x \cdot y$.

Zadanie 2. (2 pkt)
Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej równoległej do prostej $y=-2x$ oraz $a_{10}=80$. Suma ilu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa -100? Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 3. (2 pkt)
W ośmiowyrazowym monotonicznym ciągu geometrycznym dane są wyrazy $a_6 = 3\frac{1}{3}$ i $a_8 = 30$. Oblicz medianę wyrazów tego ciągu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt) CKE
Oblicz granicę ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n+2}{(8n+7)(n+4)}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonej granicy.

Zadanie 5. (2 pkt) CKE
Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}$. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 6. (2 pkt)
Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 8 lub przez 11 i zapisz ją w postaci $n+900$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby n.

Zadanie 7. (2 pkt)
Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa $\frac{4}{7}$, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych wynosi $\frac{4}{35}$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (2 pkt) CKE 2015
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1} - \frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4} \right)$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi i modele – s. 201

Zadanie 1. (6 pkt)
Dany jest ciąg $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n-1)$.

a) Uzasadnij, że (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

b) Oblicz sumę stu jeden początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 2. (5 pkt)
Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa $-\frac{7}{4}n + \frac{1}{4}n^2$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.

Zadanie 3. (5 pkt)
Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$ liczby $\log_2 x$, $\log_m x$, $\log_4 x$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz m.

Zadanie 4. (4 pkt)
Rozwiąż równanie $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{2x-1} = 64 \cdot 4^{x+1}$.

Zadanie 5. (5 pkt)
Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 4, a suma dziesięciu początkowych jego wyrazów wynosi 132. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 6. (5 pkt)
Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 2. Ciąg (b_n) dany jest wzorem $b_n = \log_2 a_n$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n) wynosi -35. Oblicz iloraz q ciągu (a_n).

Zadanie 7. (6 pkt)
Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a_n).

a) Uzasadnij, że ciąg $b_n = \frac{1}{a_n}$ także jest ciągiem geometrycznym.

b) Wiedząc, że suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 124, a suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (b_n) wynosi 31, oblicz iloczyn dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 8. (4 pkt)
Dany jest ciąg (a_n), dla którego $a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = 105$. Ciąg (b_n) dany wzorem $b_n = 2^{a_n}$ jest geometryczny. Oblicz ósmy wyraz ciągu (b_n).

Zadanie 9. (3 pkt) CKE 2015
Niech P_n oznacza pole koła o promieniu $\frac{1}{2^n}$, dla $n \geqslant 1$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n).

Zadanie 10. (4 pkt)
Pierwszy, czwarty i dwudziesty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

Zadanie 11. (4 pkt)
Liczby a, b i c tworzą rosnący ciąg geometryczny. Liczby a, b, $c-3$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz a, b, c, jeżeli wiadomo, że $a \cdot c = 324$.

Zadanie 12. (5 pkt) CKE
O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, zaś ciąg $(a+1, b+4, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

Zadanie 13. (4 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = -2x + 4$. Uzasadnij, że jeśli (x_n) jest ciągiem arytmetycznym, to $y_n = f(x_n)$ także nim jest.

Zadanie 14. (3 pkt)
Wykaż, że jeśli liczby $a-b$, ab i $c-a$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to liczby $2a^2$, $c-b$ i $2b^2$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 15. (5 pkt)
Suma sześciu początkowych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego (a_n) jest 72 razy większa od sumy trzech następnych jego wyrazów. Wyznacz wzór ogólny ciągu, jeżeli iloczyn wyrazów drugiego i czwartego jest równy 4.

Zadanie 16. (6 pkt)
Ciąg (a_n) jest dany wzorem rekurencyjnym $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}$ dla $n \geqslant 1$. Dziewiąty i dwudziesty piąty wyraz tego ciągu są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Wyznacz argumenty, dla których wielomian w przyjmuje wartości nieujemne.

Zadanie 17. (5 pkt)
Rozwiąż nierówność, jeżeli jej lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\frac{2x}{3x-1} + \frac{6x}{3x-1} + \ldots + \frac{98x}{3x-1} \geqslant 625$$

Zadanie 18. (5 pkt)
Liczby a, b, c, d, e i f tworzą ciąg geometryczny.

a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji $w(x) = ax^5 - bx^4 - 2cx^3 + 2dx^2 + ex - f$ dla $a \neq 0$.

b) Rozwiąż nierówność $w(x) \geqslant 0$ dla $a = -1$ i ilorazu 2.

Zadanie 19. (4 pkt)
Rozwiąż równanie $||x-a|-b| = 2$, gdzie a jest czwartym, a b – piątym wyrazem ciągu określonego rekurencyjnie $a_1 = -5$, $a_n = a_{n-1} + 2$.

Zadanie 20. (2 pkt) CKE 2015
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$.

Zadanie 21. (3 pkt)
Dane są ciągi $a_n=\frac{6n^3+5n-7}{(1-n)^3}$ oraz $b_n=\frac{\sqrt[3]{27n^3-1}}{n-1}$. Oblicz granicę ciągu $c_n=(3b_n-a_n)^2$.

Zadanie 22. (7 pkt)
Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2n+1}$.

a) Uzasadnij, że dla każdego $p\neq 1$ ciąg (a_n) jest geometryczny. Wyznacz iloraz ciągu (a_n).

b) Wyznacz wartości parametru p, dla których szereg $a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots$ jest zbieżny, i oblicz sumę tego szeregu. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

Zadanie 23. (6 pkt)
Wyznacz wartości parametru p, dla których szereg geometryczny:
$$\left(p^3+3p^2-3p-9\right)+(p+3)+\ldots$$
jest zbieżny. Oblicz sumę tego szeregu.

Zadanie 24. (5 pkt)
Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n), którego wyrazy spełniają układ równań:
$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+\ldots=57 \\ a_2+a_5+a_8+\ldots=18 \end{cases}$$

Zadanie 25. (4 pkt)
Oblicz $f(k)$, gdzie k jest najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią należącą do dziedziny funkcji:
$$f(x)=1+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{16}{(x-1)^4}+\ldots$$

Zadanie 26. (6 pkt)
Dla jakich wartości parametru m równanie $1+2\cos^2 x+4\cos^4 x+\ldots=m$ ma rozwiązania?

Zadanie 27. (5 pkt)
Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli suma wszystkich jego wyrazów jest równa $\sqrt{15}$, a suma kwadratów jego wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy ich czwartych potęg.

Zadanie 28. (4 pkt)
Rozwiąż nierówność $2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\ldots<-4x+8$.

Zadanie 29. (2 pkt) CKE 2016
Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n=\left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n\geqslant 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1+a_2+a_3+\ldots$ jest zbieżny.

Zadanie 30. (3 pkt) CKE 2016

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geqslant 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

Zadanie 31. (3 pkt)

Dany jest nieskończony ciąg (a_n), w którym $a_3 = 9$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi równość $a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1$. Oblicz wyrazy a_1 i a_2 tego ciągu i ustal, czy jest to ciąg geometryczny.

Zadanie 32. (6 pkt)

Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Suma tych liczb jest równa 19. Ciąg $(a+3, b+2, c)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wyznacz liczby a, b, c.

Zadanie 33. (6 pkt) CKE 2017

Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c.

Zadanie 34. (5 pkt) CKE 2017

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

Zadanie 35. (4 pkt) CKE

Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Uzasadnij, że prawdziwa jest równość $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$.

Zadanie 36. (3 pkt)

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie i spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 13\frac{1}{2} \\ a_3 \cdot a_5 = 144 \end{cases}$$

Wyznacz sumę 20 początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 37. (4 pkt) CKE 2018

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geqslant 1$, spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

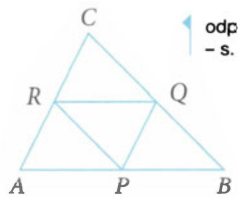
Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.

9. Planimetria

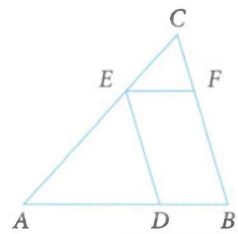
PRZECZYTAJ WIĘCEJ
Planimetria
zob. *Vademecum*, s. 190–201

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi
– s. 209



1. Punkty P, Q, R są środkami boków trójkąta ABC. Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli pole trójkąta PQR jest równe 5.



2. Na rysunku obok $DE \parallel BC$ oraz $AB \parallel EF$. Pole trójkąta ADE jest cztery razy większe od pola trójkąta EFC. Oblicz:

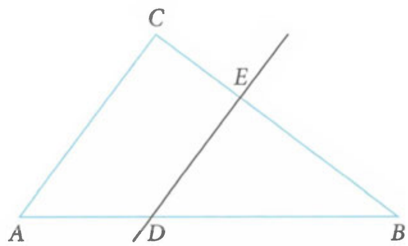
   a) długość odcinka DB, jeżeli $|AB| = 4$,

   b) stosunek pola czworokąta $DBFE$ do pola trójkąta ABC.

3. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC obrano punkt D taki, że stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC wynosi $\frac{2}{5}$. Oblicz:

   a) stosunek długości odcinka BD do długości odcinka CD,

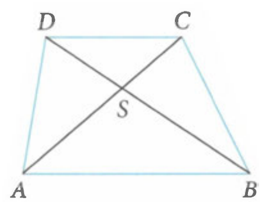
   b) tangens kąta BAD.



4. W trójkącie ABC o bokach $|AB| = 10$, $|BC| = 8$ i $|AC| = 6$ poprowadzono prostą DE (rysunek obok) równoległą do boku AC. Oblicz długości odcinków DB i EB, jeżeli prosta DE podzieliła trójkąt ABC na dwie figury o równych:

   a) obwodach,   b) polach.

5. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ (rysunek poniżej).



   a) Uzasadnij, że trójkąty ASB i CSD są podobne, a trójkąty ASD i BSC mają równe pola.

   b) Pole trójkąta ASB jest równe 9, a pole trójkąta CSD jest równe 4. Oblicz pole trapezu.

   c) Długości podstaw trapezu wynoszą 5 i 3, a jego pole jest równe 32. Oblicz pole trójkąta ASD.

6. W trapezie równoramiennym $ABCD$ poprowadzono wysokość CE. Oblicz pole trapezu, jeżeli $|AE| = 8$ i $|CE| = 3$.

7. Przekątna trapezu równoramiennego $ABCD$ tworzy z dłuższą podstawą AB kąt α, a z ramieniem AD – kąt β. Wyznacz stosunek pola trójkąta ACD do pola trójkąta ABC.

8. Stosunek długości podstaw trapezu równoramiennego wynosi $5:3$. Przekątna trapezu ma długość $\sqrt{65}$, a jego ramię jest równe $5\sqrt{2}$. Oblicz długości podstaw oraz pole tego trapezu. Czy w ten trapez można wpisać okrąg?

9. W okrąg o promieniu 4 cm wpisano trapez równoramienny, którego podstawa jest średnicą okręgu, a ramię ma długość 4 cm. Oblicz pole tego trapezu oraz miarę kąta ostrego między przekątnymi.

10. W okrąg wpisano trapez o wysokości h. Kąt między promieniami okręgu poprowadzonymi do końców jednego z ramion trapezu jest równy 2α. Wykaż, że pole tego trapezu wyraża się wzorem $P = \frac{h^2}{\operatorname{tg}\alpha}$.

11. Oblicz promień okręgu opisanego na trapezie, jeżeli ramię trapezu ma długość 10 cm, dłuższa podstawa 16 cm, a wysokość $5\sqrt{3}$ cm.

12. a) Oblicz pole rombu, jeżeli jedna z jego przekątnych ma długość 8, a promień okręgu wpisanego w ten romb jest równy $2\sqrt{3}$.

b) Wyznacz sinus kąta ostrego rombu, którego pole jest równe P, a promień okręgu wpisanego w ten romb wynosi r.

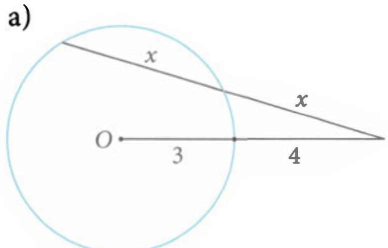
13. Kąt ostry równoległoboku ma miarę $60°$. Odległości punktu przecięcia przekątnych równoległoboku od jego boków są równe odpowiednio 2 i 1. Oblicz:

a) pole równoległoboku,

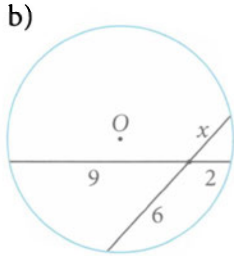
b) długości jego przekątnych.

14. Korzystając z danych na rysunku, oblicz x.

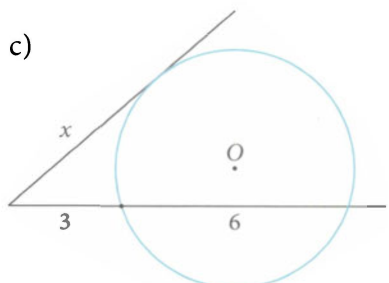
a)



b)



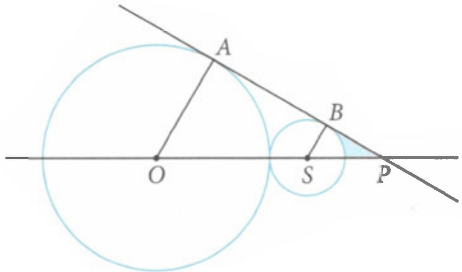
c)



15. Z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu o środku O i promieniu 2 cm poprowadzono dwie proste. Jedna z nich jest styczna do okręgu w punkcie A, a druga przecina okrąg w punktach B i C tak, że odcinek AC jest średnicą okręgu. Oblicz długości odcinków PB i BC, jeżeli długość odcinka AP jest równa $4\sqrt{3}$ cm.

16. Na trójkącie ABC o polu 8 opisano okrąg. Z punktu P leżącego na półprostej BA poprowadzono styczną do okręgu w punkcie C. Oblicz długości odcinków AB i PB, jeżeli $|PC| = 4$ oraz sinus kąta APC jest równy $\frac{2}{3}$.

17. Okrąg o środku O i promieniu 3 jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 1. Prosta przechodząca przez środki tych okręgów przecina prostą styczną do obu okręgów w punkcie P (rysunek poniżej). Oblicz miarę kąta BSP oraz pole zacieniowanego obszaru.



18. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie, jeżeli:

a) najdłuższy bok trójkąta ma długość 8 cm, a jeden z kątów ma miarę $120°$,

b) boki trójkąta mają długości 10 cm i $4\sqrt{3}$ cm, a kąt między nimi ma miarę $30°$.

19. Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AC| = 6$ i $|BC| = 3\sqrt{2}$. Na boku AC tego trójkąta obrano punkt D, a na boku BC – punkt E tak, że $|\sphericalangle CDE| = 30°$ i $|\sphericalangle DEC| = 45°$ oraz promień okręgu opisanego na trójkącie CDE jest równy $2\sqrt{2}$. Wykaż, że odcinki DE i AB są równoległe.

20. Uzasadnij, że jeżeli a, b i c są długościami boków trójkąta, r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a R – promieniem okręgu na nim opisanego, to pole trójkąta wyraża się wzorami:

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \quad \text{oraz} \quad P = \frac{abc}{4R}$$

21. Długość jednego z boków trójkąta jest równa 6 cm, a cosinus kąta leżącego przy tym boku wynosi $\frac{1}{3}$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, jeżeli promień okręgu na nim opisanego jest równy 9 cm.

22. W trójkącie ABC dane są $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = 2\alpha$ oraz $|AB| = 10$. Zapisz długość boku BC jako funkcję kąta α. Podaj dziedzinę tej funkcji.

23. Stosunek boków równoległoboku wynosi $4:5$, a jego obwód jest równy 18 cm. Oblicz cosinus kąta ostrego tego równoległoboku, jeżeli krótsza przekątna ma długość 6 cm.

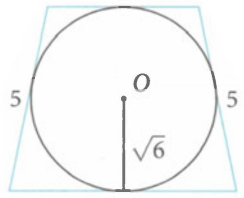
24. W okrąg o środku O wpisano czworokąt $ABCD$ taki, że $|AB| = 8$ i $|BC| = 4$. Oblicz promień tego okręgu, jeżeli kąt między promieniami AO i CO ma miarę $120°$.

25. W trapezie prostokątnym jedno z ramion ma długość $2\sqrt{6}$ i jest nachylone do podstawy pod kątem $15°$. W trapez ten wpisano okrąg. Oblicz promień okręgu i pole trapezu.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 209

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.



Zadanie 1. (1 pkt)
Pole trapezu przedstawionego na rysunku obok jest równe:

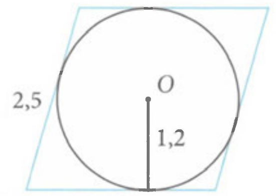
A. $10\sqrt{6}$, **B.** $10\sqrt{3}$, **C.** $6\sqrt{10}$, **D.** $6\sqrt{3}$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Stosunek pola koła wpisanego w romb do pola tego rombu wynosi $\frac{\pi}{8}$. Cosinus kąta ostrego tego rombu jest równy:

A. $\frac{1}{3}$, **B.** $\frac{1}{2}$, **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Pole koła opisanego na sześciokącie foremnym jest o 3π większe od pola koła wpisanego w ten sześciokąt. Pole tego sześciokąta jest równe:

A. $12\sqrt{3}$, **B.** $18\sqrt{3}$, **C.** $20\sqrt{3}$, **D.** $24\sqrt{3}$.



Zadanie 4. (1 pkt)
Suma długości przekątnych rombu (rysunek obok) jest równa:

A. 6, **B.** 7, **C.** 8, **D.** 9.

Zadanie 5. (1 pkt)
Dany jest trapez równoramienny opisany na okręgu. Jeśli ramię trapezu ma długość 8 cm, to obwód trapezu jest równy:

A. 24 cm, **B.** 28 cm, **C.** 30 cm, **D.** 32 cm.

Zadanie 6. (1 pkt)
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 4$, $|AC| = 6$, a kąt CAB ma miarę $120°$. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. $10 + 2\sqrt{7}$, **B.** $10 + 2\sqrt{13}$, **C.** $10 + 2\sqrt{17}$, **D.** $10 + 2\sqrt{19}$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 3\sqrt{5}$, $|AC| = 2$ i cosinus kąta ACB wynosi $-\frac{4}{5}$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

A. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, **B.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}$, **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 8. (1 pkt)
Pole trójkąta o bokach 4 cm, 5 cm i 7 cm jest równe:

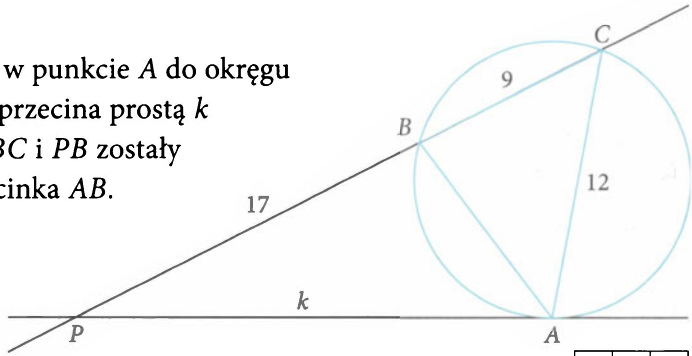
A. $4\sqrt{3}$ cm^2, **B.** $4\sqrt{6}$ cm^2, **C.** $6\sqrt{3}$ cm^2, **D.** $6\sqrt{6}$ cm^2.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 209

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Dane są trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P. Długości odcinków AC, BC i PB zostały podane na rysunku. Oblicz długość odcinka AB. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.



Zadanie 2. (2 pkt)
Dany jest trapez równoramienny o podstawach 20 cm i 40 cm. W trapez ten można wpisać okrąg. Pole tego trapezu jest równe a cm^2. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby a.

Zadanie 3. (2 pkt)
Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 200. Tangens jednego z jego kątów ostrych wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz odległość między wierzchołkiem kąta prostego a punktem styczności okręgu z przeciwprostokątną. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)
Przekątne równoległoboku mają długości 15 cm i 30 cm, a cosinus kąta między nimi zawartego jest równy $\frac{1}{4}$. Oblicz obwód tego równoległoboku. Zakoduj cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności oraz pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 5. (2 pkt)
Bok rombu jest równy 3, a jego dłuższa przekątna ma długość 5. Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 6. (2 pkt)
Trapez równoramienny o przekątnej długości 60 opisany jest na okręgu o promieniu 20. Oblicz obwód tego trapezu. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zestaw D. Zadania otwarte

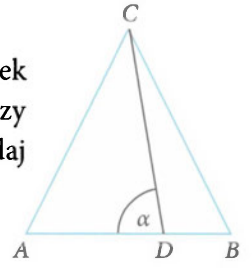
odpowiedzi – s. 209
modele – s. 210

Zadanie 1. (5 pkt)
Przekątna trapezu równoramiennego ma długość $2\sqrt{7}$ cm, a jego obwód jest równy 16 cm. Oblicz długości boków trapezu, jeżeli wiadomo, że w ten trapez można wpisać okrąg.

Zadanie 2. (7 pkt)
Wysokości równoległoboku wynoszą 2,4 cm i 4 cm, a jego obwód jest równy 16 cm.
a) Oblicz długości boków równoległoboku.
b) Oblicz cosinus kąta rozwartego między przekątnymi tego równoległoboku.

Zadanie 3. (7 pkt)
Miara jednego z kątów trójkąta jest równa 30°. Pole tego trójkąta wynosi $\sqrt{3}$, a promień okręgu na nim opisanego jest równy 2. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

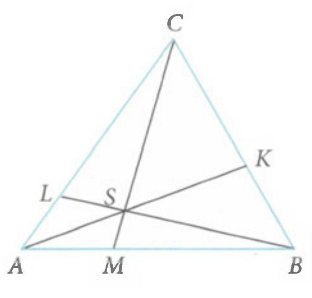
Zadanie 4. (5 pkt)
Punkt D należy do podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok). Odcinek AD jest dwa razy dłuższy, a odcinek DC – trzy razy dłuższy od odcinka DB. Oblicz $\cos\alpha$. Korzystając z tablic trygonometrycznych, podaj miarę kąta α z dokładnością do 1°.



Zadanie 5. (5 pkt)
Kąt przy podstawie trapezu równoramiennego ma miarę 30°. Dłuższa podstawa jest równa $6\sqrt{3}$, a ramię ma długość 3. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

Zadanie 6. (7 pkt)
Przekątna trapezu równoramiennego ma długość d i jest nachylona do dłuższej podstawy pod kątem α. Wykaż, że:
a) pole tego trapezu jest równe $\frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$,
b) jeżeli w ten trapez można wpisać okrąg, to obwód trapezu jest równy $4d\cos\alpha$.

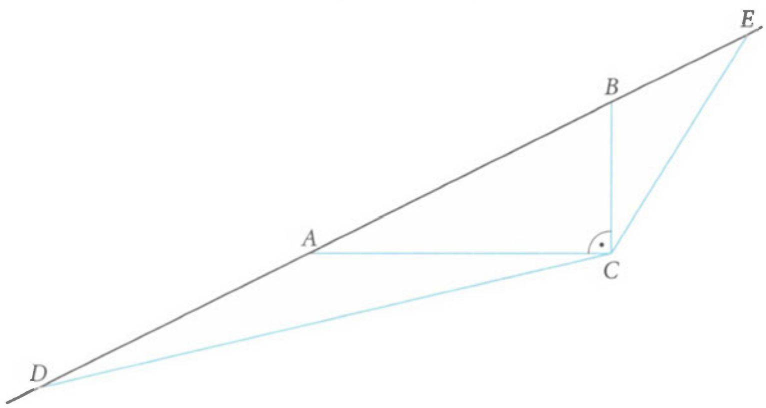
Zadanie 7. (6 pkt) CKE
Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM. Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (rysunek obok). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS.



Zadanie 8. (6 pkt)
Na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$ opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $|SB| = 3|CS|$. Oblicz:
a) długość ramienia tego trapezu,
b) cosinus kąta ABD.

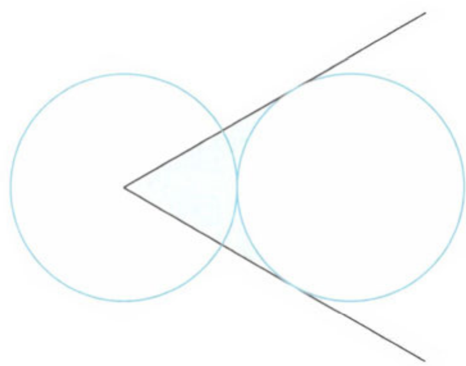
Zadanie 9. (7 pkt)
W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AC i BC mają długości odpowiednio 12 i 9. Na boku AB wybrano taki punkt D, że odcinki BC i BD są równe. Oblicz cosinus kąta BCD, promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 10. (6 pkt) CKE
Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (rysunek poniżej). Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.



Zadanie 11. (5 pkt)
W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa $|AB| = 10$, a ramię $|AD| = 6$. Dwusieczna kąta BAD przecina podstawę DC w punkcie P. Oblicz długość krótszej podstawy trapezu, jeżeli pole czworokąta $ABCP$ jest dwa razy większe od pola trójkąta ABS, gdzie S jest punktem przecięcia odcinka AP z przekątną DB.

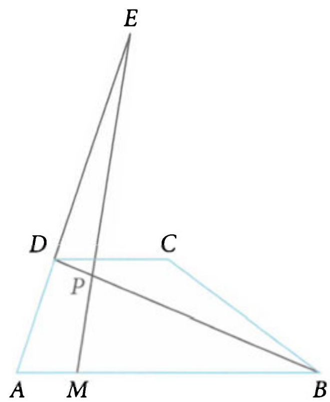
Zadanie 12. (6 pkt)
Dwa okręgi o równych promieniach są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu (rysunek obok). Wykaż, że pole koła ograniczonego każdym z tych okręgów jest równe $\frac{3P\pi}{3\sqrt{3}-\pi}$, gdzie P jest polem zacieniowanej figury.



Zadanie 13. (4 pkt) CKE 2015
Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

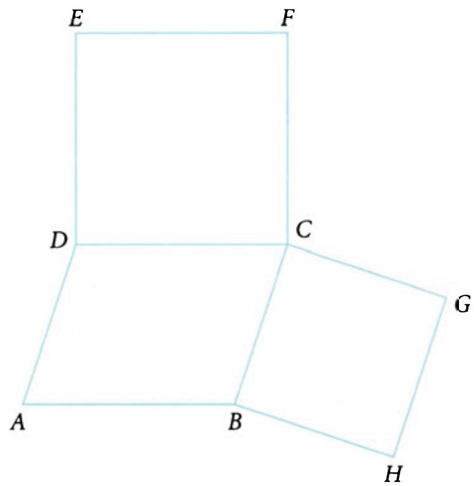
Zadanie 14. (3 pkt) CKE 2015
Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $|AB| > |BC|$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $|\sphericalangle AEF| = 90°$. Udowodnij, że $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EAF|$.

Zadanie 15. (3 pkt) CKE
Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $|AE| = 3|AD|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $|MB| = 4|AM|$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (rysunek obok). Udowodnij, że $|BP| = 6|PD|$.

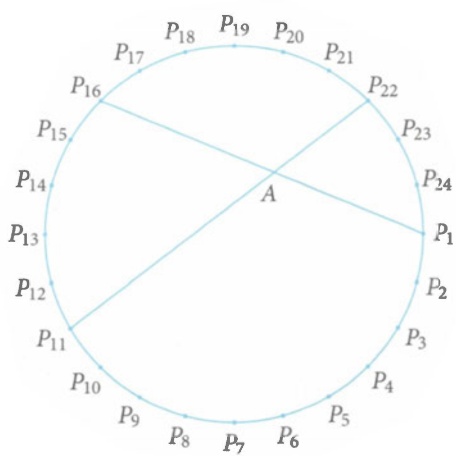


Zadanie 16. (4 pkt) CKE
Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 1. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F umieszczone tak, by $|CE| = 2|DF|$. Oblicz wartość $x = |DF|$, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

Zadanie 17. (4 pkt) CKE
Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.



Zadanie 18. (3 pkt) CKE
Punkty $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{23}, P_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki (zobacz rysunek). Punkt A jest punktem przecięcia cięciw $P_{11}P_{22}$ i P_1P_{16}. Udowodnij, że $|\sphericalangle P_{16}AP_{11}| = 60°$.



Zadanie 19. (4 pkt) CKE 2015

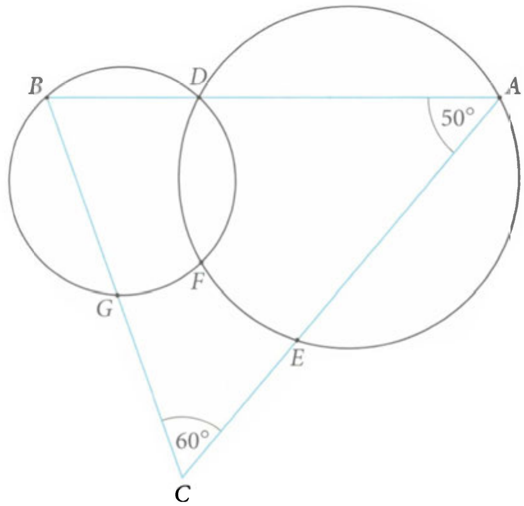
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC. Punkt S jest środkiem odcinka BD. Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P. Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.

Zadanie 20. (4 pkt) CKE 2015

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

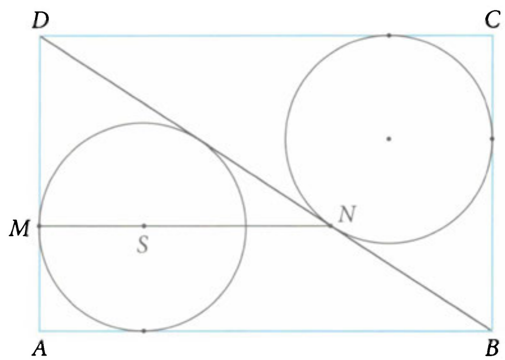
Zadanie 21. (3 pkt) CKE 2015

W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę $50°$, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę $60°$. Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B, przecina okrąg o_1 w punkcie D oraz w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G. Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.



Zadanie 22. (3 pkt) CKE 2016

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.



Zadanie 23. (3 pkt) CKE 2017

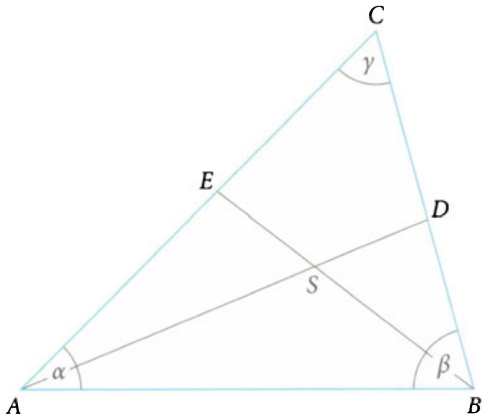
W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E. Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

Zadanie 24. (6 pkt) CKE 2017

Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu, o długości 12, jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP.

Zadanie 25. (3 pkt) CKE 2017

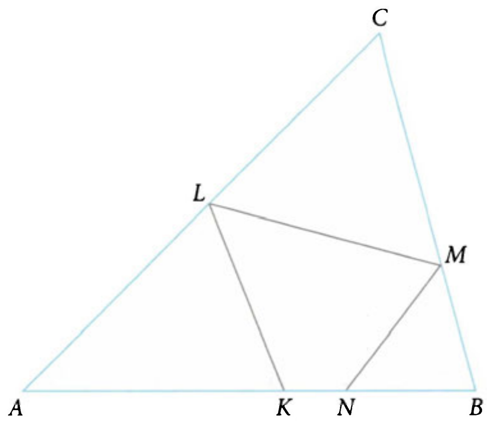
Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ i $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

Zadanie 26. (3 pkt) CKE 2013

Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC| > |BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K. Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC, punkt M jest obrazem punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB, a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

10. Geometria analityczna

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
Geometria analityczna
Vademecum, s. 222–230

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 221

1. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(\sqrt{3}, -2)$ oraz:
   a) prostopadłej do prostej $3\sqrt{6}x - 6y - 4 = 0$,
   b) nachylonej do osi OX pod kątem $120°$.

2. Jaki kąt tworzy z osią OX dana prosta?
   a) $\sqrt{3}x - 3y = 2$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}x + y = 1$ c) $x + y = 3$ d) $9x - 3\sqrt{3}y = 4$

3. Dla jakich wartości parametru a dane proste są równoległe, a dla jakich – prostopadłe?
   a) $x - a^2y + 2a = 0,\ \ ax - y - 3 = 0$
   b) $(a-1)x + (a-2)y + 1 = 0,\ \ ax + (2-a)y + 1 = 0$

4. Proste $l\colon y = mx + n$ i $k\colon y = nx + m$ są prostopadłe. Punkt ich przecięcia leży na prostej o równaniu $y = -2x$. Wyznacz równania prostych l i k.

5. Dla jakich wartości parametru m proste $y = mx + 2$ i $x + my - 1 = 0$ przecinają się w punkcie należącym do prostokąta o wierzchołkach $A(-2,1)$, $B(-2,-1)$, $C(1,-1)$, $D(1,1)$?

6. Dla jakich wartości parametru m prosta $y = mx + m + 1$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z odcinkiem łączącym punkty $A(1,0)$ i $B(0,2)$?

7. Dla jakich wartości parametru m prosta $y = mx - m - 2$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem $ABCD$, jeżeli $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$, $D(0,2)$?

8. Dla jakich wartości parametru a rozwiązaniem układu równań:
$$\begin{cases} ax + y + 1 = 0 \\ 4x + ay - 1 = 0 \end{cases}$$
   jest para liczb: a) dodatnich, b) ujemnych, c) o różnych znakach?

9. Dla jakich wartości parametru a proste $3x + ay + 1 = 0$ i $ax + 3y - 1 = 0$ mają jeden punkt wspólny należący do drugiej ćwiartki układu współrzędnych?

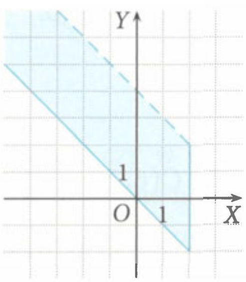
10. Dane są punkt $A(-3,-3)$ i prosta $k\colon y = 4x + 2$. Przez punkt A poprowadzono prostą l nachyloną do osi OX pod kątem $135°$. Oblicz pole figury ograniczonej przez oś OY oraz proste k i l.

11. Rozwiąż graficznie układ nierówności.

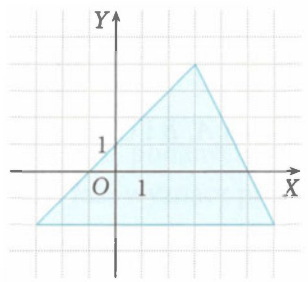
a) $\begin{cases} x-y+2>0 \\ x+y-4<0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+6\geqslant 0 \\ x+y\geqslant 0 \\ x>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y-4\geqslant 0 \\ 2x-y-12>0 \\ y<4 \end{cases}$

12. Podaj układ nierówności opisujący zbiór przedstawiony na rysunku.

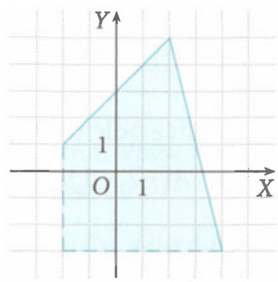
a)



b)



c)



13. a) Wyznacz punkt P leżący na prostej $y=3x+1$, który jest równo oddalony od punktów $A(-2,3)$ i $B(2,1)$.

b) Napisz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie $A(-2,1)$, $B(6,5)$. Wyznacz punkty, których odległość od punktów A i B jest równa $2\sqrt{10}$.

14. Prosta $y=2x+3$ jest symetralną odcinka AB. Oblicz współrzędne punktu A, jeżeli $B(5,3)$.

15. Środkowa trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C jest zawarta w prostej $7x+y=6$, a wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka B – w prostej $x+3y=8$. Oblicz współrzędne punktów B i C, jeśli $A(-3,-3)$.

16. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A(-2,-2)$ i $B(6,0)$. Środkowa CS jest równa $7\sqrt{2}$ i zawiera się w prostej $y=-x+1$. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka C.

17. Jeden z boków trójkąta równobocznego ABC jest równoległy do osi OX. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeżeli należą one do wykresu funkcji $f(x)=-x^2+4$.

18. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o danych równaniach.

a) $x^2+6x+y^2-2y-8=0$, $x^2-8x+y^2-4y+12=0$

b) $x^2-8x+y^2-6y=0$, $x^2-6x+y^2-2y+8=0$

c) $x^2-4x+y^2-4y-1=0$, $x^2+6x+y^2-8y+21=0$

19. Wyznacz równanie okręgu, którego środek leży na prostej l, jeśli punkty A i B leżą na tym okręgu.

a) $A(0,1)$, $B(-1,0)$, $l\colon x-1=0$ b) $A(1,0)$, $B(-1,4)$, $l\colon x-y+3=0$

20. Wyznacz równanie okręgu o środku $S(-1,2)$ stycznego do okręgu o danym równaniu (rozpatrz dwa przypadki).

a) $x^2+2x+y^2+16y+1=0$

b) $x^2-6x+y^2+2y+9=0$

21. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

a) $A(4,-7)$, $B(2,7)$, $C(-2,5)$

b) $A(-6,1)$, $B(3,-2)$, $C(2,5)$

22. Napisz równanie okręgu o promieniu $\sqrt{5}$, jeśli punkty A i B należą do tego okręgu.

a) $A(0,4)$, $B(-1,1)$

b) $A(1,3)$, $B(4,2)$

23. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach A, B i C.

a) $A(-2,-1)$, $B(1,3)$, $C(-3,6)$

b) $A(-2,4)$, $B(4,-2)$, $C(6,2)$

24. Odcinek o końcach $A(-1,-3)$, $B(3,5)$ jest średnicą pewnego okręgu. Punkt C należy do tego okręgu i jest jednakowo oddalony od punktów A i B. Oblicz współrzędne punktu C i pole trójkąta ABC.

25. Oblicz odległość środka okręgu $x^2-2x+y^2-4y=0$ od danej prostej. Sprawdź, ile punktów wspólnych mają okrąg i prosta.

a) $y=x+3$

b) $y=\frac{4}{3}(x+4)$

c) $y=-2x+9$

26. Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2-6x+y^2-2y+5=0$:

a) przechodzących przez początek układu współrzędnych,

b) równoległych do prostej $x-2y=0$,

c) prostopadłych do prostej $4x-2y=1$.

27. Wyznacz parametr a, dla którego dana prosta jest styczna do okręgu określonego równaniem $x^2+4x+y^2-6y+4=0$.

a) $x+y+a=0$

b) $2x-y+a=0$

c) $ax-y=0$

28. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2+4x+y^2-2y-20=0 \\ y=7x-10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-6x+y^2=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ y=|x-1|-3 \end{cases}$

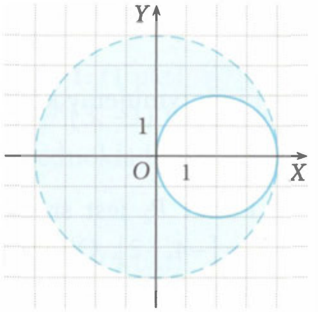
d) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-12x+y^2-6y+25=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2-12x+y^2-2y+17=0 \\ x^2+y^2-6y-11=0 \end{cases}$

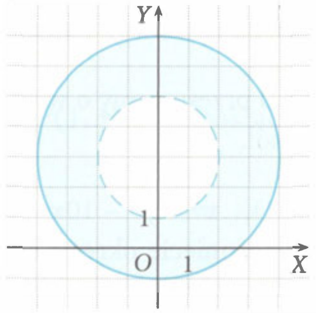
f) $\begin{cases} x^2-4x+y^2-2y-8=0 \\ x^2-10x+y^2-8y+40=0 \end{cases}$

29. Zapisz układ nierówności opisujący zacieniowany podzbiór płaszczyzny.

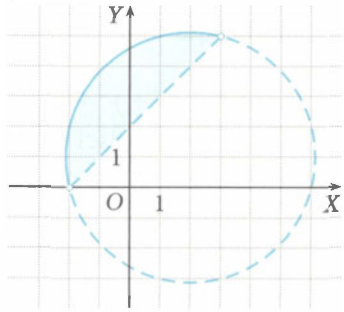
a)



b)



c)



30. Sprawdź, czy w równoległobok $ABCD$, o podanych wierzchołkach, można wpisać okrąg i czy można na nim opisać okrąg. Jeśli tak, wyznacz promienie tych okręgów.

a) $A(4,-2)$, $B(7,4)$, $C(-1,8)$, $D(-4,2)$ b) $A(-1,0)$, $B(8,-3)$, $C(5,6)$, $D(-4,9)$

31. Dane są punkty $A(4,-3)$, $B(2,-5)$ i $C(-1,3)$. Wyznacz współrzędne punktu P takiego, że:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PC}$, b) $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AP}$, c) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

32. Punkty P, Q i R są odpowiednio środkami boków AB, BC i CD równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołków równoległoboku, jeżeli:

a) $\overrightarrow{AB} = [9,5]$, $Q(8,4)$, $R\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$, c) $\overrightarrow{AB} = [1,5]$, $\overrightarrow{AD} = [-2,6]$, $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$,

b) $P(4,-2)$, $Q\left(\frac{11}{2}, 0\right)$, $R(1,4)$, d) $\overrightarrow{AB} = [8,-4]$, $\overrightarrow{AC} = [14,2]$, $P(6,-3)$.

33. Dla jakich wartości parametru m współrzędne środka ciężkości (punktu przecięcia środkowych) trójkąta o wierzchołkach $A(0,-2)$, $B(2,-1)$, $C(1,0)$ spełniają nierówność $2x - y + m \geqslant 0$?

34. Punkt $S(2,3)$ jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$ oraz $\overrightarrow{AB} = [8,4]$, $\overrightarrow{BC} = [2,6]$. Oblicz:

a) współrzędne wierzchołków równoległoboku,

b) miarę kąta ABC,

c) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

35. Dane są współrzędne wierzchołków $A(-3,-2)$ i $C(2,8)$ trapezu $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego trapezu, jeżeli podstawa AB jest cztery razy dłuższa od podstawy DC.

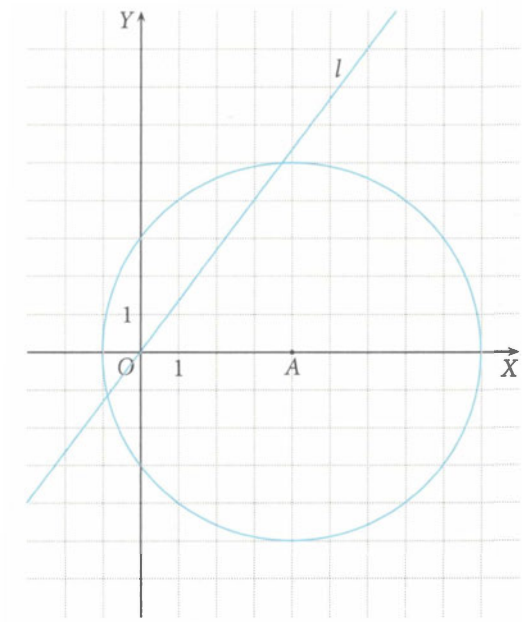
36. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są $A(-1,0)$, $D(1,5)$ oraz punkt przecięcia przekątnych $S(2,3)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu oraz jego pole, jeżeli $|DC| = \sqrt{5}$.

37. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są wierzchołki $A(-5,1)$, $B(3,-3)$ i $C(3,1)$. Przekątna DB trapezu jest zawarta w prostej $3x + 2y = 3$. Oblicz współrzędne punktu D, sinus kąta BAD oraz promień okręgu opisanego na trójkącie ABD.

38. Koło K_1: $x^2 + y^2 + 12x + 2y + 21 \leqslant 0$ przesuwamy o wektor $\vec{v} = [4,4]$ i otrzymujemy koło K_2. Oblicz pole części wspólnej tych kół.

39. Punkt P_1 jest środkiem okręgu O_1: $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$. Punkt P_2 jest środkiem okręgu O_2 otrzymanego przez przesunięcie okręgu O_1 o wektor $\vec{v} = [-4,-2]$. Oblicz pole czworokąta P_1AP_2B, gdzie A i B są punktami wspólnymi tych okręgów.

40. Prosta l (rysunek obok) dana jest równaniem $4x - 3y = 0$. Środkiem okręgu O_1 o promieniu 5 jest punkt $A(4,0)$. Okrąg O_2 jest obrazem okręgu O_1 w symetrii względem prostej l. Wyznacz długość najdłuższego odcinka PQ, jeśli punkt P leży na okręgu O_1, punkt Q – na okręgu O_2 oraz punkt A należy do odcinka PQ.



41. Odcinek o końcach $C(3,-6)$ i $D(7,2)$ jest obrazem odcinka o końcach $A(-1,-4)$ i $B(1,0)$ w pewnej jednokładności o skali k. Wyznacz tę skalę oraz środek jednokładności P, jeśli k jest liczbą:

a) dodatnią, b) ujemną.

42. Wyznacz skalę i środek jednokładności, która okrąg O_1 przekształca na okrąg O_2.

a) O_1: $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 14 = 0$, O_2: $x^2 + y^2 - 18x + 2y + 78 = 0$

b) O_1: $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$, O_2: $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 64 = 0$

43. Okrąg O_1 o środku w punkcie $(4,-2)$ jest styczny do osi OX. Okrąg ten przekształcono przez jednokładność o skali $k = -\frac{3}{2}$ i środku w punkcie P należącym do prostej $x + 2y = 0$. W ten sposób otrzymano okrąg O_2. Podaj równanie okręgu O_2, jeśli:

a) jest on styczny do osi OX, b) jest on styczny do osi OY.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 222

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) CKE 2017

Punkt $P'(3,-3)$ jest obrazem punktu $P(1,3)$ w jednokładności o środku w punkcie $S(-2,12)$. Skala jednokładności jest równa:

A. $\frac{3}{5}$, **B.** $\frac{5}{3}$, **C.** 2, **D.** 3.

Zadanie 2. (1 pkt)

Przekątne kwadratu o polu równym 52 przecinają się w punkcie $(1,-2)$. Jeśli punkt $A(x,y)$ jest jednym z wierzchołków tego kwadratu, to jego współrzędne mogą być równe:

A. $x=-1$ i $y=-5$, **B.** $x=-1$ i $y=-6$, **C.** $x=-3$ i $y=-1$, **D.** $x=-4$ i $y=-1$.

Zadanie 3. (1 pkt)

Dla którego z podanych punktów jego odległość od prostej danej równaniem $y=\frac{3}{4}x-3$ wyraża się liczbą całkowitą?

A. $(4,1)$ **B.** $(1,4)$ **C.** $(2,4)$ **D.** $(4,2)$

Zadanie 4. (1 pkt)

Środek okręgu danego równaniem $x^2-6x+y^2+10y+30=0$ należy do prostej:

A. $y=3x-14$, **B.** $y=3x+14$, **C.** $y=-3x-14$, **D.** $y=-3x+14$.

Zadanie 5. (1 pkt) CKE

Okrąg O_1 ma równanie $x^2+(y-1)^2=25$, a okrąg O_2 ma równanie $(x-1)^2+y^2=9$. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.

B. Te okręgi są styczne.

C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg O_1 leży w całości wewnątrz okręgu O_2.

D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg O_2 leży w całości wewnątrz okręgu O_1.

Zadanie 6. (1 pkt)

Prosta l jest styczna do okręgu o równaniu $x^2+y^2=169$ w punkcie $(12,5)$. Prosta l przecina oś OY w punkcie:

A. $\left(0,31\frac{4}{5}\right)$, **B.** $\left(0,32\frac{4}{5}\right)$, **C.** $\left(0,33\frac{4}{5}\right)$, **D.** $\left(0,34\frac{4}{5}\right)$.

Zadanie 7. (1 pkt)

Dane są punkty $A(-4,2)$, $B(6,-8)$ i $P(x_0,y_0)$. Jeśli spełniona jest równość $2\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}$, to suma x_0+y_0 wynosi:

A. 0, **B.** -2, **C.** -4, **D.** -6.

Zadanie 8. (1 pkt) CKE 2015

Okrąg o równaniu $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ ma dwa punkty wspólne z prostą o równaniu:

A. $x=0$, **B.** $y=0$, **C.** $y=-x$, **D.** $y=x$.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 222

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Oblicz odległość między prostymi $y = -\frac{2}{3}x - 4$ i $y = -\frac{2}{3}x + 9$. Zakoduj cyfry dziesiątek i jedności oraz pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2. (2 pkt)
Oblicz obwód trójkąta ABC, jeśli $\overrightarrow{AB} = [4, 3]$ i $\overrightarrow{BC} = [6, -8]$. Zakoduj cyfry dziesiątek i jedności oraz pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3. (2 pkt)
Prosta $y + x = 0$ przecina okrąg dany równaniem $x^2 + y^2 = 450$ w punktach A i B. Oblicz odległość między tymi punktami. Zakoduj cyfry dziesiątek i jedności oraz pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)
Prosta $y = -x + b$ jest styczna do okręgu danego równaniem $x^2 + y^2 = 10$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $|b|$.

Zadanie 5. (2 pkt)
Okręgi $x^2 + y^2 = 9$ i $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$ przecinają się w punktach P i Q. Oblicz sumę odległości punktów P i Q od początku układu współrzędnych. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 6. (2 pkt)
Jednokładność o środku w punkcie $P(2, 1)$ przekształca punkt $A(5, 2)$ na punkt $A'(-4, -1)$. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{u'}$ będącego obrazem wektora $\vec{u} = [60, 70]$ w tej jednokładności. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (2 pkt)
Wektor $\left[\sqrt{2}m, -\frac{1}{4}m^2\right]$ ma ten sam kierunek co wektor $[12, -18]$. Wyznacz m. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 8. (2 pkt)
Wyznacz dodatnią wartość parametru p, dla której dane wektory $\left[8p + 1, p + \frac{7}{8}\right]$ oraz $\left[-p + \frac{1}{8}, 4p + \frac{1}{2}\right]$ są prostopadłe. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zestaw D. Zadania otwarte

◂ odpowiedzi – s. 222
modele – s. 223

Zadanie 1. (6 pkt)
Dla jakiej wartości parametru a jedynym rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} ax + y + 1 = 0 \\ 2x + (a+1)y - 1 = 0 \end{cases}$$

jest para liczb spełniająca nierówność $|x - y| \geqslant 1$?

Zadanie 2. (4 pkt)
Proste o równaniach $ax + y = 2b$ i $x + by = 2 - 3a$ przecinają się w punkcie $A(-1, 3)$. Oblicz pole trójkąta ABC, gdzie B i C są punktami przecięcia prostych z osią OX.

Zadanie 3. (4 pkt)
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$, której odległość od punktu $(2, 4)$ jest równa $\sqrt{13}$.

Zadanie 4. (3 pkt) CKE
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $y = mx + (2m + 3)$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S(0, 0)$ i promieniu $r = 3$.

Zadanie 5. (6 pkt) CKE 2015
Dany jest okrąg O_0 o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$. W pierwszej „ćwiartce" układu współrzędnych istnieją dwa okręgi O_1, O_2 styczne zewnętrznie do okręgu O_0 i jednocześnie styczne do obu osi układu współrzędnych. Oblicz odległość środków okręgów O_1 oraz O_2.

Zadanie 6. (6 pkt)
Proste $y - 5x = 2$ i $4y + x = 8$ przecinają się w punkcie A, a prosta k przecina te proste w punktach B i C. Punkt $S\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ jest środkiem odcinka BC. Oblicz:

a) współrzędne punktów B i C,

b) odległość punktu A od prostej k i pole trójkąta ABC.

Zadanie 7. (5 pkt)
Uzasadnij, że trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 1)$, $B(-1, 5)$ i $C(-5, 7)$ jest rozwartokątny. Oblicz sinus kąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 8. (5 pkt)
Oblicz odległość między prostymi $y = 2x + 6$ i $y = 2x - 4$. Wyznacz równanie okręgu o środku leżącym na osi OY, stycznego do obu tych prostych.

Zadanie 9. (6 pkt)
Prosta $x - y = 1$ przecina okrąg $x^2 + 6x + y^2 - 4y - 13 = 0$ w punktach A i B. Oblicz pole trójkąta ABC oraz współrzędne punktu C, jeżeli AC jest średnicą tego okręgu.

Zadanie 10. (4 pkt)
Wyznacz równania stycznych do okręgu $(x-4)^2+y^2=12$ nachylonych do osi OX pod kątem $60°$.

Zadanie 11. (6 pkt)
Na trapezie $ABCD$ o podstawie AB opisano okrąg o równaniu $x^2+4x+y^2-2y-29=0$. Wyznacz współrzędne punktu D, jeśli $A(-5,6)$, $B(3,-2)$, $C(3,4)$. Oblicz miarę kąta ostrego tego trapezu.

Zadanie 12. (5 pkt) CKE
Okrąg o środku $S(3,2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Zadanie 13. (7 pkt)
Punkt $S\left(\frac{1}{2},5\right)$ jest środkiem odcinka AC, gdzie $C(2,8)$. Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień opisanego na nim okręgu, jeśli $\overrightarrow{AB}=[8,-6]$.

Zadanie 14. (7 pkt)
Punkt $O(2,1)$ jest środkiem przekątnej AC równoległoboku $ABCD$ oraz $\overrightarrow{AC}=[2,6]$. Środek S boku AD ma współrzędne $S\left(0,\frac{5}{2}\right)$. Wyznacz:

a) współrzędne środków pozostałych boków równoległoboku,

b) miarę kąta AOB i pole równoległoboku.

Zadanie 15. (5 pkt)
Dwie wysokości trójkąta ABC zawarte są w prostych $y=\frac{1}{2}x+3$ i $y=-x+4$. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wierzchołek C ma współrzędne $(2,6)$.

Zadanie 16. (6 pkt)
W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB dany jest wierzchołek $C(-2,1)$. Prosta $y=2x-5$ jest symetralną boku AC, a jedna z wysokości trójkąta jest zawarta w prostej $y=x+3$. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego trójkąta.

Zadanie 17. (7 pkt) CKE
Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A(1,4)$ i $B(-6,3)$ leży na osi OX.

a) Wyznacz równanie tego okręgu.

b) Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej AB i oddalonej od początku układu współrzędnych o $\sqrt{2}$.

Zadanie 18. (4 pkt) CKE
Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu:

$$(x-16)^2+y^2=4$$

jest okrąg o równaniu $(x-6)^2+(y-4)^2=16$, a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

Zadanie 19. (2 pkt) CKE 2015
Prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{61}{14}$ jest styczna od okręgu o środku $S(1, -4)$. Wyznacz promień tego okręgu.

Zadanie 20. (6 pkt)
Punkt $A(6, -5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta wpisanego w okrąg dany równaniem $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 15 = 0$. Oblicz pole tego trójkąta, wiedząc, że prosta $7x - y - 22 = 0$ jest jego osią symetrii.

Zadanie 21. (5 pkt) CKE 2016
Punkty $A(30, 32)$ i $B(0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x - y + 2 = 0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.

Zadanie 22. (5 pkt) CKE 2016
Punkty $A(-7, -2)$ i $B(4, -7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC, a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

Zadanie 23. (5 pkt)
Punkt $A(2, 1)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $B(-1, 0)$. Wyznacz równanie tego okręgu. Dla jakiej wartości parametru a prosta $x - ay + 4 = 0$ nie ma punktów wspólnych z tym okręgiem?

Zadanie 24. (5 pkt) CKE 2017
Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(-5, 3)$ i $B(0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.

Zadanie 25. (5 pkt)
Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest zawarta w osi OY i należy do niej początek układu współrzędnych. Jedna z jego przyprostokątnych jest zawarta w prostej $4x - 3y - 15 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli jego pole jest równe $12\frac{1}{2}$.

Zadanie 26. (5 pkt) CKE 2017
Prosta l, na której leży punkt $P(8, 2)$, tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej l.

Zadanie 27. (5 pkt)
Punkt $A(15, -5)$ jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku B, opisanego na okręgu $x^2 + y^2 = 25$. Wyznacz wierzchołki B i C tego trójkąta, wiedząc, że jego przeciwprostokątna jest równoległa do osi OX.

Zadanie 28. (6 pkt) CKE 2018
Punkt $A(7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

11. Stereometria

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
Stereometria
Vademecum, s. 251–258

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 233

1. Przekątne podstawy prostopadłościanu mają długość 5, a cosinus kąta między nimi jest równy $\frac{7}{25}$. Oblicz cosinus kąta między przekątnymi dwóch ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka, jeżeli wysokość prostopadłościanu jest równa $2\sqrt{3}$.

2. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt, którego dwa kąty mają miary 30° i 45°, a najkrótszy bok ma długość 1. Oblicz wysokość graniastosłupa, jeżeli jego objętość jest równa 8.

3. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 45°. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem 60° i ma długość 4. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

4. Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 2, a jego wysokość jest równa 1. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną.

5. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $6\sqrt{3}$, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy wynosi 30°. Oblicz długość krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

6. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściany boczne nachylone są do podstawy pod kątem α. Wysokość ścian bocznych jest równa h. Wyznacz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7. Oblicz cosinus kąta zawartego między ścianami bocznymi:

   a) czworościanu foremnego,

   b) ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o ramieniu dwa razy dłuższym od krawędzi podstawy.

8. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny o kącie prostym w wierzchołku C. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 3. Ściany boczne ACS i BCS są prostopadłe do podstawy. Pole ściany ABS jest równe $12\sqrt{2}$ i jest ona nachylona do podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi wynosi $-\frac{1}{9}$, a krawędź podstawy jest równa $\sqrt{10}$. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

10. a) Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 2, a jego krawędź podstawy ma długość 4. Oblicz miarę kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

b) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt nachylenia krawędzi do podstawy jest równy α. Wykaż, że:

$$\cos\beta = \frac{-1}{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}$$

gdzie β jest kątem między sąsiednimi ścianami bocznymi.

11. Stosunek powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do jego powierzchni podstawy jest równy k.

a) Jakie wartości może przyjmować k?

b) Wyznacz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi krawędziami bocznymi tego ostrosłupa. Oblicz miarę tego kąta dla $k = \sqrt{3}$.

c) Wykaż, że $\cos\alpha = -\frac{1}{k^2}$, gdzie α jest kątem między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

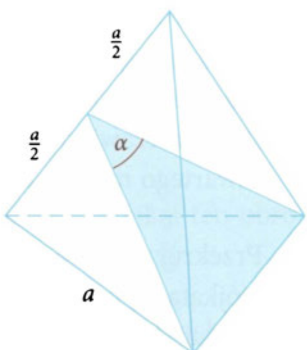
12. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt o bokach 2, 3 i 4. Oblicz objętość ostrosłupa, jeżeli jego wysokość jest równa dwóm długościom promienia okręgu:

a) opisanego na podstawie, b) wpisanego w podstawę.

13. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach 4 i $4\sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 4. Oblicz cosinus kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

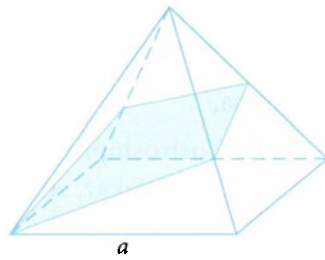
14. Sześcian o krawędzi a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz pole tego przekroju, jeśli: a) $\alpha = 30°$, b) $\alpha = 60°$.

15. Na rysunku obok przedstawiono czworościan foremny. Kąt β jest zawarty między płaszczyzną przekroju a płaszczyzną podstawy. Wyznacz cosinusy kątów α i β. Oblicz pole zaznaczonego przekroju.



16. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 3 i 4, a jego wysokość jest równa 1. Przez przekątną podstawy oraz przekątne dwóch ścian bocznych poprowadzono płaszczyznę. Oblicz sinus kąta między tą płaszczyzną a płaszczyzną podstawy.

17. Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny o wszystkich krawędziach równej długości. Oblicz pole przekroju zaznaczonego na rysunku, jeśli płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą kąt $30°$.

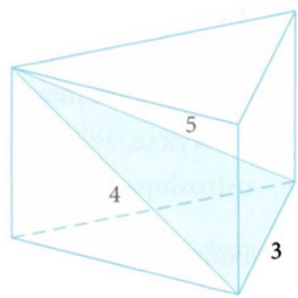


18. Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa jest trójkątem równobocznym. Oblicz cosinus kąta zawartego między:

a) krawędzią boczną a krawędzią podstawy,

b) ścianą boczną a podstawą,

c) sąsiednimi ścianami bocznymi.



19. Przekrój graniastosłupa prostego trójkątnego, przedstawionego na rysunku obok, jest trójkątem prostokątnym o bokach długości 3, 4 i 5 oraz kącie nachylenia do płaszczyzny podstawy równym $30°$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

20. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt o bokach długości 2, $\sqrt{7}$ i 3. Przez najdłuższy bok podstawy i jeden z wierzchołków drugiej podstawy poprowadzono płaszczyznę. W przekroju otrzymano trójkąt o polu $3\sqrt{3}$. Oblicz cosinus kąta zawartego między ramionami tego trójkąta oraz miarę kąta zawartego między płaszczyzną przekroju a płaszczyzną podstawy.

21. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o polu P. Przez krótszą przekątną rombu poprowadzono płaszczyznę, zawierającą jeden z wierzchołków graniastosłupa, nachyloną do podstawy pod kątem $60°$. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

22. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym tangens kąta zawartego między przeciwległymi krawędziami bocznymi wynosi $2\sqrt{6}$. Przez wierzchołek ostrosłupa oraz przekątną podstawy niezawierającą spodka wysokości poprowadzono płaszczyznę. Oblicz tangens kąta α zawartego między tą płaszczyzną a płaszczyzną podstawy.

23. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym o podstawie 6. Wysokość tego trójkąta opuszczona na ramię wynosi $4\sqrt{2}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

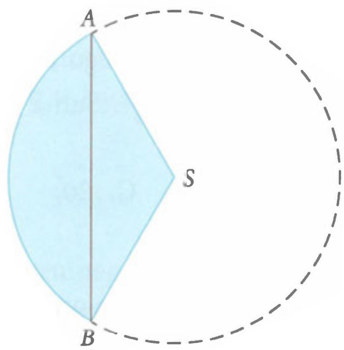
24. Wysokość trapezu prostokątnego jest równa 4, a jego przekątne mają długości $2\sqrt{5}$ oraz 5. Trapez ten obracamy wokół prostej zawierającej jego krótsze ramię. Oblicz objętość powstałej w ten sposób bryły.

25. W stożek wpisano walec. Oblicz stosunek objętości stożka do objętości walca, jeżeli:

a) promień podstawy stożka jest trzy razy większy od promienia podstawy walca,

b) przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, a przekrój osiowy walca jest kwadratem.

26. Wycinek koła o promieniu $3\sqrt{3}$ (rysunek poniżej) po zwinięciu stanowi powierzchnię boczną stożka o wierzchołku S. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy, jeżeli cięciwa AB ma długość 9.



27. Pole przekroju osiowego stożka jest dwa razy większe od pola przekroju osiowego walca wpisanego w ten stożek. Wysokość walca jest cztery razy większa od promienia jego podstawy. Oblicz tangens kąta zawartego między tworzącą stożka a jego wysokością.

28. W kulę wpisano dwa stożki o wspólnej podstawie. Kąt rozwarcia jednego z nich ma miarę $\alpha \in (0°; 90°)$, a drugiego: $180° - \alpha$. Wyznacz stosunek objętości tych stożków.

29. Objętość stożka jest równa V, a tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość kuli wpisanej w ten stożek.

30. W stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny o boku 4, wpisano sześcian (sześcian jest wpisany w stożek, jeśli cztery jego wierzchołki należą do podstawy stożka, a pozostałe cztery do powierzchni bocznej stożka). Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

31. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 120°$, $|AB| = \sqrt{31}$ i $|AC| = 1$. Trójkąt ten obrócono wokół prostej zawierającej najkrótszy bok. Oblicz objętość otrzymanej bryły.

32. W półkulę otrzymaną w wyniku przekroju kuli o promieniu R płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli, wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny tak, że jego wierzchołek jest środkiem kuli, a wierzchołki podstawy ostrosłupa należą do sfery półkuli. Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny przekroju pod kątem α. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 233

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba krawędzi graniastosłupa n-kątnego jest o 42 mniejsza od liczby krawędzi graniastosłupa $2n$-kątnego. Oznacza to, że liczba wierzchołków graniastosłupa n-kątnego jest równa:

A. 42, **B.** 36, **C.** 28, **D.** 24.

Zadanie 2. (1 pkt)
Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $\sqrt{6}$ i tworzy z podstawą graniastosłupa kąt, którego cosinus jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Suma długości krawędzi tego graniastosłupa wynosi:

A. 12, **B.** 16, **C.** 20, **D.** 24.

Zadanie 3. (1 pkt)
Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego opisanego na kuli o promieniu 3 cm jest równa:

A. $108\sqrt{3}$ cm^3, **B.** $112\sqrt{3}$ cm^3, **C.** $124\sqrt{3}$ cm^3, **D.** $144\sqrt{3}$ cm^3.

Zadanie 4. (1 pkt)
Wskaż najmniejszą liczbę n, dla której ściany boczne ostrosłupa prawidłowego n-kątnego nie mogą być trójkątami równobocznymi.

A. $n = 3$ **B.** $n = 4$ **C.** $n = 5$ **D.** $n = 6$

Zadanie 5. (1 pkt)
Graniastosłup prawidłowy trójkątny i czworościan foremny mają wspólną podstawę oraz takie samo pole powierzchni całkowitej, równe $36\sqrt{3}$ cm^2. Wynika stąd, że wysokość graniastosłupa jest równa:

A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm, **B.** $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ cm, **C.** $\sqrt{3}$ cm, **D.** $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm.

Zadanie 6. (1 pkt)
Sześcian o krawędzi 3 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Jedna z brył uzyskanych w wyniku tego przekroju ma objętość:

A. $\frac{11}{2}$ cm^3, **B.** $\frac{27}{2}$ cm^3, **C.** $\frac{35}{2}$ cm^3, **D.** $\frac{45}{2}$ cm^3.

Zadanie 7. (1 pkt)
Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem. Wynika stąd, że kąt rozwarcia stożka ma miarę:

A. $150°$, **B.** $120°$, **C.** $90°$, **D.** $60°$.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 233

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Dany jest prostopadłościan o krawędziach $a = 10$, $b = 20$ i $c = 30$. Oblicz sumę długości przekątnych tego prostopadłościanu. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 2. (2 pkt)
Wszystkie krawędzie graniastosłupa prostego mają długość 8. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli jego podstawą jest romb o kącie ostrym $\alpha = 45°$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 3. (2 pkt)
Oblicz wysokość czworościanu foremnego o krawędzi 1. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)
Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi, a jego objętość jest równa $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 5. (2 pkt)
Sąsiednie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego dziesięciokątnego tworzą kąt α. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, odczytaj wartość $\operatorname{tg}\alpha$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

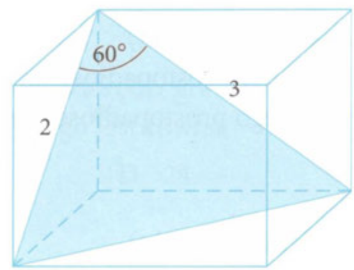
Zadanie 6. (2 pkt)
Objętość kuli K_1 jest równa 2304π cm^3, a pole powierzchni kuli K_2 wynosi 2048π cm^2. Oblicz skalę podobieństwa kuli K_1 do K_2. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (2 pkt)
Wycinek koła o kącie 60° jest powierzchnią boczną stożka. Oblicz cosinus kąta, który tworząca tego stożka tworzy z jego podstawą. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zestaw D. Zadania otwarte

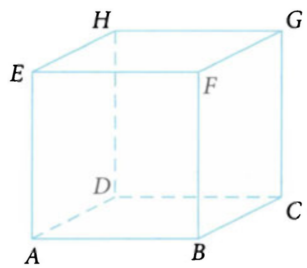
odpowiedzi – s. 233
modele – s. 234

Zadanie 1. (7 pkt)
Przez przekątną dolnej podstawy prostopadłościanu i jeden z jego górnych wierzchołków poprowadzono płaszczyznę. Przekrój jest trójkątem o dwóch bokach długości 2 i 3 oraz kącie między nimi równym 60° (rysunek obok). Oblicz objętość prostopadłościanu oraz sinus kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy.



Zadanie 2. (6 pkt)
Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o podstawie równej 2 i ramionach długości 4. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa wynosi 20. Oblicz cosinusy kątów między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych poprowadzonymi z wierzchołków podstawy.

Zadanie 3. (4 pkt) CKE
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (rysunek obok) o krawędzi równej 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.

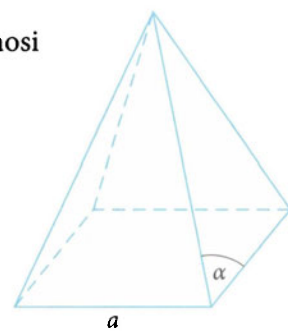


Zadanie 4. (5 pkt)
Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego bok ma długość 3, a sinus kąta ostrego jest równy $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Z wierzchołka tego kąta poprowadzono przekątne dwóch sąsiednich ścian bocznych graniastosłupa. Oblicz długości tych przekątnych, jeżeli cosinus kąta między nimi jest równy $\frac{2}{3}$.

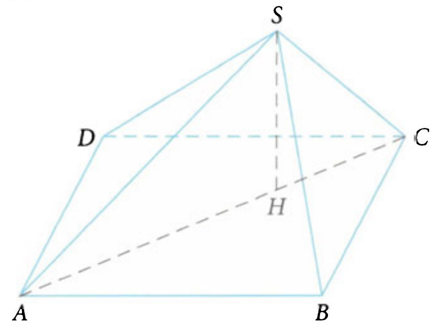
Zadanie 5. (5 pkt) CKE 2015
Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

Zadanie 6. (5 pkt)
Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $12\sqrt{5}$, a jego wysokość jest równa 2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 7. (3 pkt) CKE
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy ma miarę $\alpha > 45°$ (rysunek obok). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 8. (6 pkt) CKE
Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2:1$ (rysunek poniżej). Krawędzie boczne BS i DS mają długość równą 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS.



Zadanie 9. (5 pkt)
Promień podstawy stożka jest równy $3\sqrt{2}$. Przez wierzchołek i cięciwę podstawy stożka o długości 6 poprowadzono płaszczyznę. Otrzymany przekrój jest trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami równym $60°$. Oblicz cosinus kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy stożka.

Zadanie 10. (6 pkt)
W stożek o wysokości 8 wpisano kulę. Punkt styczności kuli ze stożkiem podzielił tworzącą stożka w stosunku $2:3$. Oblicz promień kuli (rozpatrz dwa przypadki).

Zadanie 11. (5 pkt)
Stosunek pola powierzchni kuli wpisanej w stożek do pola podstawy stożka jest równy $4:3$. Oblicz:

a) kąt rozwarcia stożka,

b) objętość kuli opisanej na stożku, jeżeli wysokość stożka wynosi 3.

Zadanie 12. (5 pkt)
Ramiona trapezu opisanego na okręgu są równe 13 i 15, a pole trapezu wynosi 168. Kąty przy dłuższej podstawie trapezu są ostre. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu tego trapezu wokół prostej zawierającej dłuższą podstawę.

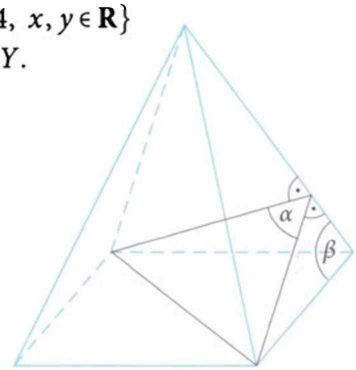
Zadanie 13. (7 pkt)
Kąt między krawędzią boczną a podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę α, a kąt między jego krawędziami bocznymi – miarę β.

a) Wykaż, że $\cos\beta = \sin^2\alpha$.

b) Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli $\beta = 60°$, a krawędź boczna ma długość 4.

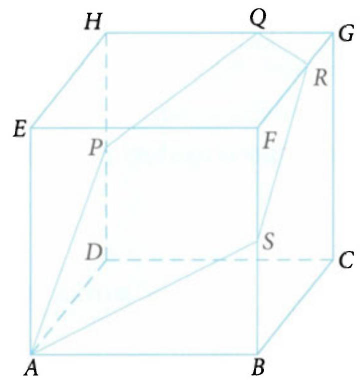
Zadanie 14. (5 pkt)
Bryła B_1 powstała w wyniku obrotu figury $F = \{(x, y)\colon 2|x| + |y| \leqslant 4,\ x, y \in \mathbf{R}\}$ wokół osi OX, a bryła B_2 – w wyniku obrotu figury F wokół osi OY.
Oblicz różnicę objętości brył B_1 i B_2.

Zadanie 15. (3 pkt)
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa – rysunek obok).
Wykaż, że $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\beta = -1$.



Zadanie 16. (4 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt α jest kątem nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, a kąt β – kątem między krawędzią boczną a krawędzią podstawy ostrosłupa. Wykaż, że $\sin^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\beta} = 2$.

Zadanie 17. (4 pkt)
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ| = |FR| = 10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.



Zadanie 18. (4 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod katem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Zadanie 19. (7 pkt)
W graniastosłup prawidłowy trójkątny wpisano kulę o promieniu 1. Oblicz:

a) objętość graniastosłupa,

b) sinus kąta między płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i przeciwległy wierzchołek drugiej podstawy a podstawą graniastosłupa.

Zadanie 20. (5 pkt) CKE 2015

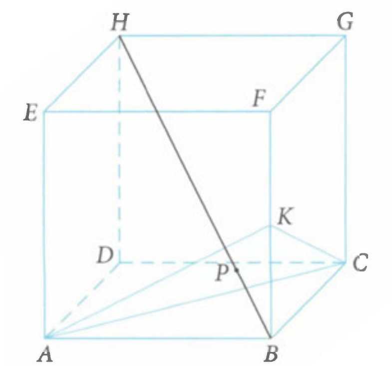
Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest trapez $ABCD$. Przekątna AC tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia BC i tworzy z dłuższą podstawą AB tego trapezu kąt o mierze 30°. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość środka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej SD.

Zadanie 21. (6 pkt) CKE 2016

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę 120°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 22. (3 pkt) CKE 2016

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Przez wierzchołki A i C oraz środek K krawędzi BF poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną BH w punkcie P (zobacz rysunek).

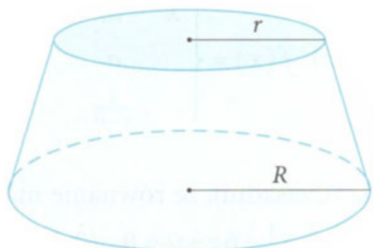


Wykaż, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.

Zadanie 23. (4 pkt) CKE 2017

W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP, gdzie P jest punktem płaszczyzny π.

Zadanie 24. (4 pkt) CKE 2018



Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru: $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$, gdzie r i R są promieniami podstaw ($r < R$), a H jest wysokością bryły. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π, a $r = 6$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.

12. Rachunek różniczkowy

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
Rachunek różniczkowy
Vademecum, s. 305–320

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 246

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-4}{2x-7}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{x^2-3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{8-x^3}{12-3x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2-x-6}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{4x^2-7x+3}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{3x^2+2x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{25x-x^3}{x^2-4x-5}$

h) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^3+3x^2-4x}{x^2+7x+12}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{16x^3-2}{8x^2-6x+1}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2+x-6}{x^2-x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x^4-x^3+4}{8x^4+x^2-x}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(5-x)(x^2-2)}{x^4-x+8}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4-2x^2+4}{(x+1)(x-x^2)}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4}-\frac{x^2+1}{x+2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2-x}+\frac{x^4}{x^2+x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} (2x^5-x^3+x-1)$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^4+\frac{x^3}{3}-6\right)$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-2x^3+10x^2-\sqrt{2}\right)$

3. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{1-x}{x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{x-6}{5-x}$

c) $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x+7}{(x+3)(x+4)}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2+3x-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{x-2}{x^3-x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{4}{1-x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

4. Zbadaj ciągłość funkcji f.

a) $f(x)=\begin{cases} 4-x & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \\ (x-2)^2 & \text{dla} \quad x<0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{dla} \quad x>1 \\ \frac{2}{x+1}-3 & \text{dla} \quad x\leqslant 1 \end{cases}$

5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła? Dla wyznaczonych wartości parametrów a i b naszkicuj wykres tej funkcji i z wykresu odczytaj jej ekstrema.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2 & \text{dla} \quad x<2 \\ a & \text{dla} \quad x=2 \\ \frac{4}{x-b} & \text{dla} \quad x>2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} (a-x)^3 & \text{dla} \quad x<-1 \\ b & \text{dla} \quad x=-1 \\ 2(x-a) & \text{dla} \quad x>-1 \end{cases}$

6. Uzasadnij, że równanie ma w podanym przedziale co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $x^3-6x+2=0, \ \langle 0;1\rangle$

b) $x^5+x^2-4=0, \ \langle 1;2\rangle$

7. Na podstawie definicji oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0.

a) $f(x) = 1 - x^2,\ x_0 = 1$ b) $f(x) = \frac{2}{x},\ x_0 = 2$ c) $f(x) = x^3,\ x_0 = -1$

8. Sprawdź, korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 1$.

a) $f(x) = |x - 1|$ b) $f(x) = (x - 1)|x - 1|$ c) $f(x) = \frac{|x - 1|}{x}$

9. Wyznacz pochodną funkcji f, a następnie oblicz $f'(-1)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ c) $f(x) = -x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 4\sqrt{3}$

b) $f(x) = -2x^5 + 4x^3 - x^2 - 2x + 7$ d) $f(x) = 0{,}2x^5 - 2x^3 - 1{,}5x^2 + 2\sqrt{2}$

10. Wyznacz pochodną funkcji f i oblicz jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = (x^2 - x)(x - 1)$ b) $f(x) = (x - 2)^2(x + 2)^2$ c) $f(x) = (x + 1)(x - 1)^3$

11. Określ dziedzinę funkcji f. Oblicz pochodną funkcji f i określ jej dziedzinę.

a) $f(x) = \frac{3}{x + 5}$ c) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 1} + \frac{x^3}{3}$ e) $f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}$

b) $f(x) = \frac{1 - x}{x - 2}$ d) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{1 - x^2} - \frac{2}{x^3}$ f) $f(x) = \frac{2 - x^3}{(x - 1)^2} - \frac{2x}{x - 1}$

12. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0. Czy kąt, który ta styczna tworzy z osią OX, jest większy od $60°$?

a) $f(x) = x^3 - 5x + \frac{1}{x},\ x_0 = -1$ b) $f(x) = (2x - 1)\left(1 - \frac{3}{x}\right),\ x_0 = \sqrt{2}$

13. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1,\ x_0 = 3$ c) $f(x) = \frac{4x + 1}{5 - x},\ x_0 = -2$

b) $f(x) = (x^2 - 2)\left(1 + \frac{2}{x^2}\right),\ x_0 = -1$ d) $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 5},\ x_0 = 2$

14. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{4} - x^2$ równoległej do prostej $3x + y = 0$,

b) $f(x) = x(x^3 - 1)$ prostopadłej do prostej $x - 5y = 1$.

15. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1 - 6x^2}{6x^2}$:

a) tworzącej z osią OX kąt $120°$, b) przechodzącej przez punkt $P\left(-3, \frac{1}{2}\right)$.

16. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

b) $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - 5x^3 + 12x - 3$

c) $f(x) = (x-3)^2(x+3)^2$

d) $f(x) = (x - x^3)(2x^2 + 1)$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

f) $f(x) = \dfrac{4x^2 + 5}{x^2 - 1} - \dfrac{4x}{x + 1}$

17. Dla jakich wartości parametru a funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax$

b) $f(x) = ax^3 - x^2 + ax - 1$

18. Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{x}{x + 2}$

f) $f(x) = x^2 - \dfrac{4x}{1 - x}$

19. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w danym przedziale.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 5$, $\langle -2; 1 \rangle$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$, $\langle -3; 3 \rangle$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 5}{x^2 - x + 2}$, $\langle -1; 4 \rangle$

d) $f(x) = \dfrac{x(x-5)^2}{x^2 + 3}$, $\langle 0; 6 \rangle$

20. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu, ile rozwiązań ma równanie $f(x) = 2$.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{6 - 6x}{x^2 + 3}$

d) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$

f) $f(x) = \dfrac{3 - x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 3}$

21. Narysuj wykres funkcji f i wyznacz jej ekstrema. W których punktach funkcja ta nie ma pochodnej?

a) $f(x) = |x^3 + 3x + 4|$

b) $f(x) = \dfrac{|1 - x^2|}{1 + x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{|x^2 - x - 2|}{x^2}$

22. Wyznacz liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m.

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = m$

b) $\dfrac{2x^2}{x^2 + 4x + 4} = m$

c) $\dfrac{2|x|}{1 + x^2} = m$

23. Wyznacz dziedzinę i ekstrema funkcji. Naszkicuj wykres funkcji i odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 1$.

a) $f(x) = x - 2 - \dfrac{4x - 8}{x - 5} + \dfrac{16x - 32}{(x-5)^2} - \ldots$

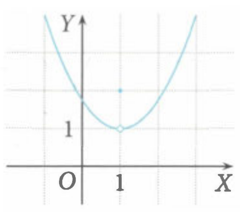
b) $f(x) = 1 + x + \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{4} + \ldots$

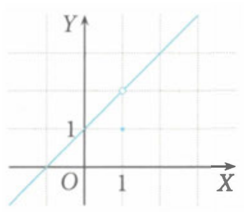
Zestaw B. Zadania zamknięte

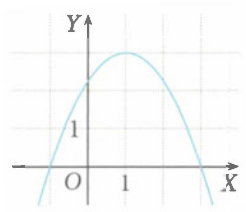
odpowiedzi – s. 247

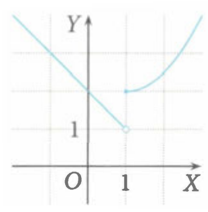
Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Wskaż wykres funkcji, dla której nie istnieje granica w punkcie $x = 1$.

A.


B.


C.


D.


Zadanie 2. (1 pkt) CKE
Granica $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{-5x}{x+3}$ jest równa:

A. $-\infty$, **B.** 0, **C.** 6, **D.** ∞.

Zadanie 3. (1 pkt)
Granica $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ jest równa:

A. $-\infty$, **B.** 0, **C.** 1, **D.** ∞.

Zadanie 4. (1 pkt)
Miara kąta, jaki styczna do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2}x^3 - 100$ w punkcie $x_0 = 1$ tworzy z osią OX, należy do przedziału:

A. $(0°;45°)$, **B.** $(45°;90°)$, **C.** $(90°;120°)$, **D.** $(120°;180°)$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Ile jest prostych stycznych do wykresu funkcji $f(x) = 3x - \frac{4}{x}$ i prostopadłych do prostej $x + 5y = 0$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 6. (1 pkt) CKE 2015
Która z poniższych funkcji, określonych w zbiorze liczb rzeczywistych, nie ma minimum lokalnego ani maksimum lokalnego?

A. $f(x) = 4x^2 + 5x$ **B.** $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ **C.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$ **D.** $f(x) = (4x+1)^2$

Zadanie 7. (1 pkt)
Ile miejsc zerowych ma pochodna funkcji $f(x) = 6x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 16$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 8. (1 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = -3x^2 + x^3$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f'(x) < 0$ jest przedział:

A. $(-3;0)$, **B.** $(-2;0)$, **C.** $(0;2)$, **D.** $(0;3)$.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi – s. 247

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)

Oblicz $\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x^3+x^2-5x-5}{10x^2-50}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2. (2 pkt) CKE

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x-8}{x^2+6}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x = \frac{1}{2}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3. (2 pkt) CKE

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{2x^4+15}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $x \neq -\sqrt{6}$ i $x \neq \sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x = 1$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x^2+7}{3-x}$. Wyznacz najmniejszą liczbę spełniającą nierówność:

$$x + 5 \cdot f'(-2) \geqslant 100$$

Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności tej liczby.

Zadanie 5. (2 pkt)

Liczba x_0 jest największym miejscem zerowym pochodnej funkcji $f(x) = x^4 - 34x^2 + 20$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_0.

Zadanie 6. (2 pkt)

Styczna do wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 600$ poprowadzona w punkcie $(4, 584)$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby b.

Zadanie 7. (2 pkt)

Wyznacz największą liczbę a, dla której funkcja $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x$ nie ma ekstremum. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego tej liczby.

Zestaw D. Zadania otwarte

◂ odpowiedzi i modele – s. 247

Zadanie 1. (3 pkt)
Wyznacz parametr a, jeśli wiadomo, że:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{1}{x^2-1} \right) = \frac{1}{4}$$

Zadanie 2. (3 pkt)
Wykaż, że styczne poprowadzone do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ w punktach o rzędnej 1, przechodzą przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 3. (3 pkt) CKE
Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie A.

Zadanie 4. (3 pkt) CKE
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x - y + 9 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji f.

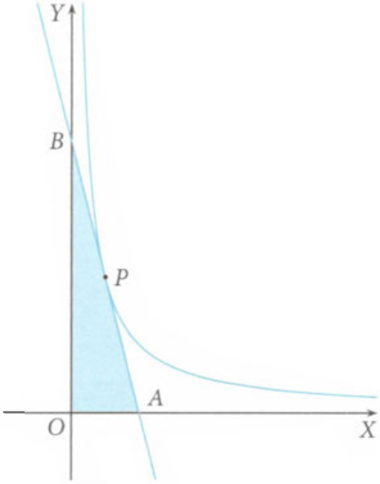
Zadanie 5. (4 pkt)
Wyznacz parametr a tak, aby prosta o równaniu $y = -2x + 1$ była styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + ax + 1$. Podaj współrzędne punktu styczności.

Zadanie 6. (3 pkt)
Uzasadnij, że kąt między styczną do wykresu funkcji $f(x) = 2x^5 + x - 7$ a osią OX jest kątem ostrym. Wyznacz równanie stycznej, dla której kąt ten ma miarę 45°.

Zadanie 7. (5 pkt)
Punkt $P(x_0, y_0)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

a) Styczna do wykresu funkcji f w punkcie P przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B (rysunek obok). Uzasadnij, że punkt P jest środkiem odcinka AB.

b) Wykaż, że pole trójkąta ABO jest równe 2.



Zadanie 8. (4 pkt) CKE 2015
Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

Zadanie 9. (4 pkt)
Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = (x + 2)^2(x - 4)$. Ile rozwiązań ma równanie $f(x) = -30$?

Zadanie 10. (4 pkt)
Funkcja $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, ma dla $x = 3$ minimum równe 7. Oblicz a i b oraz wyznacz pozostałe ekstrema tej funkcji.

Zadanie 11. (5 pkt)
Dla jakich wartości x i y takich, że $y - x = 1$, wyrażenie $\frac{y^2 - 2x + 1}{x^2 + 2y}$ przyjmuje największą wartość. Wyznacz tę wartość.

Zadanie 12. (6 pkt)
Dwa wierzchołki A i B kwadratu $ABCD$ należą do prostej $x - 2y = 0$, a wierzchołek C należy do hiperboli o równaniu $y = -\frac{8}{x}$. Oblicz długość przekątnej kwadratu, którego pole jest najmniejsze.

Zadanie 13. (6 pkt)
Dla jakich wartości parametru p suma sześcianów różnych pierwiastków równania:

$$x^2 + px + p^2 - 1 = 0$$

osiąga największą wartość? Oblicz tę wartość.

Zadanie 14. (7 pkt) CKE
Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.

Zadanie 15. (6 pkt)
Pudełko ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Wyznacz długość krawędzi podstawy, przy której pole powierzchni pudełka jest najmniejsze, jeśli jego objętość wynosi 36 cm^3. Oblicz pole powierzchni tego pudełka.

Zadanie 16. (6 pkt)
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość 2 i dla którego stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola tego trójkąta jest najmniejszy.

Zadanie 17. (7 pkt) CKE

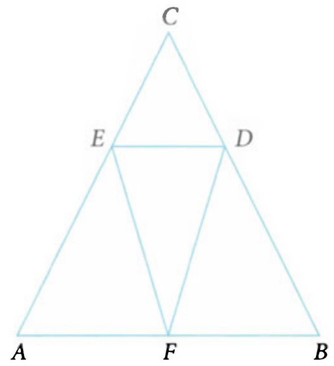
Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

Zadanie 18. (7 pkt)

W półkole o promieniu r wpisano prostokąt o największym polu. Oblicz cosinus kąta rozwartego między przekątnymi tego prostokąta.

Zadanie 19. (6 pkt)

W trójkąt równoramienny ABC o podstawie $|AB| = a$ wpisano drugi trójkąt równoramienny DEF, którego dwa wierzchołki podstawy leżą na ramionach danego trójkąta, a trzeci wierzchołek leży w środku jego podstawy (rysunek obok). Dla jakiej długości podstawy trójkąta wpisanego stosunek objętości stożka, którego przekrojem osiowym jest ten trójkąt, do stożka o przekroju osiowym ABC jest największy?



Zadanie 20. (6 pkt)

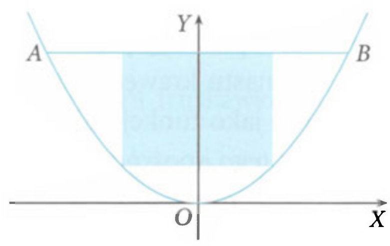
Przez punkt $P(1,9)$ poprowadzono prostą o współczynniku kierunkowym ujemnym tak, że suma długości odcinków, które ta prosta odcięła na osiach układu współrzędnych, jest najmniejsza. Wyznacz równanie tej prostej.

Zadanie 21. (6 pkt)

Punkty $A(-4,-1)$ i $B(-2,-2)$ należą do hiperboli o równaniu $y = \frac{4}{x}$. Wyznacz współrzędne punktu C o odciętej dodatniej, należącego do danej hiperboli i takiego, że pole trójkąta ABC jest najmniejsze.

Zadanie 22. (6 pkt)

Dwa wierzchołki prostokąta należą do paraboli o równaniu $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, a dwa – do odcinka o końcach $A(-4,4)$ i $B(4,4)$ (rysunek obok). Wyznacz długości boków prostokąta, którego pole powierzchni jest największe.



Zadanie 23. (6 pkt)

Funkcja $f(x) = -x^3 + (a+1)x^2 + 12x + b$ osiąga minimum w punkcie A i maksimum w punkcie B. Wyznacz współrzędne tych punktów, wiedząc, że są one symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 24. (7 pkt) CKE

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

Zadanie 25. (3 pkt) CKE 2017

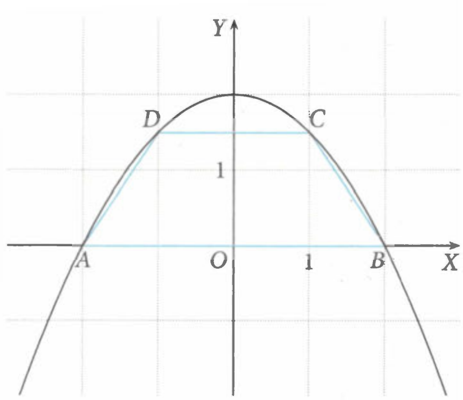
Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P(1,0)$.

Zadanie 26. (3 pkt) CKE 2013

Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie $P(x_0, y_0)$ jest nachylona do osi OX pod kątem $30°$. Oblicz współrzędne punktu P.

Zadanie 27. (7 pkt) CKE 2016

Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś OX układu współrzędnych w punktach $A(-2,0)$ i $B(2,0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB, a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek). Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.



Zadanie 28. (7 pkt) CKE 2016

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π. Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

Zadanie 29. (7 pkt) CKE 2017

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Zadanie 30. (7 pkt) CKE 2017

Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy $1:2$ oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

Zadanie 31. (7 pkt) CKE 2018

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

13. Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka

PRZECZYTAJ WIĘCEJ
Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka
Vademecum, s. 277–283

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 256

1. Liczby $1, 2, 3, \ldots, 10$ ustawiamy losowo w ciąg. Ile jest takich ciągów? Ile jest ciągów, w których suma każdej pary sąsiednich liczb jest nieparzysta?

2. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 13 tak, aby dostać dokładnie:
   a) 10 kart takiego samego koloru, b) 6 kart takiego samego koloru?

3. Dwie siostry dzielą między siebie 8 różnych znaczków. Na ile sposobów mogą to zrobić, jeśli starsza ma dostać 6 znaczków, a młodsza – 2 znaczki? Ile będzie sposobów podziału, jeżeli każda dostanie tyle samo znaczków?

4. Na ile sposobów 5 osób może wysiąść z tramwaju zatrzymującego się na 4 przystankach, a na ile – na 6 przystankach? Nie uwzględniamy kolejności wysiadania.

5. W zapisie liczby użyto tylko cyfr 1, 2, 3 i 4. Cyfry mogą się powtarzać. Ile jest takich liczb, jeżeli liczby są:
   a) czterocyfrowe, b) pięciocyfrowe, c) sześciocyfrowe?

6. Na ile sposobów można przestawić cyfry liczby 102 534, aby otrzymać liczbę:
   a) podzielną przez 5, b) większą od 250 000?

7. W pudełku znajduje się 8 lizaków malinowych i 2 truskawkowe. Dziecko wyjmuje losowo 4 lizaki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybierze:
   a) 2 lizaki truskawkowe i 2 malinowe, b) 3 lizaki malinowe i 1 truskawkowy.

8. W urnie umieszczono kule białe, czarne, zielone i niebieskie, po 3 każdego koloru. Z urny losujemy 4 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:
   a) nie będzie kul białych, b) będą kule każdego koloru.

9. a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w rzucie czterema sześciennymi kostkami na każdej z nich wypadnie inna liczba oczek.

   b) Rzucono trzema sześciennymi kostkami i trzema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch szóstek i jednego orła.

10. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \ldots, 2010\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana liczba nie jest podzielna ani przez 6, ani przez 15.

11. Cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 ustawiono losowo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) między 0 a 1 znajdą się dokładnie trzy cyfry,

b) cyfry 7, 8, 9 będą stały obok siebie.

12. Spośród cyfr 1, 3, 6, 7, 8 i 9 losujemy dwie. Wylosowane cyfry zapisujemy w kolejności losowania i otrzymujemy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest nieparzysta lub jej cyfry należą do zbioru $\{1, 3, 6\}$, jeżeli:

a) cyfry mogą się powtarzać, b) cyfry się nie powtarzają.

13. Z cyfr 0 i 1 tworzymy liczby dziesięciocyfrowe. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej lub podzielnej przez 3.

14. Spośród liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie użyto tylko cyfr 1, 2, 3 i 4, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w zapisie tej liczby występują dokładnie jedna jedynka i dwie dwójki.

15. W szufladach o numerach 1, 2 i 3 rozmieszczono 3 kule białe, 3 kule czarne i 3 kule zielone. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w każdej szufladzie będą kule (kule i szuflady rozróżniamy):

a) tego samego koloru, b) trzech kolorów.

16. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w czteroosobowej rodzinie:

a) co najmniej 2 osoby urodziły się w tym samym miesiącu,

b) dokładnie 2 osoby urodziły się w tym samym miesiącu.

17. Z klasy liczącej 15 dziewcząt i 10 chłopców wybieramy losowo czteroosobową delegację. Co jest bardziej prawdopodobne: to, że w skład delegacji wejdą dokładnie 2 dziewczyny, czy to, że w jej skład wejdzie dokładnie 1 chłopiec?

18. Z urny zawierającej dziesięć kul ponumerowanych od 1 do 10 losujemy kolejno cztery kule. Czy prawdopodobieństwo zdarzenia, że największą wylosowaną liczbą będzie 5, jest większe w losowaniu ze zwracaniem, czy bez zwracania?

19. W urnie są trzy kule białe i jedna kula czarna. Liczbę kul czarnych zwiększono n-krotnie. Oblicz n, jeśli w jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul o różnych kolorach się nie zmieniło.

20. Wśród n losów loterii jest pięć losów wygrywających. Dla jakich n prawdopodobieństwo tego, że zakupione dwa losy będą wygrywające, jest większe od $\frac{1}{4}$?

21. Spośród liczb $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 3)$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej.

b) Dla jakich n prawdopodobieństwo tego, że różnica między większą liczbą a mniejszą jest równa 2, jest większe od $\frac{1}{4}$?

22. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli:

a) $P(A') = 0{,}9$ i $P(B \setminus A) = 0{,}7$,

b) $P(A' \cap B') = 0{,}3$.

23. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, jeśli:

a) $P(B) = \frac{1}{2}$ i $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$,

b) $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}$ i $P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$.

24. Oblicz $P(A' \cup B')$, jeśli:

a) $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$,

b) $P(A) = \frac{5}{6}$, $P(A \setminus B) = \frac{1}{2}$,

c) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$,

d) $P(A') = 0{,}8$, $P(B') = 0{,}3$ i $P(A \cup B) = 0{,}6$.

25. Niech A i B będą zdarzeniami losowymi. Wykaż, że:

a) $P(A \cap B) \leqslant 1 - P(A')$,

b) $P(A) + P(A' \cap B) = P(B) + P(B' \cap A)$.

26. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, to $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$.

27. Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wyrzuconych oczek:

a) jest większy od 10,

b) jest większy od 10, jeśli wiadomo, że w pierwszym rzucie wypadły 3 oczka,

c) jest większy od 10, jeśli wiadomo, że w pierwszym rzucie wypadły 4 oczka.

28. W tabeli podano liczbę osób prawo- i leworęcznych w badanej grupie 100-osobowej.

	leworęczni	praworęczni	razem
kobiety	10	55	65
mężczyźni	8	27	35
razem	18	82	100

Z grupy tej wybrano losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

K – wybrana osoba jest kobietą,

R – wybrana osoba jest praworęczna,

M – wybrana osoba jest mężczyzną,

L – wybrana osoba jest leworęczna

oraz $P(K \cap L)$, $P(M \cap R)$, $P(K|R)$, $P(R|K)$, $P(M|L)$, $P(L|M')$, $P(K'|R)$.

29. Ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ losujemy bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ich iloczyn jest parzysty, jeżeli wiadomo, że ich suma jest parzysta.

30. Rzucamy trzy razy symetryczną kostką sześcienną.

a) Suma oczek otrzymanych w dwóch pierwszych rzutach jest równa 6. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek otrzymanych w trzech rzutach jest większa od 10.

b) Za każdym razem wypadła inna liczba oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie wypadła szóstka.

31. Dla zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzą równości: $P(A|B) = \frac{3}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$, $P(A \setminus B) = \frac{1}{4}$. Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.

32. Rzucamy kostką. Prawdopodobieństwo, że kostka spadnie pod stół jest równe $\frac{1}{5}$ – przyjmujemy wtedy, że wypadło 0 oczek. Niech p_k oznacza prawdopodobieństwo, że w pojedynczym rzucie wypadło k oczek ($k = 0,1,2,3,4,5,6$). Oblicz p_k dla $k = 0,1,2,3,4,5,6$. Niech A oznacza zdarzenie, że wypadła parzysta liczba oczek, B – że wypadła liczba oczek mniejsza od 5. Oblicz $P(B|A)$ oraz $P(A|B)$.

33. Z urny, w której jest tyle samo kul czarnych, białych i zielonych, wyjęto bez oglądania jedną kulę, a następnie wylosowano dwie kule. Prawdopodobieństwo tego, że są one białe wynosi $\frac{1}{11}$. Ile kul było w urnie na początku?

34. Z trzech kostek sześciennych dwie są symetryczne, natomiast na dokładnie trzech ściankach trzeciej kostki są szóstki. Rzucono dwa razy losowo wybraną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwa razy wypadła szóstka.

35. Zakład produkuje wyroby w systemie dwuzmianowym. Stosunek liczby wyrobów wytworzonych na pierwszej zmianie do liczby wyrobów wytworzonych na drugiej zmianie jest równy $3:2$. Pierwsza zmiana wytwarza 80% wyrobów pierwszej jakości, druga – 65%. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany wyrób jest pierwszej jakości.

36. Sklep sprzedaje wyroby dwóch znanych marek. Z powodu wad produkcyjnych klienci zgłaszają reklamacje 7% zakupionych wyrobów pierwszej marki oraz 2% drugiej marki. Przy jakim stosunku liczby sprzedanych wyrobów pierwszej marki do liczby sprzedanych wyrobów drugiej marki prawdopodobieństwo, że sprzedany wyrób nie będzie reklamowany, jest równe 0,96?

37. W pierwszej urnie jest 5 kul białych i 3 czarne, w drugiej – n białych i 4 czarne. Losujemy z każdej urny po 1 kuli i umieszczamy je w trzeciej urnie, początkowo pustej. Następnie z trzeciej urny losujemy 1 kulę. Wyznacz największą wartość n, dla której prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest mniejsze od $\frac{11}{16}$.

38. W urnie jest po 5 kul czarnych, białych i zielonych. Z urny wyjęto bez oglądania 1 kulę, a następnie wylosowano 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że były to kule różnych kolorów.

39. W urnie U_1 są 3 kule białe i 2 czarne, w urnie U_2 – 2 kule białe i 3 czarne. Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Jeżeli wyniki rzutów są takie same, losujemy po 1 kuli z każdej urny. Jeżeli orzeł wypadł dokładnie dwa razy, losujemy 2 kule z urny U_1, w pozostałych przypadkach losujemy 2 kule z urny U_2. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów.

40. Średnie zarobki w pewnej firmie wynoszą 4000 zł. Odchylenie standardowe od średniej jest równe 2000 zł. Oblicz, jak zmieni się średnia i odchylenie standardowe, jeżeli każdy pracownik dostanie:

a) podwyżkę w wysokości 500 zł,

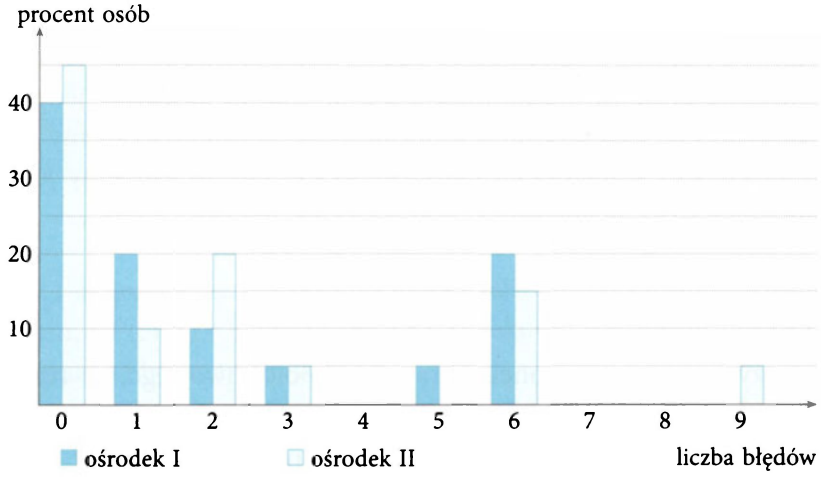
b) podwyżkę o 10%.

41. Na diagramie przedstawiono wyniki części teoretycznej egzaminu na prawo jazdy w dwóch ośrodkach egzaminacyjnych. Zdający uzyskał wynik pozytywny, jeżeli popełnił co najwyżej dwa błędy.

a) Oblicz medianę i średnią arytmetyczną liczby błędów popełnionych przez zdających w obydwu zestawach danych.

b) W którym ośrodku odchylenie standardowe liczby popełnionych błędów było większe?

c) W którym ośrodku jest większe prawdopodobieństwo tego, że wśród dwóch losowo wybranych zdających tylko jeden uzyskał wynik pozytywny, jeżeli w pierwszym ośrodku było 40 zdających, a w drugim – 20?



Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 257

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Z cyfr $0, 1, 2, 3, 4, 5$ tworzymy różne liczby trzycyfrowe, w których cyfry nie powtarzają się. Ile liczb parzystych otrzymamy?

A. 42 **B.** 48 **C.** 52 **D.** 75

Zadanie 2. (1 pkt)
Ile różnych liczb, które zaczynają się i kończą cyfrą 3, można otrzymać, przestawiając cyfry w liczbie 123 331 332?

A. 210 **B.** 343 **C.** 2187 **D.** 5040

Zadanie 3. (1 pkt)
Ile liczb sześciocyfrowych można zapisać za pomocą cyfr 2, 4, 6, jeżeli w zapisie każda cyfra występuje dwukrotnie?

A. 90 **B.** 180 **C.** 360 **D.** 720

Zadanie 4. (1 pkt)
Rzucono trzykrotnie sześcienną kostką. Prawdopodobieństwo tego, że w każdym rzucie otrzymano inny wynik, jest równe:

A. $\frac{1}{2}$, **B.** $\frac{6!\binom{6}{3}}{6^3}$, **C.** $\frac{\binom{6}{3}}{6^3}$, **D.** $\frac{3!\binom{6}{3}}{6^3}$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Dane są dwie urny z kulami, w każdej jest 5 kul. W pierwszej urnie jest jedna kula biała i 4 kule czarne. W drugiej urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno lub dwa oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, natomiast jeśli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe:

A. $\frac{1}{15}$, **B.** $\frac{2}{5}$, **C.** $\frac{7}{15}$, **D.** $\frac{3}{5}$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Rzucono trzy razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo tego, że reszka wypadła tylko w pierwszym rzucie, jest równe:

A. 1, **B.** 0,5, **C.** 0,25, **D.** 0,125.

Zadanie 7. (1 pkt)
Dane są prawdopodobieństwa zdarzeń $A, B \subset \Omega$: $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$. Wskaż najmniejszą wartość, jaką może przyjąć $P(A|B)$.

A. 0 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{5}{9}$ **D.** $\frac{5}{12}$

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

◂ odpowiedzi – s. 257

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)
Oblicz, na ile sposobów można rozmieścić 4 kule różnych kolorów w 4 pudełkach ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi tak, że zawsze dokładnie jedno pudełko jest puste. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 2. (2 pkt)
W talii 24 kart jest 6 pików, 6 kierów, 6 trefli i 6 kar. Z talii tej wybrano losowo 3 karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych są 2 karty pik, jeżeli wiadomo, że jest przynajmniej 1 karta trefl. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3. (2 pkt)
Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie jednym miejscu stoi cyfra parzysta. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (2 pkt)
Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych oczek jest większa od 16, wiedząc, że w pierwszym rzucie otrzymano 6 oczek. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 5. (2 pkt)
Z urny, w której znajdują się trzy kule białe, dwie niebieskie i dwie zielone, wylosowano dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że są to kule tego samego koloru. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 6. (2 pkt)
Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ są jednakowo prawdopodobne, zajście przynajmniej jednego z nich jest zdarzeniem pewnym, a $P(A|B) = \frac{2}{3}$. Oblicz $P(A \setminus B)$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (2 pkt)
W pewnej grupie bezrobotnych kobiety stanowią 60%. Wśród bezrobotnych kobiet 25% ukończyło 45. rok życia. Wśród bezrobotnych mężczyzn odsetek ten wynosi 21%. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z tej grupy osoba ukończyła 45 lat. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zestaw D. Zadania otwarte

◂ odpowiedzi i modele – s. 257

Zadanie 1. (7 pkt)
Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5 i 6 losujemy kolejno trzy cyfry, które zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Kiedy prawdopodobieństwo zdarzenia, że będzie to liczba większa od 430, jest większe: w przypadku losowania ze zwracaniem czy losowania bez zwracania?

Zadanie 2. (6 pkt)
Na płaszczyźnie dane są dwie proste równoległe niepokrywające się. Na jednej z nich zaznaczono sześć punktów, a na drugiej – n punktów, gdzie $n \geqslant 2$. Oblicz n, jeśli prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane punkty spośród zaznaczonych są wierzchołkami trójkąta, jest równe $\frac{9}{14}$.

Zadanie 3. (7 pkt)
W urnie są dwie kule białe i sześć kul czarnych. Losujemy dwie kule bez zwracania. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne: wyciągnięcie kul o różnych kolorach czy wyciągnięcie kul tego samego koloru? Ile należy dołożyć kul białych, aby zdarzenia te były jednakowo prawdopodobne?

Zadanie 4. (5 pkt)
Mamy n kul o numerach od 1 do n oraz n szuflad o numerach od 1 do n. Do każdej szuflady wkładamy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula o numerze 1 nie trafi do szuflady o numerze 1. Dla jakich n to prawdopodobieństwo jest większe od 0,9?

Zadanie 5. (6 pkt)
Rzucamy siedem razy symetryczną sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) wypadną tylko parzyste liczby oczek,
b) pojawią się wszystkie liczby oczek.

Zadanie 6. (4 pkt)
Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 tworzymy liczby ośmiocyfrowe, w których cyfry się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby, w której wszystkie cyfry nieparzyste są na początku, a cyfra 1 jest bezpośrednio przed cyfrą 2.

Zadanie 7. (7 pkt)
Z grupy osób, w której jest 5 kobiet, wybrano trzyosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji jest więcej kobiet niż mężczyzn, wynosi $\frac{6}{7}$. Oblicz, ilu mężczyzn jest w tej grupie.

Zadanie 8. (4 pkt)
Na dwóch ścianach sześciennej kostki są 2 oczka, na dwóch – 4 oczka, a na dwóch pozostałych – 6 oczek. Iloma co najmniej takimi kostkami trzeba rzucać, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej szóstki było większe od $\frac{3}{4}$?

Zadanie 9. (4 pkt)
Przy okrągłym stole usiadło 10 dziewcząt i 10 chłopców. Sprawdź, czy prawdopodobieństwo, że osoby tej samej płci nie siedzą obok siebie, jest większe od 0,001.

Zadanie 10. (4 pkt)
Ze zbioru $1, 2, 3, \ldots, 50$ losujemy kolejno dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloraz pierwszej liczby przez drugą należy do przedziału $(1; 2\rangle$.

Zadanie 11. (6 pkt)
W partii 50 żarówek pewna ich liczba jest wadliwa. Z tej partii losowo wybiera się dwie żarówki. Jeżeli co najmniej jedna z nich jest uszkodzona, partię się odrzuca. Oblicz, ile co najwyżej może być wadliwych żarówek, aby prawdopodobieństwo odrzucenia partii było nie większe od 0,04.

Zadanie 12. (5 pkt) CKE 2015
Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę", pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę".

Zadanie 13. (5 pkt)
Oblicz $P(A' \cup B')$, jeśli $P(A \setminus B) = \frac{1}{4}$, $P(B \setminus A) = \frac{1}{3}$, a $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym.

Zadanie 14. (4 pkt)
Mając dane $P(A' \cap B') = 0{,}6$, oblicz:

a) $P(A \cup B)$,

b) $P(A)$ i $P(B)$, jeśli $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym, a $P(B) = 2P(A)$.

Zadanie 15. (2 pkt) CKE
Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$.

Zadanie 16. (3 pkt) CKE
Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0{,}7$ oraz $P(B) = 0{,}8$, to $P(A|B) \geqslant 0{,}625$.

Zadanie 17. (4 pkt) CKE
Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 18. (4 pkt)
Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba naturalna n spełniająca nierówność $\binom{n}{n-3} \leqslant n$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = (x^4 - 16)(x^2 - 16)$?

Zadanie 19. (3 pkt) CKE
Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prawdopodobieństwo p_k otrzymania liczby k dane jest wzorem $p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}$. Rozważamy dwa zdarzenia: zdarzenie A polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{1,3,5\}$, zdarzenie B polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{2,3,4,5,6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$.

Zadanie 20. (4 pkt) CKE 2015
W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do drugiej urny i dodatkowo dokładamy do drugiej urny jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

Zadanie 21. (6 pkt)
Spośród liczb a, b, c, d wybieramy losowo dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie są liczbami całkowitymi, jeżeli:

$$a = \log_3\left(\log_2 \sqrt[3]{2}\right), \quad b = \log_3 \sqrt[3]{9} \cdot \log_2 \sqrt{8}, \quad c = \log_5 4 \cdot \log_2 5 + \log_2 3, \quad d = \frac{\log_3 7}{\log_9 7}$$

Zadanie 22. (7 pkt)
Z liczb $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 3)$ tworzymy trójwyrazowe ciągi, w których liczby mogą się powtarzać.

a) Wyznacz prawdopodobieństwo utworzenia ciągu monotonicznego.

b) Dla jakiego n prawdopodobieństwo to jest równe $\frac{9}{16}$?

Zadanie 23. (3 pkt) CKE
Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3 \ldots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Zadanie 24. (4 pkt) CKE
Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

Zadanie 25. (7 pkt) CKE
Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

Zadanie 26. (6 pkt) CKE
Oblicz, ile jest stucyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

Zadanie 27. (6 pkt) CKE
Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.

Zadanie 28. (4 pkt)
Oblicz, ile jest sześciocyfrowych liczb parzystych, w których zapisie występują co najmniej cztery trójki.

Zadanie 29. (5 pkt) CKE 2015
Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

Zadanie 30. (3 pkt)
Rozpatrujemy wszystkie nieparzyste liczby ośmiocyfrowe, w których zapisie mogą występować jedynie cyfry 2, 3, 4, 5, przy czym cyfra 5 występuje dokładnie cztery razy. Oblicz, ile jest takich liczb.

Zadanie 31. (3 pkt) CKE 2016
Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

Zadanie 32. (4 pkt)
Oblicz, ile jest wszystkich sześciocyfrowych liczb nieparzystych, w których zapisie występują co najwyżej trzy cyfry parzyste.

Zadanie 33. (4 pkt) CKE 2016
Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

Zadanie 34. (4 pkt) CKE 2017
W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i w ten sposób otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

Zadanie 35. (3 pkt)
Z cyfr 0, 1, 2, 3 tworzymy sześciocyfrowe liczby podzielne przez 4. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

Zadanie 36. (4 pkt) CKE 2017
Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

Zadanie 37. (4 pkt) CKE 2018
Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

2

Zestawy maturalne

Zestaw 1

odpowiedzi i modele – s. 267

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Mediana liczb spełniających równanie $||3x+4|-2|=6$ jest równa:

A. $-\frac{4}{3}$, **B.** $-\frac{2}{3}$, **C.** $\frac{1}{3}$, **D.** $\frac{2}{3}$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Suma pierwiastków równania $(2\sqrt{2}+3)x^2+(3\sqrt{2}-2)x-1=0$ jest równa:

A. $-18+13\sqrt{2}$, **B.** $-12+6\sqrt{2}$, **C.** $12-6\sqrt{2}$, **D.** $18-13\sqrt{2}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{(n-2)!}{n!}\cdot\binom{n}{2}$:

A. jest rozbieżny do ∞,
B. jest zbieżny do $\frac{1}{2}$,
C. jest zbieżny do 0,
D. nie ma granicy.

Zadanie 4. (1 pkt)
Reszta z dzielenia wielomianu $w(x)=4x^3-3x^2-3x+1$ przez dwumian $x+\frac{1}{2}$ jest równa:

A. $-\frac{3}{4}$, **B.** $\frac{3}{4}$, **C.** $\frac{5}{4}$, **D.** $\frac{11}{4}$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Równość $\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3}{2}\alpha=2\sin\alpha\sin\gamma$ jest tożsamością trygonometryczną dla:

A. $\gamma=-\frac{3}{2}\alpha$, **B.** $\gamma=-\frac{1}{2}\alpha$, **C.** $\gamma=\frac{1}{2}\alpha$, **D.** $\gamma=\frac{3}{2}\alpha$.

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)
Wyznacz wartość p, dla której równanie $4x^2 - 4x + \log_5 p - \frac{1}{2} = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zakoduj cyfry dziesiątek, jedności i pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby p.

Zadanie 7. (2 pkt)
Dany jest nieskończony ciąg geometryczny $a_n = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+2)^n}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (2 pkt)
Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A)$, jeśli $P(A|B) = \frac{2}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ oraz $P(B) = \frac{1}{2}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. (2 pkt)
Funkcja $f(x) = \frac{4 - \frac{3}{5}x}{\frac{1}{2} - 3x}$ ma asymptotę poziomą $y = q$ i asymptotę pionową $x = p$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $p + q$.

Zadanie 10. (3 pkt)
Dana jest parabola $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}$. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli, jeśli styczna tworzy z osią OX kąt $120°$.

Zadanie 11. (3 pkt)
Dla jakich wartości parametru p zbiór wartości funkcji:

$$f(x) = px^2 + (p-2)x + 2(p+2)$$

jest równy $(-\infty; 2\rangle$?

Zadanie 12. (3 pkt)
Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ losujemy ze zwracaniem dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A: iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 3.

Zadanie 13. (3 pkt)
Dane są wektory $\overrightarrow{BA} = [-8, -6]$ i $\overrightarrow{CA} = [-8, -11]$. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ i oblicz cosinus kąta ABC.

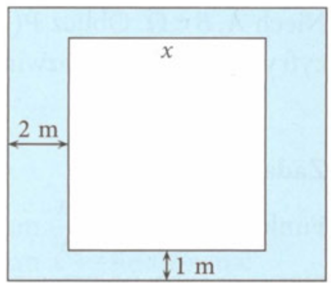
Zadanie 14. (4 pkt)
Prosta $2x - y - 5 = 0$ przecina okrąg o środku $S(2, 4)$ w punktach A i B. Długość cięciwy AB wynosi $4\sqrt{5}$. Wyznacz równanie tego okręgu.

Zadanie 15. (4 pkt)
Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_{11} = 16$ i $a_{23} = 40$. Uzasadnij, że ciąg $b_n = 3^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów ciągu (b_n).

Zadanie 16. (5 pkt)
Dany jest trójkąt ABC taki, że $|AC| = 2|AB|$. Miara kąta ACB jest o $30°$ mniejsza od miary kąta ABC. Oblicz tangens kąta ACB.

Zadanie 17. (5 pkt)
Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest równe 40,5 cm^2. Oblicz objętość tego sześcianu.

Zadanie 18. (7 pkt)
Trawnik w kształcie prostokąta o polu 128 m^2 ma być otoczony chodnikiem. Jego szerokości po przeciwległych stronach trawnika są takie same – wynoszą 2 m i 1 m (rysunek obok). Jakie wymiary powinien mieć trawnik, aby chodnik zajmował najmniejszą powierzchnię?



Zestaw 2

odpowiedzi i modele – s. 270

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Zadanie 2. (1 pkt)
Ile rozwiązań ma równanie $2x^3 - x^2 + x + 5 = 0$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 3. (1 pkt)
Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 - 4n \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:

A. -12, **B.** -4, **C.** 0, **D.** 4.

Zadanie 4. (1 pkt)
Podstawy trapezu prostokątnego opisanego na okręgu mają długości 4 cm i 8 cm. Wysokość tego trapezu jest równa:

A. 4 cm, **B.** $4\frac{2}{3}$ cm, **C.** $5\frac{1}{3}$ cm, **D.** $6\frac{2}{3}$ cm.

Zadanie 5. (1 pkt)
Granica $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \frac{4x-1}{2\sqrt{x}-1}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 4.

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)
Wyznacz największą liczbę naturalną n, dla której pochodna funkcji $f(x) = 4x^3 - 39x^2$ spełnia warunek $f'(n) < 0$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby n^3.

Zadanie 7. (2 pkt)
Liczbę $\frac{4}{2-\sqrt[3]{4}}$ zapisz w postaci $k + m\sqrt[3]{4} + n\sqrt[3]{2}$, gdzie $k, m, n \in \mathbf{C}$. Oblicz $(k^m)^n$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (2 pkt)
W trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 6 cm i kącie ostrym $30°$ wpisano okrąg o promieniu a cm. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwnięcia dziesiętnego liczby a.

Zadanie 9. (2 pkt)
Wyznacz $\sin\alpha$, wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\cos 2\alpha = 0{,}8$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. (3 pkt)
$A, B \subset \Omega$ są zdarzeniami losowymi takimi, że prawdopodobieństwo zdarzenia A jest trzy razy większe od prawdopodobieństwa zdarzenia B. Oblicz wartości tych prawdopodobieństw, wiedząc, że $P(A' \setminus B) = \frac{1}{9}$ oraz zdarzenia A i B są rozłączne.

Zadanie 11. (3 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{3-x}{x+1}\right|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $\left|\frac{3-x}{x+1}\right| = |m|$ ma jedno rozwiązanie?

Zadanie 12. (3 pkt)
Okrąg $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 16 = 0$ o środku S przecina oś OX w punktach $A(-2,0)$ i $B(8,0)$. Odcinek $A'B'$ jest obrazem odcinka AB w jednokładności o skali $k = -2$ i środku w punkcie S. Wyznacz współrzędne punktów A' i B'.

Zadanie 13. (3 pkt)
Wyznacz wszystkie wartości parametrów p i q, dla których nierówność:
$$(x+6)(x-3)(x^2+px-2qx+6q) \geqslant 0$$
jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

Zadanie 14. (3 pkt)
W stożek, w którym kąt między tworzącą a podstawą ma miarę 2α, wpisano kulę. Wyznacz $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli pole podstawy stożka jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli.

Zadanie 15. (3 pkt)
Dany jest ciąg (a_n), którego suma n początkowych wyrazów jest równa $S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

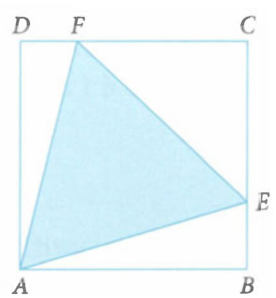
Zadanie 16. (6 pkt)
Wyznacz wszystkie wartości parametru $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których równanie:
$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 4\sin^2\alpha - 1 = 0$$
ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 tego samego znaku.

Zadanie 17. (6 pkt)
Przekątne równoległoboku mają długości 10 i 26. Oblicz obwód tego równoległoboku, jeżeli jego pole jest równe 78.

Zadanie 18. (7 pkt)
W kwadrat $ABCD$ o boku 2 wpisano trójkąt równoramienny AEF tak, że wierzchołek E leży na boku BC, a wierzchołek F – na boku CD oraz $|AF| = |EF|$ (rysunek poniżej).

a) Niech $x = |BE|$. Wykaż, że funkcja:
$$P(x) = 2 - \tfrac{1}{8}x(x-2)^2$$
opisuje pole trójkąta AEF dla $x \in \langle 0; 2 \rangle$.

b) Oblicz pole najmniejszego i największego z takich trójkątów.



Zestaw 3

odpowiedzi i modele – s. 273

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Proste $\left(\frac{2}{3}k-1\right)x-y+4=0$ i $x+12y+8=0$ są prostopadłe dla pewnej liczby k należącej do przedziału:

A. $\langle 0;6)$, **B.** $\langle 6;12)$, **C.** $\langle 12;18)$, **D.** $\langle 18;24)$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Z liczb od 1 do 100 wylosowano jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że jest to liczba podzielna przez 3, pod warunkiem że wylosowano liczbę parzystą, jest równe:

A. $\frac{33}{100}$, **B.** $\frac{8}{25}$, **C.** $\frac{7}{25}$, **D.** $\frac{3}{10}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Granica $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ jest równa:

A. 0, **B.** 2, **C.** 4, **D.** ∞.

Zadanie 4. (1 pkt)
Liczby $x=14-8\sqrt{3}$ i $y=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$ spełniają równanie:

A. $x^2-4y^2=0$, **B.** $x^2-2y^2=0$, **C.** $2x^2-y^2=0$, **D.** $4x^2-y^2=0$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Jeśli $p=\log_5 7$ i $q=\log_7 3$, to iloczyn $\log_7 27\cdot\log_7 25$ jest równy:

A. $\frac{p}{6q}$, **B.** $\frac{2p}{3q}$, **C.** $\frac{3q}{2p}$, **D.** $\frac{6q}{p}$.

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

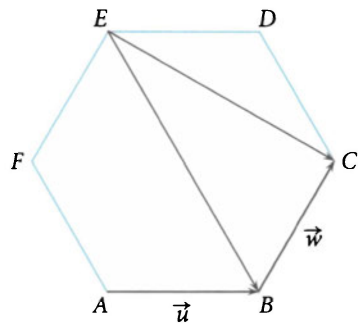
Zadanie 6. (2 pkt)
Liczba x_0 jest największym rozwiązaniem równania $\cos 2x - \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 1$ należącym do przedziału $(0; 2\pi)$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{x_0}{\pi}$.

Zadanie 7. (2 pkt)
Dany jest dwunastokąt foremny o obwodzie równym 12. Wybieramy losowo dwa wierzchołki tego dwunastokąta. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że odległość między wybranymi wierzchołkami jest równa 1. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (2 pkt)
Dana jest funkcja $g(x) = 3x^3 + 6x$. Funkcja f spełnia warunki: $f(2) = 3$ i $f'(2) = 6$. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. (2 pkt)
Proste $3x - 2y = 0$ i $3x - 2y + 1 = 0$ są styczne do okręgu o promieniu r. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby r.

Zadanie 10. (3 pkt)
Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ (rysunek obok). Niech $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ oraz $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$. Przedstaw wektor $\overrightarrow{EC}$ oraz wektor $\overrightarrow{EB}$ w postaci $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{w}$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.



Zadanie 11. (3 pkt)
Udowodnij, że jeżeli $a > b > 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 - b^3 < 3a^2(a - b)$.

Zadanie 12. (4 pkt)
Zapisz liczbę 520 jako sumę czterech liczb całkowitych będących pierwszymi czterema wyrazami ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz jest o 104 mniejszy od trzeciego wyrazu.

Zadanie 13. (4 pkt)
Równanie $x^2 + 7x + c = 0$ ma dwa różne od zera pierwiastki x_1 i x_2. Oblicz c, jeżeli wiadomo, że:

$$\left(\frac{10}{x_1} - x_2\right) \cdot \left(\frac{10}{x_2} - x_1\right) = 5$$

Zadanie 14. (4 pkt)
W loterii jest n losów, w tym 9 wygrywających. Zakupiono 2 losy. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których prawdopodobieństwo, że oba losy są wygrywające, jest większe od 0,3.

Zadanie 15. (6 pkt)
Trzy różne pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx - 192$ tworzą ciąg arytmetyczny.

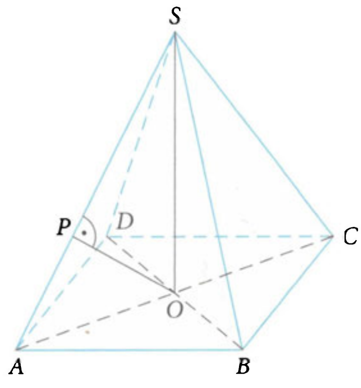
a) Oblicz wartość iloczynu pierwiastków wielomianu w.

b) Wyznacz pierwiastki wielomianu w, wiedząc, że ich suma jest równa 18.

c) Uzasadnij, że dla każdej liczby parzystej wielomian w przyjmuje wartość podzielną przez 16 i przez 24.

Zadanie 16. (6 pkt)
W trójkącie ostrokątnym równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 2, $|AC| = |BC| = x$, AD jest jego wysokością. Punkt P jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Przedstaw iloraz $\frac{|PD|}{|AP|}$ jako funkcję zmiennej x i wyznacz dziedzinę tej funkcji.

Zadanie 17. (7 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym odległość środka podstawy ostrosłupa od jego krawędzi bocznej wynosi $\sqrt{3}$ (rysunek obok).



a) Wyznacz objętość V ostrosłupa jako funkcję jego wysokości x i podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiej wartości x objętość ostrosłupa jest najmniejsza? Oblicz tę objętość.

c) Naszkicuj wykres funkcji V.

Zestaw 4

odpowiedzi i modele – s. 276

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Ile różnych rozwiązań ma równanie $x(x+1)^2 = (x^2+x)(x^3+1)$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 2. (1 pkt)
Styczna do paraboli $y = 3x^2 - x + 4$ w punkcie $x_0 = 0$ tworzy z osią OX kąt:

A. $\frac{\pi}{4}$, **B.** $\frac{\pi}{3}$, **C.** $\frac{2}{3}\pi$, **D.** $\frac{3}{4}\pi$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Granica ciągu $a_n = \frac{\sqrt{9n^2+n}}{\sqrt{8n^3-3n+2}}$ jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** 1,125, **D.** 1,5.

Zadanie 4. (1 pkt)
Do zbioru wartości funkcji $f(x) = \frac{4-\frac{2}{3}x}{4x+8}$ nie należy liczba:

A. $-\frac{1}{6}$, **B.** $-\frac{2}{3}$, **C.** 1, **D.** −2.

Zadanie 5. (1 pkt)
Jeśli $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{1}{3}$, to iloczyn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równy:

A. −0,36, **B.** −0,48, **C.** −0,6, **D.** −0,72.

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)
A jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych x spełniających warunki:

$$|x-100| \leqslant 200 \ \text{ i } \ |x+20| \geqslant 10$$

Wyznacz liczbę elementów zbioru A. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (2 pkt)
Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunki: $a_1 = 300$ i $a_4 = 2\frac{2}{5}$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności sumy wszystkich wyrazów tego ciągu.

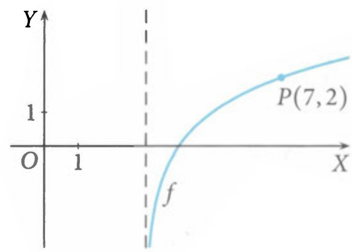
Zadanie 8. (2 pkt)
Wyznacz największą liczbę całkowitą n taką, że punkt $P(n, 40)$ należy do koła o średnicy AB, jeśli $A(10, 30)$ i $B(50, 70)$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $n + 80$.

Zadanie 9. (2 pkt)
Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A' \cap B)$, jeśli $P(A') = \frac{1}{4}$ oraz $P(A' \cap B') = \frac{1}{7}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. (3 pkt)
W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B, a następnie przez punkt ich przecięcia – prostą l równoległą do boku AB. Prosta l przecina bok AC w punkcie D, a bok BC w punkcie F. Udowodnij, że $|DF| = |AD| + |BF|$.

Zadanie 11. (3 pkt)
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \log_a(x-3)$$



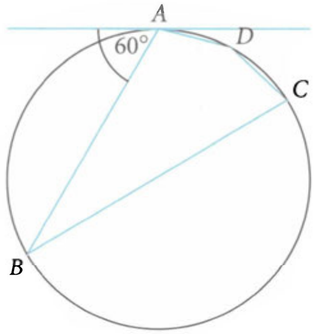
Oblicz a i wyznacz liczbę x, dla której spełniona jest równość $f(x-2) = 3f(5)$.

Zadanie 12. (3 pkt)
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie:

$$x^2 - (|m|+1)x + m^2 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 13. (4 pkt)
Ile jest dziesięciocyfrowych liczb naturalnych o iloczynie cyfr równym 8?



Zadanie 14. (5 pkt)
W okrąg o promieniu r wpisano czworokąt $ABCD$ taki, że kąt między styczną poprowadzoną do okręgu w punkcie A i bokiem AB ma miarę $60°$. Wyznacz pole czworokąta $ABCD$, jeśli $|BC| = 2|AC|$ oraz $|AD| = |DC|$.

Zadanie 15. (6 pkt)
Punkt $D(-2, -1)$ jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka $A(4, 2)$ trójkąta równobocznego ABC. Wyznacz współrzędne:

a) środka okręgu opisanego na tym trójkącie,

b) pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Zadanie 16. (6 pkt)
Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a, natomiast cosinus kąta między jego sąsiednimi ścianami bocznymi jest równy $\frac{7}{15}$. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 17. (7 pkt)
Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 4 cm, a jego obwód wynosi 10 cm. Niech x będzie długością ramienia trapezu. Wykaż, że funkcja:

$$P(x) = \sqrt{(5-x)^2(2x-1)}$$

opisuje pole tego trapezu dla $x \in (1; 3)$. Wyznacz wartość x, dla której pole trapezu jest największe. Oblicz to pole.

Zestaw 5

odpowiedzi i modele – s. 279

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Ile rozwiązań ma równanie $|x^2 - x| = |x|$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 2. (1 pkt)
Jeśli $a = \sqrt[3]{9\sqrt{3}} \cdot \sqrt{27}$, to $\log_9 a$ jest równy:

A. $1\frac{1}{6}$, **B.** $1\frac{1}{3}$, **C.** $1\frac{2}{3}$, **D.** $2\frac{1}{3}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Wskaż zbiór tych wartości parametru k, dla których dziedziną funkcji $f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^2 + 2x - k}$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

A. $(-\infty; -1)$ **B.** $(-\infty; 1)$ **C.** $(-1; \infty)$ **D.** $\langle -1; \infty)$

Zadanie 4. (1 pkt)
Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 2P(B)$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Jeśli zdarzenie $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym, to $P(A) - P(B)$ wynosi:

A. $\frac{1}{4}$, **B.** $\frac{5}{18}$, **C.** $\frac{13}{36}$, **D.** $\frac{1}{3}$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC o bokach 5, 6 i 7. Jeśli miary kątów, jakie tworzą krawędzie boczne ostrosłupa z jego podstawą, są równe, to spodkiem wysokości jest punkt przecięcia:

A. środkowych trójkąta ABC,
B. symetralnych boków trójkąta ABC,
C. dwusiecznych trójkąta ABC,
D. wysokości trójkąta ABC.

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)
Na okręgu opisano trapez prostokątny o kącie ostrym 30° i krótszej podstawie równej 1. Oblicz wysokość tego trapezu. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (2 pkt)
Wyznacz iloczyn rozwiązań równania $\sin \pi x = \frac{1}{2}$ należących do przedziału $\langle 0; 2\rangle$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 8. (2 pkt)
Wyznacz współrzędne punkt $S(p, q)$, który jest obrazem początku układu współrzędnych w jednokładności o środku $P(2, 1)$ i skali $k = -200$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $p + q$.

Zadanie 9. (2 pkt)
Oblicz $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{4x - 8} + \frac{1}{4 - x^2} \right)$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

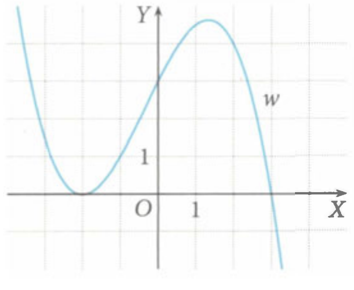
Zadanie 10. (3 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC. Punkty D i E dzielą przeciwprostokątną AB na trzy odcinki o równej długości. Oblicz cosinus kąta DCE.

Zadanie 11. (3 pkt)
Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21, a suma trzech następnych wyrazów wynosi 168. Który wyraz tego ciągu jest równy 96?

Zadanie 12. (4 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu trzeciego stopnia.

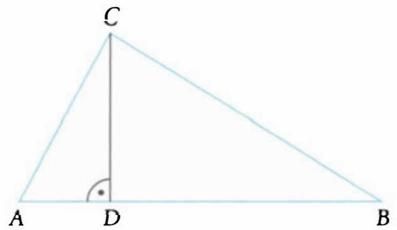
a) Wyznacz wzór wielomianu w.

b) Rozwiąż równanie $w(x) + u(x) = 0$, gdzie $u(x) = 2x - 6$.



Zadanie 13. (4 pkt)
Z urny, zawierającej sześć kul o numerach 4, 5, 6, 7, 8 i 9 losujemy kolejno bez zwracania pięć kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba, której kolejnymi cyframi są numery wylosowanych kul, jest podzielna przez 4.

Zadanie 14. (4 pkt)
Oblicz obwód trójkąta ABC (rysunek poniżej), jeśli kąt ACB jest kątem prostym, $|AC| = 4$ cm oraz $|DB| = 6$ cm.



Zadanie 15. (6 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

a) Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość:

$$f(x) = \cos 4x$$

b) Liczba x_0 jest najmniejszym dodatnim miejscem zerowym funkcji f. Oblicz x_0 i $\cos x_0$.

Zadanie 16. (6 pkt)
Wyznacz równania wspólnych stycznych do wykresów funkcji $f(x) = 2x^2$ i $g(x) = -2(x-1)^2$.

Zadanie 17. (7 pkt)
Odcinek o końcach $A(2,3)$ i $B(0,5)$ jest podstawą trapezu $ABCD$. Druga podstawa, o środku w punkcie $S(-2,1)$, jest dwa razy dłuższa od podstawy AB. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót trapezu $ABCD$ wokół prostej AB.

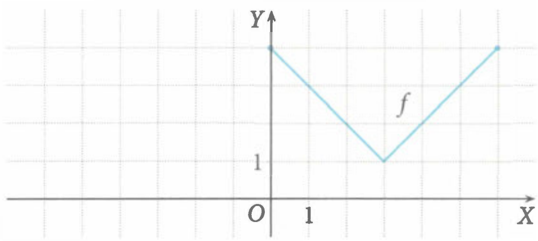
Zestaw 6

odpowiedzi
i modele
– s. 282

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f. Dziedziną funkcji $g(x) = f(4 - x)$ jest przedział:



A. $\langle -6;0\rangle$,
B. $\langle -4;-1\rangle$,
C. $\langle -4;2\rangle$,
D. $\langle -2;4\rangle$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Dany jest ciąg geometryczny (a_n) taki, że $a_1 = -2$ i $a_2 = p^2 - 2p - 4$. Ciąg ten jest jednocześnie niemalejący i nierosnący dla p należącego do zbioru:

A. $\{1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\}$,
B. $\{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$,
C. $\{2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$,
D. $\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Liczba $\log_{\sqrt{2}}\left(-8\log_3(\log_2 \sqrt[9]{8})\right)$ jest równa:

A. 1,
B. 3,
C. 4,
D. 6.

Zadanie 4. (1 pkt)
Ile rozwiązań należących do przedziału $(0;6\pi\rangle$ ma równanie $2\sin^2 x = \sin x$?

A. 6
B. 8
C. 10
D. 12

Zadanie 5. (1 pkt)
Okrąg o środku w początku układu współrzędnych jest styczny do prostej $3x + 4y - 25 = 0$. Okrąg ten jest również styczny do prostej:

A. $y = -5$,
B. $y = -3$,
C. $y = \frac{7}{2}$,
D. $y = 4$.

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)
Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry: 0, 1, 9 i dokładnie raz pojawia się cyfra parzysta? Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

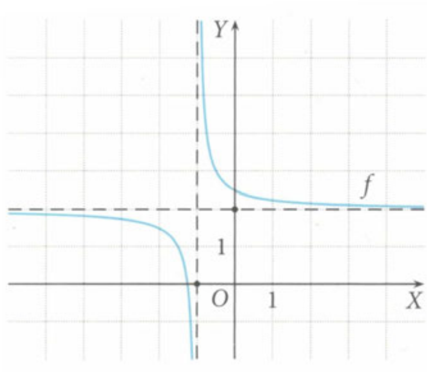
Zadanie 7. (2 pkt)
Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = 8\sin x + 8\cos x$. Zakoduj cyfry dziesiątek, jedności i pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (2 pkt)
Wyznacz parametr p, dla którego $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{21pn^2 + 2n + 3}{(1-2n)(1-3n)} = 1\frac{2}{3}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. (2 pkt)
W kulę wpisano stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości stożka. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. (3 pkt)
Wykaż, że styczne poprowadzone do hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ w punktach jej przecięcia z osiami współrzędnych są równoległe.

Zadanie 11. (4 pkt)
Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{ax+b}{2x+c}$ (rysunek obok).
a) Wyznacz współczynniki a, b, c, jeśli wiadomo, że wykres funkcji f można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{2x}$ o wektor $\vec{u} = [-1, 2]$.
b) Uzasadnij, że do wykresu funkcji f nie należy żaden punkt o obu współrzędnych całkowitych.



Zadanie 12. (3 pkt)
Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$. Wybieramy losowo zbiór i z niego kolejno bez zwracania trzy liczby, które zapisane w kolejności losowania tworzą ciąg trzyelementowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to ciąg monotoniczny.

Zadanie 13. (4 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |\log_2(x-1)|$. Dla jakich wartości parametru m punkt o współrzędnych $(m^2, 3)$ należy do wykresu tej funkcji?

Zadanie 14. (4 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym tangens kąta między krawędzią boczną a podstawą jest równy m. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 15. (6 pkt)
Oblicz pole trójkąta ABC, którego jednym z wierzchołków jest punkt $A(2, 5)$, a jednym z boków – średnica okręgu $x^2 + 2x + y^2 - 6y - 15 = 0$ równoległa do prostej $x + 2y = 0$.

Zadanie 16. (6 pkt)
Miara największego kąta w trójkącie jest dwa razy większa od miary jego najmniejszego kąta. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeżeli są one kolejnymi liczbami naturalnymi.

Zadanie 17. (7 pkt)
Wyznacz wartości parametrów p i q, dla których funkcja:

$$f(x) = \frac{px + 5p + q}{(x+4)(x+1)}$$

ma w punkcie $x = -3$ ekstremum równe -1. Sprawdź, czy jest to minimum, czy maksimum.

Zestaw 7

odpowiedzi i modele – s. 285

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 + 14$ przez dwumian $x + 2$ jest równa 6. Wynika stąd, że:

A. $a = -9$, **B.** $a = -6$, **C.** $a = 3$, **D.** $a = 8$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Ile liczb całkowitych należy do dziedziny funkcji $f(x) = \log(16 - 5x) + \log(2x + 16)$?

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Zadanie 3. (1 pkt)
Pochodna funkcji $f(x) = \frac{1 - x^2}{4 + x^2}$ w punkcie $x_0 = 2$ jest równa:

A. $-\frac{5}{16}$, **B.** $-\frac{1}{16}$, **C.** $\frac{1}{16}$, **D.** $\frac{11}{16}$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Wyrażenie $\cos 45° \cdot \sin 60°$ jest równe:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 10° + \sin 110°)$,
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 20° + \sin 100°)$,
C. $\frac{1}{2}(\sin 15° + \sin 105°)$,
D. $\frac{1}{2}(\sin 45° + \sin 75°)$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Szereg geometryczny o początkowych wyrazach $1, 2x, 4x^2, 8x^3$ jest zbieżny dla:

A. $x = 1 - \sqrt{3}$,
B. $x = \sqrt{2} - 2$,
C. $x = \sqrt{3} - \sqrt{5}$,
D. $x = \sqrt{5} - \sqrt{7}$.

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)
Dany jest ciąg o wzorze ogólnym:

$$a_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{n+2} - n$$

Oblicz pięćdziesiąty wyraz tego ciągu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (2 pkt)
Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli $P(B) = \frac{3}{7}$, $P(A) = \frac{1}{2}$ i $P(A|B) = \frac{1}{7}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 8. (2 pkt)
Punkt $S(8, 4)$ jest środkiem odcinka AB o końcach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ należących odpowiednio do prostych $y - 2x = 0$ i $y + x - 3 = 0$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$.

Zadanie 9. (2 pkt)
Wyznacz dodatnią wartość parametru p, dla której styczna do wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3p^4x^2 - 2$$

w punkcie $x_0 = -2$ jest równoległa do osi OX. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego wyznaczonej wartości parametru p.

Zadanie 10. (3 pkt)
Dane są dwa trójkąty prostokątne. Długości boków każdego z nich tworzą ciągi arytmetyczne. Wykaż, że te trójkąty są podobne.

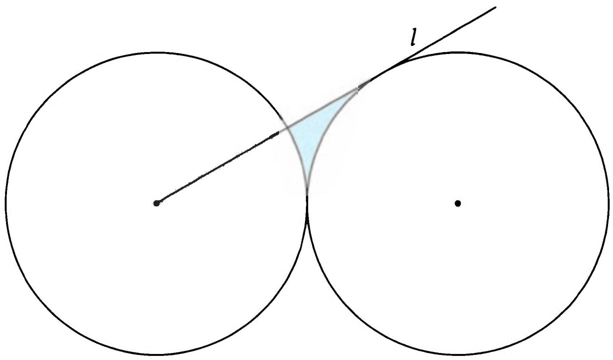
Zadanie 11. (5 pkt)
Wyznacz wartości parametru k, dla których dziedziną funkcji:

$$f(x) = \sqrt{(1-k^2)x^2 + (k-1)x + 1}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zadanie 12. (3 pkt)
Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji $f(x) = |x+4| - |x|$ i $g(x) = |2x|$.

Zadanie 13. (4 pkt)
Dane są dwa styczne okręgi, każdy o promieniu 10. Ze środka jednego z nich poprowadzono półprostą l styczną do drugiego okręgu (rysunek poniżej). Oblicz pole obszaru ograniczonego tymi okręgami i półprostą l.



Zadanie 14. (5 pkt)
Z urny, w której znajdują się kule o numerach: $1, 2, \ldots, n$ $(n > 2)$, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Numery wylosowanych kul tworzą parę (x, y). Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo tego, że para (x, y) spełnia warunek $|x - y| = 2$, jest mniejsze od 0,25?

Zadanie 15. (5 pkt)
Promień podstawy stożka jest równy 3, a cosinus kąta nachylenia jego tworzącej do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{1}{3}$. Oblicz długość krawędzi sześcianu wpisanego w ten stożek (sześcian jest wpisany w stożek, jeśli cztery jego wierzchołki należą do podstawy stożka, a pozostałe cztery do powierzchni bocznej stożka).

Zadanie 16. (6 pkt)
Ramiona trapezu opisanego na okręgu mają długości 13 cm i 15 cm, pole trapezu jest równe 168 cm^2, a kąty przy jego dłuższej podstawie są ostre. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są końce dłuższej podstawy trapezu i punkt przecięcia jego przekątnych.

Zadanie 17. (6 pkt)
Prosta przechodząca przez punkt $P(4, 6)$ przecina dodatnie półosie układu współrzędnych w punktach A i B. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej prostej tak, aby trójkąt ABO (gdzie punkt O jest początkiem układu współrzędnych) miał najmniejsze pole.

Zestaw 8

odpowiedzi
i modele
– s. 289

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Zbiorem wartości funkcji $f(x) = |4\sin 2x - 3|$ jest przedział:

A. $\langle 0;3\rangle$, **B.** $\langle 0;4\rangle$, **C.** $\langle 0;7\rangle$, **D.** $\langle 0;8\rangle$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Na okręgu wybrano dwadzieścia punktów. Ile jest trójkątów, których wierzchołkami są dowolne trzy spośród tych punktów?

A. 1140 **B.** 2280 **C.** 3420 **D.** 6840

Zadanie 3. (1 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = -4x(x^2+2)$. Największa wartość pochodnej tej funkcji jest równa:

A. -8, **B.** -4, **C.** 0, **D.** 4.

Zadanie 4. (1 pkt)
Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 2\sqrt{2}$ i sumie wszystkich wyrazów $S = 3\sqrt{2}$. Iloraz q tego ciągu należy do przedziału:

A. $\left(\frac{1}{12};\frac{1}{4}\right\rangle$, **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{5}{12}\right\rangle$, **C.** $\left(\frac{5}{12};\frac{7}{12}\right\rangle$, **D.** $\left(\frac{7}{12};\frac{3}{4}\right\rangle$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Równanie $x^2 + \pi x + 2 = 0$:

A. ma dwa pierwiastki ujemne,
B. ma dwa pierwiastki dodatnie,
C. ma dwa pierwiastki różnych znaków,
D. nie ma pierwiastków.

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)

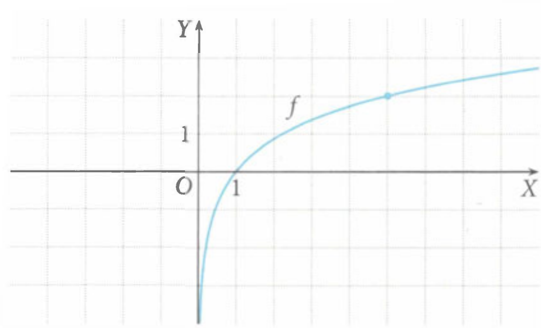
Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2x - 1} + \frac{\sqrt{16x^2 + 8x^3 + x^4}}{4x^2 + 16x}$$

dla $x = 4 + \sqrt{2}$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_a x$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $0{,}1a$.



Zadanie 8. (2 pkt)

Oblicz granicę:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{3x} - \sqrt{3}x}$$

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. (2 pkt)

Okrąg $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ przecina oś OX w punktach P i Q. Oblicz $|PQ|$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. (3 pkt)

Rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie reszka, to rzucamy symetryczną kostką sześcienną, jeśli orzeł – kostką sześcienną, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia k oczek jest równe $p_k = \frac{k}{21}$ dla $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek.

Zadanie 11. (3 pkt)
Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Uzasadnij, że ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \log^2 a_{n+1} - \log^2 a_n$ jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 12. (4 pkt)
Kierowca obliczył, że trasę 220 km pokona w czasie t, jeśli będzie jechał ze średnią prędkością v. Wyjechał o 20 minut później, niż zamierzał, więc aby dojechać na zaplanowaną godzinę, musiał zwiększyć średnią prędkość o 5 km/h. Oblicz v.

Zadanie 13. (4 pkt)
Wyznacz te wartości $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których liczby $\frac{1}{2}$, $\sin x$, $\sin 2x$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 14. (5 pkt)
Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Krawędź podstawy ABC ma długość a. Wyznacz pole przekroju ostrosłupa $ABCS$ płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°.

Zadanie 15. (5 pkt)
W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A(-5,-2)$ i $B(7,1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C, jeżeli wysokości trójkąta przecinają się w punkcie $S(-2,3)$.

Zadanie 16. (6 pkt)
W romb o kącie ostrym 60° wpisano okrąg. Punkty styczności okręgu z bokami rombu tworzą czworokąt $ABCD$ o polu równym $3\sqrt{3}$.

a) Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

b) Oblicz pole rombu.

Zadanie 17. (7 pkt)
W stożek, którego przekrojem jest trójkąt równoboczny, wpisano walec o największej objętości. Udowodnij, że objętość tego walca jest równa objętości kuli wpisanej w ten stożek.

Zestaw 9

◂ odpowiedzi i modele – s. 292

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Jeśli $a = \sqrt[3]{2}$ i $b = (18^{-4} : 3^{-8}) \cdot (2\sqrt{2})^4$, to $\log_b a$ jest równy:

A. $\frac{1}{6}$, **B.** $\frac{1}{2}$, **C.** 2, **D.** 6.

Zadanie 2. (1 pkt)
Na ile sposobów można ustawić w kolejce dwie dziewczęta i czterech chłopców, jeśli dziewczęta mają stać obok siebie?

A. 120 **B.** 240 **C.** 480 **D.** 720

Zadanie 3. (1 pkt)
Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i wierzchołek górnej podstawy. Przekrój ten tworzy z podstawą kąt α należący do przedziału:

A. $(0°;30°\rangle$, **B.** $(30°;45°\rangle$, **C.** $(45°;60°\rangle$, **D.** $(60°;90°\rangle$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Dla jakiej wartości parametru p funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5 & \text{dla } x \in (-\infty; 2\rangle \\ \frac{1}{3}x + p & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$?

A. $p = 2$ **B.** $p = 2\frac{1}{3}$ **C.** $p = 2\frac{2}{3}$ **D.** $p = 3$

Zadanie 5. (1 pkt)
Jaką długość ma promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12?

A. 2 **B.** 3 **C.** $3\frac{1}{2}$ **D.** 4

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)
Zapisz liczbę $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ w postaci $\sqrt[6]{n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Zakoduj cyfry: tysięcy, setek i dziesiątek liczby n.

Zadanie 7. (2 pkt)
Oblicz odległość środków okręgów $x^2+y^2=16$ i $x^2+y^2+x-\frac{1}{2}y-8=0$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (2 pkt)
Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{4} \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n^2+a_{n-1}^2\right) \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego wyrazu a_4.

Zadanie 9. (2 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki mające długości 7 i 9. Oblicz tę wysokość. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. (3 pkt)
Niech a_n, dla $n \geqslant 1$, będzie resztą z dzielenia wielomianu $w_n(x)=\left(2x^2-3x-\frac{11}{2}\right)^n$ przez dwumian $x+1$. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 11. (3 pkt)
Rozwiąż nierówność $f(x-1)-f(x+1)>6$, gdzie $f(x)=4-\frac{3}{x}$.

Zadanie 12. (5 pkt)
W urnie jest dwa razy więcej kul białych niż czarnych. Losujemy z urny jednocześnie dwie kule. Prawdopodobieństwo wylosowania obu kul białych jest równe $\frac{7}{16}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów.

Zadanie 13. (4 pkt)
Stosunek długości przekątnych rombu jest równy $1:4$. Oblicz tangens kąta ostrego tego rombu.

Zadanie 14. (4 pkt)
Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 3 - 4\sin x - 4\cos^2 x$.

Zadanie 15. (5 pkt)
Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt $(\log_2 3, 9)$.

a) Oblicz a i naszkicuj wykres funkcji f.

b) Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x+1)$ i $h(x) = f(-x) + 3$. Wyznacz rozwiązanie równania $g(x) = h(x)$.

Zadanie 16. (6 pkt)
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę $45°$, $|AB| = 2\sqrt{2}$ oraz $|BC| = 6$.

a) Uzasadnij, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

b) Oblicz objętość bryły, która powstanie w wyniku obrotu trójkąta ABC wokół boku AB.

Zadanie 17. (7 pkt)
Dany jest stożek o wysokości 6 i promieniu podstawy 3. W stożek ten wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny w ten sposób, że wysokość ostrosłupa jest zawarta w wysokości stożka, wierzchołek ostrosłupa jest środkiem podstawy stożka, a wierzchołki podstawy ostrosłupa należą do powierzchni bocznej stożka. Oblicz największą możliwą objętość takiego ostrosłupa.

Zestaw 10

odpowiedzi – s. 295
modele – s. 296

Zadania zamknięte

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Do dziedziny funkcji $f(x) = \log_{x^2-2} x$ należy liczba:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **B.** $\sqrt{2}$, **C.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$, **D.** $\sqrt{3}$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Dany jest wielomian $w(x) = 18x^3 + ax^2 + bx - 10$ o współczynnikach całkowitych. Która z podanych liczb nie może być pierwiastkiem tego wielomianu?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{13}{10}$ **D.** $\frac{10}{9}$

Zadanie 3. (1 pkt)
Okręgi $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ i $(x-1)^2 + y^2 = 1$:

A. są styczne wewnętrznie,
B. są styczne zewnętrznie,
C. przecinają się,
D. są rozłączne.

Zadanie 4. (1 pkt)
Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = P(B) = \frac{15}{32}$. Jeśli $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, to suma:

$$P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$$

jest równa:

A. $\frac{13}{16}$, **B.** $\frac{11}{16}$, **C.** $\frac{9}{16}$, **D.** $\frac{7}{16}$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Pan Adam złożył na lokacie 10 000 zł na 2 lata, przy rocznej stopie procentowej 6%. Jak często była kapitalizacja, jeśli odsetki od ulokowanej kwoty są większe od 1265 zł, ale nie przekraczają 1270 zł?

A. co pół roku
B. co kwartał
C. co 2 miesiące
D. co miesiąc

Zadania otwarte

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia.

Zadanie 6. (2 pkt)

Oblicz $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n-4}{2n+2}-\frac{4-2n^2}{2-7n^2}\right)$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonej granicy.

Zadanie 7. (2 pkt)

Oblicz pochodną funkcji $f(x)=\frac{3x}{3x^2+4}$ w punkcie $x=\frac{1}{3}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (2 pkt)

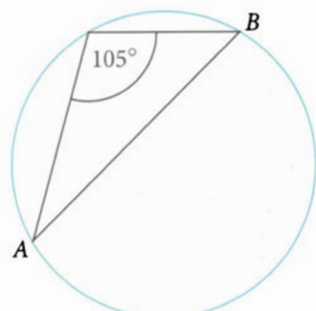
Dany jest trójkąt o bokach: 2, $\sqrt{19}$, 3. Miara jednego z jego kątów jest równa $120°$. Oblicz pole tego trójkąta. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. (2 pkt)

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), jeśli $a_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz $a_2=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. (3 pkt)

Promień okręgu (rysunek obok) jest równy $4\sqrt{2}$. Oblicz długość cięciwy AB.



Zadanie 11. (3 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\left|\frac{4}{x-1}-2\right|$. Odczytaj z wykresu wartości parametru p, dla których równanie $f(x)=p$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

Zadanie 12. (4 pkt)

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne (x,y) spełniają równanie:

$$2\log x-\log(2+y)=\log(2-y)$$

Zadanie 13. (4 pkt)
Trzy pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 + px + q$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 4. Oblicz współczynniki p i q.

Zadanie 14. (5 pkt)
Rzucamy cztery razy symetryczną kostką sześcienną. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że przynajmniej raz wypadło 5 lub 6 oczek, a B – że w ostatnim rzucie wypadło co najwyżej 5 oczek. Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?

Zadanie 15. (5 pkt)
Rozwiąż równanie $\left|1 - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 16. (6 pkt)
Wierzchołki trapezu należą do paraboli danej równaniem $y = 9 - x^2$, a jego dłuższa podstawa jest zawarta w osi OX. Oblicz największe możliwe pole takiego trapezu.

Zadanie 17. (7 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest dwa razy większe od pola ściany bocznej. Oblicz cosinus kąta α zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

3

Odpowiedzi i modele rozwiązań

Zadania powtórzeniowe

1. Liczby, zbiory i wartość bezwzględna

Zestaw A – odpowiedzi

1. a) $3-\sqrt{13}$ **b)** -4 **c)** $3\sqrt{3}-6$ **d)** $\frac{5}{189}$

2. a) 6 **b)** 8 **c)** $4\sqrt{2}+2$ **d)** 6

4. a) $-2(3+2\sqrt{3})$ **b)** $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$ **c)** $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$
d) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ **e)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{2}$ **f)** $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$

5. a) $\frac{1}{x}$ **b)** $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$ **d)** 2

10. 0 i 155 lub 31 i 124 lub 62 i 93

11. a) $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$ **b)** $864=2^5\cdot 3^3$
c) $924=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$ **d)** $2520=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

12. a) NWD = 4, NWW = 104
b) NWD = 8, NWW = 192
c) NWD = 5, NWW = 540
d) NWD = 1, NWW = 2750
e) NWD = 84, NWW = 3528
f) NWD = 12, NWW = 1680

13. a) 64 **b)** 12

14. 32 i 33

15. a) $a=6$, $b=0$ lub $a=10$, $b=8$
b) $\begin{cases} a=-8 \\ b=-7 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=-8 \\ b=7 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases}$
lub $\begin{cases} a=-4 \\ b=1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$
lub $\begin{cases} a=8 \\ b=-7 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=8 \\ b=7 \end{cases}$

17. a) $(A\cap B)\setminus C=(0;3)$, $(A\setminus B)\cap C=(-2;-1)$
b) $(A\cap B)\setminus C=\emptyset$, $(A\setminus B)\cap C=(2;4)\cup\langle 6;7)$
c) $(A\cap B)\setminus C=(2;4\rangle$, $(A\setminus B)\cap C=\{2\}$
d) $(A\cap B)\setminus C=\langle 0;1)\cup(4;6)$,
$(A\setminus B)\cap C=(3;4\rangle$

18. a) $(A\cup B)'=A'\cap B'=(-\infty;-1)\cup\langle 4;\infty)$,
$(A\cap B)'=A'\cup B'=(-\infty;0\rangle\cup(2;\infty)$
b) $(A\cup B)'=A'\cap B'=(4;\infty)$,
$(A\cap B)'=A'\cup B'=(-\infty;1)\cup(3;\infty)$
c) $(A\cup B)'=A'\cap B'=(-\infty;-1\rangle\cup(0;2)$,
$(A\cap B)'=A'\cup B'=\mathbf{R}$
d) $(A\cup B)'=A'\cap B'=(-\infty;1)\cup(6;\infty)$,
$(A\cap B)'=A'\cup B'=(-\infty;2\rangle\cup(3;4)\cup(5;\infty)$

19. a) $(A\setminus B)'=(-\infty;-2)\cup\langle 0;\infty)$, $A'\setminus B'=(4;\infty)$
b) $(A\setminus B)'=\langle -1;2\rangle\cup(4;\infty)$, $A'\setminus B'=\langle 5;6)$

20. a) $A\cup B=(-\infty;\sqrt{3})$, $A\cap B=\left(0;\frac{1}{2}\right\rangle$, $A\setminus B=(-\infty;0\rangle$
b) $A\cup B=\left(\frac{1}{4};4\right\rangle$, $A\cap B=\langle 3;4)$, $A\setminus B=\{4\}$

21. $A\cup B=\mathbf{R}$, $A\cap B=\left\langle\frac{1}{2};1\right\rangle$, $A'\cap B'=\emptyset$

22. $A\setminus B=\langle -3;5\rangle$

24. a) $x\in\{-4,4\}$ **b)** brak rozwiązań
c) $x\in\{-6,-2,0,4\}$ **d)** $x=3$
e) $x\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$ **f)** $x=0$

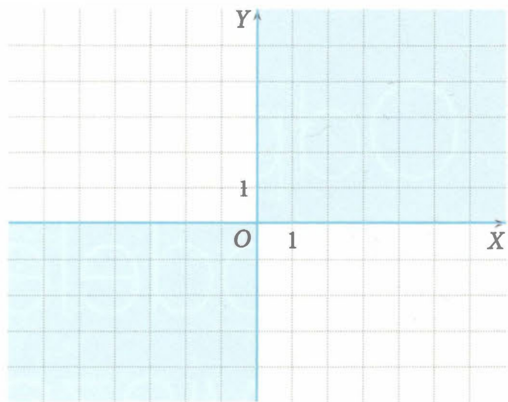
25. a) $x\in(-\infty;-8)\cup(-2;2)\cup(8;\infty)$
b) $x\in\left\langle-\frac{3}{2};\infty\right)$ **c)** $x\in\mathbf{R}$ **d)** $x\in(-\infty;0\rangle$
e) $x\in\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$ **f)** $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right\rangle$

26. a) $x\in\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ **b)** $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$

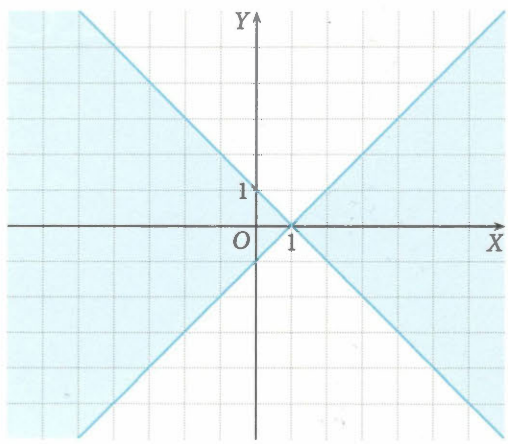
27. $x\in\left(-\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$

28. $m\in(1;\infty)$

29.



30.



Zestaw B – odpowiedzi

1. A **2.** A **3.** B **4.** C **5.** D **6.** C **7.** D **8.** D **9.** B

Zestaw C – odpowiedzi

1. 355 ($m = 237$, $n = -118$)

2. 200

3. 267 $\left(\frac{a}{b} = \frac{15}{56}\right)$

4. 210

5. 828 $\left(r = 2\sqrt{2} - 2\right)$

6. 153 ($n = -153$)

7. 585 ($a = 585$)

Zestaw D – odpowiedzi

1. $a^b > b^a$

3. $c < a < b < d$

10. $x \in (-2; 3)$

11. $x \in \langle -3; 1 \rangle$

12. **a)** $x = -1$, $x = 1$

b) $m \in \langle -4; 0) \cup (0; 4 \rangle$

13. $x \in (-\infty; 1 \rangle \cup \langle 3; \infty)$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zapisanie a w postaci: $a = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 2 + \sqrt{3}$
	Wyznaczenie liczby a: $a = 6$
	Wyznaczenie liczby b: $b = 9$
	Zapisanie wniosku wraz z uzasadnieniem: $a^b > b^a$
2.	Zapisanie równania: $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ oraz podniesienie obu stron równania do potęgi trzeciej: $a^3 = 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$
	Zapisanie równania w postaci: $a^3 = 4 - 3a$
	Zapisanie równania w postaci: $(a-1)\left(a^2 + a + 4\right) = 0$
	Rozwiązanie równania: $a = 1$
3.	Obliczenie a: $a = -\frac{1}{3}$
	Obliczenie b: $b = \frac{1}{3}$
	Obliczenie c: $c = -\frac{1}{2}$
	Obliczenie d: $d = \frac{1}{2}$
	Porównanie liczb: $c < a < b < d$
4.	Zapisanie nierówności w postaci: $x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x + 1 + 1 > 0$
	Przekształcenie nierówności: $(x^2-1)^2 + (x-1)^2 + 1 > 0$
	Sformułowanie wniosku: Nierówności $\left(x^2-1\right)^2 \geqslant 0$, $(x-1)^2 \geqslant 0$ i $1 > 0$ zachodzą dla każdej liczby rzeczywistej, więc dana nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5.	Rozłożenie wyrażenia na czynniki liniowe: $k^2(k+1)(k+2)(k+1)(k+2)$
	Zauważenie, że czynniki są kwadratem iloczynu trzech kolejnych liczb naturalnych: $(k(k+1)(k+2))^2$
	Zauważenie, że wśród dwóch dowolnych kolejnych liczb naturalnych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3, co oznacza, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6
	Zapisanie wniosku: Kwadrat iloczynu trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6, stąd: liczba $(k^3+k^2)(k^2+3k+2)(k+2)$ jest podzielna przez 36.
6.	Zauważenie, że iloczyn jest podzielny przez 5, jeżeli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 5, oraz że każdą liczbę $k \in \mathbf{C}$ można zapisać w jednej z postaci: $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$ dla pewnego $n \in \mathbf{C}$
	Jeśli $k=5n$, to pierwszy czynnik jest podzielny przez 5. Jeśli $k=5n+1$, to czynnik $k+9=5n+10=5(n+2)$ jest podzielny przez 5. Jeśli $k=5n+2$, to czynnik $k^2+1=25n^2+20n+4+1=5(5n^2+4n+1)$ jest podzielny przez 5.
	Jeśli $k=5n+3$, to czynnik $k^2+1=25n^2+30n+9+1=5(5n^2+6n+2)$ jest podzielny przez 5. Jeśli $k=5n+4$, to czynnik $k+1=5n+5=5(n+1)$ jest podzielny przez 5. Zatem liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.
7.	Zauważenie, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi warunek: $\left(3x^2-1\right)^2 \geqslant 0$
	Zapisanie nierówności w postaci: $9x^4+1 \geqslant 6x^2$
	Zapisanie nierówności w postaci: $\frac{9x^4+1}{x^2} \geqslant 6$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
8.	Zauważenie, że dla $b=1-a$ nierówność przyjmuje postać $a(1-a) \leqslant \frac{1}{4}$, czyli $a^2-a+\frac{1}{4} \geqslant 0$
	Przekształcenie nierówności do postaci $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ i zauważenie, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby dodatniej a
9.	Przekształcenie nierówności do postaci: $2(a-b) < ab(a-b)(a+b)$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $2 < ab(a+b)$
	Zauważenie, że przy podanych założeniach $ab>1$ oraz $a+b>2$, czyli $ab(a+b) > 1 \cdot 2 = 2$
10.	Zapisanie nierówności w postaci $\|x-2\|+\|x+1\| < 5$ oraz zauważenie, że należy rozpatrzyć trzy przypadki: 1. $x \in (-\infty;-1)$, 2. $x \in \langle -1;2)$, 3. $x \in \langle 2;\infty)$
	Zauważenie, że jeżeli $x \in (-\infty;-1)$, to $x \in (-2;-1)$
	Zauważenie, że jeżeli $x \in \langle -1;2)$, to $x \in \langle -1;2)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10. cd.	Zauważenie, że jeżeli $x \in \langle 2;\infty)$, to $x \in \langle 2;3)$
	Podanie odpowiedzi: $x \in (-2;3)$
11.	Zauważenie, że jeżeli $x \in (-\infty;-2)$, to $x \in \langle -3;-2)$
	Zauważenie, że jeżeli $x \in \langle -2;1)$, to $x \in \langle -2;1)$
	Zauważenie, że jeżeli $x \in \langle 1;\infty)$, to $x = 1$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \langle -3;1\rangle$
12. a)	Rozwiązanie równania: $x = -1$ lub $x = 1$
12. b)	Zapisanie równania w postaci: $\lvert x\rvert = \frac{4-\lvert m\rvert}{\lvert m\rvert}$ oraz zauważenie, że $m \neq 0$ i $\frac{4-\lvert m\rvert}{\lvert m\rvert} \geqslant 0$
	Zauważenie, że jeżeli $m < 0$, to $m \in \langle -4;0)$
	Zauważenie, że jeżeli $m > 0$, to $m \in (0;4\rangle$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \langle -4;0) \cup (0;4\rangle$
13.	Przekształcenie nierówności do postaci: $\lvert x-1\rvert \cdot \lvert x-2\rvert \geqslant \lvert x-1\rvert$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\lvert x-1\rvert(\lvert x-2\rvert - 1) \geqslant 0$
	Zauważenie, że $\lvert x-1\rvert \geqslant 0$ dla dowolnej wartości x
	Rozwiązanie nierówności $\lvert x-2\rvert - 1 \geqslant 0$: $x \in (-\infty;1\rangle \cup \langle 3;\infty)$
14.	Oznaczenie lewej strony równania przez a i obliczenie: $$a^3 = 9+\sqrt{80}+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})^2}\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\sqrt[3]{(9-\sqrt{80})^2}+9-\sqrt{80}$$
	Przekształcenie prawej strony: $$a^3 = 18+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})}\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)$$
	Zauważenie, że $\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right) = 1$, i zapisanie równania w postaci: $a^3 = 18+3a$
	Zauważenie, że 3 jest jedynym pierwiastkiem równania $a^3 - 3a - 18 = 0$, i podanie odpowiedzi
15.	Zauważenie, że dla dowolnych $x, y > 0$ nierówność $x + y \leqslant 2$ jest równoważna nierówności: $$(x+y)^2 \leqslant 4$$
	Skorzystanie z warunku $x^2 + y^2 = 2$ i zapisanie nierówności w postaci: $$x^2 + 2xy + y^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$$
	Przekształcenie nierówności do postaci $(x-y)^2 \geqslant 0$ i zauważenie, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16.	Przekształcenie nierówności kolejno do postaci równoważnych: $$2a^3-2a^2b-a^2b+b^3\geqslant 0$$ $$2a^2(a-b)-b(a^2-b^2)\geqslant 0$$
	Przekształcenie nierówności kolejno do postaci: $$(a-b)(2a^2-ab-b^2)\geqslant 0$$ $$(a-b)(a^2-b^2+a^2-ab)\geqslant 0$$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(a-b)^2(2a+b)\geqslant 0$ i zauważenie, że jeśli $2a+b\geqslant 0$, to nierówność jest prawdziwa
17.	Wykonanie działań i zapisanie nierówności w postaci: $x^2+x+y^2+y-xy+1\geqslant 0$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $$(x^2+2x+1)+(y^2+2y+1)+(x^2-2xy+y^2)\geqslant 0$$
	Zauważenie, że nierówność $(x+1)^2+(y+1)^2+(x-y)^2\geqslant 0$ jest zawsze prawdziwa
18.	Przekształcenie nierówności do postaci: $(xy-2)^2+2x^2+2y^2-4xy>0$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(xy-2)^2+2(x-y)^2>0$
	Zauważenie, że jeśli $x\neq y$, to $(x-y)^2>0$. Lewa strona nierówności jest zatem sumą liczby nieujemnej $(xy-2)^2$ oraz liczby dodatniej, więc jest dodatnia
19.	Zapisanie nierówności w postaci: $4x^2-4xy+y^2+x^2+6x+9\geqslant 0$
	Zapisanie nierówności w postaci: $(2x-y)^2+(x+3)^2\geqslant 0$
	Zauważenie, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnych $x,y\in\mathbf{R}$, ponieważ jej lewa strona jest sumą liczb nieujemnych
20.	Zapisanie nierówności w postaci: $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ i poniesienie jej obu stron do kwadratu
	Przeształcenie nierówności kolejno do postaci: $$8a^2b^2\leqslant(a^2+2ab+b^2)(a^2+b^2)$$ $$a^4+2a^3b-6a^2b^2+2ab^3+b^4\geqslant 0$$ $$a^4-2a^2b^2+b^4+2ab(a^2-2ab+b^2)\geqslant 0$$
	Zapisanie nierówności w postaci: $(a^2-b^2)^2+2ab(a-b)^2\geqslant 0$ i sformułowanie wniosku
21.	Podniesienie obu stron nierówności do kwadratu: $(a+b)(c+d)\geqslant ac+2\sqrt{abcd}+bd$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $ad-2\sqrt{abcd}+bc\geqslant 0$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\left(\sqrt{ad}-\sqrt{bc}\right)^2\geqslant 0$
	Zapisanie wniosku: Kwadrat dowolnego wyrażenia jest zawsze nieujemny.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
22.	Rozłożenie wyrażenia na czynniki liniowe: $(k-1)k(k+1)(k+2)$
	Zauważenie, że jest to iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych, więc wśród nich są liczby: podzielna przez 2, podzielna przez 3 i podzielna przez 4
	Sformułowanie odpowiedzi
23.	Zapisanie różnicy w postaci iloczynu $km(k-m)(k+m)=n$ oraz zauważenie, że liczba jest podzielna przez 6, jeśli jest podzielna przez 2 i przez 3
	Wykazanie, że liczba n jest podzielna przez 2: 1) jeżeli przynajmniej jedna z liczb k i m jest parzysta, to $2\|n$, 2) jeżeli obie liczby k i m są nieparzyste, to $(k-m)$ jest podzielne przez 2, czyli $2\|n$
	Wykazanie, że liczba n jest podzielna przez 3: 1) jeżeli któraś z liczb k, m jest podzielna przez 3, to $3\|n$, 2) jeżeli reszta z dzieleniu przez 3 jednej z liczb k, m jest równa 1, a a drugiej jest równa 2, to $3\|(k-m)$, 3) jeżeli przy dzieleniu przez 3 liczby k i m dają inne reszty (1 lub 2), to czynnik $(k+m)$ jest podzielny przez 3. Zapisanie odpowiedzi

2. Funkcje. Funkcja liniowa

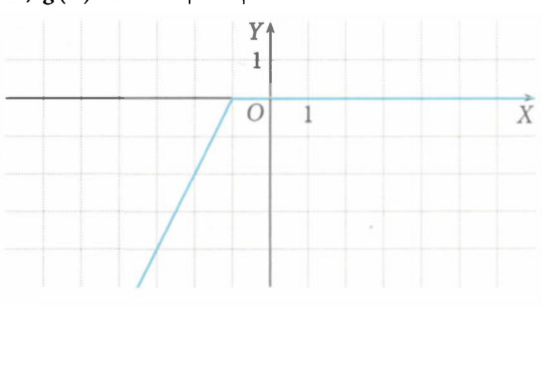
Zestaw A – odpowiedzi

1. $f(1-\sqrt{3}) = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}$, $f(2-\sqrt{3}) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$,
$f(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$

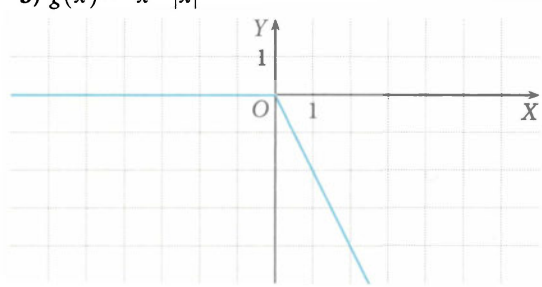
2. **a)** $\langle -1; 4\rangle$
b) $(1;\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};3) \cup (3;\infty)$
c) $(-\infty;0\rangle$
d) $(-4;-3) \cup (-3;3) \cup (3;6\rangle$

3. **a)** $D = \langle -1;3\rangle$, $x = -\frac{3}{5}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\sqrt{2}\}$, $x = 0$, $x = 4\sqrt{2}$

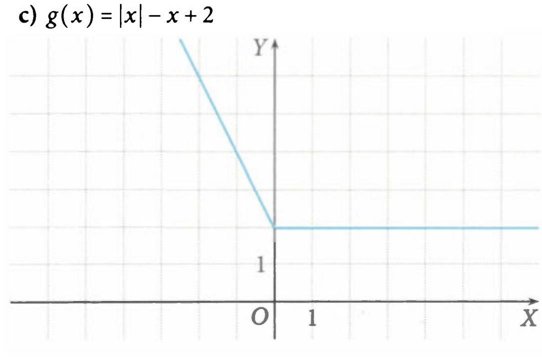
4. **a)** $g(x) = x + 1 - |x+1|$



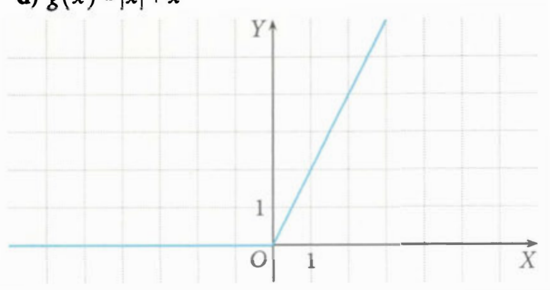
b) $g(x) = -x - |x|$



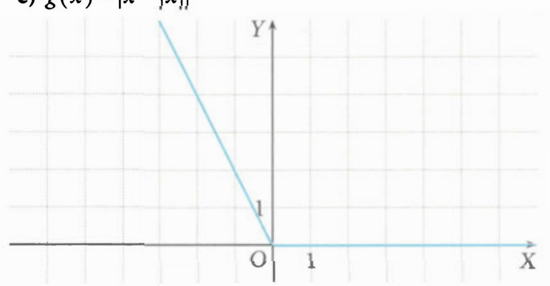
c) $g(x) = |x| - x + 2$



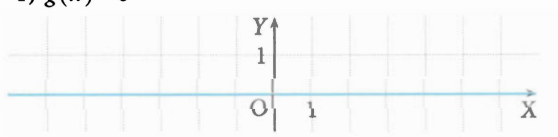
d) $g(x) = |x| + x$



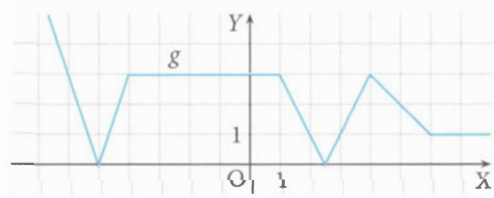
e) $g(x) = |x - |x||$

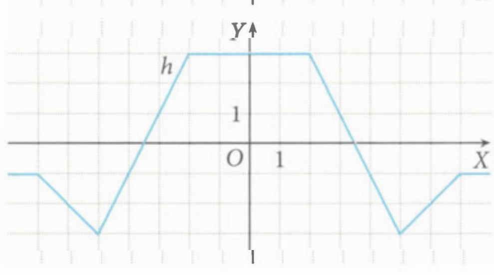


f) $g(x) = 0$

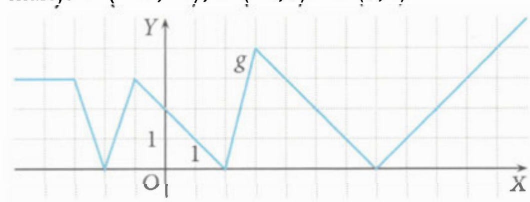


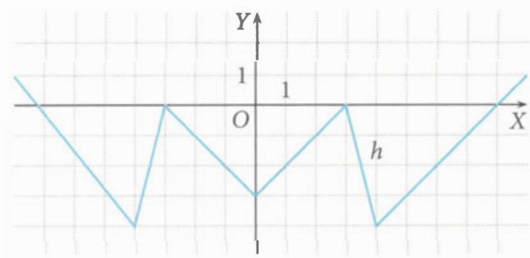
5. a) f rośnie w $\langle -4; -1 \rangle$,
maleje w $\langle -6; -4 \rangle$ i w $\langle 4; \infty)$,
jest stała w $(-\infty; -6\rangle$ i w $\langle -1; 4 \rangle$;
g rośnie w $\langle -5; -4 \rangle$ i w $\left\langle \frac{5}{2}; 4 \right\rangle$,
maleje w $(-\infty; -5\rangle$, w $\left\langle 1; \frac{5}{2} \right\rangle$ i w $\langle 4; 6 \rangle$,
jest stała w $\langle -4; 1 \rangle$ i w $\langle 6; \infty)$;
h rośnie w $\langle -5; -2 \rangle$ i w $\langle 5; 7 \rangle$,
maleje w $\langle -7; -5 \rangle$ i w $\langle 2; 5 \rangle$,
jest stała w $(-\infty; -7\rangle \cup \langle 7; \infty)$ i w $\langle -2; 2 \rangle$



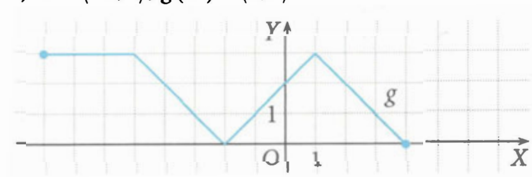


b) f rośnie w $\langle -3; -2 \rangle$ i w $\langle 1; 3 \rangle$,
maleje w $(-\infty; -3\rangle$ i w $\langle -2; 1 \rangle$,
jest stała w $\langle 3; \infty)$;
g rośnie w $\langle -2; -1 \rangle$, w $\langle 2; 3 \rangle$ i w $\langle 7; \infty)$,
maleje w $\langle -3; -2 \rangle$, w $\langle -1; 2 \rangle$ i w $\langle 3; 7 \rangle$,
jest stała w $(-\infty; -3\rangle$;
h rośnie w $\langle -4; -3 \rangle$, w $\langle 0; 3 \rangle$ i w $\langle 4; \infty)$,
maleje w $(-\infty; -4\rangle$, w $\langle -3; 0 \rangle$ i w $\langle 3; 4 \rangle$

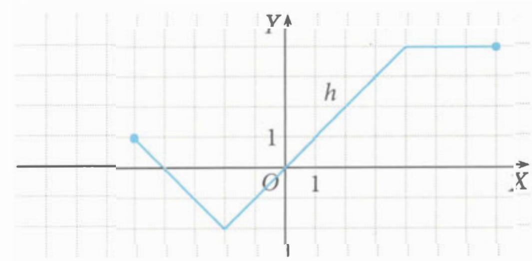




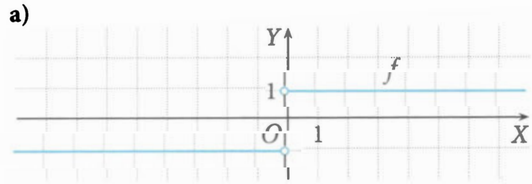
6. a) $D = \langle -8; 4 \rangle$, $g(D) = \langle 0; 3 \rangle$

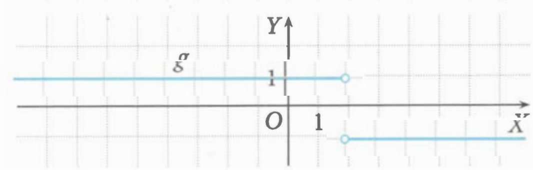


b) $D = \langle -5; 7 \rangle$

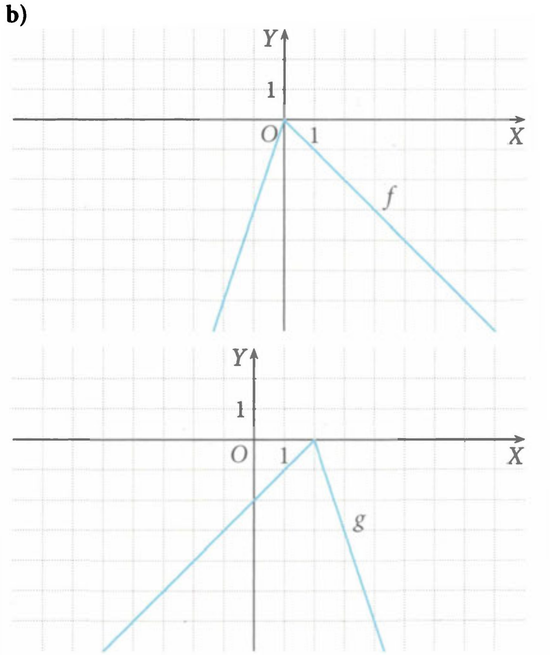


7. a)

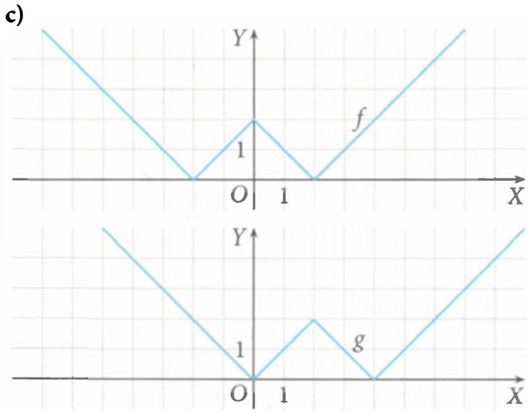




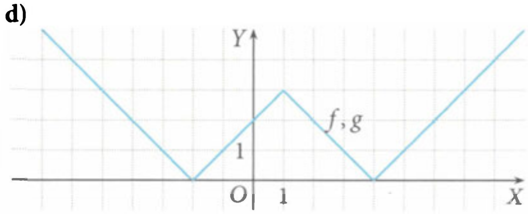
b)



c)



d)



8. **a)** $f(x) = 2x - 5$ **b)** $f(x) = -x + 8$

9. **a)** $y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$, $y = -4x + 12$

b) $y = x + 3$ i $y = 9x + 3$

lub $y = -x + 3$ i $y = -9x + 3$

10. **a)** $m \in \langle 3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6} \rangle$

b) $m \in (-3; -1\rangle \cup (3; \infty)$

11. **a)** 1 rozwiązanie dla $a \in \mathbf{R}$

b) 1 rozwiązanie dla $a \neq -3$,

nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = -3$

c) 1 rozwiązanie dla $a \neq 2$,

0 rozwiązań dla $a = 2$

d) 1 rozwiązanie dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$,

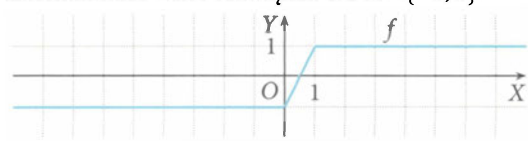
nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = -2$,

0 rozwiązań dla $a = 2$

12. **a)** 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,

1 rozwiązanie dla $m \in (-1; 1)$,

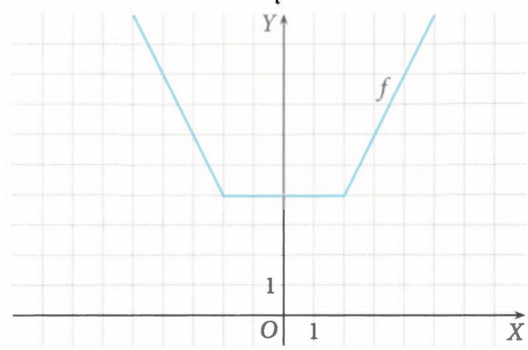
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \{-1, 1\}$



b) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 4)$,

2 rozwiązania dla $m \in (4; \infty)$,

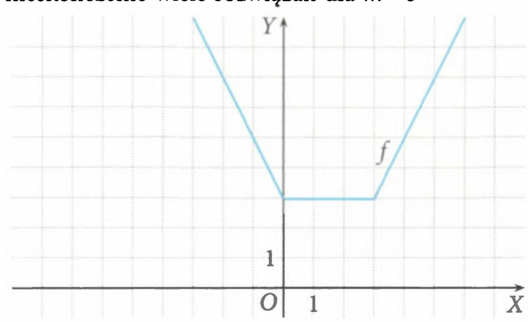
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 4$



c) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 3)$,

2 rozwiązania dla $m \in (3; \infty)$,

nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$

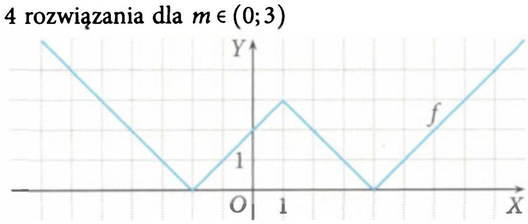


d) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,

2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (3; \infty)$,

3 rozwiązania dla $m = 3$,

4 rozwiązania dla $m \in (0; 3)$



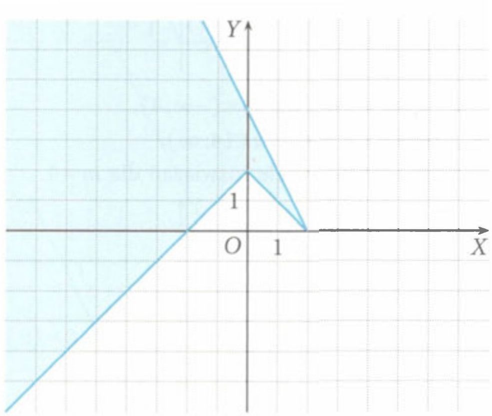
13. a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

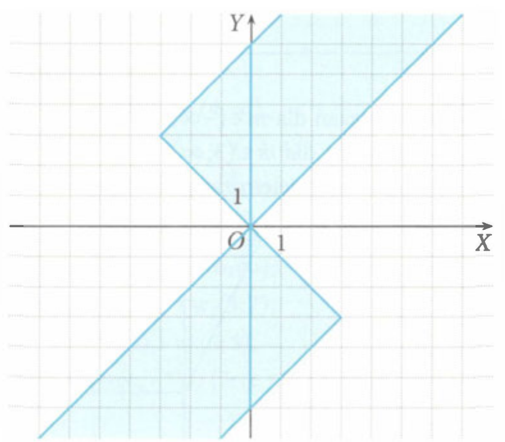
c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

14. a) 5 **b)** 0

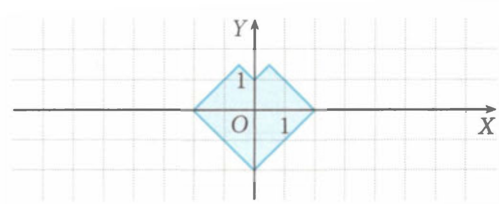
15. a)



b)



c)



Zestaw B – odpowiedzi

1. D **2.** A **3.** A **4.** D **5.** B **6.** A **7.** D

Zestaw C – odpowiedzi

1. 733 $\left(a = -\frac{24\sqrt{5}+50}{5}\right)$

2. 115 $\left(m_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{13}\right)\right)$

3. 133

4. 233 $\left(\frac{m}{n} = \frac{7}{3}\right)$

5. 656 $\left(|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2} - 2\right)$

6. 123 $\left(a = 1 - \sqrt{5}\right)$

Zestaw D – odpowiedzi

1. $m \in (-1; \infty)$

2. 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (1; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m = 1$,
4 rozwiązania dla $m \in (0; 1)$

3. $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 3; \infty)$

4. $m = -2$ lub $m = 1$

5. a) należy

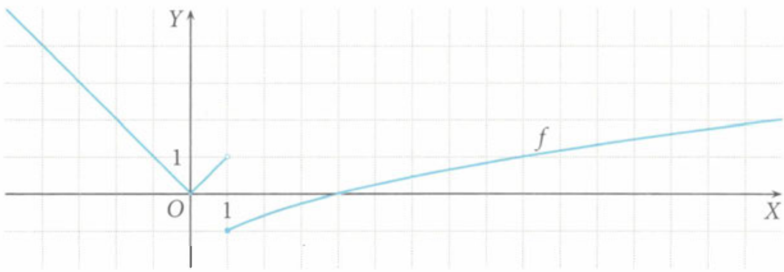
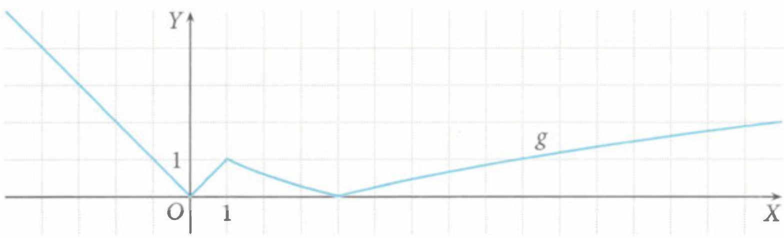
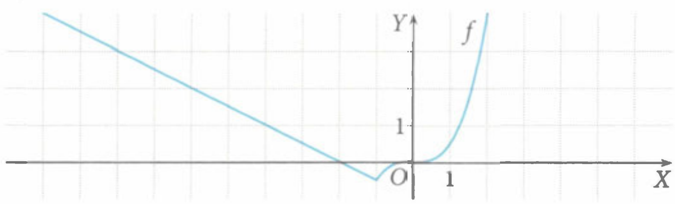
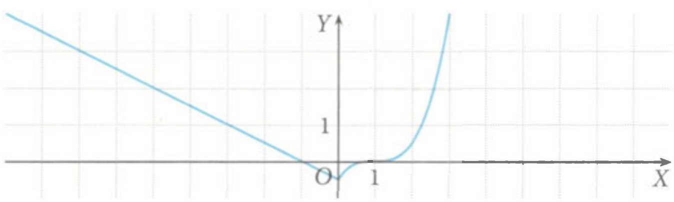
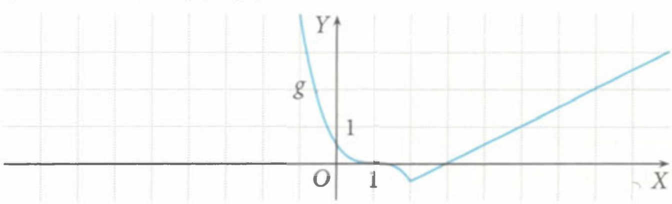
6. b) $x = -1$
c) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -6) \cup (6; \infty)$,
1 rozwiązanie dla $m \in (-6; 6)$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \{-6, 6\}$

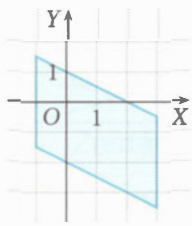
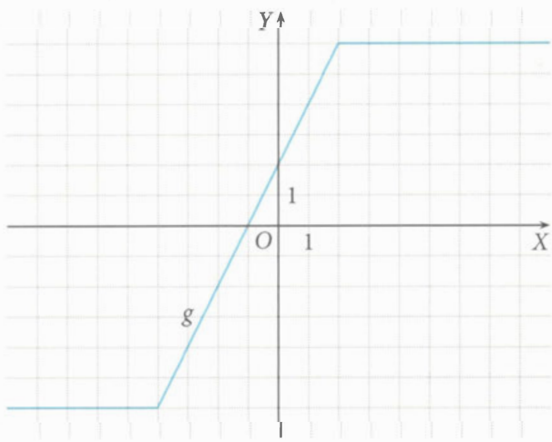
7. $m \in \langle -3; -1) \cup \langle 0; 2\rangle$

8. $a \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zauważenie, że równanie ma dwa rozwiązania dla $m > -2$
	Wyznaczenie rozwiązań równania: $x_1 = -(m + 1)$, $x_2 = m + 3$
	Zauważenie, że $x_2 > 0$ i podanie odpowiedzi: $m \in (-1; \infty)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
2.	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ 
	Podanie odpowiedzi: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (1; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 1$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 1)$
3.	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $y = f(x-1)$ 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = f(1-x)$ 
	Podanie odpowiedzi: $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 3; \infty)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4.	Wyznaczenie odciętej punktu przecięcia pierwszej prostej z osią OX: $x_1 = \frac{4}{m+1}$
	Wyznaczenie odciętej punktu przecięcia drugiej prostej z osią OX: $x_2 = 2m$
	Zapisanie równania: $\frac{4}{m+1} = 2m$
	Rozwiązanie równania: $m = -2$ lub $m = 1$
5. a)	Zauważenie, że $f(2009) = 2008 \cdot 2009 + 2009 = 2009^2$
	Zapisanie wniosku: Punkt P należy do wykresu funkcji f.
5. b)	Naszkicowanie w układzie współrzędnych prostych: $y = -\frac{1}{2}x - 2$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + 1$
	Zaznaczenie w układzie współrzędnych zbioru A 
6. a)	Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $g(x) = \begin{cases} -6 & \text{dla} \quad x \in (-\infty; -4) \\ 2x+2 & \text{dla} \quad x \in \langle -4; 2) \\ 6 & \text{dla} \quad x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji g 
6. b)	Wyznaczenie miejsca zerowego: $x = -1$
6. c)	Podanie odpowiedzi: 0 dla $m \in (-\infty; -6) \cup (6; \infty)$, 1 dla $m \in (-6; 6)$, nieskończenie wiele dla $m \in \{-6, 6\}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
7.	Wyznaczenie x: $x = \frac{m^2+1}{2m+1}$
	Wyznaczenie y: $y = \frac{2-m}{2m+1}$
	Zapisanie nierówności $\left\|\frac{m^2+m-1}{2m+1}\right\| \leqslant 1$ jako układu dwóch nierówności: $\frac{m^2+m-1}{2m+1} \leqslant 1$ i $\frac{m^2+m-1}{2m+1} \geqslant -1$
	Rozwiązanie nierówności $\frac{m^2+m-1}{2m+1} \leqslant 1$: $m \in (-\infty; -1\rangle \cup \left(-\frac{1}{2}; 2\right\rangle$
	Rozwiązanie nierówności $\frac{m^2+m-1}{2m+1} \geqslant -1$: $m \in \left\langle -3; -\frac{1}{2}\right) \cup \langle 0; \infty)$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \langle -3; -1) \cup \langle 0; 2\rangle$
8.	Rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ w celu wyznaczenia pierwszej współrzędnej punktu przecięcia: $x = \frac{7}{a+1}$
	Zauważenie, że z warunku $x > 0$ wynika, że $a + 1 > 0$, czyli $a > -1$
	Wyznaczenie drugiej współrzędnej punktu przecięcia: $y = f(x) = \frac{7}{a+1} - 2 = \frac{5-2a}{a+1}$
	Zauważenie, że z warunków $y > 0$ i $a + 1 > 0$ wynika, że $5 - 2a > 0$, czyli $a < \frac{5}{2}$
	Podanie odpowiedzi: Punkty przecięcia wykresów funkcji mają obie współrzędne dodatnie dla $a \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)$.

3. Funkcja kwadratowa

Zestaw A – odpowiedzi

1. a) $y = -x^2 - 4x + 5$ b) $y = x^2 - 4x - 5$
c) $y = -x^2 + 4x + 5$ d) $y = -x^2 - 4x - 5$

2. a) $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$ b) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ c) $[-1, -4]$

3. a) $h(x) = -(x-2)^2 + 12$
b) $h(x) = -(x-1)^2 - \frac{1}{2}$
c) $h(x) = -(x+6)^2 - 26$

4. a) $y = x^2 - 4x + 7$ b) $y = -2x^2 + 1$

5. wartość najmniejsza -8,
wartość największa 1

6. $m = -3{,}6$ lub $m = -2$

7. a) $m = -2$ b) $m = 2{,}4$ lub $m = 4$

8. a) $m \in \langle -2; -1\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$
b) $m \in (1; 4) \cup (4; \infty)$

9. 2 rozwiązania

10. $m \in (-10; -1) \cup (6; \infty)$

11. a) $m \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$
b) $m \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right)$

12. a) $b = 1$, $c = -2$
b) $b = -3$, $c = 2$
c) $b = -5$, $c = 6$ lub $b = 5$, $c = 6$
d) $b = -\frac{4}{3}$, $c = \frac{1}{3}$

13. $m \in (-\infty; -4)$

14. a) $m \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (6; \infty)$
b) $m \in (2; 4) \cup \left(4; 5\frac{1}{3}\right)$
c) $m = 0$ lub $m = 1$

15. $f(x) = x^2 - 4x - 12$

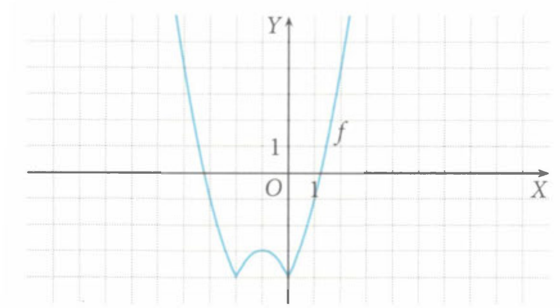
16. a) $m \in (-1; 11)$
b) $m \in \langle -3; \infty)$
c) $m \in \langle 0; 4\rangle$
d) $m \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

17. **a)** $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$
b) $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
c) $x \in \{-1, 2\}$
d) $x \in \{2, 3\}$
e) $x \in \{2, 4\}$
f) $x = 2$

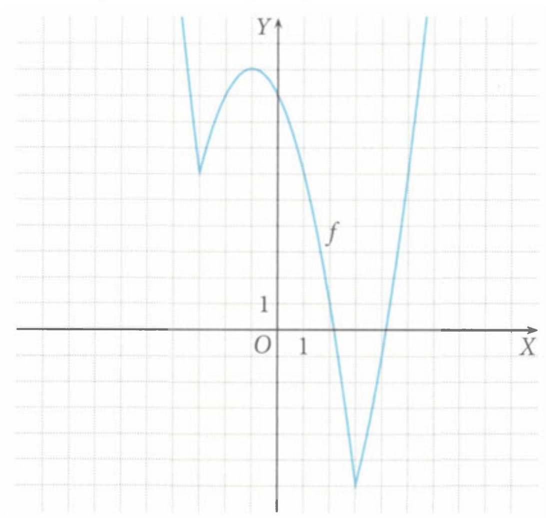
18. **a)** $x \in \{-2, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\}$
b) $x \in \{-1, 5\}$
c) $x \in \{-3, 3\}$
d) $x \in \{3, \sqrt{3} - 1\}$

19. **a)** $x \in (-\infty; -3) \cup (6; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 3; \infty)$
c) $x \in (-2; 0)$
d) $x \in (-\infty; -1)$

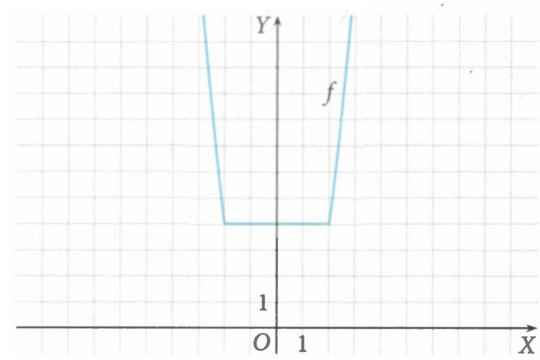
20. **a)** 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{-4\} \cup (-3; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m = -3$,
4 rozwiązania dla $m \in (-4; -3)$



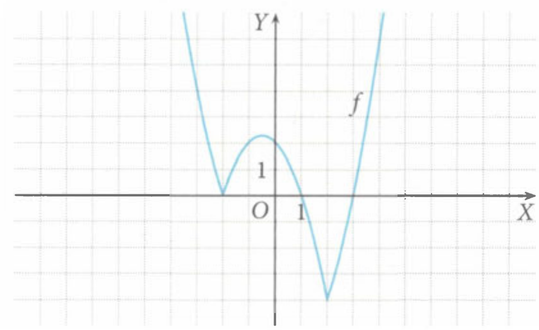
b) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -6)$,
1 rozwiązanie dla $m = -6$,
2 rozwiązania dla $m \in (-6; 6) \cup (10; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m \in \{6, 10\}$,
4 rozwiązania dla $m \in (6; 10)$



c) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 4)$,
2 rozwiązania dla $m \in (4; \infty)$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 4$



d) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4)$,
1 rozwiązanie dla $m = -4$,
2 rozwiązania dla $m \in (-4; 0) \cup \left(2\frac{1}{4}; \infty\right)$,
3 rozwiązania dla $m \in \left\{0, 2\frac{1}{4}\right\}$,
4 rozwiązania dla $m \in \left(0; 2\frac{1}{4}\right)$



Zestaw B – odpowiedzi

1. A **2.** A **3.** C **4.** A **5.** D **6.** D **7.** B **8.** D

Zestaw C – odpowiedzi

1. 812 ($pq = 2{,}8125$)
2. 267 $\left(x_1 = 2 - \sqrt{3}\right)$
3. 325 ($k = 3{,}25$)
4. 322 $\left(x_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{2}\right)$
5. 017 ($p = 17$)
6. 225 (42,25)
7. 316

Zestaw D – odpowiedzi

1. $x \in \langle -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2} \rangle$
2. $\frac{7}{39}$
3. $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$

4. 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in (0; \infty)$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 0$

5. $p = -3$

7. $m \in (-\infty; -3) \cup \langle 1; \infty)$

8. $m \in \langle 2; 6 \rangle$

9. $m \in (4; \infty)$

10. $m = 0$

11. $m = 3$

12. $f(n) = 4n - 1$, $n \in \mathbf{N}_+$

13. $f(n) = \frac{n+2}{n}$, $D = (-2; 0) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$

14. $m = 2$

15. $m \in \left(-3; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; 3\right)$

16. $m = \frac{12+\sqrt{109}}{5}$

17. $m \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
lub $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

18. $m = 1$ lub $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

19. $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$

20. $m = -3$

21. **a)** $x = -4$, $x = -3$, $x = -1$
b) $p \in (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty)$

22. $x \in (-\infty; -5\rangle \cup \langle 6; \infty)$

23. $m \in \left(-1; -\frac{2}{5}\right) \cup (2; 5\rangle$

24. $m = -4$

25. $m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$

26. $\left(\sqrt[3]{4}; 2\right) \cup (2; 4)$

27. $m \in \left(-\frac{13}{2}; -6\right) \cup \left(-6; -\frac{11}{2}\right)$

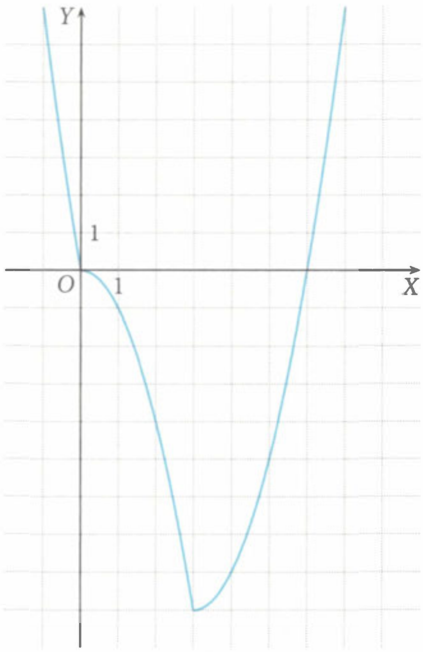
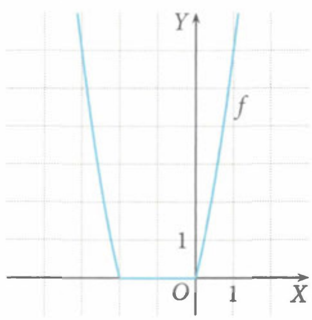
28. $m \in (-\infty; 2)$

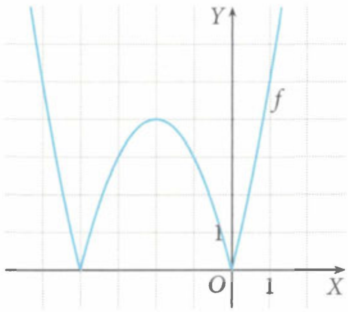
29. $m \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{5}; \frac{3}{4}\right)$

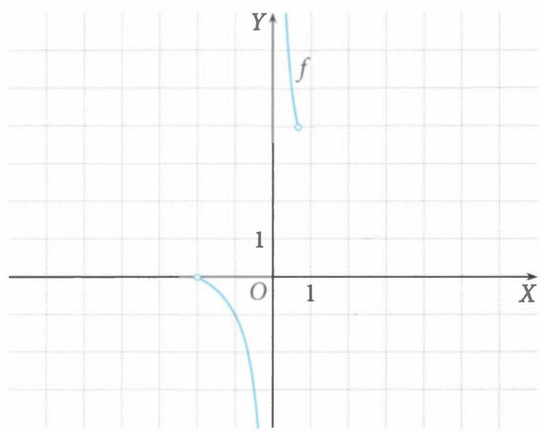
30. $m \in \left\langle \frac{5}{18}; \frac{1}{2} \right\rangle$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zauważenie, że jeśli $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; 5)$, to nierówność zachodzi dla $x \in \left\langle -2\sqrt{2}; 0\right) \cup \left\langle 1; 2\sqrt{2}\right\rangle$
	Zauważenie, że jeśli $x \in \langle 0; 1)$, to nierówność zachodzi dla $x \in \langle 0; 1)$
	Zauważenie, że jeśli $x \in \langle 5; \infty)$, to nierówność jest sprzeczna
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left\langle -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right\rangle$
2.	Zapisanie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej: $f(x) = a(x+1)(x-3)$, $a \neq 0$
	Obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{f(6)}{f(12)} = \frac{a \cdot 7 \cdot 3}{a \cdot 13 \cdot 9} = \frac{7}{39}$
3.	Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x) = \left\|x^2 - 3x\right\| - 3x$
	Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty) \\ -x^2 & \text{dla } x \in \langle 0; 3) \end{cases}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
3. cd.	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Podanie odpowiedzi: $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$
4.	Wprowadzenie funkcji $f(x) = x^2 + 2x + \lvert x^2 + 2x \rvert$ i zauważenie, że: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & \text{dla} \quad x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; \infty) \\ 0 & \text{dla} \quad x \in (-2; 0) \end{cases}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Podanie odpowiedzi: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in (0; \infty)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 0$
5.	Zapisanie wzoru funkcji: $f(x) = \lvert (x+2)^2 - 4 \rvert$ oraz wyznaczenie wierzchołka i miejsc zerowych paraboli $y = (x+2)^2 - 4$: $W(-2, -4)$, $x_1 = -4$, $x_2 = 0$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5. cd.	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Zauważenie, że dla $p=-2$ równanie $f(x)=4$ ma trzy rozwiązania, zatem równanie $f(x)=6$ ma trzy rozwiązania, gdy $-2p=6$
	Wyznaczenie wartości p: $p=-3$
6.	Zapisanie trójmianu kwadratowego: $20x^2-(24m+4)x+18m^2-12m+5$ oraz obliczenie jego wyróżnika: $\Delta=-96(3m-2)^2$
	Zauważenie, że wyróżnik trójmianu jest niedodatni dla każdego m
	Zapisanie wniosku: Trójmian ten ma dodatni współczynnik przy x^2 oraz niedodatni wyróżnik dla każdego m, zatem dla każdego x wartość tego trójmianu jest nieujemna.
7.	Zauważenie, że jeśli $m^2-1=0$, to funkcja f jest liniowa. Dla $m=-1$ otrzymujemy $f(x)=-4x+2$, więc $m=-1$ nie spełnia warunków zadania. Dla $m=1$ otrzymujemy $f(x)=2$, więc $m=1$ spełnia warunki zadania.
	Rozpatrzenie przypadku, gdy $m^2-1\neq 0$ – wówczas funkcja f jest kwadratowa. Przyjmuje ona wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy $m^2-1>0$ oraz $\Delta<0$
	Rozwiązanie nierówności $m^2-1>0$: $m\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta<0$: $m\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$
	Podanie odpowiedzi: $m\in(-\infty;-3)\cup\langle 1;\infty)$
8.	Rozpatrzenie przypadku, gdy $m-2=0$ – wówczas otrzymujemy nierówność $1\geqslant 0$, czyli $m=2$ spełnia warunki zadania
	Gdy $m-2\neq 0$, otrzymujemy nierówność kwadratową. Zachodzi ona dla każdej liczby $x\in\mathbf{R}$, gdy: $m-2>0$ oraz $\Delta\leqslant 0$
	Podanie rozwiązania nierówności $\Delta\leqslant 0$: $m\in\langle 2;6\rangle$
	Podanie odpowiedzi: $m\in\langle 2;6\rangle$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
9.	Zapisanie warunków: $a<0$, $\Delta<0$
	Zauważenie, że $a<0$ dla $m\in(3;\infty)$
	Zauważenie, że $\Delta<0$ dla $m\in(-\infty;0)\cup(4;\infty)$
	Podanie odpowiedzi: $m\in(4;\infty)$
10.	Zapisanie warunków: $\Delta>0$, $x_1^2+x_2^2=4(x_1+x_2)$
	Zauważenie, że $\Delta>0$ dla $m\in\mathbf{R}\setminus\{-4\}$
	Zapisanie warunku $x_1^2+x_2^2=4(x_1+x_2)$ za pomocą wzorów Viète'a: $\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}=-4\frac{b}{a}$
	Rozwiązanie równania $m^2-8m+16+8m=-4m+16$: $m=-4$ lub $m=0$
	Podanie odpowiedzi: $m=0$
11.	Zapisanie i rozwiązanie nierówności $\Delta>0$: $m\in(2;8)$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a i zapisanie równania: $x_1+x_2=-(m+2)$
	Zapisanie równania: $x_1x_2=\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+5$
	Zapisanie równania: $m+2=\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+5$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $m=3$
12.	Wyznaczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego: $\Delta=36n^2$
	Obliczenie pierwiastków trójmianu: $x=-2n$ lub $x=4n$
	Podanie wzoru funkcji: $f(n)=4n-1$, $n\in\mathbf{N}_+$
13.	Wykorzystanie wzorów Viète'a: $x_1+x_2=\frac{n+2}{n}$
	Zapisanie dziedziny funkcji f oraz jej wzoru: $D=(-2;0)\cup(0;\frac{2}{3})$, $f(n)=\frac{n+2}{n}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14.	Zapisanie warunków: $\Delta > 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$
	Zapisanie warunku $x_1^2 + x_2^2 = 4(x_1 + x_2)$ za pomocą wzorów Viète'a: $\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = 1$
	Rozwiązanie równania $m^2 - 2m + 1 - 2m + 4 = 1$: $m = 2$
15.	Zapisanie warunków: $\Delta > 0$, $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; \infty\right)$
	Zapisanie warunku $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$ za pomocą wzorów Viète'a: $\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} > 2m^2 - 13$
	Rozwiązanie nierówności $m^2 - 4 > 2m^2 - 13$: $m \in (-3; 3)$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left(-3; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; 3\right)$
16.	Zapisanie układu warunków: $\begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4 \end{cases}$ obliczenie $\Delta = 4m(2m - 7)$ i wyznaczenie wartości m spełniających pierwsze dwa warunki: $m \neq -1$ oraz $4m(2m - 7) > 0$, stąd $m \in D = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{7}{2}; \infty\right) \setminus \{-1\}$
	Przekształcenie warunku $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$ dla $x_1 \neq x_2$ do postaci: $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$
	Rozważenie przypadku $x_1 + x_2 = 0$ – skorzystanie ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = -2\frac{m-2}{m+1} = 0$ i obliczenie m: $m = 2 \notin D$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a do warunku $x_1^2 + x_2^2 = 1$: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{6m^2 - 22m + 8}{(m+1)^2} = 1$, stąd $5m^2 - 24m + 7 = 0$ i obliczenie m: $\Delta = 4 \cdot 109$, $m_1 = \frac{12 - \sqrt{109}}{5}$, $m_2 = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$
	Sprawdzenie, że $m_1 \notin D$ i $m_2 \in D$ oraz podanie odpowiedzi: $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$
17.	Zapisanie warunków: $\Delta \geqslant 0$, $x_1 = x_2^3$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta \geqslant 0$: $m \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{4}{3}; \infty\right)$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a: $x_2 + x_2^3 = \frac{3m^3}{8}$ oraz $x_2 \cdot x_2^3 = \frac{m^4}{16}$ i rozwiązanie drugiego równania: $x_2 = \pm\frac{m}{2}$
	Zauważenie, że równanie $-\frac{m^3}{8} - \frac{m}{2} = \frac{3m^3}{8}$ nie ma rozwiązania w przedziale: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{4}{3}; \infty\right)$
	Rozwiązanie równania $\frac{m^3}{8} + \frac{m}{2} = \frac{3m^3}{8}$: $m = -\sqrt{2}$ lub $m = \sqrt{2}$
	Wyznaczenie rozwiązań wyjściowego równania: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i podanie odpowiedzi: $m \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
18.	Zapisanie warunków: $m > 0,\ y_w = 1$
	Wyznaczenie Δ: $\Delta = m^3 - 3m + 1$
	Wyznaczenie y_w: $y_w = \frac{-m^3+3m-1}{m}$
	Rozwiązanie równania $\frac{-m^3+3m-1}{m} = 1$: $m = 1$ lub $m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ lub $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
	Podanie odpowiedzi: $m = 1$ lub $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
19.	Zapisanie warunków: $\Delta \geqslant 0,\ x_1x_2 < 0$ lub $(x_1x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0)$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta \geqslant 0$: $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right\rangle \cup \langle 0; \infty)$
	Rozwiązanie nierówności $x_1x_2 < 0$: $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$
	Zauważenie, że układ nierówności $x_1x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ jest sprzeczny
	Podanie odpowiedzi: $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$
20.	Zapisanie warunków: $\Delta > 0,\ x_1x_2 > 0,\ x_1 + x_2 < 0$ i $\lvert x_1 - x_2 \rvert = 4\sqrt{2}$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
	Rozwiązanie nierówności $x_1x_2 > 0$: $m \in \left(-1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}\right)$
	Rozwiązanie nierówności $x_1 + x_2 < 0$: $m \in (-\infty; 0)$
	Zapisanie warunku $\lvert x_1 - x_2 \rvert = 4\sqrt{2}$ w postaci: $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 32$ oraz skorzystanie ze wzorów Viète'a: $\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = 32$
	Rozwiązanie równania $8m^2 + 8m - 48 = 0$: $m = -3$ lub $m = 2$ i podanie odpowiedzi: $m = -3$
21. a)	Zauważenie, że liczba -3 jest rozwiązaniem równania: $(x+3)(x^2+5x+4) = 0$
	Rozwiązanie równania kwadratowego $x^2 + 5x + 4 = 0$: $x = -1,\ x = -4$
21. b)	Zauważenie, że trójmian $w(x) = x^2 + (p+4)x + (p+1)^2$ nie ma rozwiązań dla $p \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
	Zauważenie, że trójmian w ma tylko jeden pierwiastek równy -3, gdy $\Delta = 0$ i $\frac{-b}{2a} = -3$
	Rozwiązanie układu równań: $p = 2$
	Podanie odpowiedzi: $p \in (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty)$
22.	Zapisanie nierówności w postaci: $\lvert x+2 \rvert + \lvert x-3 \rvert \geqslant 11$
	Rozważenie przypadku $x < -2$: $-x - 2 - x + 3 \geqslant 11$, czyli $x \leqslant -5$
	Rozważenie przypadku $-2 \leqslant x < 3$: $x + 2 - x + 3 \geqslant 11$ – sprzeczność
	Rozważenie przypadku $x \geqslant 3$: $x + 2 + x - 3 \geqslant 11$, czyli $x \geqslant 6$
	Podanie odpowiedzi: $x \in (-\infty; -5\rangle \cup \langle 6; \infty)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
23.	Zapisanie warunku: $m \neq -1$ oraz obliczenie $\Delta = (3m)^2 - (2m+2)^2 = (m-2)(5m+2)$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup (2; \infty)$
	Skorzystanie ze wzoru Viète'a i zapisanie warunku: $x_1 + x_2 = \frac{3m}{m+1} \leqslant \frac{5}{2}$
	Przekształcenie nierówności do postaci $(m-5)(m+1) \leqslant 0$ i podanie rozwiązania: $m \in (-1; 5\rangle$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left(-1; -\frac{2}{5}\right) \cup (2; 5\rangle$
24.	Zapisanie założenia: $m \neq 5$ i zauważenie, że dla $m \in \{-3, 2\}$ funkcja jest liniowa, więc nie spełnia warunków zadania
	Zauważenie, że funkcja przyjmuje wartość największą, gdy $\frac{(m-2)(m+3)}{m-5} < 0$
	Rozwiązanie nierówności: $m \in (-\infty; -3) \cup (-2; 5)$
	Zapisanie nierówności $\Delta > 0$: $(m-2)^2 - 4(m-2)(m+3) = (m-2)(-3m+14) > 0$ i podanie rozwiązania: $m \in \left(-\frac{14}{3}; 2\right)$
	Zauważenie, że x_1, x_2 mają ten sam znak, gdy $x_1 x_2 > 0$, czyli $(m-5)^2(m-2)(m+3) > 0$, i rozwiązanie tej nierówności: $m \in (-\infty; -3) \cup (2, 5) \cup (5; \infty)$
	Podanie odpowiedzi: Jedyną liczbą całkowitą spełniającą powyższe warunki jest $m = -4$.
25.	Wyznaczenie wartości parametru m, dla których $\Delta > 0$: $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$
	Podniesienie obu stron nierówności $\lvert x_1 - x_2 \rvert < 3$ do kwadratu: $(x_1 - x_2)^2 < 9$ oraz przekształcenie jej do postaci: $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 < 9$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a i zapisanie nierówności w postaci: $4(m+1)^2 - 4 \cdot (6m+1) - 9 < 0$
	Rozwiązanie nierówności: $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$
	Wyznaczenie wartości parametru m, dla których trójmian f ma pierwiastki tego samego znaku: $x_1 x_2 > 0$ dla $m > -\frac{1}{6}$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$
26.	Wyznaczenie wartości parametru k, dla których równanie ma dwa różne pierwiastki ($k \neq 0$ i $\Delta > 0$): $k \in (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$ i zauważenie, że żaden z pierwiastków nie może być równy 0
	Wyznaczenie sumy odwrotności pierwiastków: $m = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -k + 1$
	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(x) = 2^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$, gdzie $k \in (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$
	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji f: $\left(\sqrt[3]{4}; 2\right) \cup (2; 4)$
27.	Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \neq -6$
	Zapisanie nierówności $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$ w postaci: $16\left((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2\right) - 1 < 0$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a i zapisanie nierówności: $16\left(\frac{36m^2}{16} - 2m^2 + 3m + 9\right) - 1 < 0$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
27. cd.	Przekształcenie nierówności do postaci: $4m^2+48m+143<0$ i rozwiązanie jej: $m\in\left(-\frac{13}{2};-\frac{11}{2}\right)$
	Podanie odpowiedzi: $m\in\left(-\frac{13}{2};-6\right)\cup\left(-6;-\frac{11}{2}\right)$
28.	Rozwiązanie nierówności $\Delta>0$: $m\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$
	Zapisanie warunku: $x_1-3<0$ i $x_2-3<0$ w postaci układu nierówności: $\begin{cases}x_1+x_2-6<0\\(x_1-3)(x_2-3)>0\end{cases}$
	Przekształcenie układu nierówności do postaci: $\begin{cases}x_1+x_2-6<0\\x_1x_2-3(x_1+x_2)+9>0\end{cases}$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a i przekształcenie układu nierówności do postaci: $\begin{cases}3m-6<0\\2m^2-9m+10>0\end{cases}$
	Rozwiązanie układu nierówności: $m\in(-\infty;2)$
	Podanie odpowiedzi: $m\in(-\infty;2)$
29.	Rozwiązanie nierówności $\Delta>0$: $m\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{5};\infty\right)$
	Zapisanie nierówności $x_1^3+x_2^3>-7x_1x_2$ w postaci: $(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)>-7x_1x_2$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a: $-(m+1)\left((m+1)^2-3(1-m^2)\right)>-7(1-m^2)$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(m+1)(m+3)\left(m-\frac{3}{4}\right)<0$
	Rozwiązanie nierówności: $m\in(-\infty;-3)\cup\left(-1;\frac{3}{4}\right)$
	Podanie odpowiedzi: $m\in(-\infty;-3)\cup\left(\frac{3}{5};\frac{3}{4}\right)$
30.	Zapisanie i rozwiązanie nierówności $\Delta>0$: $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{13}{2};\infty\right)$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a: $x_1+x_2=-2m+5$, $x_1x_2=2m+3$, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4m^2-24m+13$
	Zapisanie nierówności $(x_1+x_2)^2\geqslant x_1^2\cdot x_2^2$ w postaci: $(-2m+5)^2\geqslant(2m+3)^2$ i rozwiązanie jej: $m\leqslant\frac{1}{2}$
	Zapisanie nierówności $x_1^2\cdot x_2^2\geqslant x_1^2+x_2^2$ w postaci: $(2m+3)^2\geqslant 4m^2-24m+13$ i rozwiązanie jej: $m\geqslant\frac{5}{18}$
	Podanie odpowiedzi: $m\in\left\langle\frac{5}{18};\frac{1}{2}\right\rangle$

4. Wielomiany

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $x = 1$
   b) $x \in \{-2, 2\}$
   c) $x \in \{-\sqrt{2}, \frac{1}{4}, \sqrt{2}\}$
   d) $x = -\frac{1}{2}$
   e) $x = \frac{2}{3}$
   f) $x \in \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$
2. **a)** $x \in (-2; \infty)$
   b) $x \in (-\infty; 2\rangle$
   c) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\frac{1}{2}; \sqrt{5})$
   d) $x \in (-\infty; \frac{1}{3}\rangle$
   e) $x \in (-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$
   f) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 2; \infty)$
3. **a)** $x \in \{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$
   b) $x \in \{-1, 1\}$
   c) równanie sprzeczne
4. **a)** $x \in (-\infty; 1\rangle$
   b) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$
   c) $x \in \langle -\frac{4\sqrt{7}}{7}; -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1; \frac{4\sqrt{7}}{7}\rangle$
5. **a)** $m \in \{1, 2, 3\}$
   b) $m \in (-\infty; -2)$
6. $A \cap B = (-2; -\frac{3}{2}\rangle \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$,
   $A \setminus B = (-\infty; -2\rangle \cup \{-1, 0, 1\}$
7. $a = -1$, $b = 0$
8. **a)** $p = -2$ lub $p = 1$
   b) $p = -1$ lub $p = 2$
9. **a)** $w(x) = (x^2 - x - \frac{1}{2})(2x - 1) + 4\frac{1}{2}$
   b) $w(x) = (3x^2 + x + 7)(x^2 - 1) - x + 6$
   c) $w(x) = (2x^2 + x - 5)(2x^2 + 2) - 4x + 6$
10. $w(x) = -3(x - 2)^3$
11. **a)** $p = -4\frac{3}{8}$
    b) $p = 0$
12. $p = -2$, $x \in \{-1, 1, 2\}$
13. **a)** $p = 0$, $q = -7$, $x = 2$
    b) $w(x) = 2(x + 3)(x + 2)(x - 1)(x - 2)$
14. $r(x) = -x + 5$
15. **a)** $r(x) = 2x + 8$
    b) $r(x) = 2x^2 + x$
16. $p = 4$, $x = -1$
17. **a)** $p = -3$, $q = 0$
    b) $p = 1$, $q = -9$, $r = 11$
18. $a = -6$, $b = 0$
19. $n = -1$, $m = -3$ lub $n = \frac{3}{2}$, $m = 2$
20. $p = -3$

Zestaw B – odpowiedzi

1. A **2.** B **3.** A **4.** D **5.** C **6.** D **7.** D **8.** B **9.** D

Zestaw C – odpowiedzi

1. 366 $\left(\frac{x_2}{x_3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$
2. 928 $\left(\frac{13}{14}\right)$
3. 125 $(a = 0{,}125)$
4. 296
5. 428 $(2a - b = -428)$
6. 245 $(S = 1245)$
7. 084 $(n = 84)$

Zestaw D – odpowiedzi

1. $x \in \langle 3; \infty)$
2. $m = 4$, $x = -2$, $x = -\frac{1}{3}$
3. $m \in \{-\frac{1}{2}, 2, 3\}$
4. $m = 6$, $n = -8$
5. $m \in (0; \frac{1}{15})$
6. 10
8. $p \in (1; 9)$
11. $w(x) = x^3 - 5x + 4$, $x \in \langle -2; 1\rangle \cup \langle 2; \infty)$
13. $m \in \{-1, 3 - \sqrt{10}, 3 + \sqrt{10}\}$
14. $m = 2$
15. $a = -12$, $b = 39$, $c = -28$; $a = -3$, $b = -6$, $c = 8$;
    $a = 6$, $b = 3$, $c = -10$
18. $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$
19. $m = -3$ lub $m = 3$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zapisanie nierówności: $x^3+x^2+x \geqslant 3x^2+3x+3$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(x^2+x+1)(x-3) \geqslant 0$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \langle 3; \infty)$
2.	Obliczenie m: $m=4$
	Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=(x^2-4)(3x+1)$
	Podanie odpowiedzi: $m=4$, pozostałe pierwiastki: -2, $-\frac{1}{3}$
3.	Zapisanie równania: $2m^3-9m^2+7m+6=0$
	Zauważenie, że liczba 2 jest pierwiastkiem równania
	Zapisanie równania w postaci: $(m-2)(2m^2-5m-3)=0$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \{-\frac{1}{2}, 2, 3\}$
4.	Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=(x-2)^3(x-r)$, gdzie r jest drugim pierwiastkiem wielomianu
	Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=x^4-x^3(r+6)+x^2(6r+12)-x(12r+8)+8r$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} r+6=5 \\ 6r+12=m \\ 12r+8=-4 \\ 8r=n \end{cases}$
	Podanie odpowiedzi: $m=6$, $n=-8$
5.	Zastosowanie podstawienia $x^2=t>0$ oraz zapisanie równania w postaci: $(m+1)t^2-(m+1)t+4m=0$
	Zapisanie układu nierówności: $\begin{cases} \Delta>0 \\ t_1 \cdot t_2>0 \\ t_1+t_2>0 \\ m \neq -1 \end{cases}$
	Zauważenie, że $\Delta>0$ dla $m \in \left(-1; \frac{1}{15}\right)$
	Zauważenie, że $t_1 \cdot t_2>0$ dla $m \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
	Zauważenie, że $t_1+t_2>0$ dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left(0; \frac{1}{15}\right)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6.	Zauważenie, że $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu w
	Wyznaczenie pozostałych pierwiastków wielomianu: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$
	Wyznaczenie sumy kwadratów pierwiastków: 10
7.	Przedstawienie wielomianu w w postaci: $w(x) = x[px^2 + x(p-2) - 1 - 2p]$ i zauważenie, że jednym z pierwiastków wielomianu jest $x = 0$
	Zauważenie, że dla $p \neq 0$ w nawiasie mamy trójmian kwadratowy, a dla $p \neq \frac{1}{2}$ trójmian ten nie ma pierwiastka równego zero
	Wyznaczenie wyróżnika trójmianu $px^2 + x(p-2) - 1 - 2p$: $\Delta = 9p^2 + 4$
	Zauważenie, że wyróżnik jest dodatni dla dowolnego p, zatem trójmian ten ma dwa różne pierwiastki
	Podanie odpowiedzi: Dla $p \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ wielomian w ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.
8.	Przedstawienie wielomianu w w postaci: $w(x) = x[x^2 + x(p+3) + 4p]$ i zauważenie, że jednym z pierwiastków wielomianu jest $x = 0$
	Zauważenie, że nie istnieje wartość p, dla której trójmian $x^2 + x(p+3) + 4p$ ma podwójny pierwiastek $x = 0$ i wyznaczenie wyróżnika trójmianu $x^2 + x(p+3) + 4p$: $\Delta = p^2 - 10p + 9$
	Zauważenie, że wielomian w ma dokładnie jeden pierwiastek $x = 0$, gdy $\Delta < 0$, czyli dla $p \in (1; 9)$
9.	Wyznaczenie wartości $w(a+b) = (a+b)^3 - (a-b)(a+b)^2 - 2b(a+b)^2$
	Zapisanie $w(a+b)$ w postaci: $w(a+b) = (a+b)^2(a+b-a+b-2b)$
	Zauważenie, że $w(a+b) = (a+b)^2 \cdot 0 = 0$
	Zapisanie wniosku: $x = a + b$ jest pierwiastkiem wielomianu w, zatem wielomian ten jest podzielny przez dwumian $q(x) = x - a - b$.
10.	Zapisanie wzoru wielomianu w: $w(x) = (x+1)(x+2)(x+3)q(x)$
	Zauważenie, że dla dowolnej liczby naturalnej n: $$w(n) = (n+1)(n+2)(n+3)q(n)$$ jest iloczynem, którego czynnikami są trzy kolejne liczby naturalne
	Zauważenie, że wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb naturalnych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3
	Zapisanie wniosku: Liczba $w(n)$ jest podzielna przez 2 i przez 3, zatem jest podzielna przez 6.

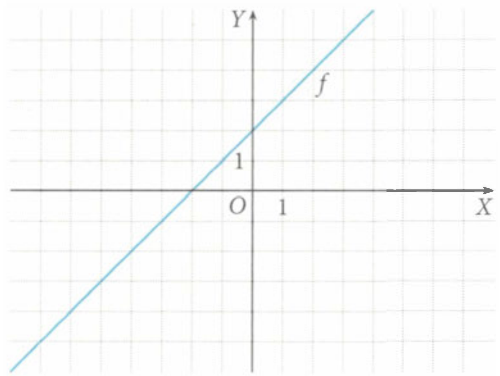
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11.	Zapisanie równania: $1+m+n+4=0$
	Zapisanie równania: $-1+m-n+4=8$
	Obliczenie m i n: $m=0$, $n=-5$
	Zapisanie nierówności: $x^3-x^2-4x+4\geqslant 0$
	Obliczenie pierwiastków równania $x^3-x^2-4x+4=0$: $x\in\{-2,1,2\}$
	Podanie odpowiedzi: $x\in\langle -2;1\rangle\cup\langle 2;\infty)$
12.	Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=(2x+1)(x^2-3)$
	Wyznaczenie pierwiastków wielomianu: $x\in\left\{-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right\}$
	Obliczenie x_1: $x_1=-\sqrt{3}$
	Obliczenie x_2: $x_2=-\frac{1}{2}$
	Obliczenie x_3: $x_3=\sqrt{3}$
13.	Zapisanie równania: $m^3-5m^2-7m-1=0$
	Zauważenie, że liczba -1 jest pierwiastkiem równania
	Zapisanie równania w postaci: $(m+1)(m^2-6m-1)=0$
	Podanie odpowiedzi: $m\in\left\{-1,3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}\right\}$
14.	Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=x(x^6-3mx^3+2m^2-4)$ i zauważenie, że jednym z pierwiastków wielomianu w jest liczba 0 oraz że wielomian $$u(x)=x^6-3mx^3+2m^2-4$$ musi mieć dwa pierwiastki
	Zastosowanie podstawienia $x^3=t$ oraz zapisanie wielomianu u w postaci: $$u(t)=t^2-3mt+2m^2-4$$
	Zapisanie warunków: $\Delta>0$, $t_1+t_2=6$
	Zauważenie, że $\Delta>0$ dla $m\in\mathbf{R}$
	Zauważenie, że $t_1+t_2=6$ dla $m=2$
15.	Zapisanie warunku $1+a+b+c=0$ i zauważenie, że jest on równoważny warunkowi $w(1)=0$, czyli $x=1$ jest pierwiastkiem wielomianu w
	Zapisanie trójmianu kwadratowego w postaci iloczynowej: $w(x)=(x-1)(x-x_1)(x-x_2)$
	Rozważenie przypadku: pierwiastkami są liczby 1, 4, 7 $$w(x)=(x-1)(x-4)(x-7)=x^3-12x^2+39x-28$$ Wówczas $a=-12$, $b=39$, $c=-28$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15. cd.	Rozważenie przypadku: pierwiastkami są liczby -2, 1, 4 $$w(x)=(x+2)(x-1)(x-4)=x^3-3x^2-6x+8$$ Wówczas $a=-3$, $b=-6$, $c=8$
	Rozważenie przypadku: pierwiastkami są liczby -5, -2, 1 $$w(x)=(x+5)(x+2)(x-1)=x^3+6x^2+3x-10$$ Wówczas $a=6$, $b=3$, $c=-10$
	Podanie odpowiedzi
16.	Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-5)$
	Obliczenie wartości wielomianu dla liczby nieparzystej $2n+1$: $w(2n+1)=4n(n-1)(n-2)$
	Zauważenie, że wśród trzech kolejnych liczb całkowitych znajdują się: liczba podzielna przez 2 oraz liczba podzielna przez 3, czyli $6\mid n(n-1)(n-2)$
	Sformułowanie wniosku: $24\mid w(2n+1)$
17.	Zapisanie wzoru wielomianu w postaci iloczynowej: $f(x)=a(x+6)(x+5)(x+3)$
	Obliczenie a: $a=1$ oraz zapisanie wzoru funkcji f: $f(x)=(x+6)(x+5)(x+3)$
	Zapisanie wzoru funkcji f w postaci: $f(x)=x^3+14x^2+63x+90$
	Wykazanie, że $-f(-x)=g(x)$ dla $x\in\mathbf{R}$
18.	Zapisanie wzoru wielomianu q w postaci iloczynowej: $q(x)=(x-1)(x+2)(x+3)$
	Zapisanie równania: $a-4b+2c+13=0$
	Zapisanie równania: $16a-4b-4c-20=0$
	Zapisanie równania: $81a-6c-231=0$
	Obliczenie a: $a=3$
	Obliczenie b i c: $b=5$, $c=2$
19.	Zauważenie, że liczba 2 jest pierwiastkiem równania
	Zapisanie równania w postaci: $(x-2)(-x^2-m^2x+4)=0$
	Zauważenie, że wielomian $u(x)=-x^2-m^2x+4$ ma dwa pierwiastki różne od 2 dla $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$
	Zauważenie, że $2+x_1+x_2=2-m^2$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami wielomianu u
	Podanie odpowiedzi: $m=-3$ lub $m=3$

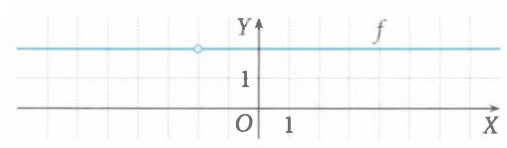
5. Funkcje wymierne

Zestaw A – odpowiedzi

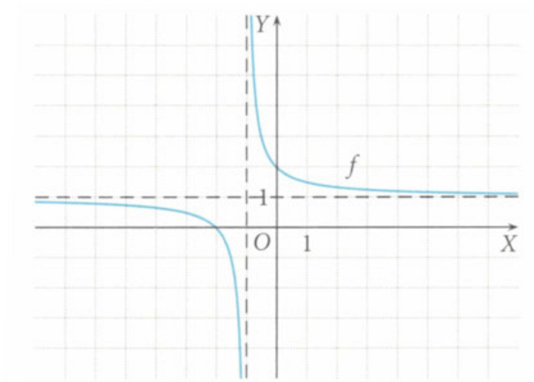
1. a) $D = \mathbf{R}$



b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$



c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$



2. a) liniowa dla $m \in \{0, 6\}$, homograficzna dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{0, 6\}$
b) liniowa dla $m = -2$, homograficzna dla $m \neq -2$
c) liniowa dla $m = -6$, homograficzna dla $m \neq -6$

3. a) $a = 4$, $p = -1$, $q = 3$, maleje w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$, $f(x) = \frac{3x+7}{x+1}$, $f\left(-\frac{7}{3}\right) = 0$
b) $a = -3$, $p = 2$, $q = -2$, rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$, $f(x) = \frac{-2x+1}{x-2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

4. a) $g(x) = \frac{2x}{x-1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $g(x) \in (0; 2)$ dla $x \in (-\infty; 0)$
b) $g(x) = \frac{-2x+4}{x}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $g(x) \in (0; 2)$ dla $x \in (1; 2)$
c) $g(x) = \frac{-x}{x-3}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $g(x) \in (0; 2)$ dla $x \in (0; 2)$
d) $g(x) = \frac{2x+4}{x+3}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $g(x) \in (0; 2)$ dla $x \in (-2; \infty)$

5. a) $[-2, 2]$, g maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$
b) $[1, -3]$, g rośnie w $(-\infty; 1)$ i w $(1; \infty)$
c) $[2, 6]$, g maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
d) $\left[-\frac{1}{3}, -2\right]$, g maleje w $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ i w $\left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$

6. a) każda funkcja postaci $f(x) = \frac{a}{x-1} + 2$, gdzie $a \neq 5$
b) każda funkcja postaci $f(x) = \frac{a}{x+3} - 2$, gdzie $a \neq 14$
c) każda funkcja postaci $f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{1}{2}$, gdzie $a \neq 3\frac{1}{2}$
d) każda funkcja postaci $f(x) = \frac{a}{2x-1} - \frac{1}{2}$, gdzie $a \neq -\frac{1}{2}$

7. a) $y = 1$, $x = 2$, $g(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$, $f(x) = g(x)$ dla $x = 0$
b) $y = 2$, $x = -3$, $g(x) = \frac{2x+11}{x+3}$, $f(x) = g(x)$ dla $x = 0$
c) $y = -3$, $x = 0$, $g(x) = \frac{-3x-2}{x}$, $f(x) = g(x)$ nie ma rozwiązań
d) nie ma asymptot, $g(x) = \frac{4x+6}{6x+9} = \frac{2}{3}$, $f(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

8. a) $g(x) = \frac{-4}{x+2} + 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$
b) $g(x) = \frac{-4}{x+2} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$
c) $g(x) = \frac{-4}{x+2} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$
d) $g(x) = \frac{4}{x+2} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$

9. a) $a = 4$ **b)** $\left(\frac{71}{12}, 0\right)$

10. a) $y = f(x) = \frac{6}{x+1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(5, 1)$, $(-2, -6)$, $(-3, -3)$, $(-4, -2)$, $(-7, -1)$
b) $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$; $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(-3, 3)$, $(-4, 2)$
c) $y = f(x) = \frac{1}{x+4} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$; $(-3, -2)$, $(-5, -4)$
d) $y = f(x) = 2 - \frac{4}{x-2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$; $(6, 1)$, $(4, 0)$, $(3, -2)$, $(-2, 3)$, $(1, 6)$, $(0, 4)$

11. $y = f(x) = \frac{x-a}{(a+1)x+1}$, $a \neq -1$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ dla $a = 0$

12. a) 3 b) 2

13. a) $m \leqslant 0$ b) $m < -\frac{1}{8}$ c) $m > 1$ d) $m \in \langle 0;4)$

14. a) $m = 0$ b) $m < 0$ c) $m \in (-2;2)$

15. a) $m = -3$ b) $m = 1$ c) $m = -12$

16. $m \in \left(-\frac{2}{3};0\right)$

17. $m \in (-\infty;-4) \cup \left(-\frac{1}{2};0\right)$

18. $m = -2$

19. a) $x \in \left\{\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$ b) $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
c) $x = \frac{9}{4}$ d) $x \in \{1,5\}$

20. a) $x \in (-4;1\rangle$
b) $x \in \langle -4;-2) \cup (-2;0) \cup (2;\infty)$
c) $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ d) $x \in \left(\frac{1}{2};2\right)$

21. a) $x \in \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};1\right)$
b) $x \in \left(-\infty;\frac{23}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{33}{4};\infty\right)$
c) $x \in \left\langle -\frac{5}{2};-1\right) \cup \left(1;\frac{5}{2}\right\rangle$

22. a) $x \in (3;4) \cup (4;7)$
b) $x \in (-\infty;-6\rangle \cup \langle -3;\infty)$
c) $x \in (-\infty;1) \cup (1;2) \cup (2;3)$

23. a) $x = 4$ b) $x = 6$
c) $x = -2$ d) $x = \frac{1}{4}$

24. a) $x \in (-\infty;-1\rangle$
b) $x \in (-\infty;-2) \cup (1;3)$
c) $x \in (-\infty;0) \cup (1;2)$
d) $x \in (-2;0) \cup (1;\infty)$

Zestaw B – odpowiedzi

1. C **2.** B **3.** B **4.** C **5.** B **6.** A **7.** B **8.** A

Zestaw C – odpowiedzi

1. 222 $\left(pq = \frac{20}{9}\right)$

2. 233 $\left(a + b = 2\frac{1}{3}\right)$

3. 550 $\left(x_1 = 3 - \sqrt{6}\right)$

4. 416 $\left(\frac{5}{12}\right)$

5. 224

6. 228 $\left(p = \frac{8}{35}\right)$

7. 213 $(n = 213)$

8. 201 $(n = 2)$

Zestaw D – odpowiedzi

1. $x \in (0;1)$

2. $A' \cap B' = (0;4)$

3. $f(x) = \frac{6x-9}{2(x-2)}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

4. a) $b = 1$, $y = 2$ b) $a = 4$

5. $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

6. a) $x = 1$

7. a) $a = 4$, $b = 2$ b) $x \in (-2;-1)$

8. $x \in (-\infty;-1) \cup (3;\infty)$

9. $m \in (-\sqrt{3};\sqrt{3})$

10. $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{4,5\}$, $g(D) = \{-1,1\}$

12. $m \in (4;6)$

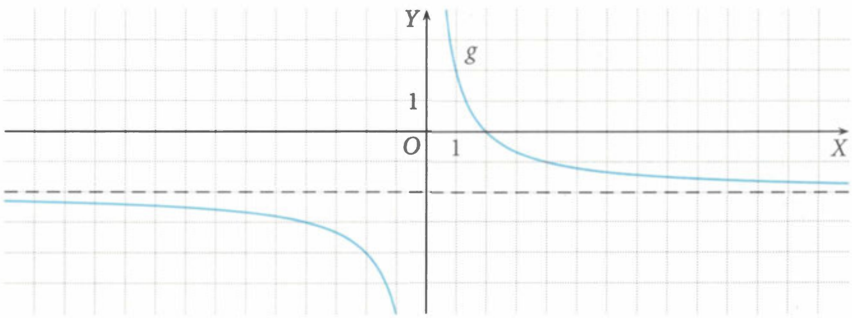
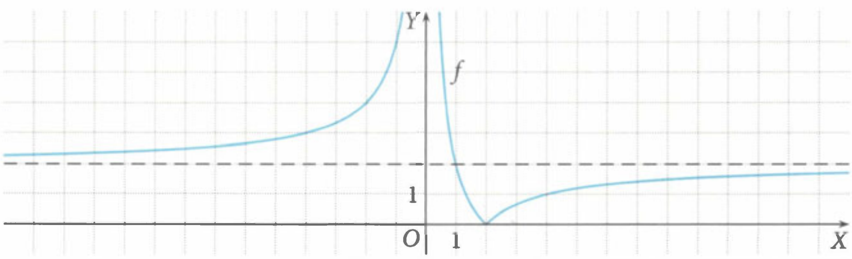
14. a) $a = 2$, $b = 8$, $c = 3$ b) $x = -1$

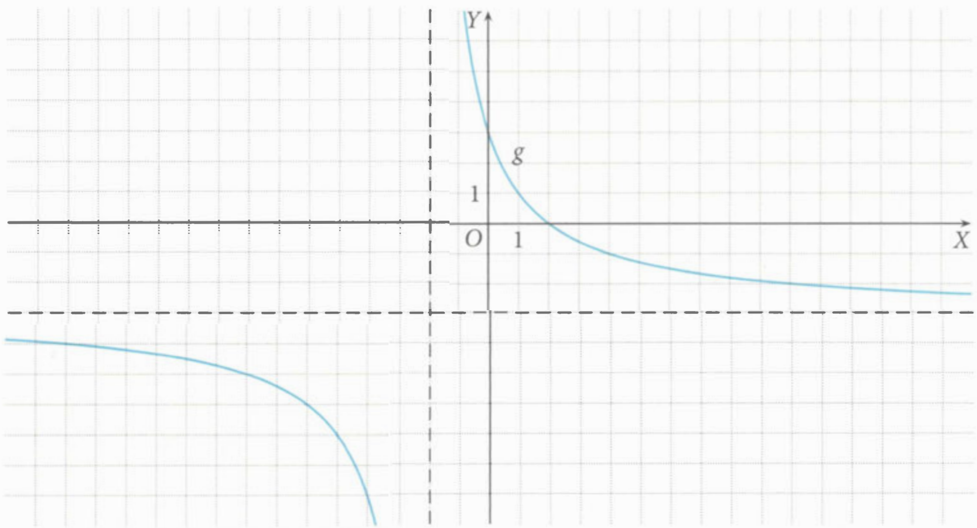
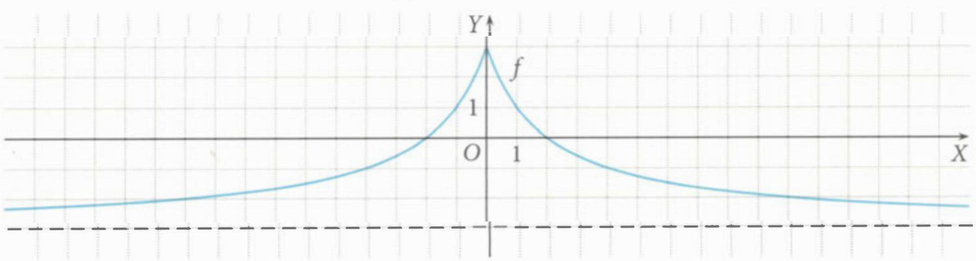
15. a) $D = (0;2) \cup (2;\infty)$ b) $m \in (2;4)$

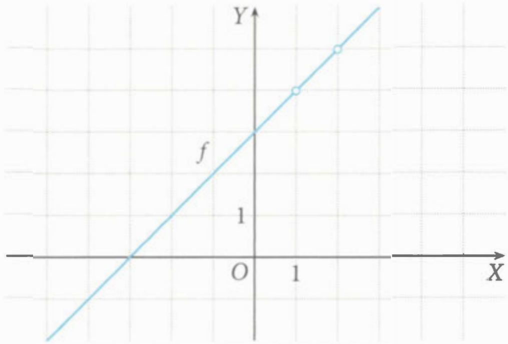
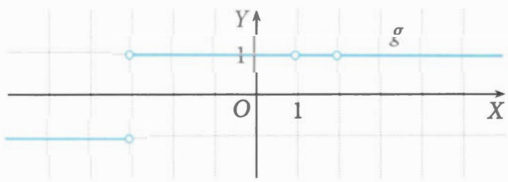
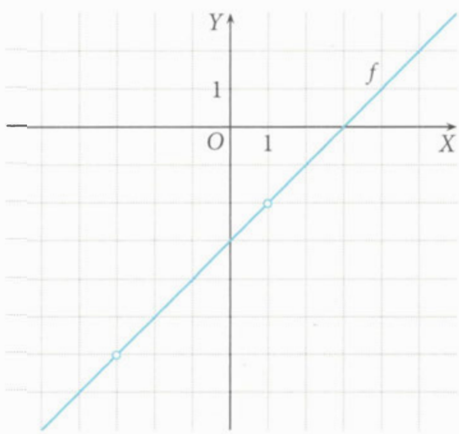
17. a) $A(-1,-4)$, $B(2,2)$, $a = 2$, $b = 6$
b) $x \in \{-1\} \cup (0;2\rangle$

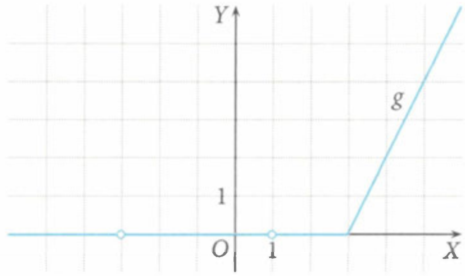
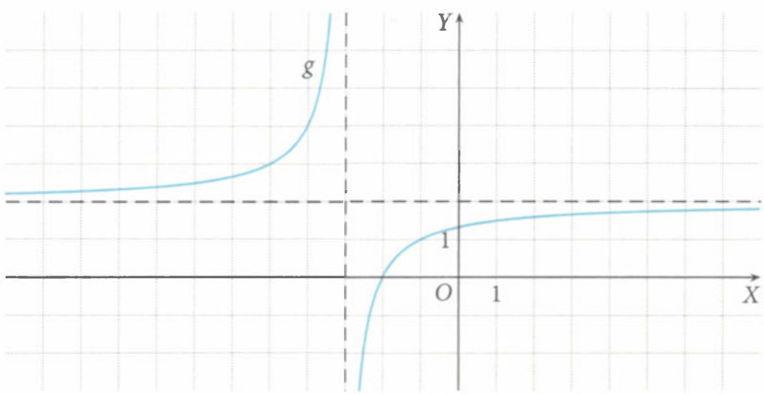
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

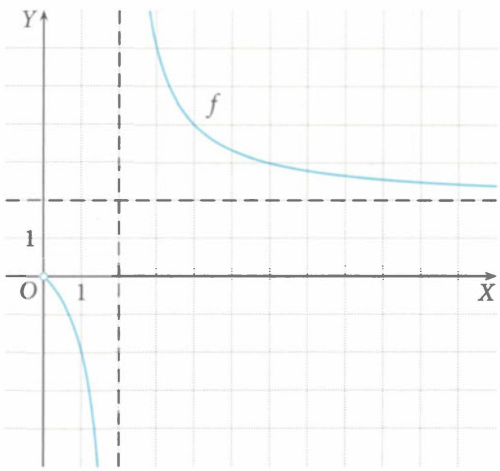
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Obliczenie: $f(x+1) = 1 - \frac{2}{x}$
	Zapisanie nierówności w postaci: $1 - \frac{2}{x} < 1 - \frac{2}{x-1}$ i podanie założeń: $x \neq 0$, $x \neq 1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $-2x(x-1) > 0$
	Rozwiązanie nierówności: $x \in (0;1)$
2.	Wyznaczenie zbioru A': $A' = \langle 0;5\rangle$
	Zapisanie zbioru B' w postaci: $B' = \{x \in \mathbf{R}\colon x^3 + 10x^2 > x^4 - 8x\}$
	Zapisanie nierówności: $x(x^3 - x^2 - 10x - 8) < 0$

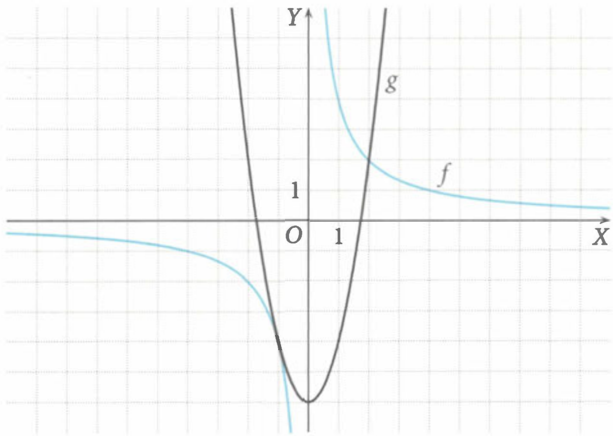
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
2. cd.	Zauważenie, że pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ jest liczba -1
	Wyznaczenie pozostałych pierwiastków wielomianu w: $x = -2$, $x = 4$
	Wyznaczenie zbioru B': $B' = (-2; -1) \cup (0; 4)$
	Wyznaczenie zbioru: $A' \cap B' = (0; 4)$
3.	Obliczenie a: $a = 2$
	Obliczenie b: $b = 3$
	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(x) = \frac{3}{2(x-2)} + 3$
	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $f(x) = \frac{6x-9}{2(x-2)}$
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji: $\frac{3}{2}$
4. a)	Podanie wartości b: $b = 1$
	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $f(x) = 2 + \frac{a-2}{x+1}$
	Podanie równania asymptoty poziomej: $y = 2$
4. b)	Obliczenie a z warunku $a - 2 = 2$: $a = 4$
5.	Zapisanie warunku: $xy = x + y + 2$
	Przekształcenie warunku do postaci: $y = 1 + \frac{3}{x-1}$
	Podanie dziedziny i zbioru wartości funkcji f: $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
6. a)	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \frac{4}{x} - 2$ 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \lvert g(x) \rvert$ 
	Odczytanie rozwiązania równania $f(x) = 2$: $x = 1$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6. b)	Zauważenie, że dla $p > 0$ równanie $\lvert a - p\rvert = p$ zachodzi, gdy $a = 0$ lub $a = 2p$
	Zauważenie, że $\frac{4}{x} \neq 0$, więc równanie $\left\lvert\frac{4}{x} - p\right\rvert = p$ ma dokładnie jedno rozwiązanie
7. a)	Odczytanie z wykresu wartości parametru b: $b = 2$
	Wykorzystanie współrzędnych punktu $(0,2)$ do obliczenia wartości parametru a: $a = 4$
7. b)	Zapisanie nierówności: $\frac{3x+4}{x+2} < \frac{3x+1}{x+1}$, $x \neq -2$, $x \neq -1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\frac{2}{(x+2)(x+1)} < 0$
	Zapisanie nierówności w postaci: $(x+2)(x+1) < 0$ i podanie rozwiązania: $x \in (-2;-1)$
8.	Obliczenie: $f(x+1) = \frac{2x-2}{x+1}$ i $f(x-1) = \frac{2x-6}{x-1}$ i podanie założeń: $x \neq -1$, $x \neq 1$
	Przekształcenie nierówności $\frac{f(x+1)}{f(x-1)} > 0$ do postaci: $\frac{2(x-1)^2}{(x+1)(2x-6)} > 0$ i podanie założenia $x \neq 3$
	Zauważenie, że $(x-1)^2 > 0$ dla każdego $x \neq 1$, i sprowadzenie zadania do rozwiązania nierówności: $(x+1)(2x-6) > 0$
	Podanie rozwiązania nierówności: $x \in (-\infty;-1) \cup (3;\infty)$
9.	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \frac{12}{x+2} - 3$ 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \frac{12}{\lvert x\rvert+2} - 3$ 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
9. cd.	Zapisanie warunku: $m^2 \in (-3;3)$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$
10.	Przekształcenie wzoru funkcji f i zapisanie jej dziedziny: $f(x)=x+3$, $D=\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Podanie zbioru wartości funkcji f: $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{4,5\}$
	Zapisanie wzoru funkcji g w postaci: $g(x)=\begin{cases}-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty;-3)\\ 1 & \text{dla} \quad x\in(-3;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)\end{cases}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji g 
	Podanie zbioru wartości funkcji g: $g(D)=\{-1,1\}$
11.	Zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x)=x-3$, gdzie $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3,1\}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11. cd.	Zapisanie wzoru funkcji g w postaci: $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\in(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;3) \\ 2x-6 & \text{dla } x\in\langle 3;\infty) \end{cases}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji g 
12.	Zauważenie, że równanie $\lvert x+3\rvert=a$ ma dwa pierwastki $x=a-3$ i $x=-a-3$, gdy $a>0$
	Zauważenie, że pierwiastki te mają różne znaki, gdy $(a-3)(a+3)>0$
	Podanie rozwiązania nierówności przy uwzględnieniu warunku $a>0$: $a>3$
	Zapisanie nierówności $\frac{m}{m-4}>3$ i przekształcenie jej do postaci: $(m-6)(m-4)<0$
	Podanie odpowiedzi: $m\in(4;6)$
13.	Zapisanie równania hiperboli: $y=f(x+2)+1=\frac{8}{x+2}+1$
	Zapisanie równania $\frac{8}{x+2}+1=x^2+4x+5$, $x\neq-2$, i przekształcenie go do postaci: $x^3+6x^2+12x=0$
	Przekształcenie równania do postaci: $x(x^2+6x+12)=0$ i wyznaczenie pierwiastka: $x=0$
	Uzasadnienie, że równanie $x^2+6x+12=0$ nie ma pierwiastków
	Sformułowanie odpowiedzi: Jedynym punktem wspólnym paraboli i hiperboli jest $(0,5)$.
14. a)	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x)=\frac{2x+4}{x+3}=\frac{-2}{x+3}+2$ 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14. a) cd.	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(x)=\frac{2}{x+3}+2$
	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x)=\frac{2x+8}{x+3}$ i odczytanie wartości parametrów: $a=2$, $b=8$, $c=3$
14. b)	Zapisanie równania $f(x)-g(x)=2$ w postaci: $\frac{2x+8}{x+3}-\frac{2x+4}{x+3}=2$, $x\neq -3$
	Przekształcenie równania do postaci: $\frac{2}{x+3}=1$ i podanie rozwiaząnia: $x=-1$
15. a)	Zapisanie sumy i iloczynu pierwiastków równania za pomocą wzorów Viète'a: $x_1+x_2=\frac{2m}{m}=2$, $x_1\cdot x_2=\frac{m-2}{m}$
	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(m)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2m}{m-2}$
	Wyznaczenie dziedziny funkcji f z warunku $\Delta>0$ i $m\neq 2$: $D=(0;2)\cup(2;\infty)$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
15. b)	Odczytanie z wykresu rozwiązania nierówności $f(m)>4$: $m\in(2;4)$
16.	Zapisanie współrzędnych punktów P i Q w postaci: $P\left(x,\frac{1}{x^2}\right)$, $Q\left(-x,\frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x>0$
	Zapisanie długości odcinka PQ i wysokości h trójkąta PQR: $\|PQ\|=2x$, $h=\frac{1}{x^2}+4$
	Zapisanie pola trójkąta PQR w postaci: $P=\frac{1}{2}\cdot 2x\left(\frac{1}{x^2}+4\right)=\frac{1}{x}+4x$
	Zauważenie, że dla $x>0$ nierówność $\frac{1}{x}+4x\geqslant 4$ jest równoważna nierówności: $(2x-1)^2\geqslant 0$
	Sformułowanie wniosku: $(2x-1)^2\geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
17. a)	Zapisanie współrzędnych punktów A i B w postaci $A\left(p,\frac{4}{p}\right)$ i $B\left(s,\frac{4}{s}\right)$, jako punktów leżących na hiperboli $y=\frac{4}{x}$
	Zapisanie współrzędnych środka odcinka AB w postaci warunków: $\frac{p+s}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{4}{p}+\frac{4}{s}}{2}=-1$ i przekształcenie ich do postaci: $p+s=1$, $\frac{4}{p}+\frac{4}{s}=-2$

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="2">17. a) cd.</td><td>Rozwiązanie równania $\frac{4}{p}+\frac{4}{1-p}=-2$: $p=-1$ lub $p=2$ i wyznaczenie współrzędnych punktów: A i B, np. $A(-1,-4)$, $B(2,2)$</td></tr>
<tr><td>Wykorzystanie otrzymanych współrzędnych punktów A i B do wyznaczenia współczynników a i b: $a=2$, $b=6$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">17. b)</td><td>Naszkicowanie wykresów funkcji f i g w jedynym układzie współrzędnych
</td></tr>
<tr><td>Odczytanie rozwiązania nierówności $f(x)\geqslant g(x)$: $x\in\{-1\}\cup(0;2\rangle$</td></tr>
</table>

6. Trygonometria

Zestaw A – odpowiedzi

1. III ćwiartka

2. **a)** -1 **b)** -4 **c)** $\frac{3}{2}$

3. **a)** 1 **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **d)** 1 **e)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **g)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **h)** $-\frac{1}{2}$

4.

r	6	8	$\frac{8}{3}$	3	9	$\frac{24}{\pi}$	24	4
l	2π	14π	2π	$\frac{7}{2}\pi$	16π	14	11π	$\frac{\pi}{4}$
α	$60°$	$315°$	$135°$	$210°$	$320°$	$105°$	$82°30'$	$11°15'$
α	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{16}{9}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{11}{24}\pi$	$\frac{\pi}{16}$

5. **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** -1 **f)** $-\sqrt{3}$
g) -1 **h)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. **a)** $\sin x=-0{,}8$, $\operatorname{tg} x=-\frac{4}{3}$
b) $\cos x=-\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} x=-2\sqrt{2}$
c) $\sin x=-\frac{12}{13}$, $\cos x=-\frac{5}{13}$ **d)** $\sin x=\frac{8}{17}$, $\cos x=-\frac{15}{17}$

7. **a)** $f(x)>0$ dla $x\in(4k\pi;2\pi+4k\pi)$, $k\in\mathbf{C}$
b) $f(x)>0$ dla $x\in(-2\pi+4k\pi;4k\pi)$, $k\in\mathbf{C}$
c) $f(x)>0$ dla $x\in\left(k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{C}$
d) $f(x)>0$ dla $x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{C}$
e) $f(x)>0$ dla $x\in\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3}{4}\pi+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{C}$
f) $f(x)>0$ dla $x\in\left(\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbf{C}$

8. **a)** wartość najmniejsza 0, wartość największa 2
b) wartość najmniejsza 1, wartość największa 5
c) wartość najmniejsza -1, wartość największa 3
d) wartość najmniejsza -4, wartość największa 4
e) wartość najmniejsza 0, wartość największa 4
f) wartość najmniejsza -5, wartość największa 1

9. **a)** $f(x)=\sin(x-\pi)=\sin(x+\pi)$,
$f(x)=1$ dla $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{C}$
b) $f(x)=1+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,
$f(x)=1$ dla $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbf{C}$
c) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$,
$f(x)=1$ dla $x=2k\pi$, $k\in\mathbf{C}$

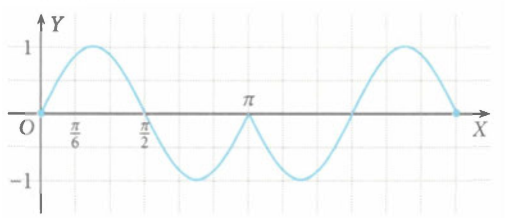
d) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$,
równanie $f(x) = 1$ jest sprzeczne

10. a) $\sin 2x = -\frac{24}{25}$, $\cos 2x = -\frac{7}{25}$
b) $\sin 2x = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$, $\cos 2x = -\frac{23}{25}$
c) $\sin 2x = -\frac{3}{5}$, $\cos 2x = -\frac{4}{5}$
d) $\sin 2x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2x = -\frac{7}{9}$

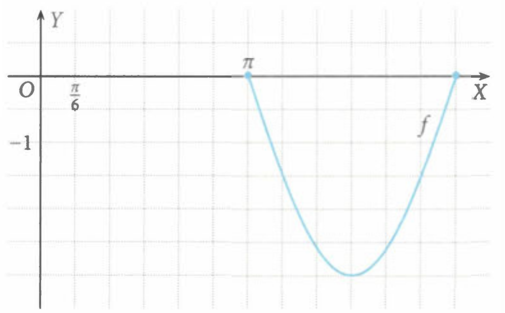
11. a) $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos x = \frac{3}{4}$
b) $\sin x = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos x = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$
lub $\sin x = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$
c) $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$
lub $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
d) $\sin x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

12. a) $f(D) = \langle 1; 2 \rangle$
b) $f(D) = \langle -3; -1 \rangle$
c) $f(D) = (-\infty; 1\rangle$
d) $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$
e) $f(D) = \langle 0; \infty)$
f) $f(D) = \langle 0; 3 \rangle$

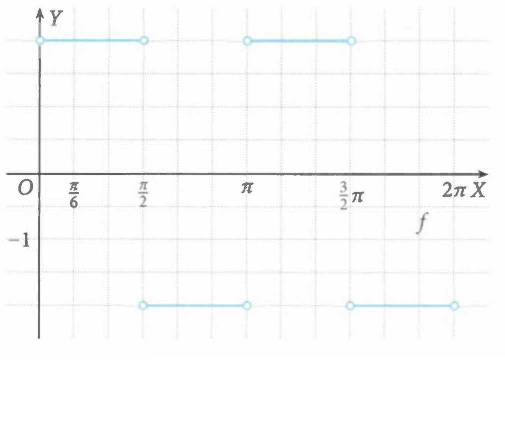
13. a)



b)



c)



14. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = \frac{\pi}{2}$,
$f(x) < g(x)$ dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$
b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$,
$f(x) < g(x)$ dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$

15. a) $2a^2 - 1$ **b)** a **c)** $\sqrt{\frac{1-a}{2}}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a - \sqrt{1-a^2}\right)$

16. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **e)** 1
f) $\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **h)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

18. a) $f(x) = \sin 2x$, rosnąca
b) $f(x) = -\cos 2x$, rosnąca
c) $f(x) = |1 - 2\cos x|$, malejąca

19. a) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
b) $x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
c) $x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
d) $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, $x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{C}$
e) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
f) $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, $x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{C}$

20. a) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{C}$ **b)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
d) $x = k\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
e) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
f) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{C}$ **g)** $x = k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
h) $x = 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$

21. a) $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = 2\pi$
b) $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$ **c)** $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$
d) $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{5}{12}\pi$, $x = \frac{13}{12}\pi$, $x = \frac{17}{12}\pi$

22. a) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
b) $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
c) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
d) $x = k\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
e) $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
f) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$

23. a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{C}$
b) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{C}$
c) $x = k\pi$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{C}$
d) $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$

24. a) $x = \frac{k\pi}{3}$, $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
b) $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{C}$
c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
d) $x = \frac{2k\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbf{C}$
e) $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$ **f)** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbf{C}$

25. a) $x \in \langle -2\pi; -\frac{7}{4}\pi) \cup (-\frac{5}{4}\pi; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi; 2\pi\rangle$
b) $x \in \langle -2\pi; -\frac{5}{3}\pi\rangle \cup \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\rangle \cup \langle \frac{5}{3}\pi; 2\pi\rangle$
c) $x \in (-\frac{3}{2}\pi; -\frac{7}{6}\pi\rangle \cup (-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\rangle \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi\rangle \cup$
$\cup (\frac{3}{2}\pi; \frac{11}{6}\pi\rangle$
d) $x \in \{-2\pi\} \cup \langle 0; 2\pi\rangle$
e) $x \in (-\frac{5}{3}\pi; -\frac{4}{3}\pi) \cup (-\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi) \cup$
$\cup (\frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi)$
f) $x \in (-\frac{15}{8}\pi; -\frac{7}{4}\pi) \cup (-\frac{11}{8}\pi; -\frac{5}{4}\pi) \cup$
$\cup (-\frac{7}{8}\pi; -\frac{3}{4}\pi) \cup (-\frac{3}{8}\pi; -\frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}) \cup$
$\cup (\frac{5}{8}\pi; \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{9}{8}\pi; \frac{5}{4}\pi) \cup (\frac{13}{8}\pi; \frac{7}{4}\pi)$
g) $x \in \langle -2\pi; -\frac{7}{4}\pi\rangle \cup \langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi\rangle$
h) $x \in (-\frac{4}{3}\pi; -\frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi)$
i) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi) \cup (-\frac{5}{3}\pi; -\frac{5}{6}\pi) \cup$
$\cup (-\frac{2}{3}\pi; \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{7}{6}\pi) \cup (\frac{4}{3}\pi; 2\pi\rangle$

26. a) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{C}$
b) $x \in \langle -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\rangle,\ k \in \mathbf{C}$
c) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbf{C}$
d) $x \in (2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbf{C}$
e) $x \in (\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbf{C}$
f) $x \in (\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi),\ k \in \mathbf{C}$

27. a) $D = \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\rangle,\ k \in \mathbf{C}$
b) $D = \langle -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\rangle,\ k \in \mathbf{C}$
c) $D = (-\pi + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\rangle,\ k \in \mathbf{C}$
d) $D = \langle \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{11\pi}{12} + k\pi\rangle,\ k \in \mathbf{C}$

28. a) $\operatorname{tg}\alpha = 2 + \sqrt{3}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$

29. a) $a \in \langle -2; \frac{4}{3}\rangle$ b) $a \in \langle 2 - \sqrt{3}; 1\rangle \cup \langle 2; 2 + \sqrt{3}\rangle$
c) $a \in \langle -3; -\sqrt{7}\rangle \cup \langle \sqrt{7}; 3\rangle$

30. a) $f(D) = \langle \frac{1}{2}; 1\rangle$, $f(x) = 1$ dla $x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{C}$
b) $f(D) = \langle -2; 2\rangle$,
$f(x) = 1$ dla $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{C}$

31. $f(x) < \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -\pi; \frac{\pi}{12}) \cup (\frac{5}{12}\pi; \pi\rangle$

Zestaw B – odpowiedzi

1. C **2.** A **3.** C **4.** A **5.** D **6.** B **7.** A **8.** C **9.** B

Zestaw C – odpowiedzi

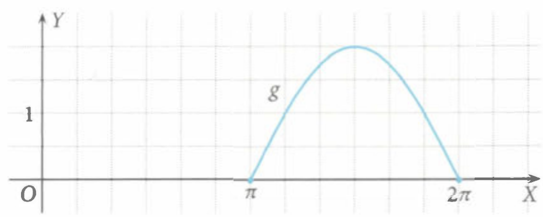
1. 425
2. 766 ($\sin 50° = 0{,}766$)
3. 583 $(6\sqrt{2} + 3\sqrt{6})$
4. 974 $\left(\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{6} - 1}{4}\right)$
5. 155 $(\frac{7}{45})$
6. 618 (618,75)
7. 344
8. 384 $(\frac{5}{13})$

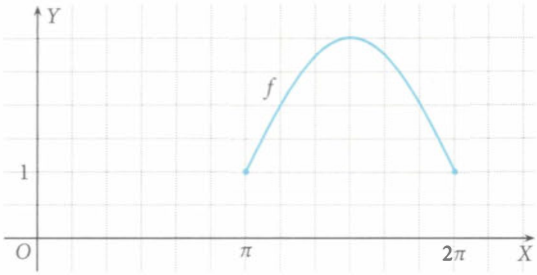
Zestaw D – odpowiedzi

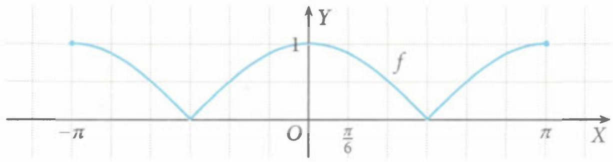
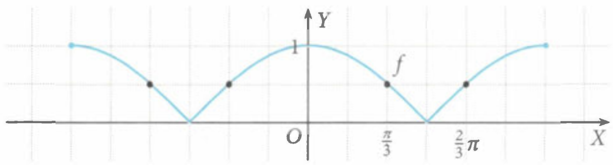
1. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
2. $x = \frac{7}{6}\pi,\ x = \frac{11}{6}\pi$
3. $x = -\frac{2}{3}\pi$
4. $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k}{3}\pi,\ x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2k}{3}\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi,\ k \in \mathbf{C}$
5. 1, 2, 4, 5
6. 1
7. $-\frac{47}{81}$
8. $x = k\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbf{C}$
10. $a = 2,\ p = -\frac{\pi}{2},\ x \in \langle -\pi; \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3}{4}\pi; \pi\rangle$
11. $m \in \langle 1; 3)$
12. $f(D) = \langle -1; 3\rangle,\ x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{C}$
13. $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C}\}$
14. $m \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\rangle,\ k \in \mathbf{C}$
15. $f(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in \{-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\}$
16. $\frac{2}{3}$
17. $m \in \langle \frac{10}{7}; 2\rangle$
18. $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
19. a) $x \in \{-\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi\}$
b) $p \in (-\infty; 0\rangle \cup (1; \infty)$
20. 0 rozwiązań dla $m \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbf{C}$,
1 rozwiązanie dla $m \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\colon k \in \mathbf{C}\}$,
2 rozwiązania dla $m \in (-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbf{C}$
21. $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}) \cup \langle \frac{3}{4}\pi; \pi)$
22. $f(x) = \sqrt{3}$ dla $x = -\frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{3}$
23. nie jest
25. $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\pi, \frac{5}{3}\pi\}$
26. $x \in \{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\}$
27. $x \in \{\frac{\pi}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi\}$
28. $x \in \{\frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi\}$
29. $x \in \{\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi\}$
30. $x \in \{\frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi\}$
31. $x \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$
32. $x \in \{0, \frac{7}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{2}{3}\pi\}$
33. $x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{7}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi)$
34. $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi)$
35. $x \in (\frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi)$

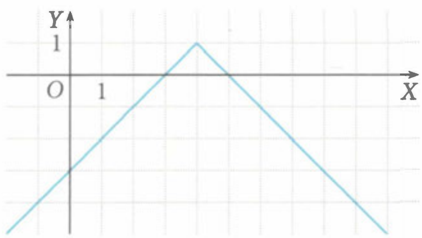
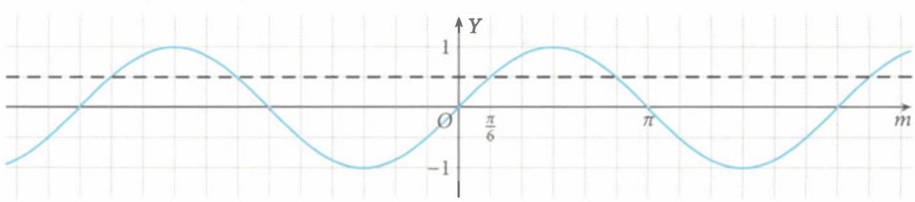
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

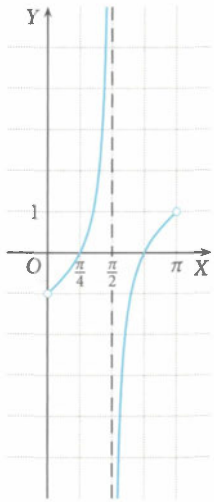
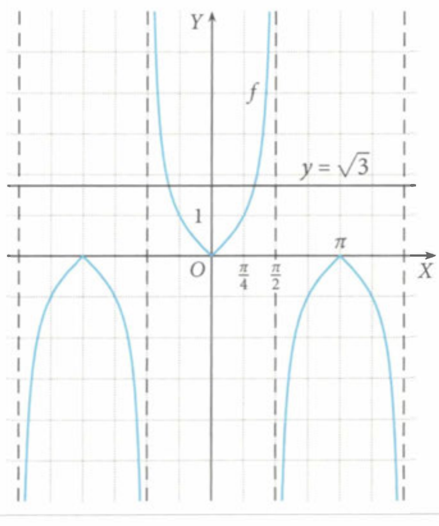
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wykorzystanie okresowości funkcji sinus i zapisanie równości: $\sin 395^\circ = \sin 35^\circ$
	Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i zapisanie równości: $\cos 130^\circ = -\sin 40^\circ$
	Zastosowanie wzoru na cosinus sumy kątów i przekształcenie wyrażenia $\cos 35^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 130^\circ \cdot \sin 395^\circ$ do postaci: $\cos(35^\circ + 40^\circ) = \cos 75^\circ$
	Zauważenie, że $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$, i wykorzystanie wzoru na cosinus sumy kątów: $\cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$
	Obliczenie wartości wyjściowego wyrażenia: $\cos 35^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 130^\circ \cdot \sin 395^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
2.	Przekształcenie równania do postaci: $-2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$
	Podstawienie niewiadomej pomocniczej: $t = \sin x$, gdzie $t \in \langle -1; 1\rangle$, i zapisanie równania: $-2t^2 + 5t + 3 = 0$
	Wyznaczenie pierwiastków równania kwadratowego: $t_1 = 3$ lub $t_2 = -\frac{1}{2}$ i odrzucenie pierwiastka t_1
	Rozwiązanie równania $\sin x = -\frac{1}{2}$: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Zapisanie rozwiązań należących do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$: $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$
3.	Zapisanie założenia: $\cos x \neq 0$ i przekształcenie równania do postaci: $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
	Podstawienie niewiadomej pomocniczej: $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle$, i rozwiązanie równania kwadratowego $2t^2 - t - 1 = 0$: $t_1 = 1$ lub $t_2 = -\frac{1}{2}$
	Rozwiązanie równania $\cos x = 1$: $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{1}{2}$: $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Sformułowanie odpowiedzi: Największą liczbą ujemną spełniającą równanie jest $-\frac{2}{3}\pi$.
4.	Przekształcenie równania do postaci: $2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$
	Przekształcenie równania do postaci: $\cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0$ i zapisanie, że $\cos 2x = 0$ lub $2\sin 3x - 1 = 0$
	Rozwiązanie równania $\cos 2x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Rozwiązanie równania $2\sin 3x - 1 = 0$: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k}{3}\pi$ lub $x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2k}{3}\pi$, $k \in \mathbf{C}$
5.	Zapisanie nierówności w postaci: $\sin^2 x \geqslant \frac{1}{2}$
	Zapisanie nierówności w postaci: $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji sinus w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$ i odczytanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi\right\rangle$
	Zapisanie całkowitych rozwiązań nierówności z przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$: 1, 2, 4, 5

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6.	Podniesienie obu stron równania do kwadratu i zapisanie równania w postaci: $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$
	Wykorzystanie tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i przekształcenie równości do postaci: $2\sin x\cos x = 1$
	Wykorzystanie wzoru na sinus podwojonego kąta i zapisanie równości: $\sin 2x = 1$
7.	Podniesienie obu stron równania do kwadratu i zapisanie równania w postaci: $1 - 2\sin x\cos x = \frac{1}{9}$
	Wyznaczenie wartości $\sin 2x = 2\sin x\cos x$: $\sin 2x = \frac{8}{9}$
	Wykorzystanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania: $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$
	Obliczenie wartości $\cos 4x$: $\cos 4x = -\frac{47}{81}$
8.	Skorzystanie ze wzoru na różnicę sinusów i zapisanie równania w postaci: $2\sin 2x\cos 3x = 0$
	Zapisanie warunku: $\sin 2x = 0$ lub $\cos 3x = 0$
	Wyznaczenie rozwiązań równania: $2x = k\pi$ lub $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$, czyli $x = k\frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{C}$
9.	Zauważenie, że $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) = (a^2 + b^2)((a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2)$
	Przekształcenie lewej strony równania: $L = 4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha) = 4(1 - 3\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha)$
	Przekształcenie prawej strony równania: $P = 1 + 3\cos^2 2\alpha = 1 + 3(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 = 1 + 3(1 - 4\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha) = 4(1 - 3\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha)$
	Podanie odpowiedzi: $L = P$, zatem równość jest prawdziwa.
10.	Wyznaczenie wartości parametru p: $p = -\frac{\pi}{2}$
	Wyznaczenie wartości parametru a: $a = 2$ i zapisanie wzoru funkcji: $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
	Wyznaczenie pierwiastków równania $f(x) = -\sqrt{2}$: $x = -\frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
	Zaznaczenie na wykresie zbioru rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -\sqrt{2}$ i podanie odpowiedzi: $x \in \left\langle -\pi; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi; \pi \right\rangle$
11.	Wykorzystanie wzorów redukcyjnych do przekształcenia wyrażenia: $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
	Wykorzystanie równości $\sin(-x) = -\sin x$ i zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x) = 1 - 2\sin x$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = -2\sin x$ w przedziale $\langle \pi; 2\pi \rangle$ 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11. cd.	Naszkicowanie wykresu funkcji f w przedziale $\langle \pi; 2\pi \rangle$ 
	Sformułowanie odpowiedzi: $m \in \langle 1; 3)$
12.	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x) = \cos^2 x + 2\cos x$ i wprowadzenie zmiennej pomocniczej $t = \cos x$. Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(t) = t^2 + 2t$, gdzie $t \in \langle -1; 1 \rangle$
	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli $y = t^2 + 2t$: $t_w = -1$, $y_w = -1$ i zauważenie, że dla $t \in \langle -1; 1 \rangle$ funkcja f jest rosnąca
	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji f: $f(D) = \langle -1; 3 \rangle$
	Zauważenie, że najmniejszą wartość funkcja przyjmuje dla $t = -1$
	Zapisanie równania: $\cos x = -1$
	Rozwiązanie równania: $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
13.	Założenie, że $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Założenie, że $\sin x + 1 \neq 0$, czyli $x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$, i zapisanie dziedziny funkcji f: $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C} \right\}$
	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x) = \frac{\sin^2 x(1+\cos x)}{\cos^2 x(1+\sin x)}$
	Uzasadnienie, że dla $x \in D$: $\sin^2 x \geqslant 0$, $1 + \cos x \geqslant 0$, $\cos^2 x > 0$, $1 + \sin x > 0$
14.	Wykorzystanie wzoru na sinus sumy kątów i przekształcenie równania do postaci: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 4\sin m - 3$
	Zauważenie, że równanie ma rozwiązania, jeżeli $-1 \leqslant 4\sin m - 3 \leqslant 1$
	Rozwiązanie nierówności podwójnej: $\frac{1}{2} \leqslant \sin m \leqslant 1$
	Zauważenie, że powyższa nierówność jest równoważna nierówności $\sin m \geqslant \frac{1}{2}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $y = \sin m$ i zaznaczenie rozwiązania nierówności
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{C}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15.	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x) = \left\lvert \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\rvert$
	Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $$f(x) = \lvert \cos x \rvert$$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ 
	Zaznaczenie na wykresie rozwiązań równania $f(x) = \frac{1}{2}$ 
	Sformułowanie odpowiedzi: Funkcja przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$ dla $x \in \left\{-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right\}$.
16.	Wykorzystanie wzoru na sinus podwojonego kąta i przekształcenie równania do postaci: $$(1 - \cos x)(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$$
	Zapisanie rozwiązania równania w postaci: $\cos x = 1$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	Rozwiązanie równania $\cos x = 1$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$: $x = 0$
	Rozwiązanie równania $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$: $x = -\frac{\pi}{4}$ lub $x = -\frac{3}{4}\pi$
	Wyznaczenie zbioru A: $A = \left\{-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, 0\right\}$ i zbioru zdarzeń sprzyjających: $\left\{-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}\right\}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania liczby ujemnej: $\frac{2}{3}$
17.	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji $f(x) = \sin^2 4x$: $f(D) = \langle 0; 1\rangle$
	Zapisanie układu nierówności: $$\begin{cases} 4 - \frac{m+10}{2m} \leqslant 1 \\ 4 - \frac{m+10}{2m} \geqslant 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$
	Rozwiązanie pierwszej nierówności: $m \in (0; 2\rangle$
	Rozwiązanie drugiej nierówności: $m \in (-\infty; 0) \cup \left\langle \frac{10}{7}; \infty\right)$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left\langle \frac{10}{7}; 2\right\rangle$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
18.	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji $f(x) = \|3 - 4\sin x\|$: $f(D) = \langle 0; 7\rangle$
	Zauważenie, że równanie jest sprzeczne, gdy $a^2 + 3 < 0$ lub $a^2 + 3 > 7$
	Zauważenie, że nierówność $a^2 + 3 < 0$ jest sprzeczna, i rozwiązanie nierówności $a^2 + 3 > 7$
	Sformułowanie odpowiedzi: $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
19. a)	Zapisanie warunku: $\sin x = 0$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	Rozwiązanie równania $\sin x = 0$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$: $x = -\pi$ lub $x = 0$ lub $x = \pi$
	Rozwiązanie równania $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$: $x = -\frac{\pi}{4}$ lub $x = -\frac{3}{4}\pi$
	Rozwiązanie równania $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$ i podanie odpowiedzi: $x \in \left\{-\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi\right\}$
19. b)	Zauważenie, że równanie $\sin x(\sin^2 x - p) = 0$ ma w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ dokładnie trzy różne rozwiązania wtedy, gdy równanie $\sin^2 x - p = 0$ jest sprzeczne lub gdy $p = 0$
	Wyznaczenie tych wartości parametru p, dla których równanie $\sin^2 x = p$ jest sprzeczne: $p \notin \langle 0; 1\rangle$ i sformułowanie odpowiedzi: $p \in (-\infty; 0\rangle \cup (1; \infty)$
20.	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = 1 - \|x - 4\|$ 
	Zauważenie, że równanie nie ma rozwiązań, gdy $\sin m > \frac{1}{2}$. Naszkicowanie wykresu funkcji $g(m) = \sin m$, odczytanie rozwiązania tej nierówności i podanie, że równanie nie ma rozwiązań dla: $m \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{C}$ 
	Zauważenie, że równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $\sin m = \frac{1}{2}$, czyli dla: $m \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\colon k \in \mathbf{C}\right\}$
	Zauważenie, że równanie ma dwa rozwiązania, gdy $\sin m < \frac{1}{2}$, czyli dla: $m \in \left(-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="4">21.</td><td>Uproszczenie wzoru funkcji dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$</td></tr>
<tr><td>Uproszczenie wzoru funkcji dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$: $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$</td></tr>
<tr><td>Naszkicowanie wykresu funkcji f

</td></tr>
<tr><td>Odczytanie rozwiązania nierówności $f(x) \geqslant 0$: $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi; \pi\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">22.</td><td>Przekształcenie równania funkcji f do postaci: $f(x) = \frac{|\sin x|}{\cos x}$</td></tr>
<tr><td>Zapisanie równania funkcji w postaci:
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dla} \quad \sin x \geqslant 0 \\ -\operatorname{tg} x & \text{dla} \quad \sin x < 0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Naszkicowanie wykresu funkcji f

</td></tr>
<tr><td>Odczytanie rozwiązania równania $f(x) = \sqrt{3}$: $x = -\frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{3}$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
23.	Obliczenie wartości lewej strony równości dla $x = \frac{\pi}{4}$: $\cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
	Obliczenie wartości prawej strony równości dla $x = \frac{\pi}{4}$: $1 - \sin^2\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0$
	Sformułowanie wniosku: Podana równość **nie** jest tożsamością trygonometryczną.
24.	Zapisanie lewej strony równości w postaci: $L = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
	Przekształcenie: $L = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{2-\sin^2 2x}{2}$
	Przekształcenie: $L = \frac{1+(1-\sin^2 2x)}{2} = \frac{1+\cos^2 2x}{2}$ i podanie odpowiedzi: Podana równość jest tożsamością trygonometryczną.
25.	Przyjęcie założenia: $x \in \langle 0; 2\pi \rangle \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$
	Zapisanie równania w postaci: $(\operatorname{tg} x - 1)(2\cos x - 1) = 0$
	Stwierdzenie, że $\operatorname{tg} x = 1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$
26.	Zapisanie równania w postaci: $(4\sin^2 x - 1)\sin x = 1 - 4\sin^2 x$
	Przekształcenie równania do postaci: $(4\sin^2 x - 1)(\sin x + 1) = 0$
	Przekształcenie równania do postaci: $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1) = 0$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left\{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right\}$
27.	Zapisanie równania w postaci: $3 - 2\sin^2 x = 5\sin x$
	Wprowadzenie zmiennej pomocniczej $t = \sin x$, $t \in \langle -1; 1 \rangle$, i zapisanie równania w postaci: $2t^2 + 5t - 3 = 0$
	Rozwiązanie równania: $t = -3$ (sprzeczne) lub $t = \frac{1}{2}$, czyli $\sin x = \frac{1}{2}$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi\right\}$
28.	Przekształcenie równania do postaci: $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$
	Wyznaczenie wartości $\cos x$: $\cos x = -1$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$
	Rozwiązanie równania $\cos x = -1$ w podanym przedziale: $x = \pi$
	Rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{1}{2}$ w podanym przedziale: $x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$ i podanie odpowiedzi: $x \in \left\{\frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi\right\}$
29.	Skorzystanie ze wzorów na sinus sumy i sinus różnicy kątów i zapisanie równania w postaci: $2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6}\right) - \left(\sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6}\right) = 0$
	Przekształcenie równania do postaci: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{3}{2}\cos x = 0$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
29. cd.	Zauważenie, że musi być spełniony warunek $\cos x \neq 0$ i przekształcenie równania do postaci: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi\right\}$
30.	Skorzystanie ze wzorów na sinus różnicy i cosinus sumy kątów i zapisanie równania w postaci: $2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = 1$
	Przekształcenie równania do postaci: $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	Zauważenie, że obie strony równania są dodatnie, gdy $\sin x > \cos x$, czyli $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi\right)$. Podniesienie obu stron równania do kwadratu i przekszałcenie do postaci: $\sin 2x = \frac{1}{2}$
	Podanie rozwiązań ostatniego równania: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, i podanie odpowiedzi: $x \in \left\{\frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi\right\}$
31.	Zapisanie równania w postaci: $2\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 2\cos 2x - 1$
	Przekształcenie równania do postaci: $(\sin 2x - 1)\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right) = 0$
	Podanie rozwiązań równania: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$
32.	Przekształcenie równania do postaci: $(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$
	Rozwiązanie równania $\sin 3x = -\frac{1}{2}$: $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$, $x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$
	Rozwiązanie równania $\cos 3x = 1$: $x = \frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left\{0, \frac{7}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$
33.	Zauważenie, że $\sin x - \pi < 0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$, więc nierówność jest równoważna nierówności $3\operatorname{tg} x - \sqrt{3} > 0$
	Zapisanie nierówności w postaci: $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$
	Rozwiązanie nierówności: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$
34.	Założenie, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, oraz zapisanie nierówności w postaci: $2\cos x - \sqrt{3} < 0$
	Rozwiązanie nierówności $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)$
35.	Podstawienie $t = \sin x$ i rozwiązanie nierówności $(2t-3)(2t+1) > 0$ dla $t \in \langle -1; 1\rangle$: $t \in \left\langle -1; -\frac{1}{2}\right)$
	Wyznaczenie rozwiązań równania $\sin x = -\frac{1}{2}$ dla $x \in (0; 2\pi)$: $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left(\frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right)$

7. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $(2,0)$, $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, rosnąca
b) nie przecina osi OX, $(0,6)$, rosnąca
c) $(0,0)$, rosnąca
d) $(-1,0)$, $(0,4)$, rosnąca
e) nie przecina osi OX, $(0,29)$, malejąca
f) $(-2,0)$, $\left(0,-\frac{8}{3}\right)$, malejąca

2. **a)** $f_{\min}=0$, $f_{\max}=3$, $m\in(0;1)$
b) $f_{\min}=0$, $f_{\max}=23$, $m\in(0;4)$
c) $f_{\min}=0$, $f_{\max}=5$, $m\in(0;3)$

3. $a=2$, $p=-3$

4. $g(x)=2-2^{x-3}$, $g(x)>0$ dla $x<4$

5. $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$, $f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\geqslant 0$

6. **a)** $x\in\langle -1;1\rangle$ **b)** $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 1;\infty)$
c) $x\in\langle 0;2\rangle$ **d)** $x\in\langle -3;-1\rangle$

7. **a)** $a=4$, $m\in\{0\}\cup\langle 2;\infty)$ **b)** $a=2$, $m\in\{0\}\cup\langle 3;\infty)$

8. **a)** $x=5$ **b)** $x=3$ **c)** $x=\frac{1}{2}$ **d)** $x=2$

9. **a)** $m>0$ **b)** $m<0$ **c)** $m>3$

10. **a)** $x>1$ **b)** $x>1$ **c)** $x<\log_2\frac{3}{4}$

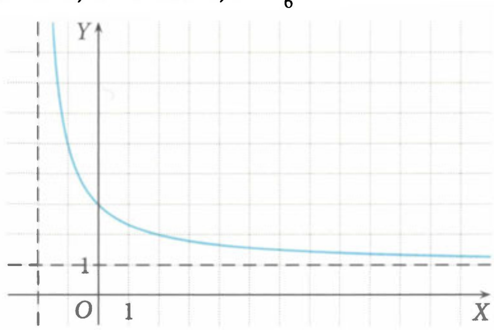
11. **a)** $\log_2 3$ **b)** $\log_2 289$ **c)** $\log_2 5$ **d)** $\log_2 3\sqrt[3]{3}$

12. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** 1 **c)** -32 **d)** 12 **e)** 12 **f)** 12

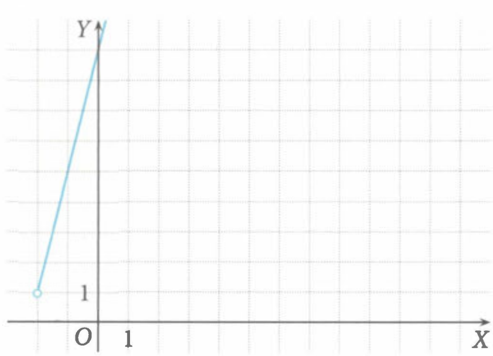
14. **a)** $2a$ **b)** $\frac{3}{2}a$ **c)** $\frac{2}{a}$ **d)** $\frac{2a}{a+1}$ **e)** a **f)** $a+1$

15. **a)** $x=2$ **b)** $x=10000$ **c)** $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$

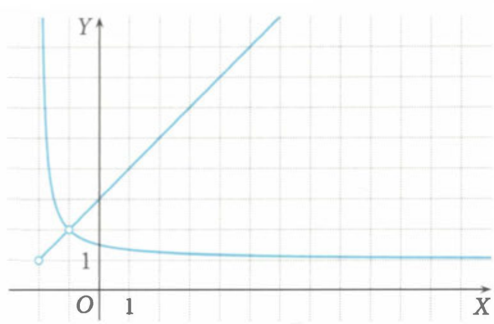
16. **a)**



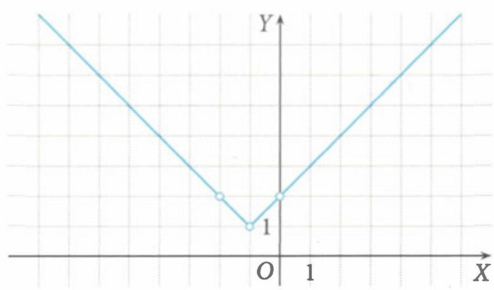
b)



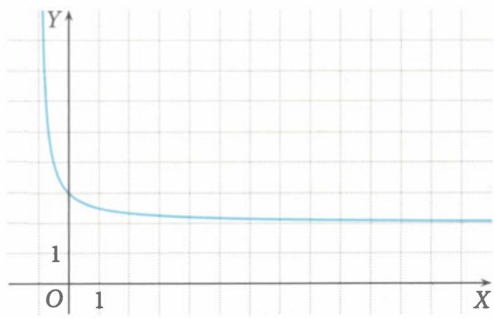
c)



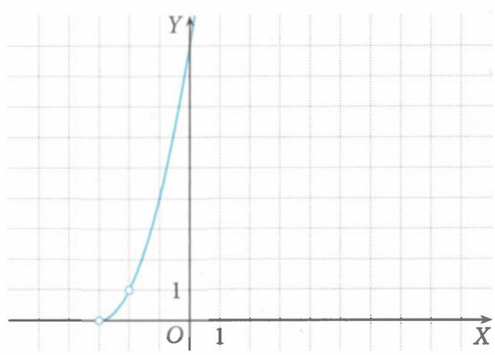
d)



e)



f)



17. **a)** $D=(-\infty;2)\cup(6;\infty)$ **b)** $D=(2;\infty)$
c) $D=(-\infty;-2)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **d)** $D=(3;4)$
e) $D=(-4;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$
f) $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup$
$\cup\left(\sqrt{2};3\right)\cup(3;\infty)$

18. **a)** $m>1$ **b)** $m\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$

19. **a)** f rosnąca dla $m > -1$, malejąca dla $m \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$
b) f rosnąca dla $m \in (4; 5)$, malejąca dla $m > 5$

20. **a)** $a = 2$, $p = 3$, $g(x) = -\log_2(x-3) = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$
b) $a = \frac{1}{5}$, $p = -2$, $g(x) = \log_5(x+2)$
c) $a = \sqrt{2}$, $p = 1$, $g(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x-1)$

21. **a)** $(-1, 0)$, $(0, 1)$ **b)** $(4, 0)$, nie przecina osi OY
c) $(4, 0)$, nie przecina osi OY
d) $(2, 0)$, nie przecina osi OY

22. **a)** $x = -3$, $x = 1$ **b)** $x = 1$ **c)** $x = 1$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
d) $x = \frac{1}{2}$

23. **a)** $m > 0$ **b)** $m > 2$ **c)** $m > 1$ **d)** $m < -1$

24. **a)** $m > 1$ **b)** $m \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ **c)** $m \in (0; 3)$
d) $m \in \left(0; \frac{1}{27}\right)$

25. **a)** $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$, $x = 2$,
$f(x) < g(x)$ dla $x \in (0; 1) \cup (2; \infty)$
b) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$, $x = 4$,
$f(x) < g(x)$ dla $x \in (0; 1) \cup (4; \infty)$
c) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
$f(x) < g(x)$ dla $x \in (0; 1)$
d) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$, $x = 4$,
$f(x) < g(x)$ dla $x \in (1; 4)$

26. **a)** $x = 18$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = 1$ **d)** $x = 5$

Zestaw B – odpowiedzi

1. C **2.** B **3.** B **4.** C **5.** A **6.** D **7.** A **8.** D **9.** B

Zestaw C – odpowiedzi

1. 438 $\left(a = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}\right)$

2. 934 $\left(f\left(-8\frac{1}{2}\right) = 625\sqrt[4]{5}\right)$

3. 275 (2,75)

4. 346 $\left(a = 2\sqrt{3}\right)$

5. 333 $\left(\frac{1}{3}\right)$

6. 002 $\left(p = \frac{1}{36}\right)$

7. 285 $\left(x_1 + x_2 = \frac{7\sqrt{6}}{60}\right)$

8. 103

Zestaw D – odpowiedzi

1. wartość najmniejsza 0, wartość największa 4

2. 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
1 rozwiązanie dla $m \in \{0\} \cup \langle 3; \infty)$,
2 rozwiązania dla $m \in (0; 3)$

3. $x = -2$

4. $f(x_0) = 2$, $x \in (-\infty; 1) \cup (\log_2 10; \infty)$

5. $a = \sqrt{3}$

6. $x \in (-1; 2)$

9. **a)** $a = -2$, $p = 2$ **c)** $x \in (-2; 0) \cup (6; \infty)$

10. $D = (-3; 6)$, $x = \frac{3}{2}$

11. $x = 2$

13. $x = 3$

15. $m \in (-3; -1)$

16. $m \in (-\infty; -1)$

17. $\frac{24}{11}$

18. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

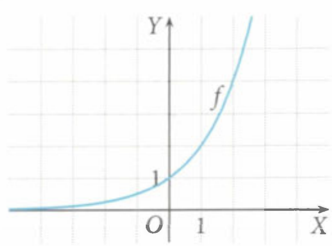
19. **a)** $a = \sqrt{3}$ **b)** $m \in \{0\} \cup \langle 2; \infty)$

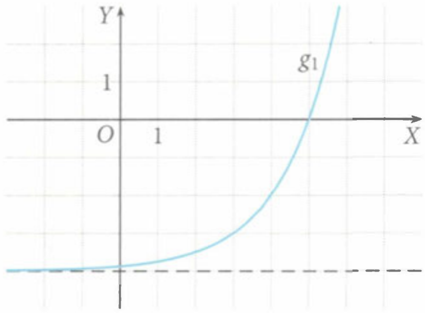
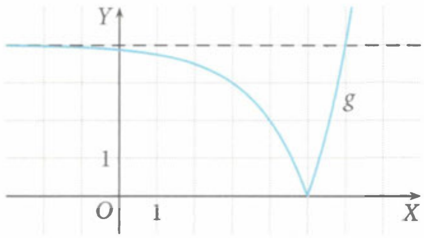
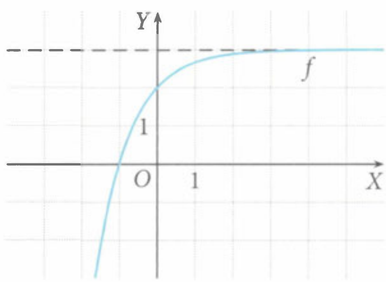
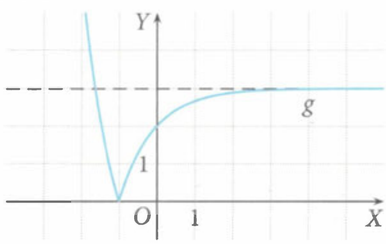
20. $D = \left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (3; \infty)$

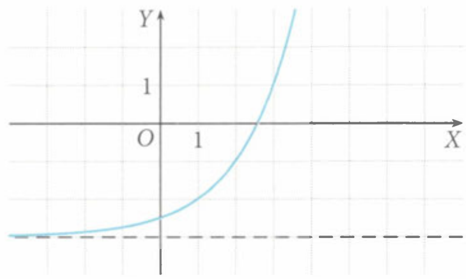
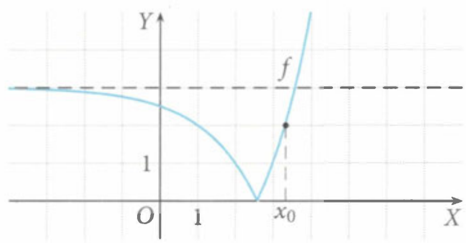
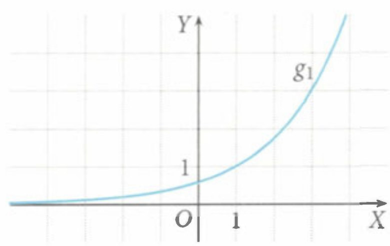
21. $D = (0; 8)$, wartość najmniejsza -8

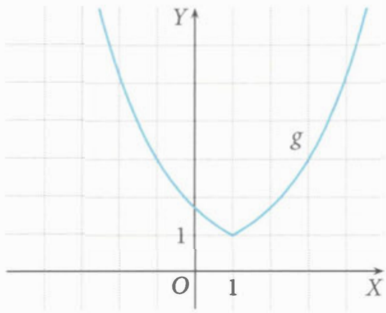
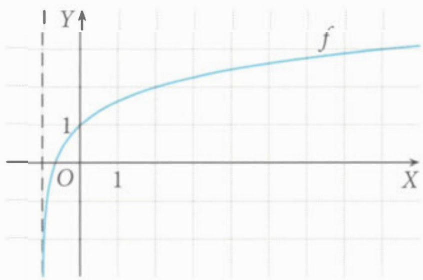
22. $x \in (-4; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2) \cup (2; 4)$

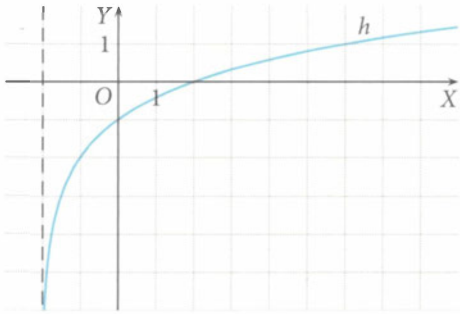
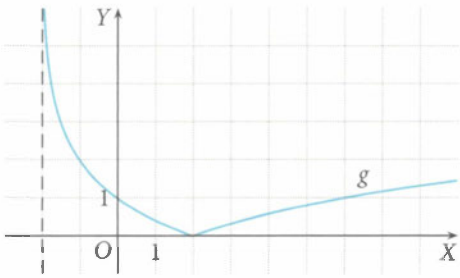
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

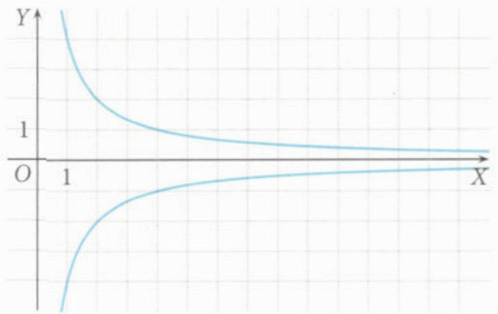
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ 

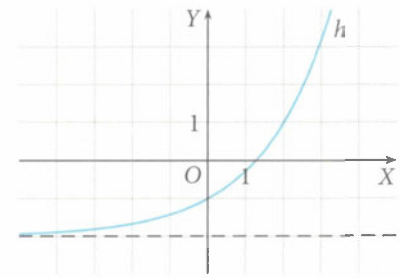
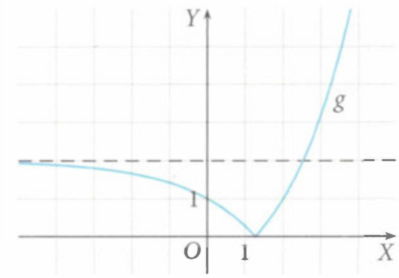
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1. cd.	Naszkicowanie wykresu funkcji $g_1(x) = 2^{x-3} - 4$ 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \lvert g_1(x) \rvert$ 
	Obliczenie wartości funkcji g na końcach przedziału $\langle 3; 6 \rangle$: $g(3) = 3$, $g(6) = 4$
	Odczytanie wartości najmniejszej i największej funkcji g w przedziale $\langle 3; 6 \rangle$: wartość najmniejsza 0, wartość największa 4
2.	Przekształcenie wyrażenia $\frac{3^{x+1}-1}{3^x}$ do postaci: $3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \lvert f(x) \rvert$ 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
2. cd.	Stwierdzenie, że równanie $g(x)=m$ nie ma rozwiązań dla $m<0$
	Stwierdzenie, że równanie $g(x)=m$ ma jedno rozwiązanie dla $m\in\{0\}\cup\langle 3;\infty)$ oraz dwa rozwiązania dla $m\in(0;3)$
3.	Zapisanie odpowiedniego warunku dla ciągu geometrycznego, np. $3^{2x}=\left(3^x+\frac{2}{9}\right)3^{x-1}$
	Przekształcenie równania do postaci: $\frac{2}{9}\cdot 3^x\left(3^{x+1}-\frac{1}{3}\right)=0$
	Zauważenie, że równanie $3^x=0$ jest sprzeczne
	Rozwiązanie równania $3^{x+1}=\frac{1}{3}$: $x=-2$
4.	Obliczenie x_0: $x_0=\log_2 10$
	Obliczenie $f(x_0)$: $f(x_0)=2$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x)=2^{x-1}-3$ 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x)=\lvert g(x)\rvert$ i zaznaczenie przybliżonego położenia punktu x_0 
	Odczytanie drugiego rozwiązania równania $f(x)=2$: $x=1$ i zapisanie odpowiedzi: $f(x)>f(x_0)$ dla $x\in(-\infty;1)\cup(\log_2 10;\infty)$
5.	Wyznaczenie a: $a=\sqrt{3}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g_1(x)=\sqrt{3}^{\,x-1}$ 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5. cd.	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \sqrt{3}^{\lvert x-1 \rvert}$ 
6.	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $f(x) = 1 + \log_3(x+1)$ i wyznaczenie jej dziedziny: $D = (-1; \infty)$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Odczytanie rozwiązania nierówności $f(x) < 2$: $x \in (-1; 2)$
7.	Zauważenie, że $\log_7 21 = \frac{1}{\log_{21} 7} = \frac{1}{m}$
	Skorzystanie ze wzoru na logarytm potęgi: $\log_7 27 = \log_7 3^3 = 3\log_7 3 = 3\log_7\left(\frac{21}{7}\right)$
	Zapisanie wyrażenia za pomocą m: $\log_7 27 = 3\left(\log_7 21 - \log_7 7\right) = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = \frac{3(1-m)}{m}$
8.	Wykorzystanie własności logarytmów i zapisanie lewej strony nierówności w postaci: $\log_4 3 + \log_8 4 + \log_8 \sqrt{3}$
	Wykorzystanie wzoru na zmianę podstaw logarytmu i przekształcenie lewej strony nierówności do postaci: $\frac{1}{2}\log_2 3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2 \sqrt{3}$
	Obliczenie otrzymanej sumy: $\frac{2}{3}(1 + \log_2 3)$
	Zauważenie, że $\log_2 3 < 2$, zatem otrzymane wyrażenie ma wartość mniejszą niż 2
9. a)	Obliczenie a: $a = -2$
	Obliczenie p: $p = 2$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
9. b)	Naszkicowanie wykresu funkcji $h(x) = f(x+2)$ 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \lvert h(x) \rvert$ 
9. c)	Odczytanie z wykresu rozwiązania nierówności $g(x) > 1$: $x \in (-2;0) \cup (6;\infty)$
10.	Sformułowanie założeń: $6 - x \neq 0$ i $\frac{x+3}{6-x} > 0$
	Rozwiązanie nierówności: $\frac{x+3}{6-x} > 0$: $x \in (-3;6)$ i zapisanie dziedziny funkcji: $D = (-3;6)$
	Zauważenie, że miejscem zerowym funkcji f jest ten argument x, dla którego $\frac{x+3}{6-x} = 1$
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji f: $x = \frac{3}{2}$
11.	Sformułowanie warunków rozwiązania zadania: $x+2>0$, $x+6>0$ i zapisanie założenia: $x \in (-2;\infty)$
	Zapisanie odpowiedniego warunku dla ciągu arytmetycznego: $2\log(x+2) = \log 2 + \log(x+6)$
	Przekształcenie równania do postaci: $\log(x+2)^2 = \log 2(x+6)$
	Rozwiązanie rówania $(x+2)^2 = 2(x+6)$: $x = 2$, $x = -4$
	Sformułowanie odpowiedzi po uwzględnieniu założeń: $x = 2$
12.	Ustalenie założeń: $x > 0$, $y \neq 0$
	Przekształcenie równania do postaci: $\log_2 \lvert y \rvert = \log_2 \frac{4}{x}$
	Przekształcenie równania do postaci: $\lvert y \rvert = \frac{4}{x}$
	Rozwiązanie równania dla $y > 0$: $y = \frac{4}{x}$ oraz dla $y < 0$: $y = -\frac{4}{x}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
12. cd.	Zaznaczenie rozwiązania w układzie współrzędnych 
13.	Przekształcenie równania do postaci: $\log_9 x = \frac{1}{2}$
	Rozwiązanie równania: $x = 3$
	Sprawdzenie, że x spełnia założenie: $x > 0$, $3 - 2\log_9 x > 0$
14.	Obliczenie wartości 2^x: $2^x = 3$
	Przekształcenie y do postaci: $y = -\log_2 3$
	Zapisanie wyrażenia 2^{x-2y} w postaci: $3 \cdot 2^{\log_2 9}$
	Uzasadnienie, że $2^{x-2y} = 27$
15.	Zapisanie nierówności: $\frac{1}{2}x^2 + (m+1)x - m - 1 > 0$
	Wyznaczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego: $\Delta = m^2 + 4m + 3$ i zapisanie nierówności $\Delta < 0$
	Obliczenie pierwiastków równania $m^2 + 4m + 3 = 0$: $m = -3$ lub $m = -1$
	Podanie odpowiedzi: $m \in (-3; -1)$
16.	Zapisanie układu nierówności: $\begin{cases} \frac{m+1}{m} > 0 \\ \frac{m+1}{m} < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$
	Rozwiązanie pierwszej nierówności: $m \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
	Rozwiązanie drugiej nierówności: $m < 0$
	Sformułowanie odpowiedzi: $m \in (-\infty; -1)$
17.	Wykorzystanie wzoru na zamianę podstaw logarytmu i obliczenie: $\log_4 a = \frac{1}{3}$ i $\log_4 b = \frac{1}{8}$
	Przekształcenie wyrażenia $\log_{ab} 4$ do postaci: $\frac{1}{\log_4 a + \log_4 b}$
	Obliczenie logarytmu: $\log_{ab} 4 = \frac{24}{11}$
18.	Zapisanie założenia: $a > 0$
	Zapisanie warunku $\Delta = 0$: $4 + 8\log_2 a = 0$
	Rozwiązanie równania: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
19. a)	Obliczenie a: $a=\sqrt{3}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $h(x)=f(x)-2$ 
19. b)	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x)=\lvert h(x)\rvert$ 
	Sformułowanie odpowiedzi: $m\in\{0\}\cup\langle 2;\infty)$
	Zapisanie układu nierówności: $\begin{cases}\frac{x-3}{x+2}>0\\ 2x+6>0\\ 2x+6\neq 1\end{cases}$
20.	Zapisanie pierwszej nierówności w postaci: $(x-3)(x+2)>0$ i podanie rozwiązania: $x\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$
	Rozwiązanie drugiej nierówności: $x\in(-3;\infty)$
	Uwzględnienie założenia: $x\neq-\frac{5}{2}$
	Podanie odpowiedzi: $D=\left(-3;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{5}{2};-2\right)\cup(3;\infty)$
	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $D=(0;8)$
	Zauważenie, że funkcja f jest malejąca, zatem osiąga najmniejszą wartość dla największego argumentu
21.	Zauważenie, że wyrażenie $8x-x^2$ osiąga największą wartość dla $x=4$ i jest ona równa 16
	Zapisanie równania $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}16=y$ w postaci: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^y=16$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: Liczba $y=-8$ jest najmniejszą wartością funkcji f.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
22.	Zapisanie warunków: $\begin{cases} 16-x^2>0 \\ x^2-3>0 \\ \log_4(x^2-3)\neq 0 \end{cases}$
	Rozwiązanie nierówności $16-x^2>0$: $x\in(-4;4)$ i nierówności $x^2-3>0$: $x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\infty)$
	Stwierdzenie, że $\log_4(x^2-3)\neq 0$, gdy $x^2-3\neq 1$, czyli $x\neq -2$ i $x\neq 2$
	Podanie odpowiedzi: $x\in(-4;-2)\cup(-2;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};2)\cup(2;4)$
23.	Skorzystanie ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu: $\log_6 64=\frac{\log_{12}64}{\log_{12}6}$
	Zapisanie równości: $\log_{12}64=\log_{12}2^6=6\log_{12}2=6a$
	Zapisanie równości: $\log_{12}6=\log_{12}\frac{12}{2}=\log_{12}12-\log_{12}2=1-\log_{12}2=1-a$ i podanie odpowiedzi

8. Ciągi

Zestaw A – odpowiedzi

1. a) $a_n<0$ dla $n=3$, $n=4$,
   $a_n>3$ dla $n=1$, $n\geqslant 6$
   b) $a_n<0$ dla $n=3$, $a_n>3$ dla $n\geqslant 4$
   c) $a_n<0$ dla $n=4k-1$,
   $a_n>3$ dla $n=4k+1$, gdzie $k\in\mathbf{C}$
2. a) $S_{20}=60$ b) $S_{11}=143$
3. $\frac{a_1}{r}=-12$, $a_{13}=0$
4. a) $n=6$ b) $a_1=1$
5. $n=10$, $a_5=0$
6. 5
7. $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{10}=2^{15}$
8. a) $a_n=2n-6$ dla $n\geqslant 1$, tak
   b) $a_1=-3$, $a_n=2n-6$ dla $n\geqslant 2$, nie
   c) $a_1=2$, $a_n=3n^2-3n+1$ dla $n\geqslant 2$, nie
9. a) $a_n=6n-10$ b) $a_n=3n+1$
11. $\frac{1}{2}$, 1, 2
12. a) 2 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
13. b) $a_1=640\cdot 2^7=81\,920$
14. $a_6=8\sqrt{5}$
15. $S_{3k}=93$
16. $\log a_{100}=-97$
17. a) ciąg geometryczny, $S_{10}=62\left(\sqrt{2}+1\right)$
    b) ciąg arytmetyczny, $S_{10}=205$
    c) nie jest arytmetyczny ani geometryczny
18. $r=-\frac{2\sqrt{11}}{9}$ lub $r=\frac{2\sqrt{11}}{9}$, $f_{\min}=-11$
19. a) $b=14$, $c=-8$ b) $b=2$, $c=0$
21. a) $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ b) $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)$
22. a) 0 b) 50
23. a) 200π b) 410π
24. $x\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{5}{12}\pi,\frac{13}{12}\pi,\frac{17}{12}\pi\right\}$
25. a) $\frac{1275}{2}\pi$ b) $\frac{1667}{4}\pi$
26. 3
27. arytmetyczny $a_n=20n-15$,
    geometryczny $b_n=5\cdot 3^{n-1}$
28. $a_n=7\cdot 4^{n-1}$
29. a) $n\in(20;\infty)$ i $n\in\mathbf{N}$ b) $n\in(10\sqrt[3]{2};\infty)$ i $n\in\mathbf{N}$
30. a) 3 b) 6 c) -16 d) 3
31. a) $\frac{4}{3}$ b) -4 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{9}{2}$ e) $-\infty$ f) 2
32. a) 1 b) $2\sqrt{3}$ c) -2 d) 0 e) $-\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{2}$
33. a) 1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{6}$
34. a) $p=1$ b) $p=-\frac{2}{3}$ c) $p=0$ d) $p=-1$
35. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ dla $p=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\frac{1}{3}$ dla $p=-1$,
    $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{p-1}$ dla $p\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$
36. a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{32}{3}$ c) $2\sqrt{2}+2$ d) $-\frac{128}{7}$

37. **a)** $p \in (3;\infty)$ **b)** $p \in (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}) \setminus \{1\}$
c) $p \in (1;\infty)$

38. **a)** $x = 2$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = -\frac{3}{2}$ **d)** $x = -3$

Zestaw B – odpowiedzi

1. D **2.** A **3.** B **4.** A **5.** C **6.** B **7.** A **8.** A

Zestaw C – odpowiedzi

1. 300 ($x = 20$, $y = 15$)
2. 100
3. 740 $\left(\frac{20}{27}\right)$
4. 375 $\left(\frac{3}{8}\right)$
5. 031 $\left(\frac{1}{32}\right)$
6. 123 ($n = 123$)
7. 428 $\left(\frac{3}{7}\right)$
8. 143 (1,43)

Zestaw D – odpowiedzi

1. **b)** $S_{101} = 101$
2. $S_{20} = 160$
3. $m = 2\sqrt[3]{2}$
4. $x = 4$
5. $S_{15} = 4228$
6. $q = \frac{1}{2}$
7. **b)** 4^{10}
8. $b_8 = 2^7$
9. $S = \frac{\pi}{3}$
10. $\frac{16}{3}$
11. $a = 12$, $b = 18$, $c = 27$
12. $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$ lub $a = 26$, $b = 5$, $c = -16$
15. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$
16. $x \in \langle -1; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$
17. $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right\rangle$
18. **a)** $x = -q$, $x = q$ **b)** $x \in (-\infty; 2\rangle$
19. $x = -4$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 6$
20. 438
21. 225
22. **a)** $q = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2$ **b)** $p \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, $S = \frac{p^3}{1-3p+2p^2}$
23. $p \in (-\infty; -2) \cup \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup (2; \infty)$, $S = \frac{(p+3)(p^2-3)^2}{p^2-4}$
24. $a_1 = 19$, $q = \frac{2}{3}$
25. $D = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, $k = 4$, $f(4) = \frac{9}{5}$
26. $m \in \langle 1; \infty)$
27. $\frac{1}{2}$
28. $x \in (-2; 1)$
29. 187
30. $a_1 = 10$, nie jest malejący
31. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, nie jest geometryczny
32. $a = 9$, $b = 6$, $c = 4$
33. $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$, $c = \frac{5}{2}$ lub $a = 5$, $b = 9$, $c = 13$
34. $a_n = 3n + 2$, $b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$
36. $\frac{3}{2}(2^{20} - 1)$
37. $n = 15$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1. a)	Obliczenie: $a_1 = 1$, $a_2 = -3$, $a_3 = 5$
	Sprawdzenie, że $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ i zapisanie wniosku: Ciąg (a_n) nie jest arytmetyczny.
1. b)	Zauważenie, że wyrazy ciągu (a_n) o numerach nieparzystych tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 1 i różnicy 4, oraz obliczenie sumy 51 początkowych wyrazów tego ciągu: $S' = 5151$
	Zauważenie, że wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie −3 i różnicy −4, oraz obliczenie sumy 50 początkowych wyrazów tego ciągu: $S'' = -5050$
	Obliczenie sumy 101 początkowych wyrazów ciągu (a_n): $S_{101} = 101$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
2.	Obliczenie $a_1 = -\frac{3}{2}$ i zapisanie zależności $a_n = S_n - S_{n-1}$, dla $n \geqslant 2$
	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (a_n): $a_n = \frac{n}{2} - 2$
	Zauważenie, że wyrazy ciągu (a_n) o numerach nieparzystych tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym $-\frac{3}{2}$ i różnicy 1
	Obliczenie dwudziestego wyrazu tego ciągu: $a_{39} = \frac{35}{2}$
	Obliczenie sumy: $S = 160$
3.	Zapisanie założenia: $m \in (0;1) \cup (1;\infty)$ oraz warunku: $\log_m x - \log_2 x = \log_4 x - \log_m x$
	Przekształcenie warunku do postaci: $2\log_m x = \frac{3}{2}\log_2 x$
	Przekształcenie warunku do postaci: $4\log_x 2 = 3\log_x m$
	Zapisanie równania: $\log_x 16 = \log_x m^3$
	Obliczenie m: $m = 2\sqrt[3]{2}$
4.	Przekształcenie lewej strony równania do postaci $2^{1+3+5+\ldots+(2x-1)}$ i zauważenie, że wykładnik jest sumą x kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, $x > 0$
	Obliczenie sumy $1+3+5+\ldots+(2x-1)$: x^2
	Zapisanie prawej strony równania w postaci: 2^{2x+8}
	Rozwiązanie równania $x^2 = 2x+8$: $x = -2$ lub $x = 4$ i podanie odpowiedzi: $x = 4$
5.	Zapisanie warunków: $a_1\frac{1-q^5}{1-q} = 4$ i $a_1\frac{1-q^{10}}{1-q} = 132$
	Przekształcenie warunków do postaci: $\frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-q^5}$ i $\frac{a_1}{1-q} = \frac{132}{1-q^{10}}$ i zapisanie równania: $4(1-q^{10}) = 132(1-q^5)$
	Rozwiązanie równania: $q = 2$
	Obliczenie a_1: $a_1 = \frac{4}{31}$
	Obliczenie sumy S_{15}: $S_{15} = 4228$
6.	Zapisanie wzoru ogólnego ciągu (a_n): $a_n = 2q^{n-1}$, $q > 0$
	Zapisanie sumy $S = b_1 + \ldots + b_{10}$ w postaci: $\log_2(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10}) = \log_2\left(2^{10}q^{1+2+\ldots+9}\right)$
	Obliczenie sumy $1+2+3+\ldots+9 = 45$ i zapisanie sumy S w postaci: $S = \log_2\left(2^{10}q^{45}\right)$
	Zapisanie równania $\log_2\left(2^{10}q^{45}\right) = -35$ w postaci: $10 + 45\log_2 q = -35$
	Obliczenie ilorazu: $q = \frac{1}{2}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
7. a)	Zapisanie ilorazu $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ w postaci $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (a_n)
	Sformułowanie wniosku: (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{q}$.
7. b)	Zapisanie warunku $\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1-\frac{1}{q^{20}}}{1-\frac{1}{q}} = 31$ i przekształcenie go do postaci: $31a_1q^{19} = \frac{1-q^{20}}{1-q}$
	Wykorzystanie równości $a_1\frac{1-q^{20}}{1-q} = 124$ i zapisanie warunku w postaci: $a_1^2q^{19} = 4$
	Zapisanie iloczynu $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{20}$ w postaci: $\left(a_1^2q^{19}\right)^{10}$
	Obliczenie wartości iloczynu $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{20}$: 4^{10}
8.	Wykorzystanie sumy $a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}$ do obliczenia wartości iloczynu: $$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{15} = 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot \ldots \cdot 2^{a_{15}} = 2^{105}$$
	Zapisanie iloczynu wyrazów ciągu (b_n) w postaci: $b_1 \cdot b_1 \cdot q \cdot b_1 \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot b_1 \cdot q^{14}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (b_n). Przekształcenie tego iloczynu do postaci: $b_1^{15}q^{1+2+\ldots+14}$
	Przekształcenie iloczynu do postaci: $b_1^{15}q^{105}$ i zapisanie równania: $b_1^{15}q^{105} = 2^{105}$
	Obliczenie ósmego wyrazu ciągu (b_n): $b_8 = b_1q^7 = 2^7$
9.	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu: $P_n = \pi\frac{1}{4^n}$ i zauważenie, że jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $P_1 = \frac{\pi}{4}$ i ilorazie $q = \frac{1}{4}$
	Zauważenie, że $\lvert q \rvert < 1$ i obliczenie sumy wszystkich wyrazów ciągu: $S = \frac{P_1}{1-q} = \frac{\pi}{4} : \frac{3}{4} = \frac{\pi}{3}$
10.	Wprowadzenie oznaczeń: (a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy r i zapisanie ilorazu ciągu geometrycznego w postaci: $q = \frac{a_1+3r}{a_1} = \frac{a_1+19r}{a_1+3r}$
	Przekształcenie równania do postaci: $r(9r - 13a_1) = 0$
	Rozwiązanie równania: $r = 0$ lub $r = \frac{13}{9}a_1$ i odrzucenie pierwszego rozwiązania
	Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego: $q = \frac{16}{3}$
11.	Zapisanie równania dla ciągu geometrycznego: $b^2 = ac$ i arytmetycznego: $2b = a + c - 3$
	Obliczenie b z uwzględnieniem monotoniczności ciągu geometrycznego: $b = 18$
	Zapisanie układu równań: $a + c = 39$ i $ac = 324$ oraz wyprowadzenie równania: $$a^2 - 39a + 324 = 0$$
	Podanie rozwiązania układu równań: $a = 12$, $c = 27$ lub $a = 27$, $c = 12$ i wybór prawidłowej odpowiedzi: $a = 12$, $b = 18$, $c = 27$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
12.	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 2b = a + c \\ (b+4)^2 = (a+1)(c+19) \end{cases}$
	Obliczenie b: $b = 5$ i zapisanie układu równań: $\begin{cases} a + c = 10 \\ (a+1)(c+19) = 81 \end{cases}$
	Wyprowadzenie równania: $c^2 + 8c - 128 = 0$
	Rozwiązanie równania: $c = 8$ lub $c = -16$
	Wyznaczenie szukanych liczb: $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$ lub $a = 26$, $b = 5$, $c = -16$
13.	Oznaczenie przez r różnicy ciągu (x_n) i zapisanie równania: $x_n - x_{n-1} = r$
	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (y_n): $y_n = -2x_n + 4$
	Obliczenie różnicy $y_n - y_{n-1}$: $y_n - y_{n-1} = -2r$
	Sformułowanie wniosku: (y_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $-2r$.
14.	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania: $2ab = c - b$
	Zastąpienie wyrazu $c - b$ ciągu geometrycznego iloczynem $2ab$
	Uzasadnienie, że liczby $2a^2$, $2ab$, $2b^2$ spełniają odpowiedni dla ciągu geometrycznego warunek, np. $(2ab)^2 = 2a^2 2b^2$
15.	Wprowadzenie odpowiednich oznaczeń: $a_n = a_1 q^{n-1}$ i zapisanie równania: $a_1 \frac{1-q^6}{1-q} = 72 a_7 \frac{1-q^3}{1-q}$
	Przekształcenie równania do postaci: $72q^6 - q^3 - 1 = 0$
	Rozwiązanie równania: $q = \frac{1}{2}$ lub $q = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ i odrzucenie drugiego rozwiązania ze względu na monotoniczność ciągu
	Przekształcenie równania $a_2 a_4 = 4$ do postaci: $a_1^2 q^4 = 4$
	Obliczenie pierwszego wyrazu ciągu: $a_1 = 8$
	Zapisanie wzoru ogólnego ciągu (a_n): $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$
16.	Zauważenie, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}$, i zapisanie wzoru ogólnego ciągu: $a_n = -1 + \frac{1}{4}(n-1)$
	Obliczenie dziewiątego i dwudziestego piątego wyrazu ciągu: $a_9 = 1$, $a_{25} = 5$
	Zapisanie warunków $w(1) = 0$ i $w(5) = 0$ w postaci układu równań: $\begin{cases} a + b = -6 \\ 5a + b = -26 \end{cases}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16. cd.	Obliczenie współczynników wielomianu w: $a=-5$, $b=-1$
	Przekształcenie wielomianu do postaci: $w(x)=(x-1)(x+1)(x-5)$
	Rozwiązanie nierówności $w(x)\geqslant 0$: $x\in\langle -1;1\rangle\cup\langle 5;\infty)$
17.	Wyznaczenie dziedziny nierówności: $x\neq\frac{1}{3}$ i różnicy ciągu arytmetycznego: $r=\frac{4x}{3x-1}$
	Wyznaczenie liczby składników sumy: $n=25$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\frac{1250}{3x-1}\geqslant 625$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\frac{1-x}{3x-1}\geqslant 0$
	Rozwiązanie nierówności $(1-x)(3x-1)\geqslant 0$ i podanie odpowiedzi: $x\in\left(\frac{1}{3};1\right\rangle$
18. a)	Zapisanie wzoru wielomianu w postaci: $w(x)=ax^5-aqx^4-2aq^2x^3-2aq^3x^2+aq^4x-aq^5$, gdzie q jest ilorazem ciągu geometrycznego
	Przekształcenie wielomianu do postaci: $w(x)=a(x-q)(x^2-q^2)^2$
	Wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu: $x=-q$ lub $x=q$
18. b)	Wyznaczenie pierwiastków równania: $-(x-2)(x^2-4)^2=0$: $x=-2$ lub $x=2$
	Podanie odpowiedzi: $x\in(-\infty;2\rangle$
19.	Obliczenie a i b: $a=1$, $b=3$
	Zapisanie warunku: $\lvert x-1\rvert-3=2$ lub $\lvert x-1\rvert-3=-2$
	Rozwiązanie równania $\lvert x-1\rvert-3=2$: $x=-4$ lub $x=6$
	Rozwiązanie równania $\lvert x-1\rvert-3=-2$: $x=0$ lub $x=2$ i podanie odpowiedzi
20.	Wyznaczenie różnicy ułamków: $\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}=\frac{438n^2-12n-8}{(n+2)(n+444)}$
	Obliczenie granicy: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{438n^2-12n-8}{(n+2)(n+444)}=438$
21.	Obliczenie granicy ciągu a_n: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-6$
	Obliczenie granicy ciągu b_n: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$
	Obliczenie granicy ciągu c_n: $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=225$
22. a)	Wyznaczenie a_{n+1}: $a_{n+1}=\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2n+3}$
	Wyznaczenie ilorazu q: $q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2n+3}}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2n+1}}=\left(\frac{p}{1-p}\right)^2$
	Sformułowanie wniosku: Dla dowolnego $n\in\mathbf{N}$ iloraz q jest stały, zatem (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
22. b)	Zapisanie warunku zbieżności: $\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 < 1$
	Wyznaczenie wartości parametru p: $p \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$
	Zapisanie sumy S: $S = \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^3}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^2}$
	Uproszczenie wyniku: $S = \frac{p^3}{1-3p+2p^2}$
23.	Zapisanie warunku zbieżności: $\left\lvert\frac{p+3}{p^3+3p^2-3p-9}\right\rvert < 1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\left\lvert\frac{p+3}{(p+3)(p^2-3)}\right\rvert < 1$ i zapisanie założeń: $p \neq -3, p \neq -\sqrt{3}$ i $p \neq \sqrt{3}$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\lvert p^2-3\rvert > 1$
	Wyznaczenie wartości parametru p: $p \in (-\infty; -2) \cup \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup (2; \infty)$
	Zapisanie sumy S: $S = \frac{p^3+3p^2-3p-9}{1-\frac{1}{p^2-3}}$
	Uproszczenie wyniku: $S = \frac{(p+3)(p^2-3)^2}{p^2-4}$
24.	Przekształcenie układu równań do postaci: $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 57 \\ \frac{a_1 q}{1-q^3} = 18 \end{cases}$ gdzie $\lvert q\rvert < 1$
	Kolejne przekształcenie układu: $\begin{cases} a_1 = 57(1-q) \\ a_1 = \frac{18(1-q)(1+q+q^2)}{q} \end{cases}$
	Kolejne przekształcenie układu i zapisanie równania kwadratowego: $6q^2 - 13q + 6 = 0$
	Rozwiązanie równania: $q = \frac{2}{3}$
	Obliczenie pierwszego wyrazu: $a_1 = 19$
25.	Zapisanie nierówności: $\left\lvert\frac{4}{(x-1)^2}\right\rvert < 1$, gdzie $x \neq 1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(x-1)^2 > 4$
	Zapisanie dziedziny funkcji: $D = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ oraz wyznaczenie k: $k = 4$
	Obliczenie $f(4)$: $f(4) = \frac{9}{5}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Zauważenie, że lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym, oraz zapisanie sumy szeregu: $S(x) = \frac{1}{1-2\cos^2 x}$
	Zbadanie warunku zbieżności szeregu: $\lvert 2\cos^2 x \rvert < 1$, czyli $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in C$
	Zauważenie, że w wyznaczonym przedziale funkcja $2\cos^2 x$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle 0; 1)$
	Zauważenie, że funkcja $1 - 2\cos^2 x$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(0; 1\rangle$
	Sformułowanie wniosku: Funkcja $\frac{1}{1-2\cos^2 x}$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle 1; \infty)$.
	Podanie odpowiedzi: $m \in \langle 1; \infty)$
27.	Zapisanie równania: $\frac{3a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^4}{1-q^4}$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = \sqrt{15} \\ \frac{3a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^4}{1-q^4} \end{cases}$ gdzie $\lvert q \rvert < 1$
	Przekształcenie układu: $\begin{cases} a_1 = \sqrt{15}(1-q) \\ a_1^2 = 3(1+q^2) \end{cases}$
	Kolejne przekształcenie układu i zapisanie równania kwadratowego: $2q^2 - 5q + 2 = 0$
	Obliczenie ilorazu ciągu (a_n): $q = \frac{1}{2}$
28.	Zauważenie, że lewa strona nierówności jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie 2 i ilorazie $\frac{x}{2}$, oraz zapisanie sumy szeregu: $S(x) = \frac{2}{1-\frac{x}{2}}$
	Zbadanie warunku zbieżności szeregu: $\left\lvert \frac{x}{2} \right\rvert < 1$, czyli $x \in (-2; 2)$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$
	Podanie odpowiedzi: $x \in (-2; 1)$
29.	Wyznaczenie ilorazu ciągu: $q = \frac{1}{2x-371}$
	Zauważenie, że szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny, gdy $0 < q < 1$. Rozwiązanie nierówności $0 < \frac{1}{2x-371} < 1$: $x > 186$ oraz podanie odpowiedzi: Szukaną liczbą całkowitą jest 187.
30.	Wyznaczenie pierwszego wyrazu ciągu: $a_1 = 10$
	Zauważenie, że ciąg jest malejący, gdy $a_{n+1} - a_n < 0$. Zapisanie różnicy $a_{n+1} - a_n = n - 4$
	Zapisanie odpowiedzi: Różnica dwóch kolejnych wyrazów ciągu $(n-4)$ może przyjmować wartości dodatnie, ujemne i zero, zatem ciąg ten nie jest malejący.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
31.	Obliczenie wyrazu a_2: $a_2 = 3$
	Obliczenie wyrazu a_1: $a_1 = 1$
	Obliczenie wyrazu a_4: $a_4 = 23$ i stwierdzenie, że ciąg nie jest geometryczny, gdyż $\frac{a_4}{a_3} \neq \frac{a_3}{a_2}$
32.	Zapisanie równań: $b = aq$, $c = aq^2$, $a(1+q+q^2) = 19$
	Zapisanie równania: $2(aq+2) = a+3+aq^2$
	Zapisanie równania w postaci: $aq^2 - 2aq + a - 1 = 0$, przekształcenie go kolejno do postaci: $a(q^2+q+1) - 3aq - 1 = 0$, $19 - 3aq - 1 = 0$, $3aq = 18$, skąd $a = \frac{6}{q}$
	Zapisanie równania: $6(1+q+q^2) = 19q$, przekształcenie go do postaci: $6q^2 - 13q + 6 = 0$ i rozwiązanie: $q_1 = \frac{13-5}{12} = \frac{2}{3}$, $q_2 = \frac{13+5}{12} > 1$
	Zauważenie, że w obu przypadkach $a > 0$, więc dla q_2 ciąg nie jest malejący
	Podanie odpowiedzi: $q = \frac{2}{3}$, $a = 9$, $b = 6$, $c = 4$
33.	Zapisanie zależności: $a = b - r$, $c = b + r$, gdzie r jest różnicą ciągu
	Wyznaczenie wartości b z równania $b - r + b + b + r = 27$: $b = 9$
	Zapisanie równania wynikającego z własności ciągu geometrycznego: $81 = (7-r)(2r+19)$
	Rozwiązanie równania: $r = 4$ lub $r = -\frac{13}{2}$
	Wyznaczenie wyrazów ciągu arytmetycznego dla $r = 4$: $a = 5$, $b = 9$, $b = 13$
	Wyznaczenie wyrazów ciągu arytmetycznego dla $r = -\frac{13}{2}$: $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$, $c = \frac{5}{2}$
34.	Oznaczenie różnicy ciągu arytmetycznego przez r i zapisanie warunku: $S_8 = 8a_1 + 28r = 124$, czyli $2a_1 + 7r = 31$
	Zapisanie warunków dla ciągu (b_n): $b_1 = r$, $q = a_1$ oraz $b_1 + b_2 = r(1+a_1) = 18$
	Wyznaczenie $r = \frac{18}{a_1+1}$ i podstawienie do równania $2a_1 + 7r = 31$
	Przekształcenie równania do postaci: $2a_1^2 - 29a_1 + 95 = 0$ i rozwiązanie go: $a_1 = 5$ lub $a_1 = \frac{19}{2}$ (sprzeczne z założeniem $a_1 \in C$)
	Wyznaczenie $r = 3$ i podanie odpowiedzi: $a_n = 3n + 2$, $b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$
35.	Zapisanie ilorazu w postaci: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1^n q^{1+2+\ldots+n-1} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$
	Zapisanie ilorazu w postaci: $a_1 \cdot a_n = a_1^2 q^{n-1}$
	Sprawdzenie, że zachodzą równości: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a_1 q^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$
36.	Zauważenie, że $a_1 > 0$, $q > 0$, oraz przekształcenie drugiego równania do postaci: $a_1 q^3 = 12$
	Przekształcenie pierwszego równania: $a_1 + a_1 q^3 = \frac{27}{2}$, więc $a_1 + 12 = \frac{27}{2}$ i wyznaczenie a_1: $a_1 = \frac{3}{2}$
	Obliczenie ilorazu ciągu: $q = 2$ i obliczenie sumy: $S_{20} = \frac{3}{2}(2^{20} - 1)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
37.	Zapisanie układu równań w postaci: $\begin{cases} a_1q^2 + a_1q^5 = -84 \\ a_1q^3 + a_1q^6 = 168 \end{cases}$
	Obliczenie ilorazu q: $q = -2$
	Obliczenie pierwszego wyrazu ciągu: $a_1 = 3$
	Wyznaczenie S_n: $S_n = 1 - (-2)^n$, zapisanie równania $1 - (-2)^n = 32769$ i wyznaczenie liczby n: $n = 15$

9. Planimetria

Zestaw A – odpowiedzi

1. $P = 20$

2. **a)** $|DB| = \frac{4}{3}$ **b)** $\frac{4}{9}$

3. **a)** $\frac{2}{5}$
b) $\operatorname{tg}|\sphericalangle BAD| = \frac{\sqrt{3}}{6}$

4. **a)** $|DB| = 6\frac{2}{3}$, $|EB| = 5\frac{1}{3}$
b) $|DB| = 5\sqrt{2}$, $|EB| = 4\sqrt{2}$

5. **b)** $P = 25$ **c)** $P = 7{,}5$

6. $P = 24$

7. $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\alpha}$

8. 5, 3, $P = 28$, nie można wpisać okręgu

9. $P = 12\sqrt{3}$ cm^2, 60°

11. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm

12. **a)** $P = 32\sqrt{3}$ **b)** $\frac{4r^2}{P}$

13. **a)** $P = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ **b)** 4, $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

14. **a)** $x = 2\sqrt{5}$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 3\sqrt{3}$

15. $|PB| = 6$ cm, $|BC| = 2$ cm

16. $|AB| = 6$, $|PB| = 8$

17. $|\sphericalangle BSP| = 60°$, $P = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

18. **a)** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm **b)** $2\sqrt{7}$ cm

21. $6\left(\sqrt{2} - 1\right)$ cm

22. $|BC| = 10\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$, $\alpha \in (0°; 60°)$

23. $\frac{1}{8}$

24. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

25. $r = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, $P = 3\left(2 - \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$

Zestaw B – odpowiedzi

1. A **2.** D **3.** B **4.** B **5.** D **6.** D **7.** B **8.** B

Zestaw C – odpowiedzi

1. 970 $\left(|AB| = \frac{6}{13}\sqrt{442}\right)$

2. 848 $\left(a = 600\sqrt{2}\right)$

3. 481 $\left(40\sqrt{145}\right)$

4. 667 $\left(Obw = 30 + 15\sqrt{6}\right)$

5. 388 $\left(\frac{7}{18}\right)$

6. 178 $\left(Obw = 80\sqrt{5}\right)$

Zestaw D – odpowiedzi

1. 6 cm, 4 cm, 4 cm, 2 cm

2. **a)** 5 cm, 3 cm **b)** $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

3. $2\sqrt{3} - 3$

4. $\cos\alpha = \frac{1}{6}$, $\alpha \approx 80°$

5. $3\sqrt{7}$

7. $P_{AMS} = 40$, $P_{BMS} = 80$, $P_{ALS} = 45$, $P_{CLS} = 135$

8. **a)** 4
b) $\cos|\sphericalangle ABD| = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

9. $\cos|\sphericalangle BCD| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $R = \frac{9\sqrt{5}}{4}$, $r = \frac{9}{10}\left(5 - \sqrt{5}\right)$

11. $|DC| = 8{,}5$

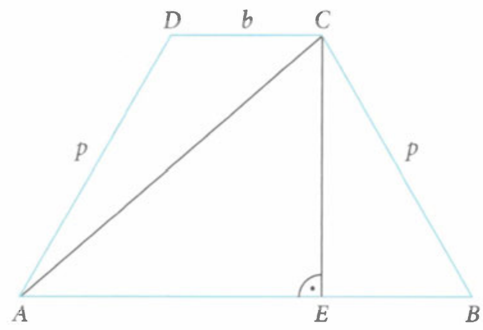
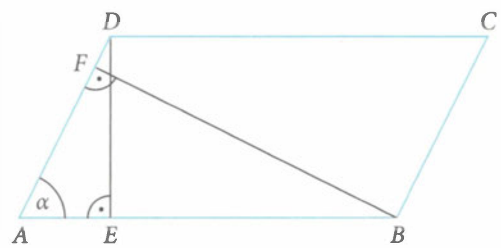
13. $|AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}$

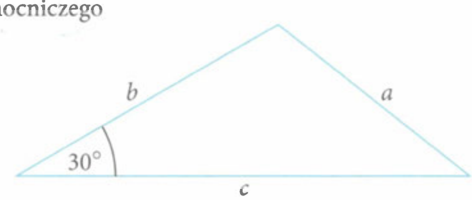
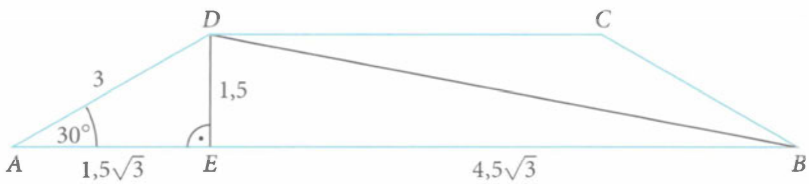
16. $x = \frac{1}{4}$

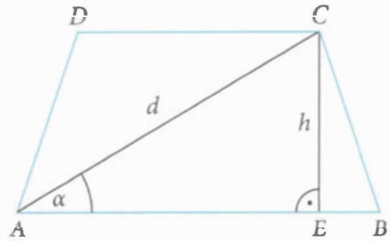
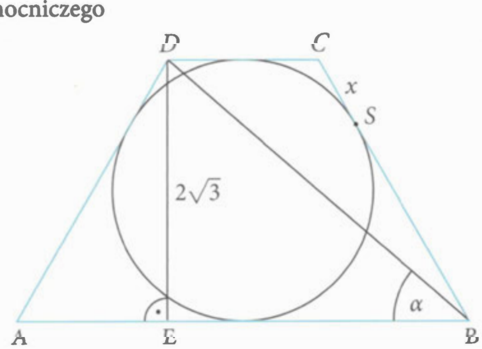
20. $\sqrt{145}$

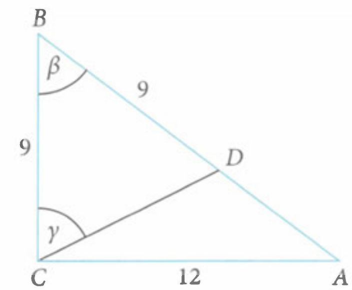
24. $(252 - 144\sqrt{3})\pi$

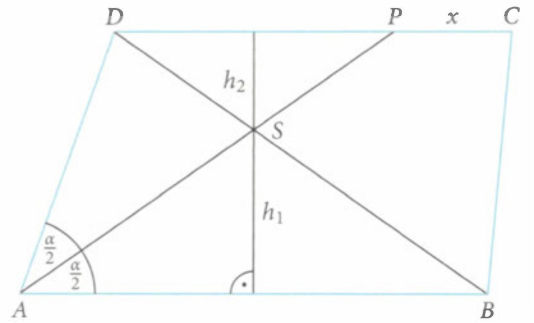
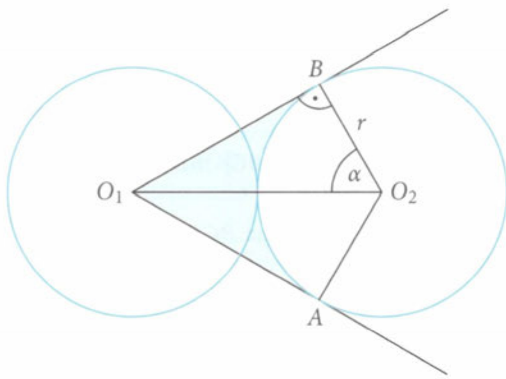
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

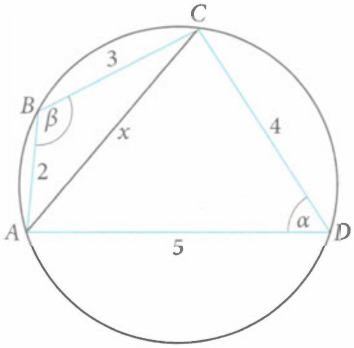
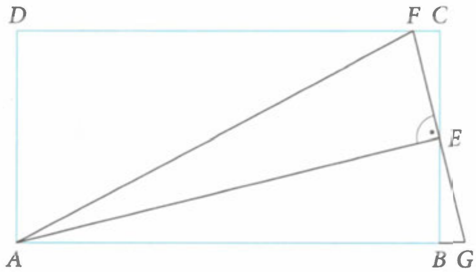
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wykonanie rysunku pomocniczego oraz zapisanie zależności: $a + b = 2p$  $a = \lvert AB \rvert$ $b = \lvert CD \rvert$ $\lvert AD \rvert = \lvert CB \rvert = p$
	Obliczenie długości ramienia trapezu: $p = 4$ cm
	Zauważenie, że w trapezie równoramiennym $a + b = 2\lvert AE \rvert$, i wyznaczenie stąd $\lvert AE \rvert = 4$ cm
	Obliczenie długości odcinków CE i EB: $\lvert CE \rvert = 2\sqrt{3}$ cm, $\lvert EB \rvert = 2$ cm
	Obliczenie długości podstaw trapezu: $\lvert AB \rvert = 6$ cm, $\lvert DC \rvert = 2$ cm
2. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że trójkąty ADE i ABF są podobne, oraz zapisanie proporcji: $\frac{\lvert AD \rvert}{\lvert AB \rvert} = \frac{2{,}4}{4} = \frac{3}{5}$
	Obliczenie długości boków równoległoboku: $\lvert AB \rvert = 5$ cm, $\lvert AD \rvert = 3$ cm
2. b)	Obliczenie: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów długości przekątnej DB: $\lvert DB \rvert = 4$ cm
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów długości przekątnej AC: $\lvert AC \rvert = 2\sqrt{13}$ cm
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów cosinusa kąta rozwartego γ między przekątnymi: $\cos\gamma = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$

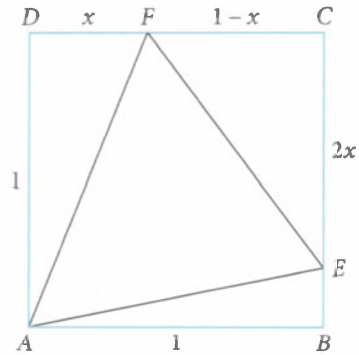
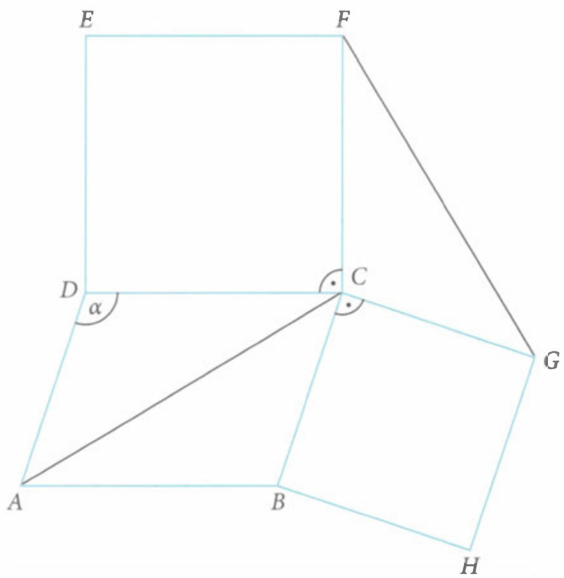
<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="7">3.</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

</td></tr>
<tr><td>Zapisanie twierdzenia sinusów: $\frac{a}{\sin 30^\circ} = 2R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie, i obliczenie stąd długości boku a: $a = 2$</td></tr>
<tr><td>Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}bc\sin 30^\circ$ i zapisanie zależności: $bc = 4\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>Skorzystanie z twierdzenia cosinusów i zapisanie zależności: $b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc = 4$</td></tr>
<tr><td>Zapisanie układu równań:
$$\begin{cases} bc = 4\sqrt{3} \\ b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc = 4 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Podanie długości boków: $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$ lub $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$ i zauważenie, że jest to taki sam trójkąt</td></tr>
<tr><td>Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2}r$ i obliczenie promienia okręgu wpisanego: $r = 2\sqrt{3} - 3$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4.</td><td>Zapisanie zależności: $a^2 = x^2(13 - 12\cos\alpha)$ na podstawie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC, gdzie $a = |AC|$ i $x = |DB|$</td></tr>
<tr><td>Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBC i zapisanie zależności:
$$a^2 = x^2(10 - 6\cos(180^\circ - \alpha)) = x^2(10 + 6\cos\alpha)$$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{1}{6}$</td></tr>
<tr><td>Odczytanie z tablic trygonometrycznych: $\alpha \approx 80^\circ$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">5.</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

</td></tr>
<tr><td>Obliczenie długości odcinka DB: $|DB| = 3\sqrt{7}$</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABD</td></tr>
<tr><td>Porównanie wzorów na pole trójkąta ABD: $P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 1{,}5 = \frac{6\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{7}}{4R}$</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie promienia okręgu opisanego na trapezie: $R = 3\sqrt{7}$</td></tr>
</table>

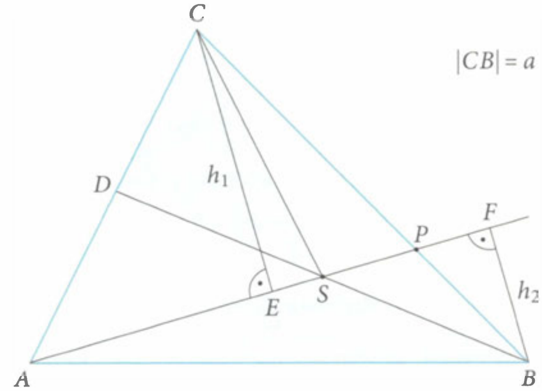
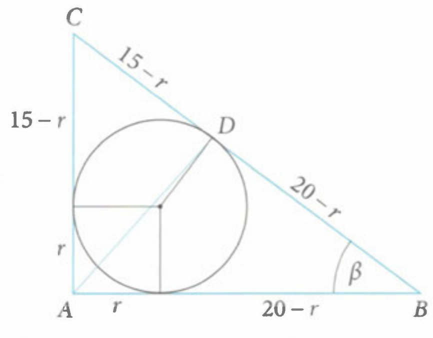
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że w trapezie równoramiennym $ABCD$: $\|AB\| + \|DC\| = 2\|AE\|$
	Zapisanie pola trapezu w postaci: $P = \|AE\|h$
	Wyznaczenie z trójkąta AEC: $h = d\sin\alpha$, $\|AE\| = d\cos\alpha$
	Zapisanie pola trapezu w postaci: $P = \frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$
6. b)	Zapisanie obwodu w postaci: $Obw = 2(\|AB\| + \|DC\|)$
	Wykorzystanie obliczeń z podpunktu a) i zapisanie: $Obw = 4\|AE\| = 4d\cos\alpha$
7.	Oznaczenie pól trójkątów: $P_{AMS} = x$ i $P_{ALS} = y$ oraz zauważenie, że $P_{BMS} = 2x$ i $P_{CLS} = 3y$
	Obliczenie pola trójkąta AMC: $P_{AMC} = 220$
	Obliczenie pola trójkąta ALB: $P_{ALB} = 165$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x + 4y = 220 \\ 3x + y = 165 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań: $x = 40$, $y = 45$
	Obliczenie pól trójkątów: $P_{AMS} = 40$, $P_{BMS} = 80$, $P_{ALS} = 45$, $P_{CLS} = 135$
8. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie długości podstaw: $\|AB\| = 6x$, $\|DC\| = 2x$
	Wyznaczenie długości odcinków: $\|AE\| = 2x$, $\|EB\| = 4x$
	Zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED: $4x^2 + 12 = 16x^2$ i obliczenie $x = 1$ Podanie długości ramienia: $\|AD\| = 4x = 4$

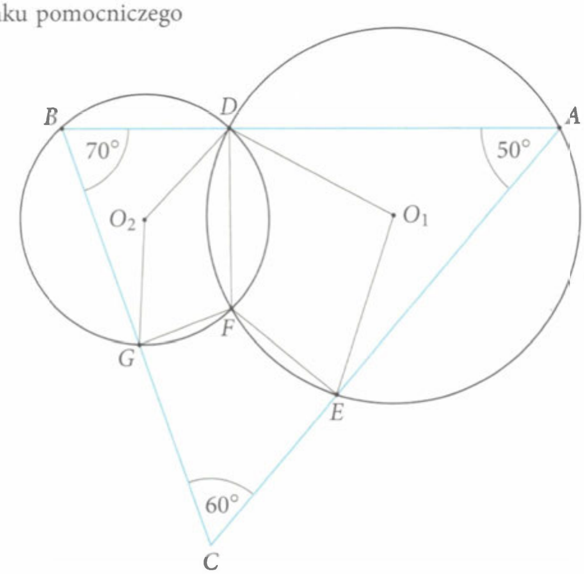
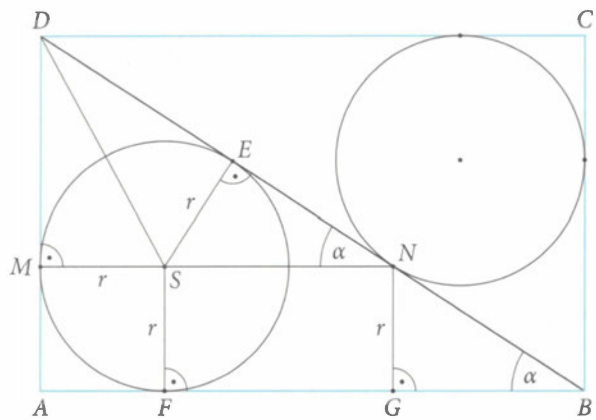
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8. b)	Obliczenie długości przekątnej na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBD: $\lvert DB\rvert = 2\sqrt{7}$
	Obliczenie cosinusa kąta ABD: $\cos\lvert\sphericalangle ABD\rvert = \frac{2\sqrt{7}}{7}$
9.	Wykonanie rysunku pomocniczego i obliczenie długości odcinków AB i DA: $\lvert AB\rvert = 15$, $\lvert DA\rvert = 6$ 
	Obliczenie $\cos\beta$: $\cos\beta = \frac{3}{5}$
	Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD i obliczenie długości CD: $\lvert CD\rvert = \frac{18\sqrt{5}}{5}$
	Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD i obliczenie cosinusa kąta γ: $\cos\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$
	Obliczenie $\sin\beta$: $\sin\beta = \frac{4}{5}$
	Skorzystanie z twierdzenia sinusów dla trójkąta BCD i obliczenie promienia okręgu opisanego na tym trójkącie: $R = \frac{9\sqrt{5}}{4}$
	Obliczenie pola trójkąta BCD: $P = \frac{1}{2}\lvert BC\rvert \cdot \lvert BD\rvert \cdot \sin\beta = \frac{162}{5}$
	Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta BCD: $P = \frac{\lvert BC\rvert + \lvert BD\rvert + \lvert CD\rvert}{2} \cdot r$ i obliczenie promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt: $r = \frac{9}{10}\left(5 - \sqrt{5}\right)$
10.	Oznaczenie miar kątów $\lvert\sphericalangle BAC\rvert = \alpha$ i $\lvert\sphericalangle ABC\rvert = \beta$ oraz zauważenie, że $\lvert\sphericalangle CAD\rvert = 180^\circ - \alpha$ i $\lvert\sphericalangle CBE\rvert = 180^\circ - \beta$
	Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle DCA\rvert = \frac{\alpha}{2}$, $\lvert\sphericalangle ECB\rvert = \frac{\beta}{2}$
	Obliczenie miary kąta $\gamma = \lvert\sphericalangle ECD\rvert$: $\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 135^\circ$
	Wykorzystanie twierdzenia sinusów dla trójkąta ECD: $\frac{\lvert ED\rvert}{\sin\gamma} = 2R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ECD
	Zauważenie, że $\lvert ED\rvert = 2p$ oraz $\sin\lvert\sphericalangle ECD\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	Wyznaczenie długości promienia: $R = p\sqrt{2}$

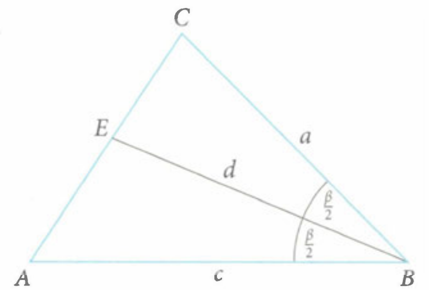
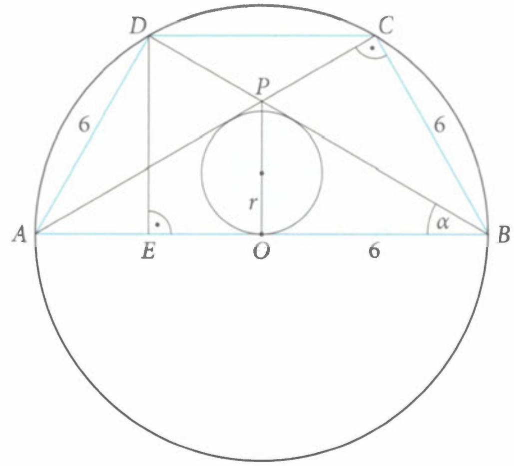
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Uzasadnienie, że $\lvert\sphericalangle APD\rvert = \frac{\alpha}{2}$, czyli trójkąt APD jest równoramienny i $\lvert DP\rvert = 6$
	Zauważenie, że trójkąty ABS i PDS są podobne, więc: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{3}{5}$
	Zapisanie zależności $P_{ABCP} = 2P_{ABS}$ w postaci: $\frac{10+x}{2}(h_1 + h_2) = 10h_1$
	Obliczenie: $x = 2{,}5$ i $\lvert DC\rvert = 8{,}5$
12.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zauważenie, że $\lvert O_1O_2\rvert = 2r$, gdzie r jest promieniem kół 
	Obliczenie: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha = 60^\circ$
	Obliczenie długości odcinka O_1B: $\lvert O_1B\rvert = \sqrt{3}r$ i pola czworokąta AO_1BO_2: $P_1 = \sqrt{3}r^2$
	Wyznaczenie pola wycinka koła AO_2B: $P_2 = \frac{1}{3}\pi r^2$
	Zapisanie pola zacieniowanej figury jako: $P = P_1 - P_2 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}r^2$
	Wyznaczenie pola koła: $S = \pi r^2 = \frac{3\pi P}{3\sqrt{3}-\pi}$

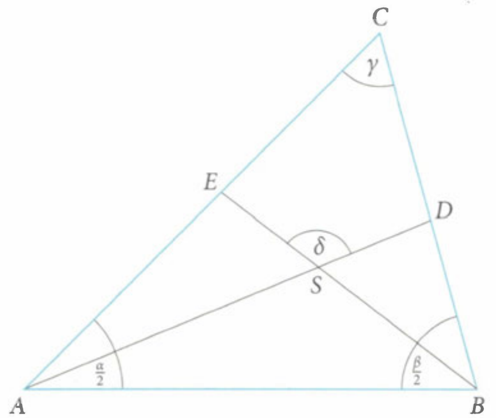
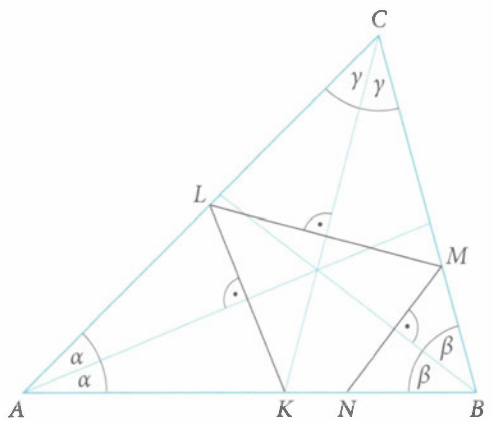
<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="4">13.</td><td>Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń
</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że skoro na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, to $\beta = 180^\circ - \alpha$
Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ADC i ABC:
$x^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos\alpha = 41 - 40\cos\alpha$
$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos\beta = 13 - 12\cos\beta = 13 + 12\cos\alpha$</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie wartości $\cos\alpha$: $41 - 40\cos\alpha = 13 + 12\cos\alpha$, stąd $\cos\alpha = \frac{7}{13}$</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie x: $x^2 = 41 - 40 \cdot \frac{7}{13} = \frac{253}{13}$, czyli $x = \sqrt{\frac{253}{13}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">14.</td><td>Wykonanie rysunku (odcinki AB i EF przedłużamy do przecięcia w punkcie G)
</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że trójkąty ECF i EBG są przystające ($|CE| = |BE|$, $|\sphericalangle CEF| = |\sphericalangle BEG|$ oraz oba trójkąty są prostokątne), zatem $|EF| = |EG|$</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że trójkąty AEF i AEG są przystające ($|EF| = |EG|$, oba trójkąty są prostokątne oraz AE jest ich wspólną przyprostokątną), zatem $|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle EAB|$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">15.</td><td>Oznaczenie punktu przecięcia prostych ME i CD przez N</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że trójkąty AME i DNE są podobne na podstawie cechy KKK, czyli $\frac{|AM|}{|AE|} = \frac{|DN|}{|DE|}$, oraz wyznaczenie $|DN| = \frac{2}{3}|AM|$</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że trójkąty MBP i NDP są podobne na podstawie cechy KKK, czyli $\frac{|BP|}{|BM|} = \frac{|DP|}{|DN|}$, oraz zapisanie $|BP| = \frac{4|AM| \cdot |DP|}{|DN|}$</td></tr>
<tr><td>Wykazanie, że $|BP| = 6|DP|$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego i podanie założenia: $x \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle$ 
	Zapisanie wzoru na pole trójkąta AEF: $P = 1 - P_{ABE} - P_{ECF} - P_{ADF}$
	Wyznaczenie $P(x)$: $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
	Wyznaczenie współrzędnej x_w wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{1}{4}$ i podanie odpowiedzi
17.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że $\|AD\| = \|CG\|$ oraz $\|DC\| = \|CF\|$
	Zauważenie, że $\|\sphericalangle DCB\| = 180° - \alpha$ oraz $\|\sphericalangle FCG\| = 360° - (90° + 90° + 180° - \alpha) = \alpha$
	Zauważenie, że trójkąty ACD i CFG są przystające, więc $\|AC\| = \|FG\|$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
18.	Obliczenie miar dwóch kątów wpisanych opartych na łukach $P_{11}P_{16}$ oraz P_1P_{22}: $$\lvert\sphericalangle P_{16}P_1P_{11}\rvert = 37{,}5^\circ,\ \lvert\sphericalangle P_1P_{11}P_{22}\rvert = 22{,}5^\circ$$
	Obliczenie miary kąta $P_{11}AP_{16}$: $$\lvert\sphericalangle P_{11}AP_{16}\rvert = 180^\circ - (180^\circ - 22{,}5^\circ - 37{,}5^\circ) = 60^\circ$$
19.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń 
	Zauważenie, że z równości $\lvert AD\rvert = \lvert DC\rvert$ wynika równość pól trójkątów ADS i CDS, a z równości $\lvert DS\rvert = \lvert SB\rvert$ – równość pól trójkątów ADS i ASB, czyli $P_{\triangle ADS} = P_{\triangle ASB} = P_{\triangle CDS}$
	Zauważenie, że $P_{\triangle ASC} = 2P_{\triangle ASB}$, czyli $\frac{1}{2}\lvert AS\rvert \cdot h_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\lvert AS\rvert \cdot h_2$, skąd $h_1 = 2h_2$
	Zauważenie, że $\triangle ECP \sim \triangle FBP$ w skali 2, więc $\lvert CP\rvert = 2\lvert PB\rvert$, czyli $\lvert CP\rvert = \frac{2}{3}a$
20.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń (r – promień okręgu wpisanego) 
	Wyznaczenie długości przeciwprostokątnej $\lvert CB\rvert = 25$, zapisanie równania: $15 - r + 20 - r = 25$ i wyznaczenie r: $r = 5$
	Obliczenie $\cos\beta = \frac{4}{5}$, skorzystanie z twierdzenia cosinusów: $$\lvert AD\rvert^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \tfrac{4}{5} = 145$$ i podanie odpowiedzi: $\lvert AD\rvert = \sqrt{145}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
21.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że $\|\sphericalangle GO_2D\| = 140^\circ$, zatem $\|\sphericalangle GFD\| = \frac{360^\circ - 140^\circ}{2} = 110^\circ$, podobnie $\|\sphericalangle DO_1E\| = 100^\circ$, zatem $\|\sphericalangle DFE\| = 130^\circ$
	Obliczenie $\|\sphericalangle EFG\| = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ i sformułowanie wniosku: Ponieważ suma przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta $CEFG$ jest równa 180°, można na nim opisać okrąg.
22.	Wprowadzenie oznaczeń  Zauważenie, że $\|SM\| = \|SE\| = \|SF\| = \|MA\| = \|NG\| = r$, $\|DM\| = \|DE\|$ oraz $\|DE\| = \|BN\|$ Zauważenie, że $MN \parallel AB$, więc $\|\sphericalangle GBN\| = \|\sphericalangle ENS\|$
	Zauważenie, że trójkąty BGN i NES są prostokątne, więc kąty BNG i NSE także są równe. Ponieważ $\|SE\| = \|NG\|$, trójkąty BGN i NES są przystające. Zatem $\|BN\| = \|NS\|$
	Dokończenie dowodu: $\|MN\| = \|SM\| + \|SN\| = \|MA\| + \|BN\| = \|MA\| + \|DE\| = \|MA\| + \|DM\| = \|AD\|$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
23.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń  Zapisanie wzorów na pola trójkątów: $P_{ABC} = \frac{1}{2}ac\sin\beta$, $P_{ABE} = \frac{1}{2}dc\sin\frac{\beta}{2}$, $P_{CBE} = \frac{1}{2}da\sin\frac{\beta}{2}$
	Zapisanie pola trójkąta ABC jako sumy pól trójkątów ABE i CBE: $\frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}dc\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}da\sin\frac{\beta}{2}$
	Skorzystanie ze wzoru $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ i przekształcenie równania do postaci $d = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$
24.	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń, zauważenie, że $\lvert\sphericalangle ADB\rvert = \lvert\sphericalangle ACB\rvert = 90^\circ$ 
	Zauważenie, że $\sin\alpha = \frac{\lvert AD\rvert}{\lvert AB\rvert} = \frac{1}{2}$, więc $\alpha = 30^\circ$. Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle DAE\rvert = 60^\circ$, więc $\lvert AE\rvert = 3$, skąd $\lvert DC\rvert = 6$
	Zauważenie, że $\triangle DPC \sim \triangle APB$ w skali $\frac{1}{2}$
	Obliczenie długości odcinków: $\lvert AC\rvert = 6\sqrt{3}$ i $\lvert DE\rvert = 3\sqrt{3}$
	Zauważenie, że z podobieństwa trójkątów DPC i APB wynika: $\lvert AP\rvert = \frac{2}{3}\lvert AC\rvert = 4\sqrt{3}$, $\lvert OP\rvert = \frac{2}{3}\lvert DE\rvert = 2\sqrt{3}$ oraz obliczenie obwodu trójkąta APB: $p = 12 + 8\sqrt{3}$
	Obliczenie pola trójkąta APB na dwa sposoby: $P = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2\sqrt{3} = \frac{p}{2}r = (6+4\sqrt{3})r$. Wyznaczenie $r = 12 - 6\sqrt{3}$ i obliczenie pola koła $P_K = (252 - 144\sqrt{3})\pi$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
25.	Zauważenie, że odcinki AD i BE są zawarte w dwusiecznych odpowiednich kątów trójkąta ABC, i wprowadzenie oznaczeń 
	Obliczenie miary kąta δ: $\delta = \lvert\sphericalangle ASB\rvert = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
	Zauważenie, że jeśli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to $\delta + \gamma = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ$, co oznacza, że na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg
26.	Wprowadzenie oznaczeń  Zapisanie równania $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ i stwierdzenie, że $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$
	Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle NKL\rvert = 90^\circ + \alpha$ oraz $\lvert\sphericalangle LMC\rvert = 90^\circ - \gamma$, $\lvert\sphericalangle NMB\rvert = 90^\circ - \beta$, skąd $\lvert\sphericalangle NML\rvert = \beta + \gamma$
	Wyznaczenie sumy kątów: $\lvert\sphericalangle NKL\rvert + \lvert\sphericalangle NML\rvert = 180^\circ$ i sformułowanie wniosku: Na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg, gdyż sumy jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°.

10. Geometria analityczna

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x+\sqrt{2}-2$ **b)** $y=-\sqrt{3}x+1$

2. **a)** 30° **b)** 150° **c)** 135° **d)** 60°

3. **a)** równoległe dla $a=1$,
prostopadłe dla $a=0$, $a=-1$
b) równoległe dla $a=\frac{1}{2}$, $a=2$,
prostopadłe dla $a=\frac{4}{3}$

4. $l\colon y=-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}-1$,
$k\colon y=\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}-1$
lub $l\colon y=\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}-1$,
$k\colon y=-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}-1$

5. $m\in(-\infty;-2\rangle\cup\left\langle\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$

6. $m\in\left\langle-\frac{1}{2};1\right\rangle$

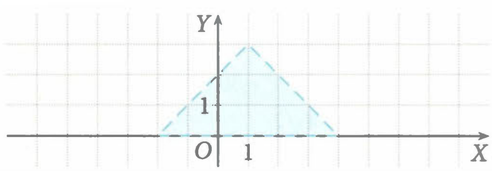
7. $m\in(-\infty;-2\rangle$

8. **a)** $a\in(-4;-2)$ **b)** $a\in(-2;-1)$
c) $a\in(-\infty;-4)\cup(-1;2)\cup(2;\infty)$

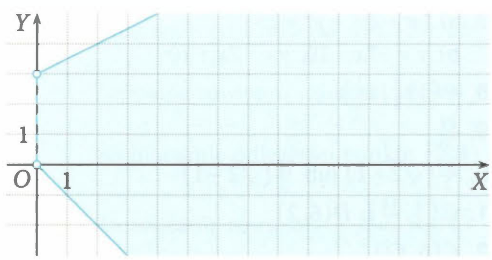
9. $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;3)$

10. $P=6{,}4$

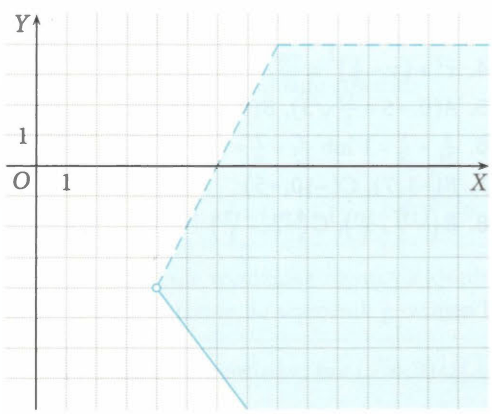
11. **a)**



b)



c)



12. **a)** $\begin{cases} y\geqslant -x \\ y<-x+4 \\ x\leqslant 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y\leqslant x+1 \\ y\leqslant -2x+10 \\ y\geqslant -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y\leqslant -4x+13 \\ y\leqslant x+3 \\ x>-2 \\ y>-3 \end{cases}$

13. **a)** $P(1,4)$
b) $2x+y-7=0$, $P_1(0,7)$, $P_2(4,-1)$

14. $A(-3,7)$

15. $B(5,1)$, $C(0,6)$

16. $y=-4x-14$ lub $y=-4x+28$

17. $\left(-\sqrt{3},1\right)$, $\left(\sqrt{3},1\right)$, $(0,4)$

18. **a)** styczne zewnętrznie
b) jeden okrąg leży wewnątrz koła ograniczonego drugim okręgiem
c) wzajemnie zewnętrzne

19. **a)** $(x-1)^2+(y+1)^2=5$
b) $(x+2)^2+(y-1)^2=10$

20. **a)** $(x+1)^2+(y-2)^2=4$, $(x+1)^2+(y-2)^2=324$
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$, $(x+1)^2+(y-2)^2=36$

21. **a)** $(x-3)^2+y^2=50$
b) $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

22. **a)** $(x+2)^2+(y-3)^2=5$, $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
b) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$, $(x-3)^2+(y-4)^2=5$

23. **a)** $P=\frac{25}{2}$ **b)** $P=18$

24. $C(-3,3)$ lub $C(5,-1)$, $P=20$

25. **a)** $\sqrt{2}$, dwa **b)** $\frac{14}{5}$, zero **c)** $\sqrt{5}$, jeden

26. **a)** $x+2y=0$, $2x-y=0$
b) $x-2y+4=0$, $x-2y-6=0$
c) $x+2y=0$, $x+2y-10=0$

27. **a)** $a=3\sqrt{2}-1$ lub $a=-3\sqrt{2}-1$
b) $a=3\sqrt{5}+7$ lub $a=-3\sqrt{5}+7$
c) $a=0$ lub $a=2{,}4$

28. **a)** $(1,-3)$, $(2,4)$ **b)** $(0,0)$, $(3,-3)$, $(3,3)$
c) $(-3,1)$, $(1,-3)$, $(3,-1)$
d) $(2,1)$ **e)** $(2,-1)$, $(4,5)$
f) $(4,4)$, $(5,3)$

29. a) $\begin{cases} x^2+y^2<16 \\ (x-2)^2+y^2 \geqslant 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+(y-3)^2>4 \\ x^2+(y-3)^2 \leqslant 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2 \leqslant 17 \\ y>x+2 \end{cases}$

30. a) nie można wpisać okręgu, promień okręgu opisanego $R=\frac{5\sqrt{5}}{2}$
b) promień okręgu wpisanego $r=\frac{6\sqrt{10}}{5}$, nie można opisać okręgu

31. a) $P(1,5)$ b) $P(-2,13)$ c) $P\left(\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$

32. a) $A(-2,-5)$, $B(7,0)$, $C(9,8)$, $D(0,3)$
b) $A(1,-1)$, $B(7,-3)$, $C(4,3)$, $D(-2,5)$
c) $A(1,-7)$, $B(2,-2)$, $C(0,4)$, $D(-1,-1)$
d) $A(2,-1)$, $B(10,-5)$, $C(16,1)$, $D(8,5)$

33. $m \geqslant -3$

34. a) $A(-3,-2)$, $B(5,2)$, $C(7,8)$, $D(-1,4)$
b) $|\sphericalangle ABC|=135^\circ$ c) $R=10$

35. $S(1,6)$

36. $B(5,-3)$, $C(3,4)$, $P=24$

37. $D(-1,3)$, $\sin|\sphericalangle BAD|=\frac{4}{5}$, $R=\frac{5\sqrt{13}}{4}$

38. $8\pi-16$

39. 20

40. 16,4

41. a) $k=2$, $P(-5,-2)$ b) $k=-2$, $P\left(\frac{5}{3},-2\right)$

42. a) $k=-1$, $P(3,1)$
b) $k=-\frac{1}{3}$, $P(5,3)$ lub $k=\frac{1}{3}$, $P(11,6)$

43. a) $(x+6)^2+(y-3)^2=9$, $(x-6)^2+(y+3)^2=9$
b) $(x+3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$, $(x-3)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=9$

Zestaw B – odpowiedzi

1. B **2.** D **3.** B **4.** A **5.** D **6.** C **7.** B **8.** C

Zestaw C – odpowiedzi

1. 108 $\left(3\sqrt{13}\right)$

2. 261 $\left(Obw=5\sqrt{5}+15\right)$

3. 424 $\left(|AB|=30\sqrt{2}\right)$

4. 447 $\left(b=-2\sqrt{5}\right)$

5. 600 (6)

6. 184 $\left(|\vec{u}|=20\sqrt{85}\right)$

7. 848 $\left(m=6\sqrt{2}\right)$

8. 112 $\left(p=\frac{9}{8}\right)$

Zestaw D – odpowiedzi

1. $a \in \langle -1;1) \cup (1;3\rangle$

2. $P=13\frac{1}{2}$

3. $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}$

4. $m<0$ lub $m>\frac{12}{5}$

5. $8\sqrt{2}$

6. a) $B(-1,-3)$, $C(8,0)$ b) $\frac{7\sqrt{10}}{5}$, $P=21$

7. $\sin|\sphericalangle ABC|=\frac{9\sqrt{85}}{85}$, $R=\frac{5\sqrt{17}}{6}$

8. $x^2+(y-1)^2=5$

9. $C(-4,7)$ lub $C(-8,3)$, $P=24$

10. $y=\sqrt{3}x$, $y=\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$

11. $D(1,6)$, 45°

12. $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$

13. $P=33$, $R=\frac{65\sqrt{5}}{22}$

14. a) $S_{AB}\left(3,-\frac{7}{2}\right)$, $S_{BC}\left(4,-\frac{1}{2}\right)$, $S_{CD}\left(1,\frac{11}{2}\right)$
b) $|\sphericalangle AOB|=45^\circ$, $P=30$

15. $Obw=8\sqrt{5}+4\sqrt{2}$

16. $A(6,-3)$, $B(-6,9)$

17. a) $(x+2)^2+y^2=25$
b) $y=-7x-10$, $y=-7x+10$

18. $P\left(12\frac{2}{3},1\frac{1}{3}\right)$

19. $\frac{11}{35}$

20. $\frac{25}{2}(\sqrt{2}+1)$ lub $\frac{25}{2}(\sqrt{2}-1)$

21. $C\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3}\right)$, $D(6,2)$

22. $C(6,12)$

23. $(x+1)^2+(y-5)^2=25$, $a<-\frac{8}{15}$

24. $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$

25. $A\left(0,-5+\frac{25}{6}\sqrt{3}\right)$, $B(0,-5)$, $C\left(2\sqrt{3},\frac{8}{3}\sqrt{3}-5\right)$

26. $\frac{x}{24}+\frac{y}{3}=1$ lub $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}=1$

27. $B(-1,7)$, $C(-10,-5)$

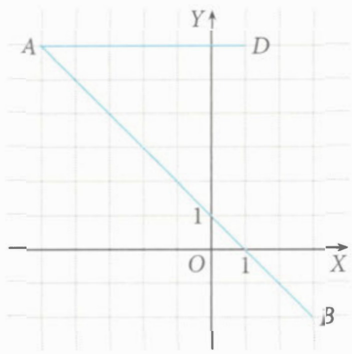
28. $B\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$, $C\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

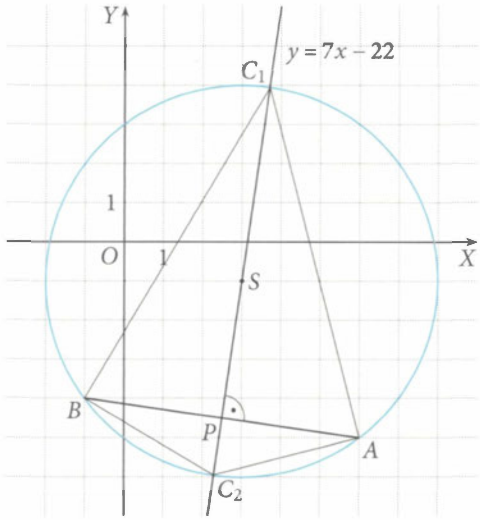
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Przekształcenie układu równań do postaci: $\begin{cases} y=-1-ax \\ -x(a+2)(a-1)=a+2 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań dla $a=-2$: $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y=2x-1 \end{cases}$
	Sprawdzenie, że dla $a=1$ układ równań jest sprzeczny
	Rozwiązanie układu równań dla $a \neq -2$ i $a \neq 1$: $x=\frac{-1}{a-1}$, $y=\frac{1}{a-1}$
	Przekształcenie nierówności $\lvert x-y\rvert \geqslant 1$ do postaci: $\frac{2}{\lvert a-1\rvert} \geqslant 1$
	Rozwiązanie nierówności $\frac{2}{\lvert a-1\rvert} \geqslant 1$: $a \in \langle -1;1) \cup (1;3\rangle$
2.	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} -a+3=2b \\ -1+3b=2-3a \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań: $a=-1$ i $b=2$
	Wyznaczenie współrzędnych punktów B i C: $B(-4,0)$, $C(5,0)$
	Obliczenie pola trójkąta ABC: $P=13\frac{1}{2}$
3.	Zapisanie równania szukanej prostej $y=ax+b$ w postaci: $ax-y-2a-\frac{5}{2}=0$
	Wyznaczenie odległości punktu $(2,4)$ od powyższej prostej: $d=\frac{13}{2\sqrt{a^2+1}}$
	Rozwiązanie równania $\frac{13}{2\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{13}$: $a=-\frac{3}{2}$, $a=\frac{3}{2}$
	Podanie odpowiedzi: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}$
4.	Przekształcenie układu równań: $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=mx+(2m+3) \end{cases}$ do postaci: $x^2+(mx+(2m+3))^2=9$
	Obliczenie wyróżnika równania kwadratowego $(m^2+1)x^2+2m(2m+3)x+4m^2+12m=0$ i stwierdzenie, że wyróżnik powinien być dodatni: $\Delta=4m(5m-12)>0$
	Podanie odpowiedzi: $m \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{12}{5};\infty\right)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5.	Zauważenie, że okrąg O_0 ma środek w punkcie $(3,1)$ i promień 1
	Zauważenie, że skoro okręgi O_1 i O_2 leżą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i są styczne do obu osi układu współrzędnych, to ich równanie jest postaci: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$, gdzie $r>0$
	Zapisanie warunku styczności okręgów: okręgi są styczne zewnętrznie, czyli odległość środków tych okręgów jest równa sumie ich promieni, zatem $\sqrt{(r-3)^2+(r-1)^2}=r+1$
	Przekształcenie równania do postaci: $r^2-10r+9=0$ i rozwiązanie go: $r_1=1$, $r_2=9$
	Zapisanie współrzędnych środków okręgów O_1 i O_2: $S_1(1,1)$, $S_2(9,9)$
	Obliczenie odległości między punktami S_1 i S_2: $8\sqrt{2}$
6. a)	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y-5x=2 \\ 4y+x=8 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu A: $A(0,2)$
	Zapisanie współrzędnych punktów B i C w postaci: $B(a,5a+2)$, $C\left(b,-\frac{1}{4}b+2\right)$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a+b=7 \\ 5a+2-\frac{1}{4}b+2=-3 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktów B i C: $B(-1,-3)$, $C(8,0)$
6. b)	Zapisanie równania prostej k: $x-3y-8=0$
	Obliczenie odległości punktu A od prostej k: $d=\frac{7\sqrt{10}}{5}$
	Obliczenie długości odcinka BC: $\|BC\|=3\sqrt{10}$ i pola trójkąta ABC: $P=21$
7.	Obliczenie długości boków trójkąta ABC: $\|AB\|=\sqrt{17}$, $\|BC\|=2\sqrt{5}$, $\|AC\|=3\sqrt{5}$
	Wyznaczenie cosinusa kąta $\alpha=\|\sphericalangle ABC\|$ na podstawie twierdzenia cosinusów: $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{85}}{85}$
	Uzasadnienie, że skoro $\cos\alpha<0$, to trójkąt jest rozwartokątny
	Obliczenie $\sin\alpha$ z wykorzystaniem jedynki trygonometrycznej: $\sin\alpha=\frac{9\sqrt{85}}{85}$
	Skorzystanie z twierdzenia sinusów i obliczenie promienia okręgu opisanego na trójkącie: $R=\frac{\|AC\|}{2\sin\alpha}=\frac{5\sqrt{17}}{6}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8.	Obliczenie odległości między prostymi $y=2x+6$ i $y=2x-4$: $d=2\sqrt{5}$
	Zapisanie współrzędnych środka okręgu: $S(0,b)$ i obliczenie promienia okręgu: $r=\frac{d}{2}=\sqrt{5}$
	Obliczenie odległości środka okręgu S od prostych $y=2x+6$ i $y=2x-4$: $d_1=\frac{\lvert 6-b\rvert}{\sqrt{5}}$, $d_2=\frac{\lvert b+4\rvert}{\sqrt{5}}$
	Zapisanie równania: $\frac{\lvert 6-b\rvert}{\sqrt{5}}=\frac{\lvert b+4\rvert}{\sqrt{5}}$ i wyznaczenie parametru b: $b=1$
	Zapisanie równania okręgu: $x^2+(y-1)^2=5$
9.	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+6x+y^2-4y-13=0 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu A: $A(-2,-3)$ lub $A(2,1)$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu B: $B(2,1)$ lub $B(-2,-3)$
	Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu: $S(-3,2)$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu C: $C(-4,7)$ lub $C(-8,3)$
	Obliczenie długości boków AB i BC: $\lvert AB\rvert=4\sqrt{2}$, $\lvert BC\rvert=6\sqrt{2}$
	Zauważenie, że trójkąt ABC jest prostokątny, i obliczenie pola: $P=24$
10.	Zapisanie równania stycznej do okręgu w postaci: $\sqrt{3}x-y+b=0$
	Wyznaczenie odległości środka okręgu $S(4,0)$ od stycznej: $d=\frac{\lvert 4\sqrt{3}+b\rvert}{2}$
	Zapisanie równania: $\frac{\lvert 4\sqrt{3}+b\rvert}{2}=2\sqrt{3}$ i rozwiązanie go: $b=0$, $b=-8\sqrt{3}$
	Podanie odpowiedzi: $y=\sqrt{3}x$, $y=\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$
11.	Zapisanie równania okręgu w postaci: $(x+2)^2+(y-1)^2=34$
	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB}=-1$
	Wyznaczenie równania prostej DC: $y=-(x-3)+4$, czyli $y=-x+7$
	Wyznaczenie drugiego rozwiązania układu równań: $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=34 \\ y=-x+7 \end{cases}$ i podanie współrzędnych punktu B: $B(1,6)$

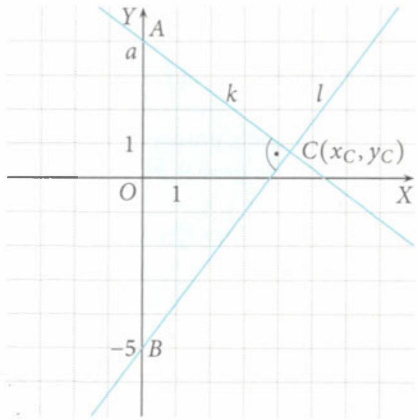
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11. cd.	Narysowanie kąta BAD 
	Podanie miary kąta: 45°
12.	Wyznaczenie prostej, na której leżą środki obu okręgów: $y = 2x - 4$
	Zauważenie, że równanie stycznej ma postać: $y = -\frac{1}{2}x + b$
	Zauważenie, że środek $S(6, 8)$ jest oddalony od stycznej o 10, oraz zapisanie równania: $\frac{\left\|\frac{1}{2}\cdot 6+8-b\right\|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}} = 10$
	Rozwiązanie równania: $b = 11 - 5\sqrt{5}$ lub $b = 11 + 5\sqrt{5}$
	Wybranie poprawnej odpowiedzi: $y = -\frac{1}{2}x + 11 - 5\sqrt{5}$
13.	Obliczenie współrzędnych punktu A: $A(-1, 2)$
	Obliczenie współrzędnych punktu B: $B(7, -4)$
	Wyznaczenie równania prostej AB: $3x + 4y - 5 = 0$
	Obliczenie odległości punktu C od prostej AB: $d = \frac{33}{5}$
	Obliczenie długości boku AB: $\|AB\| = 10$ i pola trójkąta ABC: $P = 33$
	Obliczenie długości boków BC i AC: $\|BC\| = 13$, $\|AC\| = 3\sqrt{5}$
	Obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie: $R = \frac{\|AB\|\cdot\|BC\|\cdot\|AC\|}{4P} = \frac{65\sqrt{5}}{22}$
14. a)	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i C: $A(1, -2)$, $C(3, 4)$
	Obliczenie współrzędnych punktu D: $D(-1, 7)$
	Obliczenie współrzędnych punktu B: $B(5, -5)$
	Wyznaczenie środków pozostałych boków: $S_{AB}\left(3, -\frac{7}{2}\right)$, $S_{BC}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$, $S_{CD}\left(1, \frac{11}{2}\right)$
14. b)	Wyznaczenie długości odcinków AB, BO i AO: $\|AB\| = 5$, $\|BO\| = 3\sqrt{5}$, $\|AO\| = \sqrt{10}$
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów: $\cos\|\sphericalangle AOB\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, stąd $\|\sphericalangle AOB\| = 45°$
	Obliczenie pola równoległoboku: $P = 2\|AO\|\cdot\|BO\|\cdot\sin\|\sphericalangle AOB\| = 30$

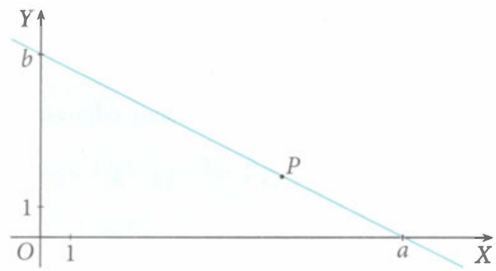
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15.	Wyznaczenie równania prostej BC: $y=-2x+10$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y=-2x+10 \\ y=-x+4 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu B: $B(6,-2)$
	Wyznaczenie równania prostej AC: $y=x+4$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y=x+4 \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu A: $A(-2,2)$
	Obliczenie obwodu trójkąta: $Obw=8\sqrt{5}+4\sqrt{2}$
16.	Wyznaczenie równania prostej AC: $y=-\frac{1}{2}x$
	Wyznaczenie współrzędnych środka $S(2,-1)$ odcinka AC jako punktu wspólnego prostych: $y=-\frac{1}{2}x$ i $y=2x-5$
	Obliczenie współrzędnych punktu A: $A(6,-3)$
	Wyznaczenie równania prostej AB: $y=-x+3$
	Zapisanie współrzędnych punktu B w postaci: $B(x,-x+3)$
	Obliczenie długości boków AC i BC: $\lvert AC\rvert=4\sqrt{5}$, $\lvert BC\rvert=\sqrt{(x+2)^2+(2-x)^2}$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu B z równania $(x+2)^2+(2-x)^2=80$: $B(-6,9)$
17. a)	Zapisanie równania okręgu w postaci: $(x-a)^2+y^2=r^2$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} (1-a)^2+16=r^2 \\ (-6-a)^2+9=r^2 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań i podanie odpowiedzi: $(x+2)^2+y^2=5^2$
17. b)	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB}=\frac{1}{7}$
	Zapisanie równania prostej prostopadłej w postaci ogólnej: $-7x-y+b=0$
	Zapisanie równania: $\frac{\lvert b\rvert}{\sqrt{50}}=\sqrt{2}$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $y=-7x-10$, $y=-7x+10$
18.	Zapisanie środków i promieni okręgów: $S_1(16,0)$, $r_1=2$, $S_2(6,4)$, $r_2=4$
	Zauważenie, że skala jednokładności jest równa $-\frac{r_2}{r_1}=-2$
	Oznaczenie przez $P(x,y)$ środka jednokładności i zapisanie równania $\overrightarrow{PS_2}=-2\overrightarrow{PS_1}$ w postaci: $[6-x,4-y]=2[x-16,y]$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $P\left(12\frac{2}{3},1\frac{1}{3}\right)$

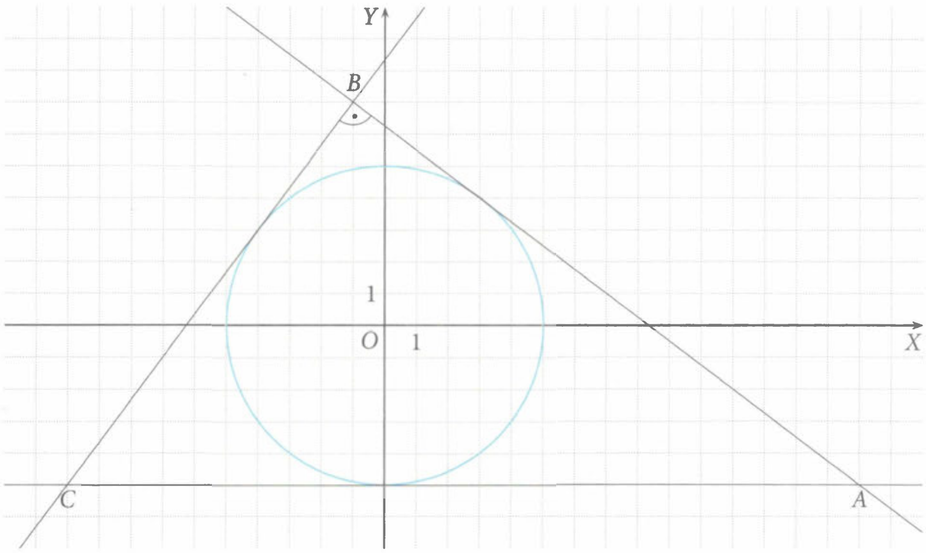
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
19.	Zapisanie prostej w postaci ogólnej: $21x - 28y - 122 = 0$
	Obliczenie odległości punktu S od danej prostej: $d = \frac{11}{35}$ i podanie **odpowiedzi: Promień okręgu** jest równy $\frac{11}{35}$.
20.	Zapisanie **równania** okręgu w postaci: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5^2$, wykonanie rysunku **i wprowadzenie** oznaczeń: S – **środek** okręgu  Zauważenie, że warunki zadania spełniają trójkąty ABC_1 i ABC_2 (C_1C_2 jest średnicą okręgu)
	Obliczenie długości odcinka AP jako odległości punktu A od prostej $7x - y - 22 = 0$: $\lvert AP\rvert = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
	Zauważenie, że $\lvert SC_1\rvert = \lvert SC_2\rvert = \lvert SA\rvert = 5$ (promienie okręgu), zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PAS i obliczenie $\lvert SP\rvert$: $\lvert SP\rvert = \sqrt{\lvert SA\rvert^2 - \lvert PA\rvert^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
	Obliczenie długości odcinka PC_2: $\lvert PC_2\rvert = \lvert SC_2\rvert - \lvert SP\rvert = \frac{5(2-\sqrt{2})}{2}$
	Obliczenie długości odcinka PC_1: $\lvert PC_1\rvert = \lvert SP\rvert + \lvert SC_1\rvert = \frac{5(2+\sqrt{2})}{2}$
	Obliczenie pól trójkątów ABC_1 i ABC_2: $P_1 = \frac{1}{2}\lvert AB\rvert \cdot \lvert PC_1\rvert = \frac{25}{2}(\sqrt{2}+1)$ $P_2 = \frac{1}{2}\lvert AB\rvert \cdot \lvert PC_2\rvert = \frac{25}{2}(\sqrt{2}-1)$
21.	Zauważenie, że czworokąt $ABCD$ jest deltoidem, zatem prosta BD jest prostopadła do prostej AC. Wyznaczenie równania prostej BD: $y = -x + 8$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia prostych AC i BD: $S(3,5)$ oraz zauważenie, że punkt S jest środkiem odcinka BD
	Wyznaczenie współrzędnych punktu D: $\frac{x_D+0}{2} = 3$ i $\frac{y_D+8}{2} = 5$, czyli $D(6,2)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
21. cd.	Zauważenie, że trójkąt ADC jest prostokątny, więc prosta CD jest prostopadła do prostej AD. Wyznaczenie równania prostej CD: $y=-\frac{4}{5}(x-6)+2$
	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} y=x+2 \\ y=-\frac{4}{5}(x-6)+2 \end{cases}$ i zapisanie współrzędnych punktu C: $C\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3}\right)$
22.	Przekształcenie podanego równania prostej do postaci kierunkowej: $y=-\frac{2}{19}x-\frac{52}{19}$ oraz wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej BC: $a_{BC}=\frac{19}{2}$
	Wyznaczenie równania prostej BC: $y=\frac{19}{2}x-45$ oraz zapisanie współrzędnych punktu C w postaci $C\left(x,\frac{19}{2}x-45\right)$
	Zapisanie równania $\|AC\|=\|BC\|$: $\sqrt{(x+7)^2+\left(\frac{19}{2}x-45+2\right)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(\frac{19}{2}x-45+7\right)^2}$
	Rozwiązanie równania: $x=6$
	Wyznaczenie drugiej współrzędnej punktu C: $y=12$ i podanie odpowiedzi: $C(6,12)$
23.	Zauważenie, że okrąg ma równanie: $(x+1)^2+(y-r)^2=r^2$
	Podstawienie do równania okręgu współrzędnych punktu A i wyznaczenie r: $r=5$. Zapisanie równania okręgu: $(x+1)^2+(y-5)^2=25$
	Zauważenie, że prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem, gdy odległość środka okręgu $S(-1,5)$ od prostej jest większa od promienia okręgu
	Obliczenie odległości punktu S od prostej $x-ay+4=0$: $d=\frac{\|3-5a\|}{\sqrt{a^2+1}}$
	Rozwiązanie nierówności $d>3$: $a<-\frac{8}{15}$ i podanie odpowiedzi
24.	Zapisanie równania $\|AS\|^2=\|BS\|^2$: $(x+5)^2+(y-3)^2=x^2+(y-6)^2$, gdzie $S(x,y)$ jest środkiem okręgu
	Przekształcenie powyższego rówania do postaci: $10x+6y=2$
	Zapisanie układu równań spełnianych przez współrzędne punktu S: $\begin{cases} 10x+6y=2 \\ x-3y=-1 \end{cases}$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu S: $S\left(0,\frac{1}{3}\right)$
	Wyznaczenie kwadratu długości promienia okręgu: $r^2=\|SB\|^2=\frac{289}{9}$ i zapisanie równania okręgu: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$

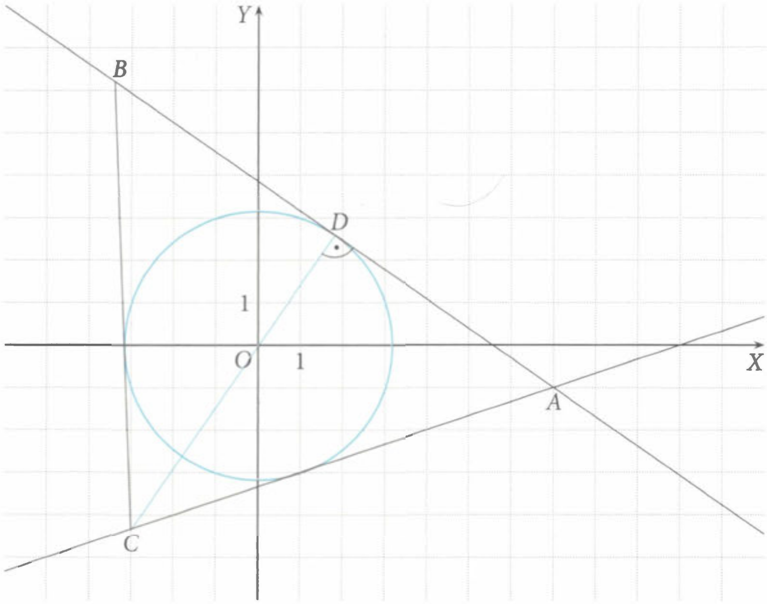
<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="6">25.</td><td>Zapisanie równań prostych zawierających przyprostokątne: l: $y = \frac{4}{3}x - 5$ i k: $y = -\frac{3}{4}x + a$ i zauważenie, że $a > 0$</td></tr>
<tr><td>Wykonanie rysunku oraz zauważenie, że przeciwprostokątna ma długość $a + 5$, a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa x_C


</td></tr>
<tr><td>Rozwiązanie równania $\frac{4}{3}x_C - 5 = -\frac{3}{4}x_C + a$: $x_C = \frac{12}{25}(a+5)$</td></tr>
<tr><td>Zapisanie wzoru na pole trójkąta: $P = \frac{6}{25}(a+5)^2$</td></tr>
<tr><td>Rozwiązanie równania $\frac{6}{25}(a+5)^2 = \frac{25}{2}$ przy założeniu, że $a > 0$: $a = -5 + \frac{25}{6}\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie współrzędnych punktu C: $x_C = 2\sqrt{3}$, $y_C = \frac{8}{3}\sqrt{3} - 5$ i podanie odpowiedzi: $A(0, -5 + \frac{25}{6}\sqrt{3})$, $B(0, -5)$, $C(2\sqrt{3}, \frac{8}{3}\sqrt{3} - 5)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">26.</td><td>Zapisanie równania prostej l w postaci odcinkowej: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, gdzie $a, b > 0$ i wykonanie rysunku:


</td></tr>
<tr><td>Zapisanie wzoru na pole trójkąta: $\frac{1}{2}ab = 36$, czyli $ab = 72$</td></tr>
<tr><td>Podstawienie współrzędnych punktu P do równania prostej l: $\frac{8}{a} + \frac{2}{b} = 1$, przekształcenie tego równania do postaci: $a + 4b = \frac{1}{2}ab$ i zapisanie, że $a + 4b = 36$</td></tr>
<tr><td>Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} a + 4b = 36 \\ ab = 72 \end{cases}$: $a_1 = 24$, $b_1 = 3$, $a_2 = 12$, $b_2 = 6$</td></tr>
<tr><td>Podanie odpowiedzi: Prosta l ma równanie $\frac{x}{24} + \frac{y}{3} = 1$ lub równanie $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} = 1$.</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
27.	Zauważenie, że przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $y = -5$ oraz wykonanie rysunku: 
	Zapisanie równania prostej AB w postaci: $ax + y + c = 0$, podstawienie współrzędnych punktu A i wyznaczenie $c = 5 - 15a$.
	Zauważenie, że prosta AB jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 5^2$, gdy jej odległość od punktu $O(0,0)$ jest równa promieniowi okręgu: $$d = \frac{\lvert 5 - 15a \rvert}{\sqrt{a^2+1}} = 5$$ Rozwiązanie powyższego równania: $a = 0$ (prosta AC) lub $a = \frac{3}{4}$. Zapisanie równania prostej AB: $3x + 4y - 25 = 0$
	Zauważenie, że prosta BC jest prostopadła do prostej AB, ma więc równanie $4x - 3y + b = 0$, a jej odległość od punktu $O(0,0)$ jest równa: $d_1 = \frac{\lvert b \rvert}{5} = 5$. Rozwiązanie równania: $b = \pm 25$. Zauważenie, że dla $b = -25$ prosta znajduje się między okręgiem a punktem A, i zapisanie równania prostej BC: $4x - 3y + 25 = 0$
	Podstawienie $y = -5$ do równania prostej BC i wyznaczenie współrzędnych punktu C: $C(-10,-5)$. Rozwiązanie układu równań: $$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x - 3y = -25 \end{cases}$$ i wyznaczenie współrzędnych punktu B: $B(-1,7)$ Podanie odpowiedzi: $B(-1,7)$, $C(-10,-5)$

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="6">28.</td><td>Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń


</td></tr>
<tr><td>Podstawienie współrzędnych punktu A do równania prostej w postaci ogólnej $ax + y + c = 0$ i wyznaczenie zależności $c = 1 - 7a$, czyli prosta ma równanie $ax + y + 1 - 7a = 0$</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że prosta $ax + y + 1 - 7a = 0$ jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 10$, gdy kwadrat odległości prostej od punktu $O(0,0)$ jest równy 10:

$$d^2 = \frac{(7a-1)^2}{a^2+1} = 10$$

Rozwiązanie równania $(7a - 1)^2 = 10(a^2 + 1)$: $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{9}{13}$ i zapisanie równań prostych:

$$AB\colon y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13},\ AC\colon y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$$</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że wysokość trójkąta opuszczona na bok AB jest prostopadła do prostej AB i przechodzi przez środek okręgu, czyli ma równanie $y = \frac{13}{9}x$. Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} y = \frac{13}{9}x \\ y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13} \end{cases}$$

i wyznaczenie współrzędnych punktu D: $D\left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$</td></tr>
<tr><td>Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} y = \frac{13}{9}x \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases}$$

w celu wyznaczenia współrzędnych punktu C: $C\left(-3, -\frac{13}{3}\right)$</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie współrzędnych punktu B z równania:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AD} = [7, -1] + 2\left[-\frac{26}{5}, \frac{18}{5}\right] = \left[-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right]$$

czyli $B\left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$</td></tr>
</table>

11. Stereometria

Zestaw A – odpowiedzi

1. $\frac{2\sqrt{3}}{7}$
2. $16\left(\sqrt{3}-1\right)$
3. $4\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$
4. $\frac{\sqrt{10}}{5}$
5. 4
6. $V=\sqrt{3}h^3\sin\alpha\cos^2\alpha$,
   $P=3\sqrt{3}h^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)$
7. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $-\frac{1}{15}$
8. $V=8\sqrt{3}$, $P=12\left(1+2\sqrt{2}\right)$
9. 5
10. **a)** 120°
11. **a)** $k>1$
    b) $\cos\alpha=\frac{k^2-1}{k^2+1}$, $\alpha=60^\circ$
12. **a)** 4 **b)** $\frac{5}{4}$
13. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
14. **a)** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$
    b) $\frac{2}{3}(\sqrt{6}-1)a^2$
15. $P=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$
16. $\frac{5}{13}$
17. $P=\frac{4\sqrt{3}-6}{3}a^2$
18. **a)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{7}}{7}$ **c)** $-\frac{1}{7}$
19. $V=6\sqrt{3}$
20. $\frac{5\sqrt{13}}{26}$, 60°
21. P
22. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{6}$
23. $V=18\sqrt{2}\pi$, $P_b=27\pi$
24. $\frac{76}{3}\pi$
25. **a)** $\frac{9}{2}$
    b) $\frac{15\sqrt{3}+26}{18}$
26. $2\sqrt{2}$
27. $\frac{1}{4}$
28. $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$
29. $V_k=\frac{4V\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}$
30. $2\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$
31. $V=\frac{25}{4}\pi$
32. $V=\frac{2}{3}R^3\cos^2\alpha\sin\alpha$

Zestaw B – odpowiedzi

1. C **2.** B **3.** A **4.** D **5.** C **6.** B **7.** D

Zestaw C – odpowiedzi

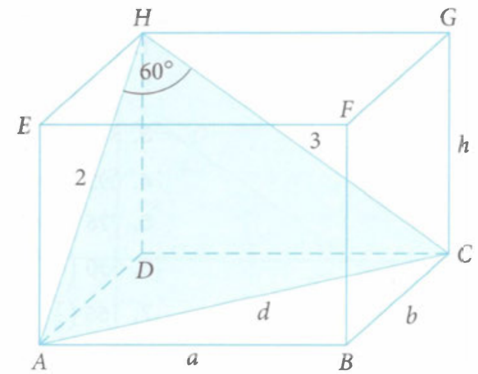
1. 149 $\left(40\sqrt{14}\right)$
2. 362 $\left(V=256\sqrt{2}\right)$
3. 816 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$
4. 092 $\left(P=4+4\sqrt{3}\right)$
5. 726 $(\operatorname{tg}144^\circ\approx-0{,}7265)$
6. 530 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$
7. 166 $\left(\frac{1}{6}\right)$

Zestaw D – odpowiedzi

1. $V=3\sqrt{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$
2. $0{,}9$, $\frac{3\sqrt{10}}{20}$
3. $|SW|=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $|AW|=|CW|=\frac{\sqrt{30}}{6}$
4. $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$
5. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
6. $V=\frac{40}{3}$
7. $V=\frac{a^3}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$
8. $V=\frac{2}{9}$, $|AS|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|CS|=\frac{\sqrt{6}}{3}$
9. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
10. $r=3$ lub $r=\frac{16}{7}$
11. **a)** 60° **b)** $V=\frac{32}{3}\pi$
12. $V=1680\pi$
13. **b)** $V=\frac{32\sqrt{2}}{3}$
14. $\frac{32}{3}\pi$
17. $|DP|=|BS|=9$
18. $V=\frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$,
    $P_b=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$
19. **a)** $V=6\sqrt{3}$
    b) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{13}}{13}$
20. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
21. $\frac{500}{3}$
23. $\frac{\sqrt{6}}{6}$
24. $\frac{9\sqrt{106}}{106}$

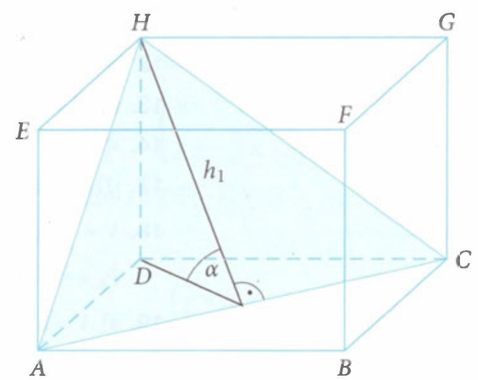
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

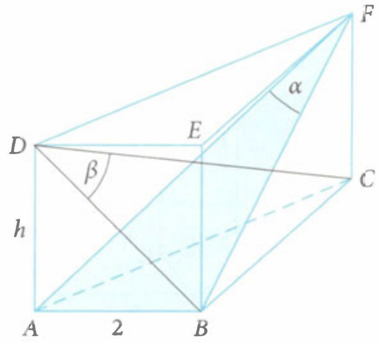
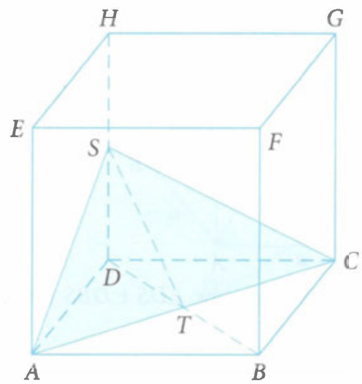
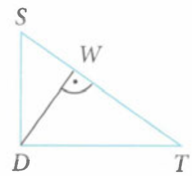
<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="7">1.</td><td>Wprowadzenie oznaczeń na rysunku pomocniczym

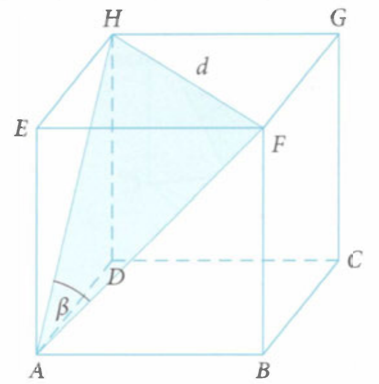
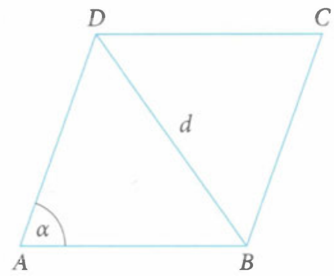
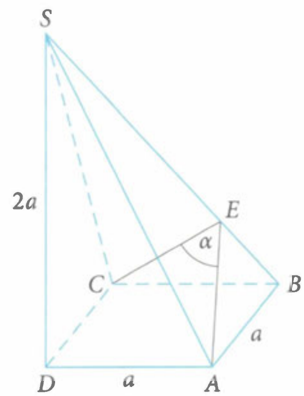
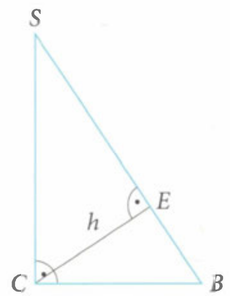


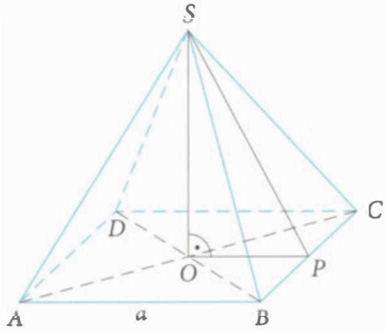
i zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACH: $d^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie długości przekątnej podstawy prostopadłościanu: $d = \sqrt{7}$</td></tr>
<tr><td>Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie układu równań:

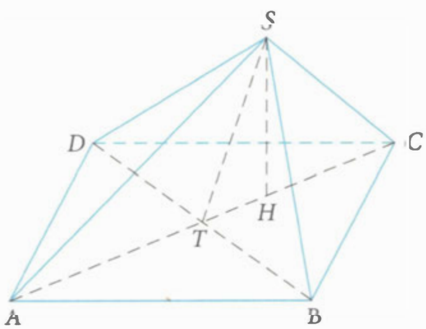
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a^2 + h^2 = 9 \\ b^2 + h^2 = 4 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie długości krawędzi podstawy prostopadłościanu: $a = \sqrt{6}$, $b = 1$, wysokości prostopadłościanu: $h = \sqrt{3}$ oraz jego objętości: $V = 3\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>Zaznaczenie na rysunku kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do podstawy

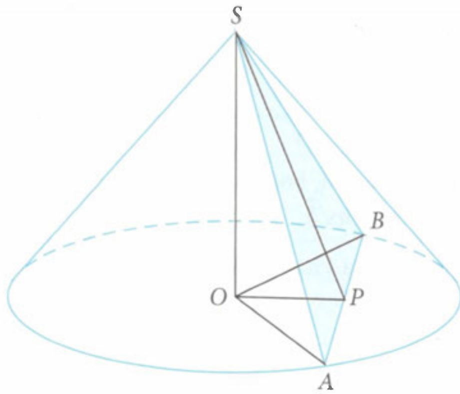
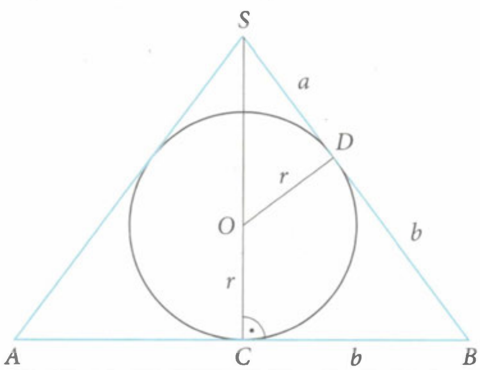

</td></tr>
<tr><td>Zapisanie pola przekroju ACH na dwa sposoby: $P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \sqrt{7}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie wysokości trójkąta ACH: $h_1 = \frac{3\sqrt{21}}{7}$ i sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{h}{h_1} = \frac{\sqrt{7}}{3}$</td></tr>
</table>

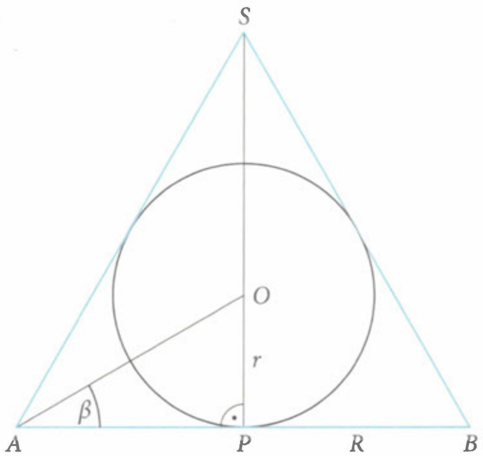
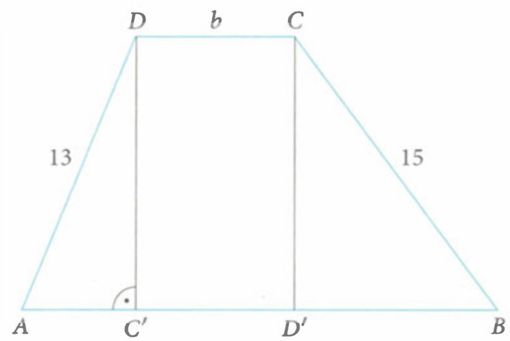
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
2.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń  $\lvert AC\rvert = \lvert BC\rvert = 4$ $\lvert FB\rvert = \lvert FA\rvert = d_1$ $\lvert DB\rvert = d_2$
	Zapisanie wzoru na pole powierzchni bocznej: $P_b = 2h + 8h = 20$ i obliczenie wysokości graniastosłupa: $h = 2$
	Obliczenie długości przekątnych ścian bocznych: $d_1 = 2\sqrt{5}$, $d_2 = 2\sqrt{2}$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta AFB: $d_1^2 + d_1^2 - 2d_1 \cdot d_1 \cdot \cos\alpha = 2^2$ i obliczenie cosinusa kąta α: $\cos\alpha = 0{,}9$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC: $d_2^2 + d_1^2 - 2d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\beta = 4^2$ i obliczenie cosinusa kąta β: $\cos\beta = \frac{3\sqrt{10}}{20}$
3.	Wykonanie rysunków pomocniczych oraz wyznaczenie długości odcinka ST: $\lvert ST\rvert = \frac{\sqrt{3}}{2}$  
	Zapisanie pola trójkąta TDS na dwa sposoby: $\frac{1}{2}\lvert SD\rvert \cdot \lvert TD\rvert = \frac{1}{2}\lvert ST\rvert \cdot \lvert DW\rvert$ oraz wyznaczenie wysokości DW: $\lvert DW\rvert = \frac{\sqrt{6}}{6}$
	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SWD i wyznaczenie długości odcinka SW: $\lvert SW\rvert = \frac{\sqrt{3}}{6}$
	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta WTA i wyznaczenie długości odcinka AW: $\lvert AW\rvert = \frac{\sqrt{30}}{6} = \lvert CW\rvert$

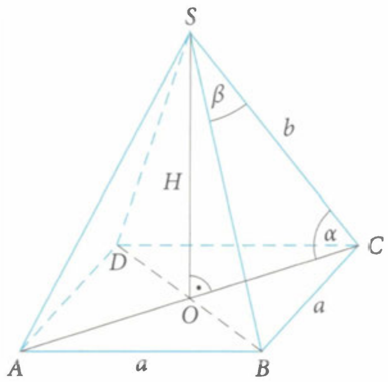
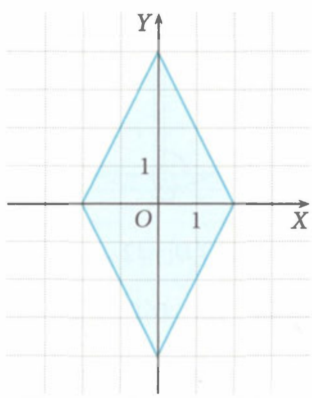
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4.	Wykonanie rysunków pomocniczych i wprowadzenie oznaczeń: $\lvert AF\rvert = \lvert AH\rvert = x$  
	Obliczenie cosinusa kąta ostrego rombu: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD i obliczenie długości przekątnej rombu: $d = 2\sqrt{3}$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta AFH: $d^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos\beta$
	Obliczenie długości przekątnej AF: $x = 3\sqrt{2}$
5.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń   Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ADS i DBS i wyznaczenie długości krawędzi ostrosłupa: $\lvert AS\rvert = \lvert CS\rvert = \sqrt{5}a$, $\lvert BS\rvert = \sqrt{6}a$
	Skorzystanie z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa i zauważenie, że trójkąt CBS jest prostokątny oraz że trójkąty CBS i ABS są przystające, czyli $h = \lvert CE\rvert = \lvert AE\rvert$
	Zapisanie wzoru na pole trójkąta CBS na dwa sposoby: $P_{CBS} = \frac{1}{2}\lvert CB\rvert \cdot \lvert CS\rvert = \frac{1}{2}a^2\sqrt{5}$ i $P_{CBS} = \frac{1}{2}h \cdot \lvert BS\rvert = \frac{1}{2}ah\sqrt{6}$ i wyznaczenie h: $h = \sqrt{\frac{5}{6}}a$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta AEC: $\lvert AC\rvert^2 = 2h^2 - 2h^2\cos\alpha$ i wyznaczenie $\cos\alpha$: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{5}{6} - 2 \cdot \frac{5}{6}\cos\alpha$, stąd $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$
	Wyznaczenie wartości $\sin\alpha$: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

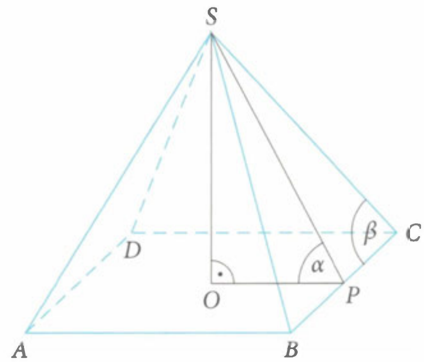
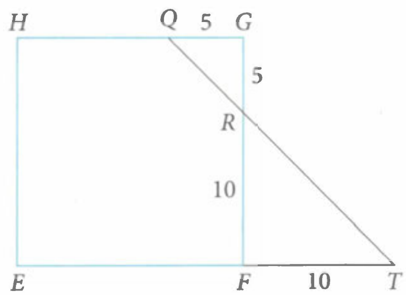
<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="5">6.</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń


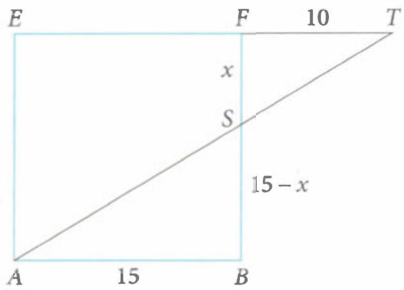
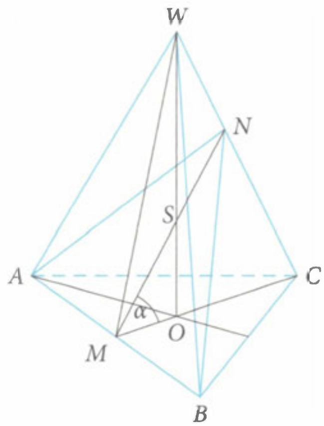
$|OS| = 2$
$|PS| = h$
$|OP| = \frac{a}{2}$</td></tr>
<tr><td>Zapisanie pola powierzchni bocznej ostrosłupa z wykorzystaniem wprowadzonych oznaczeń i ułożenie równania: $ah = 6\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SOP i zapisanie równania:
$$h^2 = 4 + \frac{a^2}{4}$$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 2\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{40}{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">7.</td><td>Wyznaczenie wysokości ściany bocznej: $h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">8.</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego oraz wyznaczenie długości odcinków CH i HT:
$|CH| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $|HT| = \frac{\sqrt{2}}{6}$

</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie długości odcinka ST: $|ST| = \frac{\sqrt{2}}{2}$</td></tr>
<tr><td>Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SHT i wyznaczenie długości odcinka HS:
$|HS| = \frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{2}{9}$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8. cd.	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AHS i wyznaczenie długości krawędzi AS: $\lvert AS\rvert = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CHS i wyznaczenie długości krawędzi CS: $\lvert CS\rvert = \frac{\sqrt{6}}{3}$
9.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń  $\lvert OB\rvert = \lvert OA\rvert = r = 3\sqrt{2}$ $\lvert AP\rvert = \lvert BP\rvert = 3$ $\lvert\sphericalangle ASB\rvert = 60°$ $\lvert\sphericalangle OPS\rvert = \alpha$
	Zauważenie, że trójkąt ASB jest równoboczny, i obliczenie jego wysokości: $\lvert SP\rvert = 3\sqrt{3}$
	Obliczenie długości odcinka OP: $\lvert OP\rvert = 3$
	Obliczenie cosinusa kąta α: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
10.	Wykonanie rysunku przekroju osiowego stożka i wprowadzenie oznaczeń 
	Wykorzystanie podobieństwa trójkątów ODS i BCS do sformułowania równości: $\frac{r}{a} = \frac{b}{8}$
	Rozważenie przypadku, gdy $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, i zapisanie równości: $(a+b)^2 = 64 + b^2$
	Obliczenie a, b i r: $a = 4$, $b = 6$, $r = 3$
	Rozważenie przypadku, gdy $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, i obliczenie a i b: $a = \frac{8\sqrt{21}}{7}$, $b = \frac{16\sqrt{21}}{21}$
	Obliczenie r: $r = \frac{16}{7}$

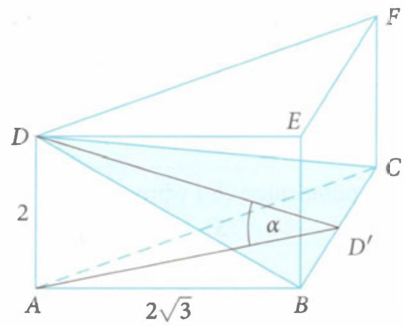
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11. a)	Wykonanie rysunku przekroju osiowego stożka i wprowadzenie oznaczeń: $\lvert\sphericalangle ASB\rvert = \alpha$ 
	Wyznaczenie stosunku promienia kuli wpisanej w stożek do promienia podstawy stożka: $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
	Obliczenie $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i wyznaczenie kąta $\beta = 30^\circ$
	Wykorzystanie definicji dwusiecznej kąta i stwierdzenie, że $\lvert\sphericalangle SAB\rvert = 60^\circ$ oraz $\alpha = 60^\circ$
11. b)	Wykorzystanie własności trójkąta równobocznego ASB, obliczenie promienia kuli opisanej na stożku: $r_1 = 2$ i objętości tej kuli: $V = \frac{32}{3}\pi$
12.	Wykonanie rysunku pomocniczego, wporowadzenie oznaczeń i wykorzystanie własności czworokąta opisanego na okręgu: $\lvert AB\rvert = a$, $a + b = 28$ 
	Obliczenie wysokości trapezu: $\lvert C'D\rvert = 12$
	Obliczenie długości odcinków AC', $D'B$ i $C'D'$: $\lvert AC'\rvert = 5$, $\lvert D'B\rvert = 9$, $\lvert C'D'\rvert = 7$
	Obliczenie objętości stożków otrzymanych w wyniku obrotu trójkątów $AC'D$ i $CD'B$ wokół boków AC' i BD' odpowiednio: $V_1 = 240\pi$, $V_2 = 432\pi$
	Obliczenie objętości walca otrzymanego w wyniku obrotu prostokąta $C'D'CD$ wokół boku $C'D'$: $V_3 = 1008\pi$ oraz objętości całej bryły: $V = 1680\pi$

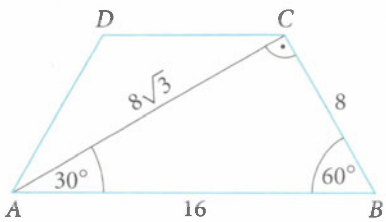
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta BSC: $\cos\beta = \frac{2b^2-a^2}{2b^2}$
	Zapisanie układu równań: $\sin\alpha = \frac{H}{b}$, $b^2 = H^2 + \lvert OC\rvert^2$, $\lvert OC\rvert = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
	Przekształcenie układu równań do postaci: $\sin^2\alpha = \frac{H^2}{b^2}$ i $H^2 = \frac{2b^2-a^2}{2}$
	Uzasadnienie równości: $\cos\beta = \sin^2\alpha$
13. b)	Zauważenie, że trójkąt BCS jest równoboczny, i obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 4$
	Wykorzystanie równości $\sin^2\alpha = \cos\beta$ i obliczenie miary kąta α: $\alpha = 45°$
	Zauważenie, że trójkąt SAC jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, i obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 2\sqrt{2}$
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$
14.	Zapisanie nierówności w postaci: $2\lvert x\rvert - 4 \leqslant y \leqslant 4 - 2\lvert x\rvert$
	Zaznaczenie zbioru F w układzie współrzędnych 
	Obliczenie objętości bryły B_1: $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 2 = \frac{64}{3}\pi$
	Obliczenie objętości bryły B_2: $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{32}{3}\pi$ i różnicy: $V_1 - V_2 = \frac{32}{3}\pi$

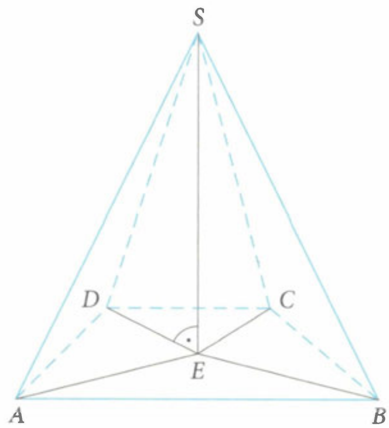
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15.	Wprowadzenie oznaczeń: a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy, c – długość odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości h
	Zauważenie, że na podstawie twierdzenia cosinusów $\cos\alpha = \frac{h^2-a^2}{h^2}$
	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa: $c^2 = a^2 - h^2$ oraz $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{c}$, czyli $\operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2}{c^2}$
	Obliczenie iloczynu: $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2-a^2}{h^2} \cdot \frac{h^2}{c^2} = \frac{-(a^2-h^2)}{c^2} = \frac{-c^2}{c^2} = -1$
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń  $\|OP\| = \|PC\| = a$ $\|PS\| = h$ $\|SC\| = b$ $\|OS\| = H$
	Zapisanie kwadratów sinusów kątów α i β w postaci: $\sin^2\alpha = \frac{H^2}{h^2}$, $\sin^2\beta = \frac{h^2}{b^2}$
	Zapisanie równości: $b^2 = h^2 + a^2$, $H^2 = h^2 - a^2$
	Zapisanie lewej strony dowodzonej równości w postaci: $\frac{h^2-a^2}{h^2} + \frac{h^2+a^2}{h^2}$ i uzasadnienie, że jej wartość jest stale równa 2
17.	Wykonanie rysunku pomocniczego  oraz zauważenie, że trójkąty prostokątne RFT i RGQ są podobne na mocy cechy KKK, zatem $\|FT\| = 10$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
17. cd.	Wykonanie rysunku pomocniczego  oraz zauważenie, że trójkąty prostokątne ABS i TFS są podobne na mocy cechy KKK
	Zapisanie równania: $\frac{x}{10} = \frac{15-x}{15}$
	Rozwiązanie równania: $x = 6$ oraz podanie odpowiedzi: $\lvert DP\rvert = \lvert BS\rvert = 9$
18.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń: $\lvert AB\rvert = a$  oraz wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $\lvert OW\rvert = \frac{a\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha$
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$
	Wyznaczenie wysokości ściany bocznej: $\lvert MW\rvert = \frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$
	Obliczenie pola powierzchni bocznej ostrosłupa: $P_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$
19. a)	Obliczenie wysokości graniastosłupa: $H = 2$
	Obliczenie długości krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = 2\sqrt{3}$
	Obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 6\sqrt{3}$

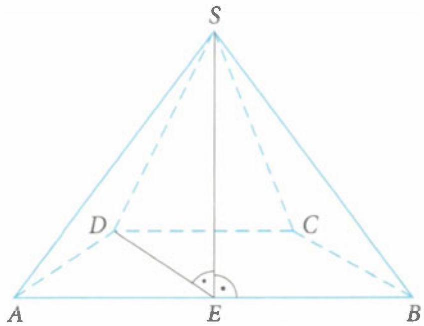
<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="4">19. b)</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń: $|BD'| = |D'C|$

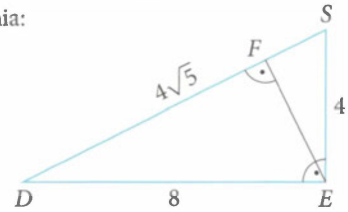
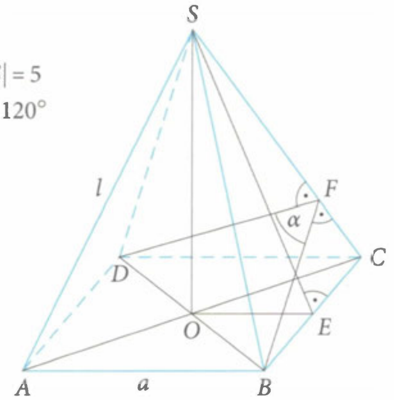
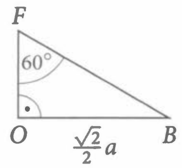
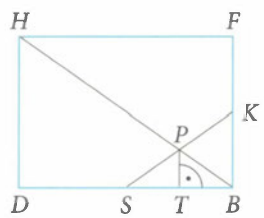

</td></tr>
<tr><td>Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej: $|DB| = 4$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie wysokości przekroju BCD opuszczonej na bok BC: $|DD'| = \sqrt{13}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie sinusa kąta nachylenia przekroju BCD do podstawy: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">20.</td><td>Wykonanie rysunków pomocniczych

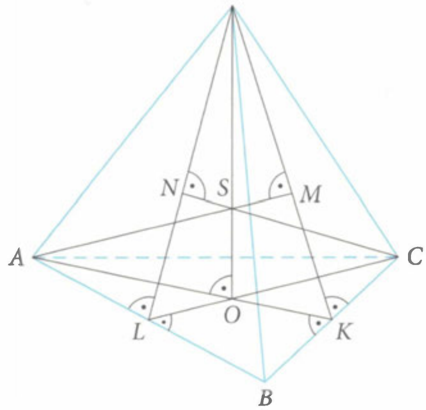
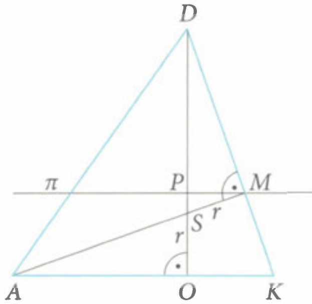
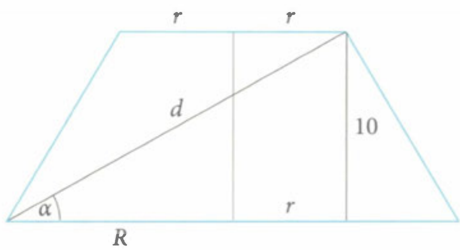




Zauważenie, że $\triangle ESA \equiv \triangle ESB \equiv \triangle ESC \equiv \triangle ESD$ jako trójkąty prostokątne o wspólnej przyprostokątnej i równych przeciwprostokątnych (krawędzie boczne ostrosłupa). Zatem $|EA| = |EB| = |EC| = |ED|$</td></tr>
<tr><td>Zauważenie, że na trapezie $ABCD$ można opisać okrąg o środku E, zatem jest to trapez równoramienny, a punkt E jest środkiem krawędzi AB oraz $|AE| = 8$


</td></tr>
<tr><td>Obliczenie wysokości ostrosłupa: $|SE|^2 = |AS|^2 - |AE|^2 = 16$, czyli $|SE| = 4$. Ponadto $|DE| = |AE| = 8$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
20. cd.	Zaznaczenie wysokości EF w trójkącie DES, zapisanie równania: $2P_{DES} = 8 \cdot 4 = \lvert EF \rvert \cdot 4\sqrt{5}$ i wyznaczenie odległości spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi SD: $\lvert EF \rvert = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ 
21.	Wykonanie rysunków pomocniczych i wprowadzenie oznaczeń   i wyznaczenie długości odcinka BF: $\lvert BF \rvert = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
	Zapisanie pola trójkąta BCS na dwa sposoby: $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}l\frac{a\sqrt{6}}{3}$, gdzie $h = \lvert ES \rvert$, i wyznaczenie h: $h = \frac{l\sqrt{6}}{3}$
	Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa w trójkącie SOE: $5^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{l\sqrt{6}}{3}\right)^2$
	Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa w trójkącie SOC: $5^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = l^2$
	Wyznaczenie a z otrzymanego układu równań: $a = 10$
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{500}{3}$
22.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że trójkąty SBK i BDH są podobne w skali $1:2$ (cecha BKB). Trójkąt SBP jest równoramienny ($\lvert \sphericalangle PSP \rvert = \lvert \sphericalangle PBS \rvert$), więc wysokość PT dzieli podstawę SB na dwie równe części, czyli $\lvert TB \rvert = \frac{1}{4}\lvert DB \rvert$
	Zauważenie, że trójkąty BTP i BDH są podobne w skali $1:4$, czyli $\lvert BP \rvert : \lvert HP \rvert = 1:3$.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
23.	Wykonanie rysunków pomocniczych, stwierdzenie, że środek kuli leży na przecięciu odcinków AM i CN, oraz wprowadzenie oznaczeń: S – środek kuli wpisanej w czworościan, r – promień tej kuli, $h = \|OD\|$, $d = \|SP\|$ 
	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia wysokości czworościanu: $h^2 = \|DK\|^2 - \left(\frac{1}{3}\|AK\|\right)^2 = \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2$, czyli $h = 2\sqrt{6}$
	Zauważenie, że płaszczyzna π odcina czworościan podobny do czworościanu $ABCD$ w skali $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, więc płaszczyzna π przecina odcinek DK w punkcie M (rysunek powyżej)
	Zauważenie, że trójkąty DOK, DPM, MPS są podobne, zatem $\frac{\|DP\|}{\|MP\|} = \frac{\|DO\|}{\|OK\|} = \frac{\|MP\|}{\|PS\|}$, czyli: $\frac{\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{6}}{\|MP\|} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\|MP\|}{d}$
	Wyznaczenie odległości d: $d = \frac{\sqrt{6}}{6}$
24.	Narysowanie przekroju osiowego stożka ściętego (jest to trapez równoramienny) i wprowadzenie oznaczeń  Podstawienie danych do wzoru na objętość stożka ściętego i obliczenie długości promienia R: $R = 12$
	Zapisanie równania $d^2 = 10^2 + (R + r)^2$
	Obliczenie długości przekątnej przekroju: $d = 2\sqrt{106}$
	Obliczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{R+r}{d} = \frac{9\sqrt{106}}{106}$

12. Rachunek różniczkowy

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $-\frac{4}{3}$ **b)** -2 **c)** 1 **d)** $\frac{6}{5}$ **e)** 3
f) $\frac{3}{2}$ **g)** $-\frac{25}{3}$ **h)** -20 **i)** 6

2. **a)** 3 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 0 **d)** ∞ **e)** 2
f) ∞ **g)** ∞ **h)** ∞ **i)** ∞

3. **a)** $-\infty$ **b)** $-\infty$ **c)** ∞ **d)** $-\infty$ **e)** ∞ **f)** $-\infty$

4. **a)** funkcja ciągła **b)** funkcja nie jest ciągła

5. **a)** $a=2$, $b=0$, minimum dla $x=1$, $f(1)=1$,
maksimum dla $x=2$, $f(2)=2$
b) $a=-1$, $b=0$, minimum dla $x=-1$, $f(-1)=0$

7. **a)** -2 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** 3

8. **a)** nie istnieje **b)** $f'(1)=0$ **c)** nie istnieje

9. **a)** $f'(x)=3x^2-10x+3$, $f'(-1)=16$, $f'(1)=-4$
b) $f'(x)=-10x^4+12x^2-2x-2$, $f'(-1)=2$,
$f'(1)=-2$
c) $f'(x)=-4x^3+2x^2+10x$, $f'(-1)=-4$, $f'(1)=8$
d) $f'(x)=x^4-6x^2-3x$, $f'(-1)=-2$, $f'(1)=-8$

10. **a)** $f'(x)=3x^2-4x+1$, $f'(x)=0$ dla $x=\frac{1}{3}$, $x=1$
b) $f'(x)=4x^3-16x$,
$f'(x)=0$ dla $x=-2$, $x=0$, $x=2$
c) $f'(x)=4x^3-6x^2+2$, $f'(x)=0$ dla $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$

11. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{-5\}$, $f'(x)=\frac{-3}{(x+5)^2}$, $D'=\mathbf{R}\setminus\{-5\}$
b) $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$, $f'(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$, $D'=\mathbf{R}\setminus\{2\}$
c) $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, $f'(x)=\frac{-8x}{(x^2-1)^2}+x^2$,
$D'=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$
d) $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $f'(x)=\frac{-x^4-3}{(1-x^2)^2}+\frac{6}{x^4}$,
$D'=\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$
e) $D=\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$, $f'(x)=\frac{4x}{(x^2-4)^2}$, $D'=\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$
f) $D=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=\frac{-x^3+3x^2+2x-6}{(x-1)^3}$, $D'=\mathbf{R}\setminus\{1\}$

12. **a)** -3, tak **b)** $\frac{1}{2}$, nie

13. **a)** $y=2x-8$ **b)** $y=-10x-13$ **c)** $y=\frac{3}{7}x-\frac{1}{7}$
d) $y=x-2$

14. **a)** $y=-3x+\frac{5}{2}$ **b)** $y=-5x-3$

15. **a)** $y=-\sqrt{3}x+\frac{1}{2}$ **b)** $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$

16. **a)** rośnie w $(-\infty;-3\rangle$, $\langle 1;\infty)$, maleje w $\langle -3;1\rangle$
b) rośnie w $(-\infty;-2\rangle$, $\langle -1;1\rangle$, $\langle 2;\infty)$,
maleje w $\langle -2;-1\rangle$, $\langle 1;2\rangle$
c) rośnie w $\langle -3;0\rangle$, $\langle 3;\infty)$,
maleje w $(-\infty;-3\rangle$, $\langle 0;3\rangle$
d) rośnie w $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$,
maleje w $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2};\infty\right)$
e) rośnie w $(-\infty;-4)$, $(-4;0\rangle$, $\left\langle \frac{8}{3};\infty\right)$,
maleje w $\langle 0;1)$, $\left(1;\frac{8}{3}\right\rangle$
f) rośnie w $\langle -2;-1)$, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right\rangle$,
maleje w $(-\infty;-2\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{2};1\right)$, $(1;\infty)$

17. **a)** $a\in\left\langle \frac{4}{3};\infty\right)$ **b)** $a\in\left\langle \frac{\sqrt{3}}{3};\infty\right)$

18. **a)** maksimum w punkcie $x_0=0$, $f(0)=0$
minimum w punkcie $x_0=1$, $f(1)=-1$
b) minimum w punkcie $x_0=-\frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{16}$
c) maksimum w punkcie $x_0=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$
minimum w punkcie $x_0=-1$, $f(-1)=-\frac{1}{2}$
d) minimum w punkcie $x_0=1$, $f(1)=3$
e) maksimum w punkcie $x_0=-\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{3}$
f) minimum w punkcie $x_0=2$, $f(2)=12$

19. **a)** $m=-7$, $M=2$ **b)** $m=-3\frac{1}{3}$, $M=5\frac{1}{6}$
c) $m=-3$, $M=\frac{1}{2}$ **d)** $m=0$, $M=4$

20. **a)** 3 **b)** 2 **c)** 2 **d)** 2 **e)** 0 **f)** 1

21. **a)** minimum w punkcie $x=-1$, $f(-1)=0$,
brak pochodnej w punkcie $x=-1$
b) minimum w punktach $x=-1$, $x=1$,
$f(-1)=f(1)=0$,
maksimum w punkcie $x=0$, $f(0)=1$,
brak pochodnej w punktach $x=-1$, $x=1$
c) minimum w punktach $x=-1$, $x=2$,
$f(-1)=f(2)=0$,
maksimum w punkcie $x=-4$, $f(-4)=\frac{9}{8}$,
brak pochodnej w punktach $x=-1$, $x=2$

22. **a)** 0 dla $m\in(-\infty;0)$,
2 dla $m\in\{0\}\cup(1;\infty)$,
3 dla $m=1$,
4 dla $m\in(0;1)$
b) 0 dla $m\in(-\infty;0)$,
1 dla $m\in\{0,2\}$,
2 dla $m\in(0;2)\cup(2;\infty)$
c) 0 dla $m\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$,
1 dla $m=0$,
2 dla $m=1$,
4 dla $m\in(0;1)$

23. **a)** $D=(-\infty;1)\cup(9;\infty)$,
maksimum w punkcie $x=-1$, $f(-1)=-9$,
$f(x)>1$ dla $x\in(9;\infty)$
b) $D=(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$,
minimum w punkcie $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3+2\sqrt{2}$, $f(x)>1$ dla $x\in(1;\infty)$

Zestaw B – odpowiedzi

1. D **2.** A **3.** A **4.** B **5.** B **6.** C **7.** D **8.** C

Zestaw C – odpowiedzi

1. 323 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)$
2. 352 $\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}352\right)$
3. 296 $(f'(1)=2{,}96)$
4. 105
5. 412 $\left(x_0=\sqrt{17}\right)$
6. 616 $(b=616)$
7. 346 $\left(a=2\sqrt{3}\right)$

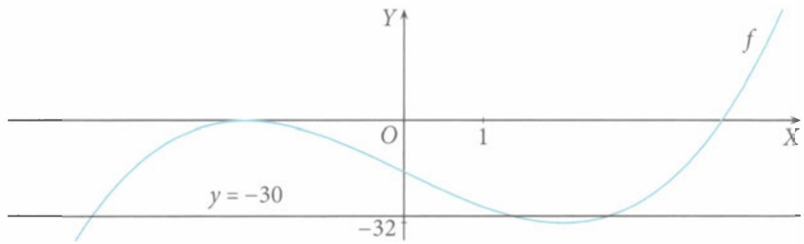
Zestaw D – odpowiedzi

1. $a=-\frac{1}{2}$
3. $y=6x-8$
5. $a=-2,\ P(0,1)$
6. $y=x-7$
8. $y=4x+\frac{67}{27},\ y=4x-7$
9. minimum w punkcie $x=2,\ f(2)=-32$, maksimum w punkcie $x=-2,\ f(-2)=0$, równanie $f(x)=-30$ ma trzy rozwiązania
10. $a=1,\ b=2$, maksimum w punkcie $x=-1$, $f(-1)=-1$
11. $x=-\sqrt{2},\ y=1-\sqrt{2},\ f\left(-\sqrt{2}\right)=2+\sqrt{2}$
12. $\frac{8}{5}\sqrt{10}$
13. $p=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$
14. 10 cm, $V=18000\ \text{cm}^3$
15. 2 cm, $P=36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
16. $Obw=4+2\sqrt{2}$
17. 8 dm, $P=12\sqrt{3}\ \text{dm}^2$
18. $-\frac{3}{5}$
19. $\frac{2a}{3}$
20. $y=-3x+12$
21. $C(2\sqrt{2},\sqrt{2})$
22. $2\frac{2}{3},\ \frac{8\sqrt{3}}{3}$
23. $A(-2,-16),\ B(2,16)$
24. $h=2\sqrt{5},\ r=4,\ V=\frac{32}{3}\pi\sqrt{5}$
25. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
26. $P\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}}{36}-1\right)$
27. $C\left(\frac{2}{3},\frac{16}{9}\right)$
28. $r=\frac{\sqrt{3}}{3},\ V=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$
29. $h=\sqrt{\frac{2P}{3\pi}},\ r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}},\ V=\frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$
30. $\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[3]{3}\times\frac{4\sqrt[3]{3}}{3}$
31. **a)** $a\in(1;2)$ **c)** 1

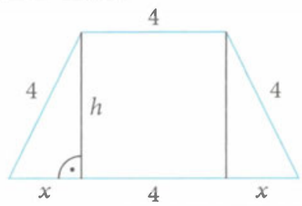
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Przekształcenie różnicy: $\frac{a}{1-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{-a-ax-1}{x^2-1}=-\frac{ax+a+1}{(x-1)(x+1)}$
	Zauważenie, że funkcja ma skończoną granicę przy x dążącym do 1, gdy $ax+a+1=x-1$
	Wyznaczenie a: $a=-\frac{1}{2}$ i sprawdzenie, że dla $a=-\frac{1}{2}$ granica jest równa $\frac{1}{4}$
2.	Wyznaczenie argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1: $x=-1$ lub $x=1$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\frac{16x}{(3+x^2)^2}$
	Zapisanie równań stycznych: $y=-x,\ y=x$ oraz zauważenie, że ich wykresy przechodzą przez początek układu współrzędnych
3.	Wyznaczenie pochodnej funkcji $f(x)=x^2+1$: $f'(x)=2x$
	Obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $a=f'(3)=6$
	Wyznaczenie równania stycznej do paraboli w punkcie $A(3,10)$: $y=6x-8$

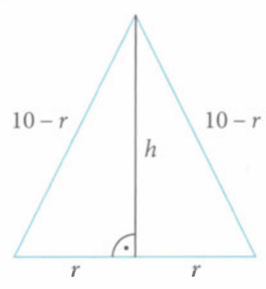
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 12x^2 - 2$
	Wyznaczenie argumentów, dla których pochodna funkcji przyjmuje wartość 10: $x = -1$ lub $x = 1$, oraz obliczenie wartości funkcji dla tych argumentów: $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
	Zauważenie, że punkt o współrzędnych $(-1, -1)$ leży na prostej l. Zatem prosta o równaniu $10x - y + 9 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji f
5.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x_0) = 3x_0^2 + a = -2$
	Zapisanie równania stycznej: $y - x_0^3 - ax_0 - 1 = -2(x - x_0)$, czyli $y = -2x + x_0^3 + (2 + a)x_0 + 1$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 3x_0^2 + a = -2 \\ x_0^3 + (2 + a)x_0 = 0 \end{cases}$
	Podanie odpowiedzi: $a = -2$, współrzędne punktu styczności $(0, 1)$
6.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 10x^4 + 1 = \operatorname{tg}\alpha$
	Zauważenie, że pochodna funkcji jest zawsze dodatnia, czyli $\operatorname{tg}\alpha > 0$, zatem kąt między dowolną styczną do wykresu funkcji f a osią OX jest kątem ostrym
	Wyznaczenie równania stycznej do wykresu funkcji f nachylonej do osi OX pod kątem 45°: $y = x - 7$
7. a)	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ oraz współrzędnych punktu P: $P\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$
	Zapisanie równania stycznej: $y = -\frac{x}{x_0^2} + \frac{2}{x_0}$
	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i B: $A(2x_0, 0)$, $B\left(0, \frac{2}{x_0}\right)$
	Wykazanie, że punkt P jest środkiem odcinka AB: $S_{AB} = \left(\frac{2x_0}{2}, \frac{2}{2x_0}\right) = \left(x_0, \frac{1}{x_0}\right) = P$
7. b)	Obliczenie pola trójkąta ABO: $P = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$
8.	Zapisanie równania stycznej w postaci: $y = f'(x_0)x + b$ i zauważenie, że $f'(x_0) = 4$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 3x^2 - 4x$ i znalezienie argumentów, dla których $f'(x) = 4$: $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$
	Wyznaczenie punktów styczności: $P_1 = (x_1, f(x_1)) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{27}\right)$, $P_2 = (x_2, f(x_2)) = (2, 1)$
	Wyznaczenie równań stycznych: $l_1{:}\ y = 4x + \frac{67}{27}$, $l_2{:}\ y = 4x - 7$
9.	Zapisanie wzoru funkcji f w postaci: $f(x) = x^3 - 12x - 16$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 3x^2 - 12$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
9. cd.	Wyznaczenie ekstremów funkcji f: minimum w punkcie $x=2$, $f(2)=-32$, maksimum w punkcie $x=-2$, $f(-2)=0$
	Wykonanie szkicu wykresu funkcji f 
	Podanie odpowiedzi: Równanie $f(x)=-30$ ma trzy rozwiązania.
10.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$
	Zauważenie, że $f'(3)=0$, czyli $a+b=3$, oraz $f(3)=\frac{9+3a+b}{2}=7$, czyli $3a+b=5$
	Obliczenie a i b: $a=1$, $b=2$
	Wyznaczenie pozostałych ekstremów: maksimum w punkcie $x=-1$, $f(-1)=-1$
11.	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+2x+2}$, $x\in\mathbf{R}$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\frac{2x^2-4}{(x^2+2x+2)^2}$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x=-\sqrt{2}$ lub $x=\sqrt{2}$
	Stwierdzenie, że $f'(x)>0$ dla $x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$ oraz $f'(x)<0$ dla $x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, więc dla $x=-\sqrt{2}$ funkcja f przyjmuje największą wartość
	Wyznaczenie największej wartości: $f(-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$
12.	Zauważenie, że długość a boku kwadratu jest odległością punktu $C\left(x,-\frac{8}{x}\right)$ od prostej AB, czyli $a=\frac{\sqrt{5}}{5}\left\|x+\frac{16}{x}\right\|$
	Zapisanie pola kwadratu: $P(x)=\frac{1}{5}\left(x+\frac{16}{x}\right)^2=\frac{1}{5}x^2+\frac{32}{5}+\frac{256}{5x^2}$, $x\neq 0$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x)=\frac{2}{5}x-\frac{512}{5x^3}$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x=-4$, $x=4$
	Stwierdzenie, że $P'(x)>0$ dla $x\in(-4;0)\cup(4;\infty)$ oraz $P'(x)<0$ dla $x\in(-\infty;-4)\cup(0;4)$ i $P(-4)=P(4)$, więc dla $x=4$ funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą
	Obliczenie długości przekątnej kwadratu: $a\sqrt{2}=\frac{\sqrt{10}}{5}\left\|x+\frac{16}{x}\right\|=\frac{8}{5}\sqrt{10}$

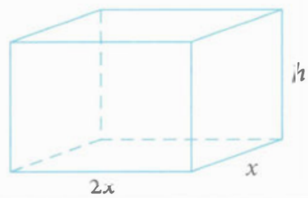
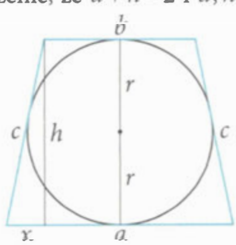
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13.	Zapisanie sumy sześcianów pierwiastków równania za pomocą wzorów Viète'a: $x_1^3 + x_2^3 = 3\frac{bc}{a^2} - \frac{b^3}{a^3}$
	Zapisanie sumy sześcianów jako funkcji zmiennej p: $f(p) = 2p^3 - 3p$ oraz podanie jej dziedziny: $D = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(p) = 6p^2 - 3$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $p = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	Stwierdzenie, że $f'(p) > 0$ dla $p \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $f'(p) < 0$ dla $p \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, więc dla $p = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ funkcja f przyjmuje największą wartość
	Wyznaczenie największej wartości: $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$
14.	Oznaczenie literą x długości boku kwadratowych naroży, zapisanie długości podstawy pudełka: $(80 - 2x)$ i szerokości podstawy pudełka: $(50 - 2x)$
	Zapisanie objętości pudełka jako funkcji zmiennej x: $V(x) = (80 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x$
	Zapisanie warunków, które musi spełniać wysokość pudełka: $0 < x < 25$
	Obliczenie pochodnej funkcji $f(x) = x^3 - 65x^2 + 1000x$: $f'(x) = 3x^2 - 130x + 1000$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1 = 10$, $x_2 = 33\frac{1}{3}$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (0;10)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (10;25)$, więc w przedziale $(0;10\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle 10;25)$ jest malejąca. Zatem dla $x = 10$ funkcja f przyjmuje największą wartość w dziedzinie $(0;25)$
	Zapisanie, że długość boku kwadratowych naroży jest równa 10 cm i obliczenie największej objętości: $V(10) = (80 - 20)(50 - 20) \cdot 10 = 18\,000$ [cm^3]
15.	Wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $H = \frac{8\sqrt{3}}{a^2}$, gdzie krawędź podstawy $a > 0$
	Zapisanie pola powierzchni pudełka jako funkcji zmiennej a: $P(a) = 3\sqrt{3}\left(a^2 + \frac{16}{a^2}\right)$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(a) = 6\sqrt{3}\left(a - \frac{8}{a^2}\right)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $a = 2$
	Stwierdzenie, że $P'(a) > 0$ dla $a \in (2;\infty)$ oraz $P'(a) < 0$ dla $a \in (0;2)$, więc w przedziale $\langle 2;\infty)$ funkcja P jest rosnąca i w przedziale $(0;2\rangle$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $a = 2$ funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą
	Obliczenie pola powierzchni pudełka: $P = 36\sqrt{3}$ cm^2

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16.	Oznaczenie przyprostokątnej jako x, $x > 0$, i przeciwprostokątnej jako $2r$, gdzie r jest promieniem koła opisanego na trójkącie, oraz obliczenie r: $r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}$
	Zapisanie stosunku pól jako funkcji zmiennej x: $f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2+4}{x}$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2}$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej dla $x > 0$: $x = 2$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (2;\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (0;2)$, więc w przedziale $\langle 2;\infty)$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $(0;2\rangle$ jest malejąca. Zatem dla $x = 2$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą
	Obliczenie obwodu trójkąta: $Obw = 4 + 2\sqrt{2}$
17.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń 
	Wyznaczenie wysokości trapezu na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $h = \sqrt{16-x^2}$ oraz napisanie wzoru na pole trapezu: $P(x) = (x+4)\sqrt{16-x^2}$, gdzie $x \in (0;4)$
	Zauważenie, że funkcja P wartość największą przyjmuje w tych samych punktach, co funkcja $f(x) = P^2(x) = (x+4)^2(16-x^2) = -(x+4)^3(x-4)$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = -4(x+4)^2(x-2)$ i jej miejsc zerowych: $x_1 = x_2 = -4$, $x_3 = 2$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (0;2)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (2;4)$, więc w przedziale $(0;2\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle 2;4)$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $x = 2$ funkcja f przyjmuje wartość największą, co oznacza, że funkcja P również przyjmuje wartość największą dla $x = 2$
	Obliczenie dłuższej podstawy trapezu: 8 dm oraz jego pola: $P = 12\sqrt{3}$ dm^2
	Podanie odpowiedzi
18.	Oznaczenie długości podstawy i wysokości prostokąta odpowiednio przez x i y oraz zauważenie, że $y^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$, gdzie $x \in (0;2r)$
	Zapisanie pola prostokąta jako funkcji zmiennej x: $$P(x) = x\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{x^2r^2 - \frac{x^4}{4}}$$
	Zauważenie, że wartość funkcji P będzie największa dla argumentu, dla którego największa będzie wartość funkcji $f(x) = x^2r^2 - \frac{x^4}{4}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
18. cd.	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 2xr^2 - x^3$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = r\sqrt{2}$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (0; r\sqrt{2})$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (r\sqrt{2}; 2r)$, więc w przedziale $(0; r\sqrt{2}\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle r\sqrt{2}; 2r)$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $x = r\sqrt{2}$ funkcja f przyjmuje wartość największą, co oznacza, że funkcja P również przyjmuje wartość największą dla $x = r\sqrt{2}$
	Wyznaczenie długości y: $y = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ oraz długości przekątnej prostokąta: $d = \frac{r\sqrt{10}}{2}$
	Wykorzystanie twierdzenia cosinusów do obliczenia cosinusa kąta rozwartego zawartego między przekątnymi tego prostokąta: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$
19.	Oznaczenie wysokości trójkątów DEF i ABC odpowiednio przez h i H oraz $x = \|DE\|$. Zauważenie, że na podstawie cechy KKK trójkąty ABC i DEC są podobne, więc $\frac{H-h}{H} = \frac{x}{a}$, stąd $h = \frac{H(a-x)}{a}$
	Wyznaczenie stosunku objętości stożków: $V_1 : V_2 = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{H(a-x)}{a} : \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 H$
	Zapisanie stosunku objętości stożków jako funkcji zmiennej x: $f(x) = \frac{x^2a - x^3}{a^3}$, gdzie $x \in (0; a)$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{2ax - 3x^2}{a^3}$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = \frac{2a}{3}$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in \left(0; \frac{2a}{3}\right)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{2a}{3}; a\right)$, więc dla $x = \frac{2a}{3}$ funkcja f przyjmuje wartość największą
20.	Zauważenie, że szukana prosta ma postać: $y = ax + 9 - a$, gdzie $a < 0$, a punkty jej przecięcia z osiami układu współrzędnych mają współrzędne: $(0, 9 - a)$ i $\left(\frac{a-9}{a}, 0\right)$
	Zapisanie sumy długości odcinków jako funkcji zmiennej a: $f(a) = 9 - a + \frac{a-9}{a} = -a - \frac{9}{a} - 10$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(a) = \frac{9}{a^2} - 1$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej dla $a < 0$: $a = -3$
	Stwierdzenie, że $f'(a) > 0$ dla $a \in (-3; 0)$ oraz $f'(a) < 0$ dla $a \in (-\infty; -3)$, więc w przedziale $\langle -3; 0)$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $(-\infty; -3\rangle$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $a = -3$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą
	Wyznaczenie równania szukanej prostej: $y = -3x + 12$
21.	Wyznaczenie długości odcinka AB: $\|AB\| = \sqrt{5}$ oraz równania prostej AB: $x + 2y + 6 = 0$
	Wyznaczenie odległości punktu $C\left(x, \frac{4}{x}\right)$, gdzie $x > 0$, od prostej AB: $d = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(x + \frac{8}{x} + 6\right)$
	Zapisanie pola trójkąta jako funkcji zmiennej x: $P(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4}{x} + 3$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
21. cd.	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{x^2}$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej dla $x > 0$: $x = 2\sqrt{2}$
	Stwierdzenie, że $P'(x) > 0$ dla $x \in (2\sqrt{2}; \infty)$ oraz $P'(x) < 0$ dla $x \in (0; 2\sqrt{2})$, więc dla $x = 2\sqrt{2}$ funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą, oraz podanie współrzędnych punktu C: $C(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$
22.	Zauważenie, że dla pewnego $x \in (0; 4)$ wierzchołki prostokąta mają współrzędne: $C\left(x, \frac{1}{4}x^2\right)$, $D(x, 4)$, $E(-x, 4)$, $F\left(-x, \frac{1}{4}x^2\right)$, zatem długości boków prostokąta są równe: $4 - \frac{1}{4}x^2$ oraz $2x$
	Zapisanie pola prostokąta jako funkcji zmiennej x: $P(x) = 8x - \frac{1}{2}x^3$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x) = 8 - \frac{3}{2}x^2$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
	Stwierdzenie, że $P'(x) > 0$ dla $x \in \left(0; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $P'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; 4\right)$, więc dla $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ funkcja P przyjmuje wartość największą
	Wyznaczenie długości boków prostokąta: $2\frac{2}{3}$, $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
23.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = -3x^2 + 2(a+1)x + 12$
	Zauważenie, że miejsca zerowe pochodnej są liczbami przeciwnymi, i skorzystanie ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = 0 = \frac{-2(a+1)}{-3}$, czyli $a = -1$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x = -2$, $x = 2$
	Zauważenie, że dla $x = -2$ funkcja f osiąga minimum, a dla $x = 2$ – maksimum
	Zauważenie, że $f(-2) = -f(2)$, zatem $b = 0$
	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i B: $A(-2, -16)$, $B(2, 16)$
24.	Wykonanie rysunku przekroju osiowego stożka 
	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa i wyznaczenie r w zależności od h: $h^2 = (10-r)^2 - r^2 = 100 - 20r$, czyli $r = 5 - \frac{1}{20}h^2$, $h \in (0; 10)$
	Zapisanie funkcji objętości: $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5\right)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
24. cd.	Wyznaczenie pochodnej: $V'(h)=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{80}h^4-\frac{3}{2}h^2+25\right)$ oraz zapisanie warunku: $V'(h)=0$, gdy $h^4-120h^2+2000=0$
	Wprowadzenie niewiadomej pomocniczej: $t=h^2$ i rozwiązanie równania kwadratowego $t^2-120t+2000=0$: $t_1=20$, $t_2=100$
	Uwzględnienie założenia $h\in(0;10)$ i podanie rozwiązania: $h=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ oraz $r=4$
	Obliczenie objętości stożka: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot 20\cdot 2\sqrt{5}=\frac{40}{3}\pi\sqrt{5}$
25.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ dla $x\in\mathbf{R}$
	Obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $f'(1)=\frac{1}{2}$
	Zapisanie równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P(1,0)$: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
26.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=2\sqrt{3}x$
	Wyznaczenie x_0: $f'(x_0)=2\sqrt{3}x_0=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc $x_0=\frac{1}{6}$
	Wyznaczenie drugiej współrzędnej punktu P: $y_0=f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{36}-1$. Podanie odpowiedzi: $P\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}}{36}-1\right)$
27.	Wyznaczenie długości podstawy CD i wysokości h trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka $C(x,y)$: $\lvert CD\rvert=2x$, $h=2-\frac{1}{2}x^2$, $x\in(0;2)$
	Zapisanie pola trapezu $ABCD$ jako funkcji zmiennej x: $P(x)=-\frac{1}{2}x^3-x^2+2x+4$, $D_P=(0;2)$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji P: $P'(x)=-\frac{3}{2}x^2-2x+2$ dla $x\in(0;2)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji P: $x=\frac{2}{3}$
	Uzasadnienie, że dla $x=\frac{2}{3}$ funkcja P osiąga wartość największą
	Obliczenie współrzędnych wierzchołka C, dla którego pole trapezu jest największe: $C\left(\frac{2}{3},\frac{16}{9}\right)$
28.	Wyznaczenie wysokości walca w zależności od promienia podstawy: $2\pi=2\pi r^2+2\pi rh$, więc $h=\frac{1-r^2}{r}$, i stwierdzenie, że $h>0$, gdy $0<r<1$
	Wyznaczenie objętości walca jako funkcji zmiennej r: $V(r)=\pi r-\pi r^3$
	Wyznaczenie dziedziny funkcji V: $D_V=(0;1)$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji V: $V'(x)=\pi-3\pi r^2$ dla $r\in(0;1)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V: $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$
	Uzasadnienie, że dla $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ funkcja V osiąga największą wartość
	Obliczenie największej wartości funkcji V: $V=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
29.	Wyznaczenie wysokości walca w zależności od promienia podstawy walca: $h = \frac{P-2\pi r^2}{2\pi r}$
	Wyznaczenie objętości walca jako funkcji zmiennej r: $V(r) = \frac{Pr-2\pi r^3}{2}$
	Wyznaczenie dziedziny funkcji V: $D_V = \left(0; \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji V: $V'(x) = \frac{P}{2} - 3\pi r^2$ dla $r \in \left(0; \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V: $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$
	Uzasadnienie, że dla $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ funkcja V osiąga największą wartość
	Obliczenie największej wartości funkcji V i wysokości walca o największej objętości: $V = \frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, $h = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}$
30.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń. Zapisanie wzoru na objętość prostopadłościanu $V = 2x^2h = 8$ i wyznaczenie $h = \frac{4}{x^2}$, gdzie $x, h > 0$ 
	Zapisanie nierówności $4(3x + h) < 28$ i przekształcenie jej do postaci: $3x^3 - 7x^2 + 4 < 0$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(x-1)(x-2)(x+\frac{2}{3}) < 0$ i rozwiązanie jej dla $x > 0$: $x \in (1;2)$
	Zapisanie pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcji zmiennej x: $P(x) = 4x^2 + \frac{24}{x}$, $D_P = (1;2)$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x) = 8x - \frac{24}{x^2} = 8\,\frac{x^3-3}{x^2}$ i wyznaczenie jej miejsca zerowego: $x_0 = \sqrt[3]{3}$
	Uzasadnienie, że w punkcie x_0 funkcja P osiąga najmniejszą wartość
	Podanie odpowiedzi: Wśród rozpatrywanych prostopadłościanów najmniejsze pole powierzchni całkowitej ma prostopadłościan o wymiarach: $\sqrt[3]{3} \times 2\sqrt[3]{3} \times \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}$.
31. a)	Wprowadzenie oznaczeń oraz zauważenie, że $a + h = 2$ i $a, h > 0$, czyli $a \in (0;2)$ 
	Okrąg jest wpisany w trapez o dłuższej podstawie a, więc $a > 2r = h = 2 - a$, skąd $a > 1$. Zatem $a \in (1;2)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
31. b)	Stwierdzenie, że w trapez można wpisać okrąg, więc $2c = a + b = 2a - 2x$, czyli $c = a - x$ Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa: $x^2 + (2-a)^2 = (a-x)^2$ i wyznaczenie $x = \frac{2a-2}{a}$
	Wyznaczenie c w zależności od a: $c = a - x = \frac{a^2-2a+2}{a}$ i zapisanie obwodu trapezu jako funkcji zmiennej a: $L(a) = \frac{4a^2-8a+8}{a}$
31. c)	Wyznaczenie pochodnej funkcji L: $L'(a) = \frac{4a^2-8}{a^2}$ dla $a \in (1;2)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji L: $a = \sqrt{2}$
	Zbadanie znaku pochodnej funkcji L i uzasadnienie, że dla $a = \sqrt{2}$ funkcja L osiąga najmniejszą wartość
	Obliczenie x i h: $x = 2 - \sqrt{2} = h$ oraz obliczenie $\operatorname{tg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{x} = 1$

13. Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka

Zestaw A – odpowiedzi

1. $10!$, $2 \cdot 5! \cdot 5!$

2. **a)** $4 \cdot \binom{13}{10}\binom{39}{3}$ **b)** $4 \cdot \binom{13}{6}\binom{39}{7}$

3. 28, 70

4. 4^5, 6^5

5. **a)** 4^4 **b)** 4^5 **c)** 4^6

6. **a)** $5! + 4 \cdot 4!$ **b)** $3 \cdot 5! + 4!$

7. **a)** $\frac{2}{15}$ **b)** $\frac{8}{15}$

8. **a)** $\frac{14}{55}$ **b)** $\frac{9}{55}$

9. **a)** $\frac{5}{18}$ **b)** $\frac{5}{192}$

10. $\frac{4}{5}$

11. **a)** $\frac{2}{15}$ **b)** $\frac{1}{15}$

12. **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{11}{15}$

13. $\frac{171}{256}$

14. $\frac{45}{2^{10}}$

15. **a)** $\frac{3!}{3^9} = \frac{2}{3^8}$ **b)** $\frac{(3!)^3}{3^9} = \frac{8}{3^6}$

16. **a)** $\frac{41}{96}$ **b)** $\frac{55}{144}$

17. bardziej prawdopodobne jest, że wejdą dokładnie 2 dziewczyny

18. większe prawdopodobieństwo w losowaniu ze zwracaniem

19. $n = 6$

20. $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$

21. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $n \in \{3, 4, 5, 6\}$

22. **a)** 0,8 **b)** 0,7

23. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$

24. **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{11}{12}$ **d)** 0,7

27. **a)** $\frac{17}{36}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}$

28. $P(K) = 0{,}65$, $P(M) = 0{,}35$,
$P(R) = 0{,}82$, $P(L) = 0{,}18$,
$P(K \cap L) = 0{,}1$, $P(M \cap R) = 0{,}27$,
$P(K|R) = \frac{55}{82}$, $P(R|K) = \frac{55}{65} = \frac{11}{13}$,
$P(M|L) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$, $P(L|M') = \frac{10}{65} = \frac{2}{13}$,
$P(K'|R) = \frac{27}{82}$

29. $\frac{1}{4}$

30. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$

31. $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$

32. $p_0 = \frac{1}{5}$, $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{2}{15}$,
$P(B|A) = \frac{7}{9}$, $P(A|B) = \frac{7}{11}$

33. 12

34. $\frac{11}{108}$

35. 0,74

36. 2 : 3

37. $n = 11$

38. $\frac{5}{7}$

39. 0,58

40. **a)** średnia wzrośnie o 500 zł, odchylenie standardowe się nie zmieni
b) średnia wzrośnie o 400 zł, odchylenie standardowe – o 200 zł

41. **a)** $M_{\mathrm{I}} = M_{\mathrm{II}} = 1$, $\overline{x}_{\mathrm{I}} = \overline{x}_{\mathrm{II}} = 2$
b) w ośrodku II **c)** w ośrodku I

Zestaw B – odpowiedzi

1. C **2.** A **3.** A **4.** D **5.** C **6.** D **7.** C

Zestaw C – odpowiedzi

1. 144
2. 074 $\left(\frac{45}{604}\right)$
3. 300
4. 083 $\left(\frac{1}{12}\right)$
5. 238 $\left(\frac{5}{21}\right)$
6. 250 (0,25)
7. 234 (0,234)

Zestaw D – odpowiedzi

1. w przypadku losowania ze zwracaniem
2. $n = 2$ lub $n = 15$
3. bardziej prawdopodobne jest wyciągnięcie kul tego samego koloru; należy dołożyć 1 kulę lub 8 kul białych
4. $n > 10$
5. **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^7$
b) $\frac{35}{648}$
6. $\frac{1}{1120}$
7. dwóch
8. przynajmniej czterema
9. jest mniejsze od 0,001
10. $\frac{25}{98}$
11. 1
12. $\frac{30}{91}$
13. $P(A' \cup B') = \frac{7}{12}$
14. **a)** $P(A \cup B) = 0{,}4$ **b)** $P(A) = \frac{2}{15}$, $P(B) = \frac{4}{15}$
17. $\frac{17}{24}$
18. 0,5
19. $P(A|B) = \frac{26}{57}$
20. $\frac{5}{11}$
21. $\frac{1}{2}$
22. **a)** $\frac{n^2+3n-1}{3n^2}$ **b)** $n = 4$
23. $\frac{1}{6}$
24. 5994
25. 896
26. 171 700
27. 3 778 930
28. 225
29. 44 361
30. 3780
32. 371 875
33. 28 750
34. $\frac{11}{16}$
35. 768
36. 18
37. $\frac{5}{14}$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Rozważenie przypadku losowania ze zwracaniem. Opis zbioru zdarzeń elementarnych oraz wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń: Ω_1 – 3-elementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru 6-elementowego, $\lvert\Omega_1\rvert = 6^3$
	Opis zdarzenia A_1 – zapisana liczba jest większa od 430, i wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A_1: $\lvert A_1\rvert = 2 \cdot 6^2 + 6 + 3 \cdot 6$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A_1: $P(A_1) = \frac{\lvert A_1\rvert}{\lvert\Omega_1\rvert} = \frac{4}{9}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1. cd.	Rozważenie losowania bez zwracania. Opis zbioru zdarzeń elementarnych oraz wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń: Ω_2 – 3-elementowe wariacje bez powtórzeń ze zbioru 6-elementowego, $\lvert\Omega_2\rvert = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4$
	Opis zdarzenia A_2 – zapisana liczba jest większa od 430 i wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A_2: $\lvert A_2\rvert = 2 \cdot 5 \cdot 4 + 4 + 2 \cdot 4$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A_2: $P(A_2) = \frac{\lvert A_2\rvert}{\lvert\Omega_2\rvert} = \frac{13}{30}$
	Podanie odpowiedzi: W przypadku losowania ze zwracaniem.
2.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – kombinacje 3-elementowe ze zbioru $(n+6)$-elementowego, wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = \binom{n+6}{3}$
	Opis zdarzenia A – trójki punktów nieleżących na jednej prostej wybranych spośród $n+2$ punktów, wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $\lvert A\rvert = \binom{6}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot 6$
	Zapisanie równania: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{18n}{(n+5)(n+6)} = \frac{9}{14}$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $n = 2$ lub $n = 15$
3.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – kombinacje 2-elementowe ze zbioru 8-elementowego, wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = \binom{8}{2}$
	Opis zdarzenia A – wyciągnięcie kul o różnych kolorach, i obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $\lvert A\rvert = \binom{2}{1}\binom{6}{1}$
	Opis zdarzenia B – wyciągnięcie kul tego samego koloru, i obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B: $\lvert B\rvert = \binom{2}{2} + \binom{6}{2}$
	Obliczenie prawdopodobieństw: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{3}{7}$, $P(B) = \frac{\lvert B\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{4}{7}$ i stwierdzenie, że zdarzenie B jest bardziej prawdopodobne
	Oznaczenie przez n liczby białych kul, które należy dołożyć, i zapisanie równania: $$\binom{6}{1}\binom{2+n}{1} = \frac{1}{2}\binom{8+n}{2}$$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $n = 1$ lub $n = 8$
4.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – permutacje n-elementowe, wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = n!$
	Opis zdarzenia A – kula o numerze 1 nie trafi do szuflady o numerze 1, oraz wyznaczenie liczby elementów zbioru A: $\lvert A\rvert = (n-1)(n-1)!$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{n-1}{n}$
	Rozwiązanie nierówności $P(A) > 0{,}9$: $n > 10$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – wariacje 7-elementowe z powtórzeniami ze zbioru 6-elementowego, wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = 6^7$
5. a)	Opis zdarzenia A – wypadną tylko parzyste liczby oczek, i wyznaczenie $\lvert A\rvert$: $\lvert A\rvert = 3^7$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$
5. b)	Opis zdarzenia B – pojawiają się wszystkie liczby oczek, i wyznaczenie $\lvert B\rvert$: $\lvert B\rvert = 6\cdot\binom{7}{2}\cdot 5!$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B: $P(B) = \frac{\lvert B\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{70}{6^4} = \frac{35}{648}$
6.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – permutacje 8-elementowe, wyznaczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = 8!$
	Opis zdarzenia A – otrzymanie liczby, w której wszystkie cyfry nieparzyste są na początku oraz cyfra 1 jest bezpośrednio przed cyfrą 2, oraz wyznaczenie $\lvert A\rvert$: $\lvert A\rvert = 3!\cdot 3!$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{1}{1120}$
7.	Oznaczenie liczby mężczyzn przez n. Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – 3-elementowe kombinacje ze zbioru $(n+5)$-elementowego, wyznaczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = \binom{n+5}{3}$
	Opis zdarzenia A – w delegacji jest więcej mężczyzn niż kobiet, wyznaczenie $\lvert A\rvert$: $\lvert A\rvert = \binom{5}{2}n + \binom{5}{3}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{60(n+1)}{(n+5)(n+4)(n+3)}$
	Zapisanie równania: $\frac{60(n+1)}{(n+5)(n+4)(n+3)} = \frac{6}{7}$
	Przekształcenie równania do postaci: $n^3 + 12n^2 - 23n - 10 = 0$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $n = 2$
8.	Oznaczenie liczby kostek przez n. Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – wariacje n-elementowe z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego, wyznaczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = 3^n$
	Opis zdarzenia A – wypadnie co najmniej jedna szóstka, i rozważenie zdarzenia A' – nie wypadnie żadna szóstka, oraz wyznaczenie $\lvert A'\rvert$: $\lvert A'\rvert = 2^n$
	Wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A': $P(A') = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ oraz prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
	Zapisanie i rozwiązanie nierówności: $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > \frac{3}{n}$. Podanie odpowiedzi: $n \geqslant 4$
9.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – permutacje 20-elementowe, wyznaczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = 20!$
	Opis zdarzenia A – osoby tej samej płci nie siedzą obok siebie, i wyznaczenie $\lvert A\rvert$: $\lvert A\rvert = 2\cdot 10!\cdot 10!$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{1}{2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}$ i stwierdzenie, że $P(A) < 0{,}001$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – 2-elementowe wariacje bez powtórzeń ze zbioru 50-elementowego, wyznaczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = 50 \cdot 49$
	Opis zdarzenia A – iloraz pierwszej liczby przez drugą należy do przedziału $\langle 1;2)$, oraz wyznaczenie $\lvert A\rvert$: $\lvert A\rvert = 2(1+2+\ldots+24)+25 = 625$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{625}{2450} = \frac{25}{98}$
11.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – kombinacje 2-elementowe ze zbioru 50-elementowego, wyznaczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = \binom{50}{2}$. Oznacznie liczby wadliwych żarówek przez n
	Opis zdarzenia A – co najmniej jedna wybrana żarówka jest zepsuta, opis zdarzenia przeciwnego A' – dwie wybrane żarówki są dobre
	Wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A': $\lvert A'\rvert = \binom{50-n}{2}$
	Zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia A' w postaci: $P(A') = \frac{\lvert A'\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{(50-n)(49-n)}{50\cdot 49}$
	Zapisanie nierówności $P(A) \leqslant \frac{1}{25}$ i nierówności $P(A') \geqslant \frac{24}{25}$
	Rozwiązanie nierówności $\frac{(50-n)(49-n)}{50\cdot 49} \geqslant \frac{24}{25}$ i podanie odpowiedzi: $n = 1$
12.	Opisanie zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – trójelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$ oraz opisanie zdarzeń A i B: A – otrzymamy co najmniej raz jedno oczko, B – otrzymamy co najmniej raz sześć oczek
	Zapisanie wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe $P(A\mid B)$: $P(A\mid B) = \frac{\lvert A\cap B\rvert}{\lvert B\rvert}$
	Wyznaczenie liczby elementów zbioru B: $\lvert B\rvert = \lvert\Omega\rvert - \lvert B'\rvert = 6^3 - 5^3 = 91$
	Zauważenie, że zdarzenie $A\cap B$ jest sumą parami rozłącznych zdarzeń: – otrzymamy raz jedno oczko, raz sześć oczek i raz liczbę oczek ze zbioru $\{2,3,4,5\}$, możliwe są $3\cdot 2\cdot 4 = 24$ takie wyniki – otrzymamy raz jedno oczko i dwa razy sześć oczek, możliwe są 3 takie wyniki – otrzymamy dwa razy jedno oczko i raz sześć oczek, możliwe są 3 takie wyniki
	Obliczenie mocy zbioru $A\cap B$: $\lvert A\cap B\rvert = 30$ i podanie odpowiedzi: $P(A\mid B) = \frac{30}{91}$
13.	Zapisanie zależności: $A'\cup B' = (A\cap B)'$
	Wyznaczenie prawdopodobieństwa zbioru $A'\cup B'$: $P(A'\cup B') = P((A\cap B)') = 1 - P(A\cap B)$
	Zapisanie zależności: $A\cup B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$
	Zauważenie, że zdarzenia $A\setminus B$, $B\setminus A$ i $A\cap B$ są parami rozłączne oraz $P(A\cup B) = 1$, zatem $P(A\setminus B) + P(B\setminus A) + P(A\cap B) = 1$, a stąd $P(A\cap B) = \frac{5}{12}$
	Obliczenie szukanego prawdopodobieństwa: $P(A'\cup B') = 1 - P(A\cap B) = \frac{7}{12}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14. a)	Zapisanie zależności: $A \cup B = (A' \cap B')'$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zbioru $A \cup B$: $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 0{,}4$
14. b)	Zapisanie równości: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i na jej podstawie zależności: $P(A) + P(B) = 0{,}4$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} P(B) = 2P(A) \\ P(A) + P(B) = 0{,}4 \end{cases}$ i rozwiązanie go: $P(A) = \frac{2}{15}$ i $P(B) = \frac{4}{15}$
15.	Zauważenie, że $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
	Dokończenie dowodu: $P(A \cap B') = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$
16.	Zauważenie, że $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leqslant 1$, stąd $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$
	Wyznaczenie $P(A \cap B) \geqslant 0{,}5$
	Wyznaczenie prawdopodobieństwa warunkowego $P(A\|B)$: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geqslant \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625$
17.	Wprowadzenie oznaczeń dla zdarzeń: B_1 – wylosowanie liczby 1, B_2 – wylosowanie liczby 2, B_3 – wylosowanie liczby 3, A – otrzymanie co najmniej jednego orła
	Zauważenie, że zdarzenia B_1, B_2 i B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym: $P(A) = P(A\|B_1)P(B_1) + P(A\|B_2)P(B_2) + P(A\|B_3)P(B_3)$
	Obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń B_1, B_2 i B_3: $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$
	Obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń $P(A\|B_1)$, $P(A\|B_2)$, $P(A\|B_3)$: $P(A\|B_1) = \frac{1}{2}$, $P(A\|B_2) = \frac{3}{4}$, $P(A\|B_3) = \frac{7}{8}$
	Podanie odpowiedzi: Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest równe $\frac{17}{24}$.
18.	Założenie, że $n \geqslant 3$, i przekształcenie nierówności $\binom{n}{n-3} \leqslant n$ do postaci: $n^2 - 3n - 4 \leqslant 0$
	Podanie rozwiązań nierówności: $n = 3$ lub $n = 4$
	Sprawdzenie, która z liczb 3, 4 jest pierwiastkiem wielomianu w: liczba 4
	Podanie odpowiedzi: $\frac{1}{2}$
19.	Obliczenie prawdopodobieństw $p_2, \ldots, p_6$: $p_2 = \frac{15}{64}$, $p_3 = \frac{20}{64}$, $p_4 = \frac{15}{64}$, $p_5 = \frac{6}{64}$, $p_6 = \frac{1}{64}$
	Obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń $A \cap B$ oraz B: $P(A \cap B) = \frac{26}{64}$, $P(B) = \frac{57}{64}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego $P(A\|B)$: $P(A\|B) = \frac{26}{57}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
20.	Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników losowania dwóch kul z II urny: $\binom{12}{2}$
	Wprowadzenie oznaczeń: A_1 – wylosowanie białej kuli z I urny, A_2 – wylosowanie czarnej kuli z I urny, B – wylosowanie dwóch kul białych z II urny i podanie prawdopodobieństw: $P(A_1) = \frac{3}{8}$, $P(A_2) = \frac{5}{8}$
	Obliczenie prawdopodobieństw warunkowych: $P(B\|A_1) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{10}} = \frac{15}{22}$ i $P(B\|A_2) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{10}} = \frac{7}{22}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B: $P(B) = P(B\|A_1)P(A_1) + P(B\|A_2)P(A_2) = \frac{15}{22} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{11}$
21.	Obliczenie a i b: $a = -1$, $b = 1$
	Obliczenie c: $c = \log_2 12$
	Obliczenie d: $d = 2$
	Wyznaczenie $\|\Omega\|$: $\|\Omega\| = \binom{4}{2} = 6$
	Wyznaczenie $\|A\|$, gdzie A jest zdarzeniem polegającym na wylosowaniu dwóch liczb całkowitych: $\|A\| = 3$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{1}{2}$
22. a)	Opis zbioru zdarzeń elementarnych: Ω – 3-elementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego, wyznaczenie $\|\Omega\|$: $\|\Omega\| = n^3$
	Opis zdarzenia A – utworzony ciąg jest monotoniczny, wyznaczenie liczby ciągów rosnących: $k_1 = \binom{n}{3}$ i liczby ciągów malejących: $k_2 = \binom{n}{3}$
	Wyznaczenie liczby ciągów stałych: $k_3 = n$
	Wyznaczenie liczby ciągów monotonicznych, w których dokładnie dwa wyrazy są równe: $k_4 = 4\binom{n}{2}$
	Wyznaczenie $\|A\|$: $\|A\| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2\binom{n}{3} + n + 4\binom{n}{2}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|} = \frac{n^2+3n-1}{3n^2}$
22. b)	Zapisanie równania $P(A) = \frac{9}{16}$ w postaci $11n^2 - 48n + 16 = 0$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $n = 4$
23.	Wprowadzenie oznaczeń: A – wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, B – suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta oraz przekształcenie wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\|A \cap B\|}{\|B\|}$
	Obliczenie liczebności zbiorów $\|A \cap B\|$ oraz $\|B\|$: $\|A \cap B\| = 7$, $\|B\| = 42$
	Obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego $P(A\|B)$: $P(A\|B) = \frac{1}{6}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
24.	Obliczenie sumy liczb: $111+112+113+121+122+123+131+132+133=1098$
	Obliczenie sumy liczb: $211+212+213+221+222+223+231+232+233=1998$
	Obliczenie sumy liczb: $311+312+313+321+322+323+331+332+333=2898$
	Podanie odpowiedzi: Suma wszystkich liczb jest równa 5994.
25.	Rozłożenie liczby 24 na czynniki pierwsze: $24=3\cdot2\cdot2\cdot2$ oraz zauważenie, że jest pięć parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 24
	Obliczenie, ile jest ośmiocyfrowych liczb, których cyfry składają się z jednej trójki, trzech dwójek i czterech jedynek ($24=3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$): $8\cdot\binom{7}{3}=280$
	Obliczenie, ile jest ośmiocyfrowych liczb, których cyfry składają się z jednej trójki, jednej czwórki, jednej dwójki i pięciu jedynek ($24=3\cdot4\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$): $8\cdot7\cdot6=336$
	Obliczenie, ile jest ośmiocyfrowych liczb, których cyfry składają się z jednej trójki, jednej ósemki i sześciu jedynek ($24=3\cdot8\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$): $8\cdot7=56$
	Obliczenie, ile jest ośmiocyfrowych liczb, których cyfry składają się z jednej szóstki, jednej czwórki i sześciu jedynek ($24=6\cdot4\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$): $8\cdot7=56$
	Obliczenie, ile jest ośmiocyfrowych liczb, których cyfry składają się z jednej szóstki, dwóch dwójek i pięciu jedynek ($24=6\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$): $8\cdot\binom{7}{2}=168$
	Obliczenie, ile jest wszystkich ośmiocyfrowych liczb, których iloczyn cyfr jest równy 24, i podanie odpowiedzi: Jest 896 takich liczb.
26.	Zauważenie, że jest jedna stucyfrowa liczba, której pierwsza cyfra jest równa 4, a po niej następuje 99 zer
	Obliczenie, ile jest stucyfrowych liczb postaci $3000\ldots1\ldots000$, w których po cyfrze 3 występuje 98 cyfr 0 i jedna cyfra 1, oraz ile jest stucyfrowych liczb postaci $2000\ldots2\ldots000$, w których po cyfrze 2 występuje 98 cyfr 0 i jedna cyfra 2, a także ile jest stucyfrowych liczb postaci $1000\ldots3\ldots000$, w których po cyfrze 1 występuje 98 cyfr 0 i jedna cyfra 3: $3\cdot99=297$
	Obliczenie, ile jest stucyfrowych liczb postaci $2000\ldots1\ldots000\ldots1\ldots000$, w których po cyfrze 2 występuje 97 cyfr 0 i dwie cyfry 1 stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc: $\binom{99}{2}=4851$
	Obliczenie, ile jest stucyfrowych liczb postaci $1000\ldots2\ldots000\ldots1\ldots000$ oraz $1000\ldots1\ldots000\ldots2\ldots000$, w których po cyfrze 1 występuje 97 cyfr 0 oraz cyfry 1 i 2 (w dowolnej kolejności) stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc: $2\cdot\binom{99}{2}=9702$
	Obliczenie, ile jest stucyfrowych liczb postaci $1000\ldots1\ldots000\ldots1\ldots000\ldots1\ldots000$, w których po cyfrze 1 występuje 96 cyfr 0 i trzy cyfry 1 stojące na trzech miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc: $\binom{99}{3}=156\,849$
	Obliczenie, ile jest wszystkich stucyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4: jest 171 700 takich liczb

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
27.	Zauważenie, że wszystkie liczby stucyfrowe o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5, możemy podzielić na 4 grupy w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu liczby
	Liczba 5000...000, w której po cyfrze 5 następuje 99 zer. Jest jedna taka liczba
	Liczby postaci 3000...1...000...1...000, w których po cyfrze 3 występuje 97 cyfr 0 i dwie cyfry 1 stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{2} = 4851$ takich liczb
	Liczby postaci 1000...3...000...1...000 lub 1000...1...000...3...000, w których po cyfrze 1 występuje 97 cyfr 0 oraz cyfry 1 i 3 (w dowolnej kolejności) stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $99 \cdot 98 = 9702$ takich liczb
	Liczby postaci 1000...1...000...1...000...1...000...1...000, w których po cyfrze 1 występuje 95 cyfr 0 i cztery cyfry 1 stojące na czterech miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{4} = 3\,764\,376$ takich liczb
	Zatem wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5, jest 3 778 930
28.	Zauważenie, że na ostatnim miejscu musi wystąpić jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8, zatem cyfra 3 występuje 4 lub 5 razy
	Rozważenie przypadku, gdy cyfra 3 występuje 5 razy – jest 5 takich liczb: 333 330, 333 332, 333 334, 333 336, 333 338
	Rozważenie przypadku, gdy cyfra 3 występuje 4 razy i nie występuje na pierwszym miejscu. Wówczas na pierwszym miejscu może wystąpić jedna z ośmiu cyfr (nie występuje 0 ani 3), na ostatnim miejscu może wystąpić jedna z pięciu cyfr, na pozostałych miejscach występuje cyfra 3. Jest $8 \cdot 5 = 40$ takich liczb.
	Rozważenie przypadku, gdy cyfra 3 występuje 4 razy i występuje na pierwszym miejscu. Wówczas na czterech miejscach umieszczamy 3 cyfry 3 – można to zrobić na 4 sposoby, na jednym miejscu umieszczamy jedną z dziewięciu cyfr, na ostatnim miejscu może wystąpić jedna z pięciu cyfr. Jest $4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$ takich liczb. Podanie odpowiedzi: Jest $5 + 40 + 180 = 225$ takich liczb.
29.	Rozważenie przypadku, gdy nie występuje cyfra 2 – jest $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4$ takich liczb (na pierwszym miejscu może wystąpić jedna z ośmiu cyfr, na trzech kolejnych każda z dziewięciu cyfr i na ostatnim miejscu jedna z czterech cyfr)
	Rozważenie przypadku, gdy cyfra 2 występuje raz: – cyfra 2 występuje na pierwszym miejscu: jest $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4$ takich liczb, – cyfra 2 występuje na jednym z trzech środkowych miejsc: jest $8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4$ takich liczb, – cyfra 2 występuje na ostatnim miejscu: jest $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1$ takich liczb
	Rozważenie przypadku, gdy cyfra 2 występuje 2 razy: – cyfra 2 występuje na początku i końcu: jest $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1$ takich liczb, – cyfra 2 występuje na początku i w środku: jest $1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4$ takich liczb, – cyfra 2 występuje tylko w środku: jest $8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 4$ takich liczb, – cyfra 2 występuje w środku i na końcu: jest $8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1$ takich liczb
	Podanie odpowiedzi: Jest 44 361 takich liczb.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
30.	Rozważenie przypadku, gdy cyfra 5 występuje na ostatnim miejscu. Na siedmiu miejscach należy rozmieścić trzy cyfry 5 – można to zrobić na $\binom{7}{3} = 35$ sposobów. Na pozostałych trzech miejscach cyfry można rozmieścić na 3^4 sposobów. Jest zatem $35 \cdot 3^4$ takich liczb
	Rozważenie przypadku, gdy cyfra 5 nie występuje na ostatnim miejscu. Na siedmiu miejscach należy rozmieścić cztery cyfry 5 – można to zrobić na $\binom{7}{4} = 35$ sposobów. Na ostatnim miejscu można umieścić tylko cyfrę 3. Na pozostałych trzech miejscach cyfry można rozmieścić na 3^3 sposobów. Jest zatem $35 \cdot 3^3$ takich liczb
	Podanie odpowiedzi: Jest $35(3^4 + 3^3) = 3780$ takich liczb.
31.	Zauważenie, że cyfra 1 może występować w zapisie na $\binom{10}{3}$ sposobów
	Zauważenie, że pozostałe cyfry można rozmieścić na 2^7 sposobów
	Sprawdzenie, że $\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 15\,360$
32.	Rozpatrzenie przypadku, gdy nie występują cyfry parzyste: jest $5^6 = 5 \cdot 5^5$ takich liczb
	Rozpatrzenie przypadku, gdy występuje jedna cyfra parzysta: – cyfra parzysta występuje na początku: jest $4 \cdot 5^5$ takich liczb, – cyfra parzysta występuje w środku: jest $4 \cdot 5 \cdot 5^5 = 20 \cdot 5^5$ takich liczb. Jest zatem $24 \cdot 5^5$ takich liczb
	Rozpatrzenie przypadku, gdy występują dwie cyfry parzyste: – jedna cyfra parzysta występuje na początku: jest $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5^4 = 16 \cdot 5^5$ takich liczb, – obie cyfry parzyste występują w środku: jest $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 30 \cdot 5^5$ takich liczb. Jest zatem $46 \cdot 5^5$ takich liczb
	Rozpatrzenie przypadku, gdy występują trzy cyfry parzyste: – jedna cyfra parzysta występuje na początku, dwie w środku: jest $4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 24 \cdot 5^5$ takich liczb, – trzy cyfry parzyste występują w środku: jest $5 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2 = 20 \cdot 5^5$ takich liczb. Jest zatem $44 \cdot 5^5$ takich liczb. Podanie odpowiedzi: Jest $119 \cdot 5^5 = 371\,875$ takich liczb.
33.	Rozpatrzenie przypadku, gdy na pierwszym miejscu występuje cyfra nieparzysta, można ją tam umieścić na 5 sposobów. Pozostałe dwie cyfry nieparzyste można rozmieścić na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów. Na pozostałych dwóch wolnych miejscach występują cyfry parzyste. Jest zatem $5 \cdot 6 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 18\,750$ takich liczb
	Rozpatrzenie przypadku, gdy na pierwszym miejscu występuje cyfra parzysta, można ją tam umieścić na 4 sposoby. Drugą cyfrę nieparzystą można rozmieścić na 4 różnych miejscach. Takich liczb jest zatem $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5^3 = 10\,000$
	Podanie odpowiedzi: Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste, jest $18\,750 + 10\,000 = 28\,750$.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
34.	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = 8^3 = 512$. Oznaczenie przez A zdarzenia polegającego na wylosowaniu trzech liczb, których iloczyn jest podzielny przez 4
	Zapisanie zdarzenia A' jako sumy zdarzeń $B_1 \cup B_2$, gdzie: B_1 – wszystkie zapisane liczby są nieparzyste, B_2 – wśród zapisanych liczb są dwie nieparzyste oraz jedna równa 2 lub 6
	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\lvert B_1\rvert = 4^3 = 64$, $\lvert B_2\rvert = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 96$, $\lvert A'\rvert = 160$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{160}{512} = \frac{11}{16}$
35.	Zauważenie, że liczba jest podzielna przez 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4, czyli dwucyfrową końcówką liczby może być: 00, 12, 20, 32. Zatem dwucyfrową końcówkę można wybrać na 4 sposoby
	Zauważenie, że pierwszą cyfrę można wybrać na 3 sposoby (różna od 0), a kolejne trzy cyfry można wybrać na 4^3 sposobów
	Podanie odpowiedzi: Takich liczb jest $3 \cdot 4^3 \cdot 4 = 768$.
36.	Zauważenie, że ostatnią cyfrą jest 0 i suma cyfr musi być podzielna przez 3
	Rozpatrzenie przypadku, gdy na pierwszych czterech miejscach występują cyfry 0, 0, 1, 2 – jest 6 takich liczb: 10020, 10200, 12000, 20010, 20100, 21000
	Rozpatrzenie przypadku, gdy na pierwszych czterech miejscach występują cyfry 0, 1, 1, 1 – są 3 takie liczby: 10110, 11010, 11100
	Rozpatrzenie przypadku, gdy na pierwszych czterech miejscach występują cyfry 0, 2, 2, 2 – są 3 takie liczby: 20220, 22020, 22200
	Rozpatrzenie przypadku, gdy na pierwszych czterech miejscach występują cyfry 1, 1, 2, 2 – jest 6 takich liczb: 11220, 12120, 12210, 21120, 21210, 22110 Podanie odpowiedzi: Jest 18 takich liczb.
37.	Zapisanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = 8!$ Opisanie zdarzenia A i zdarzenia do niego przeciwnego: A – żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu A' – liczby parzyste są sąsiednimi wyrazami ciągu Zapisanie zbioru $A' = B_1 \cup B_2$, gdzie B_1 – tylko dwie liczby parzyste występują obok siebie, B_2 – trzy liczby parzyste występują obok siebie
	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych zbioru B_1: $\lvert B_1\rvert = 2 \cdot 5 \cdot 3! \cdot 5! + 5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 5! = 3! \cdot 5! \cdot 30$
	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych zbioru B_2: $\lvert B_2\rvert = 3! \cdot 5! \cdot 6$ oraz zbioru A': $\lvert A'\rvert = 3! \cdot 5! \cdot 36$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3! \cdot 5! \cdot 36}{8!} = \frac{5}{14}$

Zestawy maturalne

Zestaw 1 – odpowiedzi

1. A **2.** D **3.** B **4.** C **5.** C

6. 111 $\left(p = 5\sqrt{5}\right)$

7. 633 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$

8. 666 $\left(P(A) = \frac{2}{3}\right)$

9. 366 $\left(p + q = \frac{11}{30}\right)$

10. $y = -\sqrt{3}x - 5$

11. $p = -2$

12. $P(A) = 0{,}5511$

13. $\overrightarrow{BC} = [0, 5]$, $\cos|\sphericalangle ABC| = -\frac{3}{5}$

14. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$

15. $1\frac{10}{81}$

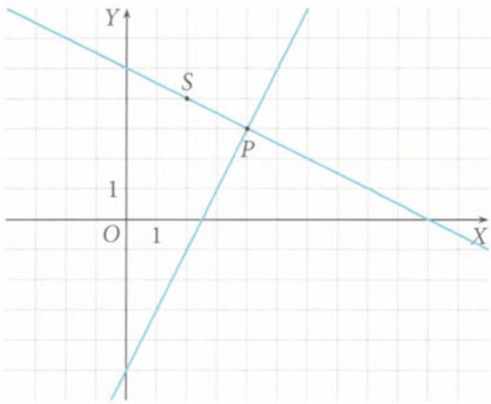
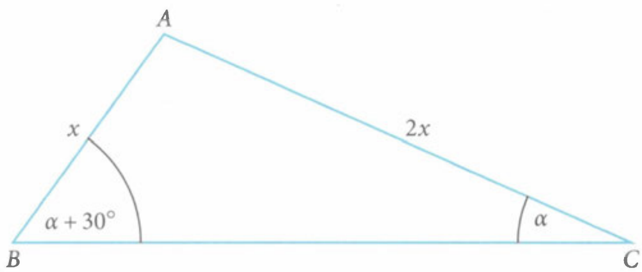
16. $\frac{4+\sqrt{3}}{13}$

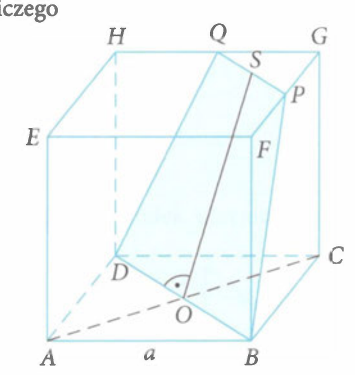
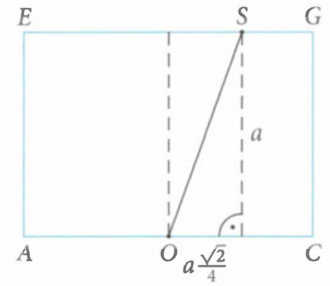
17. $V = 216\ \text{cm}^3$

18. $16\ \text{m} \times 8\ \text{m}$

Zestaw 1 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Obliczenie $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$ oraz wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{1}{3}x$
	Wyznaczenie punktu styczności: $(-3\sqrt{3}, 4)$
	Zapisanie równania stycznej: $y = -\sqrt{3}x - 5$
11.	Zapisanie warunków: $p < 0$ i $-\frac{\Delta}{4p} = 2$
	Obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego: $\Delta = -7p^2 - 20p + 4$ oraz zapisanie równania: $7p^2 + 12p - 4 = 0$
	Rozwiązanie równania i wybranie poprawnej odpowiedzi: $p = -2$
12.	Zauważenie, że iloczyn liczb jest podzielny przez 3, jeżeli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 3, oraz podanie, ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3: 33
	Obliczenie liczebności zdarzenia A – iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 3: $\lvert A\rvert = 33 \cdot 33 + 33 \cdot 67 \cdot 2 = 5511$
	Obliczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = 100^2$ oraz obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = 0{,}5511$
13.	Wyznaczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = [0, 5]$ i obliczenie długości boków trójkąta ABC: $\lvert AB\rvert = 10$, $\lvert AC\rvert = \sqrt{185}$, $\lvert BC\rvert = 5$
	Wykorzystanie twierdzenia cosinusów do zapisania równania: $(\sqrt{185})^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos\lvert\sphericalangle ABC\rvert$
	Obliczenie cosinusa kąta ABC: $\cos\lvert\sphericalangle ABC\rvert = -\frac{3}{5}$

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="4">14.</td><td>Wyznaczenie równania symetralnej cięciwy AB: $y=-\frac{1}{2}x+5$

</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie współrzędnych środka cięciwy AB: $P(4,3)$</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie współrzędnych punktu A lub punktu B: $A(2,-1)$, $B(6,7)$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie kwadratu promienia okręgu: $r^2=25$. Podanie równania okręgu: $(x-2)^2+(y-4)^2=25$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">15.</td><td>Wyznaczenie różnicy i pierwszego wyrazu ciągu (a_n): $r=2$, $a_1=-4$</td></tr>
<tr><td>Zapisanie zależności: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=3^{a_{n+1}-a_n}=3^r=9$</td></tr>
<tr><td>Sformułowanie wniosku: (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q=9$.</td></tr>
<tr><td>Obliczenie sumy: $b_1+b_2+b_3=1\frac{10}{81}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">16.</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

</td></tr>
<tr><td>Skorzystanie z twierdzenia sinusów i zapisanie równania: $\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{2x}{\sin(\alpha+30^\circ)}$</td></tr>
<tr><td>Skorzystanie ze wzoru na sinus sumy kątów i przekształcenie równania do postaci:
$2\sin\alpha=\sin\alpha\cos 30^\circ+\cos\alpha\sin 30^\circ$</td></tr>
<tr><td>Przekształcenie równania do postaci: $(4-\sqrt{3})\sin\alpha=\cos\alpha$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie tangensa kąta α: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4+\sqrt{3}}{13}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td></td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

</td></tr>
<tr><td></td><td>Wyznaczenie długości podstaw trapezu $DBPQ$: $|BD| = a\sqrt{2}$, $|PQ| = a\frac{\sqrt{2}}{2}$</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i obliczenie wysokości trapezu $DBPQ$: $|OS| = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$

</td></tr>
<tr><td></td><td>Wyznaczenie pola trapezu $DBPQ$ w zależności od długości krawędzi sześcianu:
$$P = \frac{|DB|+|PQ|}{2}\cdot|OS| = \frac{9}{8}a^2$$</td></tr>
<tr><td></td><td>Wyznaczenie długości krawędzi sześcianu i jego objętości: $a = 6$ cm, $V = 216$ cm^3</td></tr>
<tr><td></td><td>Zauważenie, że boki trawnika mają długości: x i $\frac{128}{x}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Zapisanie długości boków chodnika: $(x+4)$, $\left(\frac{128}{x}+2\right)$, gdzie $x>0$</td></tr>
<tr><td></td><td>Zapisanie pola chodnika jako funkcji zmiennej x:
$$P(x) = (x+4)\left(\frac{128}{x}+2\right) - 128 = 2x + \frac{512}{x} + 8$$</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x) = 2 - \frac{512}{x^2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = 16$</td></tr>
<tr><td></td><td>Stwierdzenie, że $P'(x) > 0$ dla $x \in (16;\infty)$ oraz $P'(x) < 0$ dla $x \in (0;16)$, więc w przedziale $\langle 16;\infty)$ funkcja P jest rosnąca i w przedziale $(0;16\rangle$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $x = 16$ funkcja P przyjmuje najmniejszą wartość</td></tr>
<tr><td></td><td>Zapisanie wymiarów trawnika: 16 m × 8 m</td></tr>
</table>

Zestaw 2 – odpowiedzi

1. D **2.** B **3.** A **4.** C **5.** C

6. 216 $(n = 6)$

7. 256

8. 109 $\left(a = \frac{3\sqrt{3}-3}{2}\right)$

9. 316 $\left(\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

10. $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{2}{9}$

11. $m \in \{-1, 0, 1\}$

12. $A'(13, 15)$, $B'(-7, 15)$

13. $p = -3$, $q = -3$

14. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

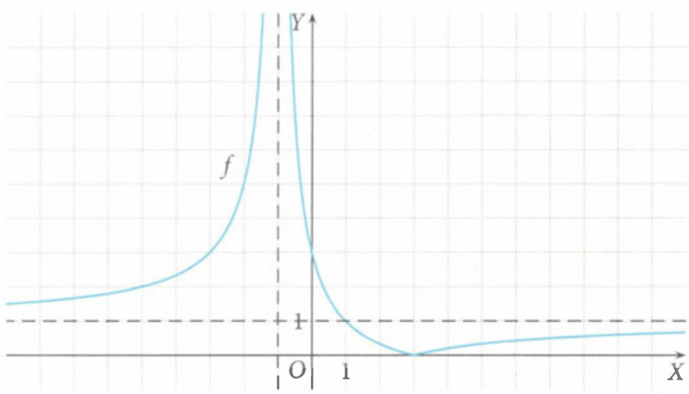
15. $a_n = 2^{n-2}$

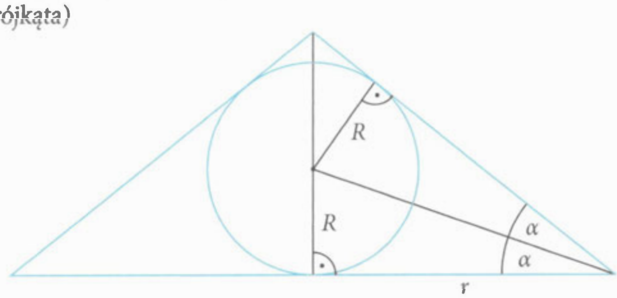
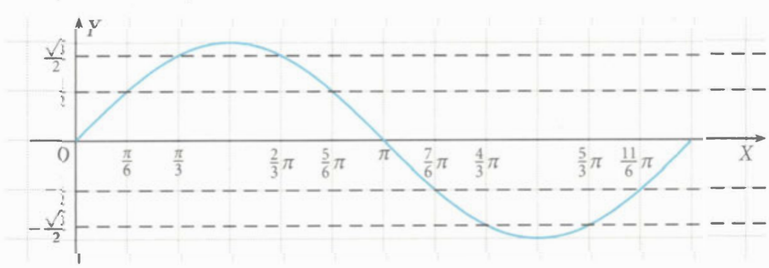
16. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi; \frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi; \frac{11}{6}\pi\right)$

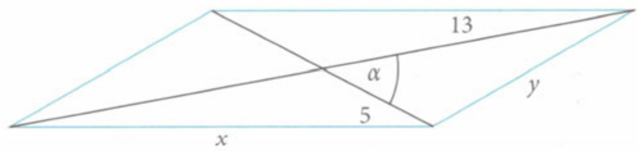
17. $Obw = 2\sqrt{298} + 6\sqrt{10}$

18. b) najmniejsze pole $P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}$,
największe pole $P(0) = P(2) = 2$

Zestaw 2 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Wprowadzenie oznaczenia: $P(B) = x$ i zapisanie zależności: $P(A) = 3x$, $P(A') = 1 - 3x$
	Zauważenie, że $B \subset A'$, czyli $P(A' \setminus B) = P(A') - P(B)$
	Rozwiązanie równania: $\frac{1}{9} = 1 - 3x - x$ i podanie odpowiedzi: $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{2}{9}$
11.	Przedstawienie wyrażenia $\frac{3-x}{x+1}$ w postaci: $\frac{3-x}{x+1} = \frac{4}{x+1} - 1$, gdzie $x \neq -1$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \left\lvert\frac{3-x}{x+1}\right\rvert$ 
	Odczytanie z wykresu, że równanie $\left\lvert\frac{3-x}{x+1}\right\rvert = \lvert m\rvert$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \{-1, 0, 1\}$
12.	Zapisanie równania okręgu w postaci: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 50$ i podanie współrzędnych środka okręgu: $S(3, 5)$
	Skorzystanie z równości $\overrightarrow{SA'} = -2\overrightarrow{SA}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu A': $A'(13, 15)$
	Skorzystanie z równości $\overrightarrow{SB'} = -2\overrightarrow{SB}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu B': $B'(-7, 15)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13.	Zauważenie, że podana nierówność jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą, jeśli dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$ spełniona jest równość: $$x^2 + px - 2qx + 6q = (x+6)(x-3)$$
	Zapisanie warunków: $p - 2q = 3$ oraz $6q = -18$
	Podanie odpowiedzi: $p = -3$, $q = -3$
14.	Wykonanie rysunku przekroju stożka (środek okręgu wpisanego jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta) 
	Zapisanie warunku wynikającego z treści zadania: $8\pi R^2 = \pi r^2$, stąd $\frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{8}$
	Zauważenie, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
15.	Obliczenie a_1: $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$ i zauważenie, że dla $n > 1$ spełniona jest zależność: $a_n = S_n - S_{n-1}$
	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu: $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n = 2^{n-2}$
	Wyznaczenie ilorazu: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ i sformułowanie wniosku: (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = 2$.
16.	Zapisanie warunków: $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$
	Obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego: $\Delta = -16\sin^2\alpha + 12$
	Wyznaczenie $\sin\alpha$ z nierówności $-16\sin^2\alpha + 12 > 0$: $\sin\alpha \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
	Skorzystanie ze wzoru Viète'a $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ i zapisanie warunku $x_1 \cdot x_2 > 0$ w postaci: $4\sin^2\alpha - 1 > 0$
	Wyznaczenie $\sin\alpha$ z nierówności $4\sin^2\alpha - 1 > 0$: $\sin\alpha \in \left\langle -1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right\rangle$
	Skorzystanie z wykresu funkcji sinus  i sformułowanie odpowiedzi: $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi; \frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi; \frac{11}{6}\pi\right)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
17.	Wykonanie rysunku i zauważenie, że pole równoległoboku jest równe: $P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 13 \sin\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 13 \sin(180^\circ - \alpha)$ 
	Skorzystanie z tożsamości $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ i zapisanie równania: $130 \sin\alpha = 78$, stąd $\sin\alpha = \frac{3}{5}$
	Obliczenie cosinusa kąta α: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$
	Skorzystanie z tożsamości $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ i obliczenie $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5}$
	Skorzystanie z twierdzenia cosinusów do obliczenia długości boków: $x^2 = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$, stąd $x = \sqrt{298}$ $y^2 = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5}$, stąd $y = 3\sqrt{10}$
	Podanie obwodu równoległoboku: $Obw = 2\sqrt{298} + 6\sqrt{10}$
18. a)	Zauważenie, że $\sqrt{4 + \lvert DF\rvert^2} = \sqrt{(2 - \lvert DF\rvert)^2 + (2 - x)^2}$, czyli $\lvert DF\rvert = 1 - x + \frac{1}{4}x^2$, gdzie $x \in \langle 0; 2)$
	Zapisanie pola trójkąta AEF jako różnicy pola kwadratu $ABCD$ i sumy pól trójkątów ADF, CEF i ABE: $P(x) = 4 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2\left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right) + \frac{1}{2} \cdot (2 - x)\left(2 - \left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right)\right) + \frac{1}{2} \cdot 2x\right)$
	Uproszczenie wzoru na pole trójkąta AEF: $P(x) = 2 - \frac{1}{8}x(x-2)^2$
18. b)	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + x - \frac{1}{2}$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$
	Stwierdzenie, ze $P'(x) > 0$ dla $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$ oraz $P'(x) < 0$ dla $x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$ i obliczenie wartości funkcji P dla $x \in \left\{0, \frac{2}{3}, 2\right\}$: $P(0) = P(2) = 2$, $P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}$
	Podanie odpowiedzi: Największe pole trójkąta AEF jest równe 2, a najmniejsze wynosi $\frac{50}{27}$.

Zestaw 3 – odpowiedzi

1. D **2.** B **3.** C **4.** A **5.** D

6. 125 $\left(x_0 = \frac{5\pi}{4}\right)$

7. 181 $\left(\frac{2}{11}\right)$

8. 342

9. 138 $\left(r = \frac{\sqrt{13}}{26}\right)$

10. $\overrightarrow{EC} = 2\vec{u} - \vec{w}$, $\overrightarrow{EB} = 2\vec{u} - 2\vec{w}$

12. $520 = 13 + 39 + 117 + 351$

13. $c = 5$

14. $n \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

15. a) 192 **b)** 4, 6, 8

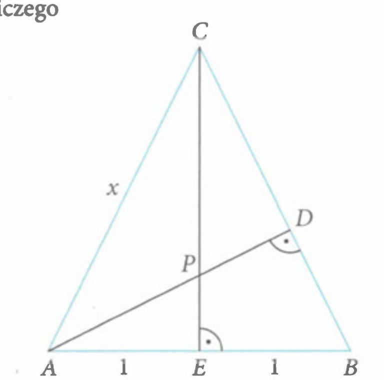
16. $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$, $D = (\sqrt{2}; \infty)$

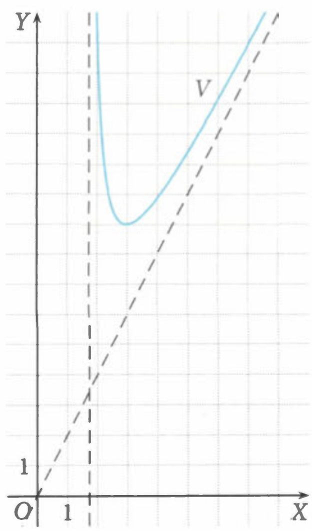
17. a) $V(x) = \frac{2x^3}{x^2-3}$, $D = (\sqrt{3}; \infty)$

b) $x = 3$, $V(3) = 9$

Zestaw 3 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Zapisanie równości: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ i wyznaczenie wektora $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{CD} = \vec{w} - \vec{u}$
	Zauważenie, że $\overrightarrow{EB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$ i wyznaczenie wektora $\overrightarrow{EB}$: $\overrightarrow{EB} = 2\vec{u} - 2\vec{w}$
	Zauważenie, że $\overrightarrow{ED} = \vec{u}$ i zapisanie równości: $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = 2\vec{u} - \vec{w}$
11.	Wykorzystanie wzoru na różnicę sześcianów i zapisanie lewej strony nierówności $a^3 - b^3 < 3a^2(a-b)$ w postaci: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
	Zauważenie, że przy podanym założeniu $a > b > 0$ prawdziwe są nierówności: $b^2 < a^2$ i $ab < a^2$
	Sformułowanie wniosku: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) < (a-b)(a^2 + a^2 + a^2) = 3a^2(a-b)$
12.	Zapisanie warunków wynikających z treści zadania: $$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 520, \quad a_1q^2 - a_1 = 104, \quad \text{gdzie } a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3 \in \mathbf{C}$$
	Podzielenie równań stronami i otrzymanie równania: $\frac{1+q+q^2+q^3}{q^2-1} = 5$, przy założeniach $a_1 \neq 0$, $q \neq 1$ i $q \neq -1$ (dla $a_1 = 0$ lub $q = 1$ lub $q = -1$ nie są spełnione warunki zadania)
	Przekształcenie równania do postaci: $\frac{1+q^2}{q+1} = 5$ i podanie jego rozwiązań: $q = 2$ lub $q = 3$
	Stwierdzenie, że dla $q = 2$ otrzymujemy $a_1 = \frac{104}{3} \notin \mathbf{C}$, a dla $q = 3$ mamy $a_1 = 13$, $a_1q = 39$, $a_1q^2 = 117$, $a_1q^3 = 351$ i są spełnione warunki zadania. Podanie odpowiedzi: $520 = 13 + 39 + 117 + 351$
13.	Zapisanie i rozwiązanie warunków $\Delta = 49 - 4c > 0$ i $c \neq 0$: $c \in (-\infty; 0) \cup \left(0; 12\frac{1}{4}\right)$
	Przekształcenie równania $\left(\frac{10}{x_1} - x_2\right) \cdot \left(\frac{10}{x_2} - x_1\right) = 5$ do postaci: $(10 - x_1x_2)^2 = 5x_1x_2$
	Wykorzystanie wzoru Viète'a i zapisanie równania $(10 - x_1x_2)^2 = 5x_1x_2$ w postaci: $(10 - c)^2 = 5c$
	Rozwiązanie równania $(10 - c)^2 = 5c$ z uwzględnieniem warunków $\Delta > 0$ i $c \neq 0$: $c = 5$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14.	Opis zbioru zdarzeń elementarnych oraz wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń: Ω – 2-elementowe kombinacje ze zbioru n-elementowego, $\lvert\Omega\rvert = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, gdzie $n \geqslant 9$
	Opis zdarzenia: A – wylosowanie dwóch losów wygrywających, oraz wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $\lvert A\rvert = \binom{9}{2} = 36$
	Wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{72}{n(n-1)}$
	Rozwiązanie nierówności $1 > \frac{72}{n(n-1)} > 0{,}3$ z uwzględnieniem założenia, że $n \geqslant 9$: $n \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
15. a)	Zapisanie wielomianu w w postaci: $w(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, gdzie x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu w, i zauważenie, że $x_1 x_2 x_3 = 192$
15. b)	Zapisanie pierwiastków wielomianu w w postaci: $x_2 - r$, x_2, $x_2 + r$, gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego, przekształcenie równania $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ do postaci: $3x_2 = 18$ i obliczenie x_2: $x_2 = 6$
	Przekształcenie równania $x_1 x_2 x_3 = 192$ do postaci: $(6 - r) \cdot 6 \cdot (6 + r) = 192$ i rozwiązanie go: $r = -2$ lub $r = 2$
	Obliczenie pozostałych pierwiastków wielomianu w: $x_1 = 4$, $x_3 = 8$
15. c)	Zapisanie wielomianu w w postaci: $w(x) = (x - 4)(x - 6)(x - 8)$ i wyznaczenie $w(2k)$: $w(2k) = 8(k - 2)(k - 3)(k - 4)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$
	Zauważenie, że $w(2k)$ dzieli się przez 8 oraz że przynajmniej jedna spośród kolejnych liczb całkowitych $k - 2$, $k - 3$, $k - 4$ jest parzysta i dokładnie jedna jest podzielna przez 3, oraz sformułowanie wniosku: $w(2k)$ jest podzielne przez 16 i przez 24.
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Wykorzystanie twierdzenia cosinusów do ustalenia zakresu zmienności x ($x > 0$) – trójkąt równoramienny ABC jest ostrokątny, gdy cosinus kąta γ przy wierzchołku C jest liczbą dodatnią: $\cos\gamma = \frac{2x^2 - 4}{2x^2} > 0$ czyli $x \in (\sqrt{2}; \infty)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16. cd.	Wyznaczenie długości wysokości CE: $\lvert CE\rvert = \sqrt{x^2-1}$
	Zauważenie, że trójkąty CEB i AEP są podobne, zapisanie zależności $\frac{\lvert CE\rvert}{\lvert CB\rvert} = \frac{\lvert AE\rvert}{\lvert AP\rvert}$ i wyznaczenie długości odcinka AP: $\lvert AP\rvert = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
	Zauważenie, że trójkąty ADB i CEB są podobne, zapisanie zależności $\frac{\lvert AD\rvert}{\lvert AB\rvert} = \frac{\lvert CE\rvert}{\lvert CB\rvert}$ i wyznaczenie długości odcinka PD: $\lvert PD\rvert = \frac{x^2-2}{x\sqrt{x^2-1}}$
	Wyznaczenie funkcji f opisującej iloraz $\frac{\lvert PD\rvert}{\lvert AP\rvert}$ i zapisanie jej dziedziny: $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$ dla $x \in \left(\sqrt{2}; \infty\right)$
17. a)	Oznaczenie krawędzi podstawy przez a oraz zauważenie, że trójkąty PAO i POS są podobne (na podstawie cechy KKK), zatem $\frac{\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}$, czyli $a = 2x\sqrt{\frac{3}{2x^2-6}}$
	Zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej x: $V(x) = \frac{2x^3}{x^2-3}$ oraz podanie jej dziedziny: $D = \left(\sqrt{3}; \infty\right)$
17. b)	Obliczenie pochodnej funkcji V oraz podanie jej dziedziny: $V'(x) = \frac{2x^4-18x^2}{(x^2-3)^2}$, $D' = \left(\sqrt{3}; \infty\right)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = 3$
	Stwierdzenie, że $V'(x) > 0$ dla $x \in (3; \infty)$ oraz $V'(x) < 0$ dla $x \in \left(\sqrt{3}; 3\right)$, więc w przedziale $\langle 3; \infty)$ funkcja V jest rosnąca, a w przedziale $\left(\sqrt{3}; 3\right\rangle$ – malejąca. Zatem dla $x = 3$ funkcja V przyjmuje najmniejszą wartość: $V(3) = 9$
17. c)	Obliczenie granic funkcji V na końcach przedziału określoności: $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} V(x) = \lim\limits_{x \to \infty} V(x) = \infty$
	Naszkicowanie wykresu funkcji V 

Zestaw 4 – odpowiedzi

1. D **2.** D **3.** A **4.** A **5.** B

6. 382

7. 375

8. 136 ($n = 56$)

9. 107 $\left(P(A' \cap B') = \frac{3}{28}\right)$

11. $a = 2$, $x = 13$

12. $m = -1$ lub $m = 1$

13. 220

14. $P = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) r^2$

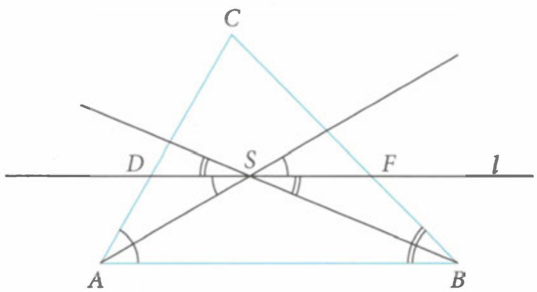
15. a) $S(0, 0)$

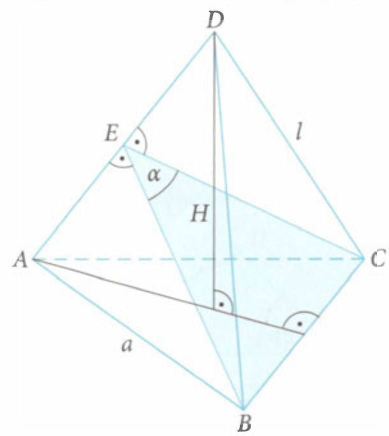
b) $B\left(-2 + \sqrt{3}, -2\sqrt{3} - 1\right)$, $C\left(-2 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1\right)$ lub $B\left(-2 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1\right)$, $C\left(-2 + \sqrt{3}, -2\sqrt{3} - 1\right)$

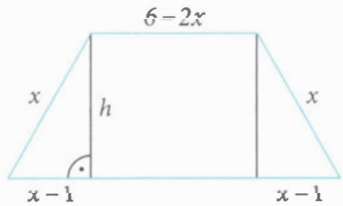
16. $V = \frac{\sqrt{11}}{12} a^3$

17. $x = 2$, $P(2) = 3\sqrt{3}$

Zestaw 4 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zaznaczenie na nim kątów o równych miarach: $\lvert\sphericalangle CAS\rvert = \lvert\sphericalangle SAB\rvert = \lvert\sphericalangle DSA\rvert$ oraz $\lvert\sphericalangle ABS\rvert = \lvert\sphericalangle SBC\rvert = \lvert\sphericalangle FSB\rvert$ 
	Zauważenie, że trójkąty ASD i BSF są równoramienne oraz $\lvert AD\rvert = \lvert DS\rvert$ i $\lvert SF\rvert = \lvert BF\rvert$
	Zapisanie równości: $\lvert DF\rvert = \lvert DS\rvert + \lvert SF\rvert = \lvert AD\rvert + \lvert BF\rvert$
11.	Podstawienie współrzędnych punktu P do wzoru funkcji f i obliczenie a: $a = 2$
	Zapisanie równości $f(x-2) = 3f(5)$ w postaci: $\log_2(x-5) = 3\log_2 2 = \log_2 8$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $x = 13$
12.	Wyznaczenie wyróżnika trójmianu: $\Delta = -3m^2 + 2\lvert m\rvert + 1$ i zapisanie warunku: $-3m^2 + 2\lvert m\rvert + 1 = 0$
	Rozwiązanie równania $-3m^2 + 2\lvert m\rvert + 1 = 0$ z wykorzystaniem niewiadomej pomocniczej $t = \lvert m\rvert \geqslant 0$: $t = -\frac{1}{3}$ lub $t = 1$ i odrzucenie rozwiązania $t = -\frac{1}{3}$
	Rozwiązanie równania $\lvert m\rvert = 1$: $m = -1$ lub $m = 1$
13.	Obliczenie, ile jest dziesięciocyfrowych liczb, których cyfry składają się z jednej ósemki i dziewięciu jedynek $(8 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)$: jest 10 takich liczb
	Obliczenie, ile jest dziesięciocyfrowych liczb, których cyfry składają się z jednej czwórki, jednej dwójki i ośmiu jedynek $(8 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)$: jest $10 \cdot 9 = 90$ takich liczb

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13. cd.	Obliczenie, ile jest dziesięciocyfrowych liczb, których cyfry składają się z trzech dwójek i siedmiu jedynek $(8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)$: jest $\binom{10}{3} = 120$ takich liczb
	Obliczenie, ile jest wszystkich dziesięciocyfrowych liczb, których iloczyn cyfr jest równy 8: jest 220 takich liczb
14.	Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle ACB\rvert = 60°$, $\lvert\sphericalangle BAC\rvert = 90°$ i $\lvert\sphericalangle ASB\rvert = 120°$, gdzie S jest środkiem okręgu
	Wyznaczenie długości odcinków: $\lvert BC\rvert = 2r$, $\lvert AC\rvert = \lvert SA\rvert = \lvert SD\rvert = \lvert SB\rvert = \lvert SC\rvert = r$
	Wyznaczenie pola trójkąta ABS: $P_{ABS} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
	Wyznaczenie pola deltoidu $ASCD$: $P_{ASCD} = \frac{1}{2}r^2$
	Wyznaczenie pola czworokąta $ABCD$ jako sumy pól trójkąta ABS i deltoidu $ASCD$: $P = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)r^2$
15. a)	Obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} = [-6, -3]$
	Obliczenie współrzędnych środka S okręgu opisanego na trójkącie ABC z warunku $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$: $S(0, 0)$
15. b)	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AD: $a_{AD} = \frac{1}{2}$ oraz wyznaczenie równania prostej BC: $y = -2x - 5$
	Wyznaczenie równania okręgu opisanego na trójkącie ABC: $x^2 + y^2 = 20$
	Zauważenie, że współrzędne punktów B i C spełniają układ równań: $\begin{cases} y = -2x - 5 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ Przekształcenie drugiego równania tego układu do postaci $x^2 + 4x + 1 = 0$ i rozwiązanie go: $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$
	Obliczenie drugich współrzędnych punktów B i C i podanie odpowiedzi: $B(-2 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1)$, $C(-2 + \sqrt{3}, -2\sqrt{3} - 1)$ lub $B(-2 + \sqrt{3}, -2\sqrt{3} - 1)$, $C(-2 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1)$
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zaznaczenie kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16. cd.	Wykorzystanie twierdzenia cosinusów do wyznaczenia długości odcinków EB i EC: $$\lvert EB\rvert = \lvert EC\rvert = \frac{\sqrt{15}}{4}a$$
	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa $\left(\lvert AE\rvert^2 + \lvert EB\rvert^2 = a^2\right)$ do wyznaczenia długości odcinka AE: $\lvert AE\rvert = \frac{1}{4}a$
	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa $\left((l - \lvert AE\rvert)^2 + \lvert EB\rvert^2 = l^2\right)$ do wyznaczenia długości krawędzi bocznej ostrosłupa: $l = 2a$
	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa $\left(H^2 = l^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$ do wyznaczenia wysokości ostrosłupa H: $H = \frac{\sqrt{33}}{3}a$
	Wyznaczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{\sqrt{11}}{12}a^3$
17.	Wykonanie rysunku, wprowadzenie na nim oznaczeń  i wyznaczenie wysokości trapezu: $h = \sqrt{2x-1}$, gdzie $x \in (1;3)$
	Zapisanie pola trapezu jako funkcji zmiennej x: $$P(x) = \frac{(4+6-2x)}{2}\sqrt{2x-1} = (5-x)\sqrt{2x-1} = \sqrt{(5-x)^2(2x-1)}$$
	Zauważenie, że funkcje P i $f(x) = (5-x)^2(2x-1)$ przyjmują wartość największą dla tych samych argumentów
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 6(x^2 - 7x + 10)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = 2$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (1;2)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (2;3)$, więc dla $x = 2$ funkcja f przyjmuje wartość największą, zatem funkcja P również przyjmuje wartość największą dla $x = 2$
	Obliczenie pola trapezu: $P(2) = 3\sqrt{3}$

Zestaw 5 – odpowiedzi

1. B **2.** A **3.** A **4.** C **5.** B

6. 157 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$

7. 138 $\left(\frac{5}{36}\right)$

8. 603 $(p = 402,\ q = 201)$

9. 062 $\left(\frac{1}{16}\right)$

10. $\cos|\sphericalangle DCE| = 0{,}8$

11. szósty

12. a) $w(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2(x-3)$

b) $x = 3,\ x = -2-2\sqrt{2},\ x = -2+2\sqrt{2}$

13. $\frac{7}{30}$

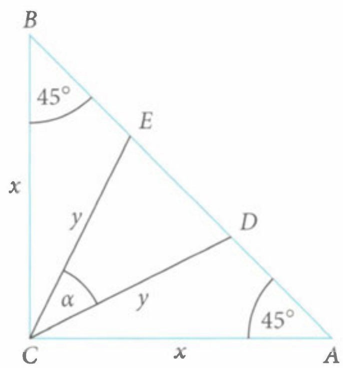
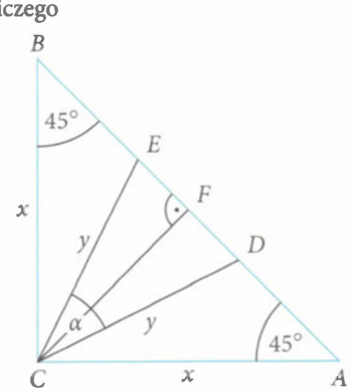
14. $Obw = 4(3+\sqrt{3})$ cm

15. b) $x_0 = \frac{\pi}{8}$, $\cos x_0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

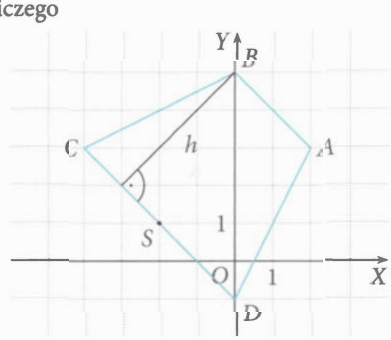
16. $y = 4x-2$ lub $y = 0$

17. $C(-4,3)$, $D(0,-1)$, $V = 60\sqrt{2}\pi$

Zestaw 5 – modele rozwiązań zadań otwartych

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="3">10.
I
sposób</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

i wyznaczenie długości odcinków, na które punkty D i E dzielą przeciwprostokątną AB:
$$|BE| = |ED| = |DA| = \frac{\sqrt{2}}{3}x$$</td></tr>
<tr><td>Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta CAD i wyznaczenie y: $y = \frac{\sqrt{5}}{3}x$</td></tr>
<tr><td>Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta CDE i obliczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha = 0{,}8$</td></tr>
<tr><td>10.
II
sposób</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

i wyznaczenie długości odcinków CF i FD: $|CF| = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $|FD| = \frac{\sqrt{2}}{6}x$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10. cd.	Wyznaczenie y: $y = \frac{\sqrt{5}}{3}x$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta CDE i obliczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha = 0{,}8$
11.	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 21 \\ a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 = 168 \end{cases}$ gdzie a_1 jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n), a q – jego ilorazem
	Rozwiązanie układu równań: $a_1 = 3$, $q = 2$
	Obliczenie, który wyraz ciągu (a_n) jest równy 96: $a_6 = 96$
12. a)	Zapisanie wielomianu w w postaci: $w(x) = a(x+2)^2(x-3)$
	Obliczenie współczynnika a i zapisanie wzoru wielomianu w: $w(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2(x-3)$
12. b)	Zapisanie równania w postaci: $-\frac{1}{4}(x^2+4x-4)(x-3) = 0$
	Rozwiązanie równania: $x = 3$ lub $x = -2-2\sqrt{2}$ lub $x = -2+2\sqrt{2}$
13.	Obliczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 = 720$
	Zauważenie, że dwie ostatnie cyfry liczby podzielnej przez 4 i ułożonej z numerów kul to: 48, 56, 64, 68, 76, 84, 96
	Obliczenie $\lvert A\rvert$, gdzie A jest zdarzeniem polegającym na tym, że liczba, której cyframi są numery wylosowanych kul, jest podzielna przez 4: $\lvert A\rvert = 4\cdot3\cdot2\cdot7 = 168$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{7}{30}$
14.	Zauważenie, że trójkąty ABC i ACD są podobne
	Ułożenie równania: $\frac{\lvert AD\rvert}{4} = \frac{4}{\lvert AD\rvert + 6}$
	Rozwiązanie równania: $\lvert AD\rvert = 2$ cm
	Obliczenie długości boku BC: $\lvert BC\rvert = 4\sqrt{3}$ cm oraz obwodu trójkąta ABC: $Obw = 4(3+\sqrt{3})$ cm
15. a)	Wykorzystanie wzoru na cosinus podwojonego kąta oraz jedynki trygonometrycznej i zapisanie równości: $\cos 4x = \cos(2\cdot 2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
15. b)	Wyznaczenie rozwiązań równania $\cos 4x = 0$: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in C$, i zauważenie, że najmniejsze dodatnie miejsce zerowe funkcji $f(x) = \cos 4x$ jest równe $\frac{\pi}{8}$
	Podstawienie $t = \cos^2 x \geqslant 0$ i rozwiązanie równania $8t^2 - 8t + 1 = 0$: $t = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ lub $t = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15. b) cd.	Obliczenie $\cos x$: $\cos x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ lub $\cos x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
	Zauważenie, że im mniejsza jest wartość $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tym większa jest wartość $\cos x$, i wyciągnięcie wniosku: $\cos x_0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
	Podanie odpowiedzi: $x_0 = \frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
16.	Wyznaczenie pochodnych funkcji f i g: $f'(x_1) = 4x_1$, $g'(x_2) = -4x_2 + 4$
	Zapisanie równań stycznej: $\begin{cases} y - 2x_1^2 = 4x_1(x - x_1) \\ y + 2(x_2 - 1)^2 = (-4x_2 + 4)(x - x_2) \end{cases}$
	Przekształcenie równań do postaci: $\begin{cases} y = 4x_1x - 2x_1^2 \\ y = x(4 - 4x_2) + 2x_2^2 - 2 \end{cases}$
	Równania opisują tę samą prostą, zatem: $\begin{cases} 4x_1 = 4 - 4x_2 \\ -2x_1^2 = 2x_2^2 - 2 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ lub $x_1 = 1$, $x_2 = 0$
	Zapisanie równań stycznych: $y = 4x - 2$ lub $y = 0$
17.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie długości boków AB i CD: $\|AB\| = 2\sqrt{2}$, $\|CD\| = 4\sqrt{2}$
	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka C: $C(-4, 3)$
	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka D: $D(0, -1)$
	Obliczenie wysokości trapezu: $h = 3\sqrt{2}$
	Zauważenie, że trapez $ABCD$ jest równoramienny
	Obliczenie objętości bryły: $V = 60\sqrt{2}\pi$

Zestaw 6 – odpowiedzi

1. D **2.** B **3.** D **4.** D **5.** A

6. 432

7. 113 $(8\sqrt{2})$

8. 476 $\left(p = \frac{10}{21}\right)$

9. 355 $\left(\frac{V_k}{V_s} = \frac{32}{9}\right)$

11. a) $a = 4$, $b = 5$, $c = 2$

12. $\frac{1}{3}$

13. $m \in \left\{-3, -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}, 3\right\}$

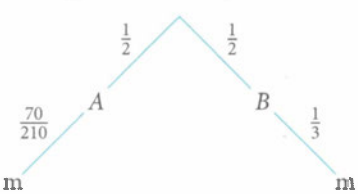
14. $\frac{\sqrt{2m^2+1}}{2m^2+1}$

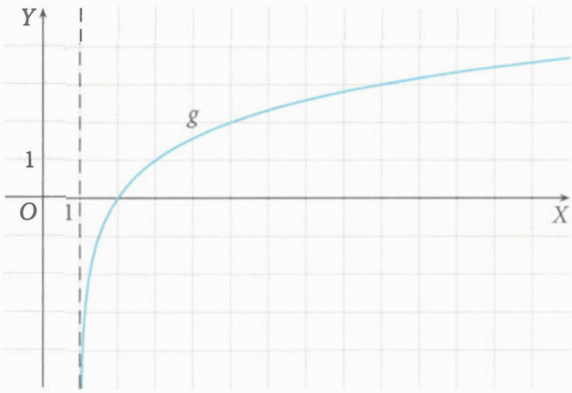
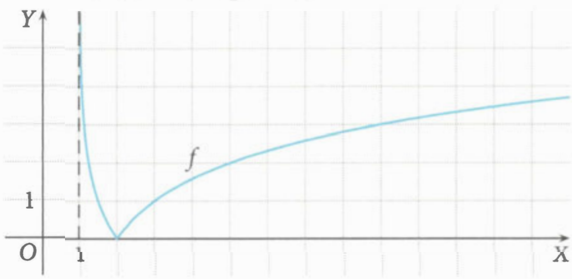
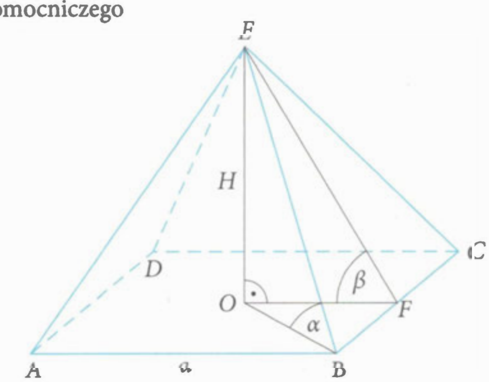
15. $P = 7\sqrt{5}$

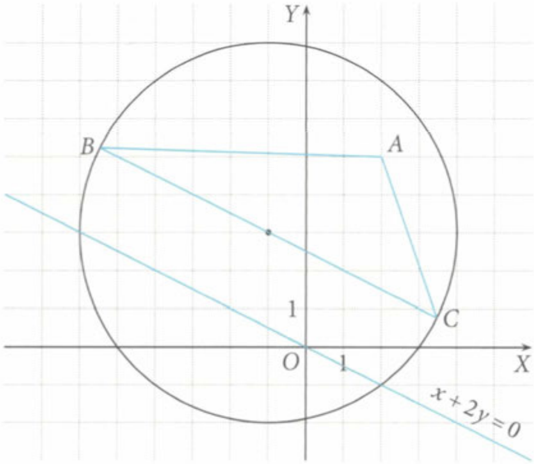
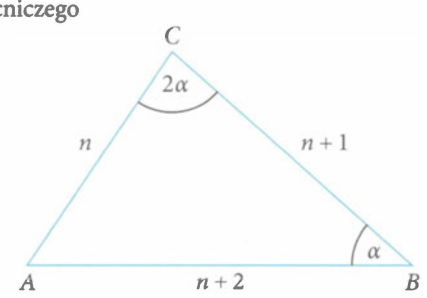
16. 4, 5, 6

17. $p = 1$, $q = 0$, dla $x = -3$ funkcja osiąga maksimum

Zestaw 6 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2}$
	Wyznaczenie punktów przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych: $(0,2)$, $(4,0)$
	Porównanie współczynników kierunkowych stycznych oraz zapisanie wniosku: $f'(0) = f'(4) = \frac{1}{2}$, więc obie proste są równoległe.
11. a)	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(x) = \frac{1}{2(x+1)} + 2$
	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x) = \frac{4x+5}{2x+2}$ i podanie wartości współczynników: $a = 4$, $b = 5$, $c = 2$
11. b)	Zauważenie, że wartość $f(x)$ będzie liczbą całkowitą, jeżeli $2(x+1)$ będzie odwrotnością liczby całkowitej: $2(x+1) = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$
	Przekształcenie równania do postaci $x = \frac{1}{2k} - 1$, $k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ i zapisanie wniosku: Nie istnieje taka liczba $x \in \mathbf{C}$, dla której $f(x) \in \mathbf{C}$.
12.	Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych ciągów trzyelementowych utworzonych z elementów zbioru A: $\binom{7}{3} = 210$ i liczby ciągów monotonicznych: 70
	Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych ciągów trzyelementowych utworzonych z elementów zbioru B: $3! = 6$ i liczby ciągów monotonicznych: 2
	Narysowanie drzewa („m” oznacza ciąg monotoniczny)  i obliczenie szukanego prawdopodobieństwa: $\frac{1}{2} \cdot \frac{70}{210} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="4">13.</td><td>Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \log_2(x-1)$

</td></tr>
<tr><td>Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = |\log_2(x-1)|$

</td></tr>
<tr><td>Zapisanie równania: $|\log_2(m^2-1)| = 3$</td></tr>
<tr><td>Rozwiązanie równania: $m = -3$ lub $m = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ lub $m = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ lub $m = 3$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">14.</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = \frac{a\sqrt{2}}{2}m$</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie wysokości ściany bocznej: $|EF| = \frac{a\sqrt{2m^2+1}}{2}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie $\cos\beta$: $\cos\beta = \frac{\sqrt{2m^2+1}}{2m^2+1}$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15.	Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu i obliczenie jego promienia: $S(-1, 3)$, $r = 5$
	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie długości boku BC: $\|BC\| = 10$
	Wyznaczenie równania prostej zawierającej bok BC: $x + 2y - 5 = 0$
	Zauważenie, że wysokość trójkąta ABC opuszczona na bok BC jest równa odległości punktu A od prostej $x + 2y - 5 = 0$, i obliczenie tej wysokości: $h = \frac{7\sqrt{5}}{5}$
	Obliczenie pola trójkąta ABC: $P = 7\sqrt{5}$
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zastosowanie twierdzenia sinusów i zapisanie równania: $\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{n+2}{\sin 2\alpha}$
	Przekształcenie równania do postaci: $\cos\alpha = \frac{n+2}{2n}$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów i zapisanie równania: $n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\frac{n+2}{2n}$
	Rozwiązanie równania: $n = 4$
	Podanie długości boków trójkąta: 4, 5, 6

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
17.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{-px^2-10px-2qx-21p-5q}{((x+4)(x+1))^2}$
	Obliczenie $f'(-3) = \frac{q}{4}$ i zauważenie, że $f'(-3) = 0$ dla $q = 0$
	Zapisanie warunku: $f(-3) = -1$ i otrzymanie równania $2p + q - 2 = 0$
	Obliczenie p: $p = 1$
	Wyznaczenie pozostałych miejsc zerowych pochodnej $f'(x) = \frac{-x^2-10x-21}{((x+4)(x+1))^2}$: $x = -7$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (-7;-4) \cup (-4;-3)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty;-7) \cup (-3;-1) \cup (-1;\infty)$, więc w przedziałach $\langle -7;-4)$, $(-4;-3\rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziałach $(-\infty;-7\rangle$, $\langle -3;-1)$, $(-1;\infty)$ – jest malejąca
	Podanie odpowiedzi: Dla $x = -3$ funkcja osiąga maksimum.

Zestaw 7 – odpowiedzi

1. A **2.** B **3.** A **4.** C **5.** D

6. 019 $\left(a_{50} = \frac{1}{52}\right)$

7. 867 $\left(P(A \cup B) = \frac{85}{98}\right)$

8. 362

9. 840 $\left(p = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$

11. $k \in \left\langle -\frac{3}{5}; 1\right\rangle$

12. $P = 6$

13. $P = 25(2\sqrt{3} - \pi)$

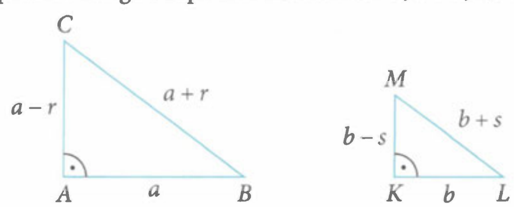
14. $n \geqslant 7$

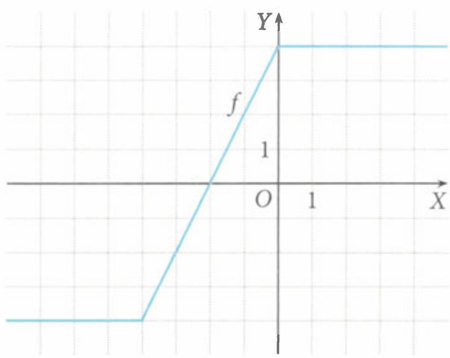
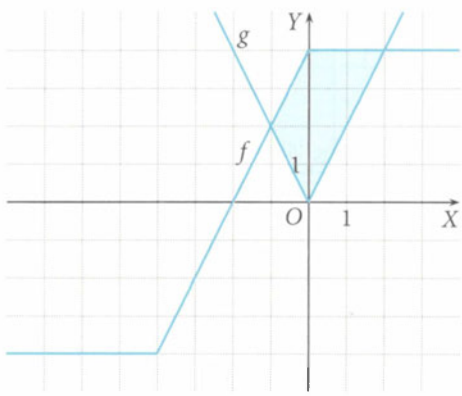
15. $2\sqrt{2}$

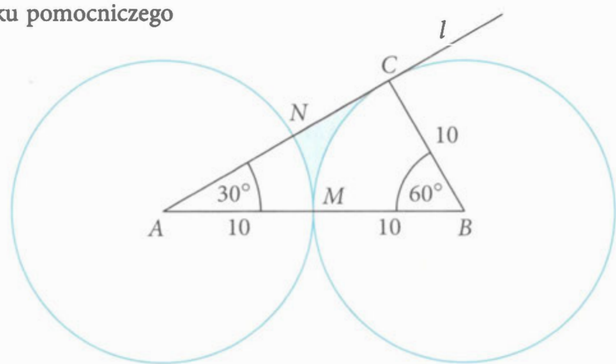
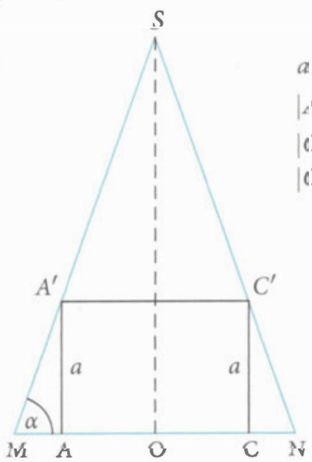
16. $P = 94{,}5\ \text{cm}^2$

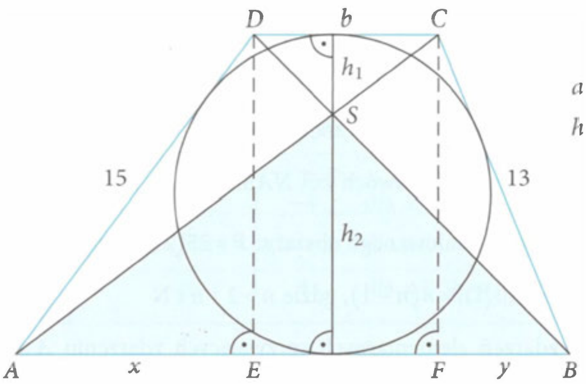
17. $-\frac{3}{2}$

Zestaw 7 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zapisanie założeń: $a > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $s > 0$, $a > r$, $b > s$  Zapisanie układu równań: $\begin{cases} (a-r)^2 + a^2 = (a+r)^2 \\ (b-s)^2 + b^2 = (b+s)^2 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań: $a = 4r$, $b = 4s$
	Zauważenie, że $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert KL\rvert} = \frac{\lvert BC\rvert}{\lvert LM\rvert} = \frac{\lvert CA\rvert}{\lvert MK\rvert} = \frac{r}{s}$, oraz podanie wniosku: Na podstawie cechy podobieństwa BBB trójkąty ABC i KLM są podobne.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11.	Zauważenie, że pod pierwiastkiem znajduje się wzór funkcji: $$g(x)=(1-k^2)x^2+(k-1)x+1$$ która dla $x\in\mathbf{R}$ ma przyjmować wartości nieujemne
	Zauważenie, że dla $k=1$ mamy $g(x)=1$, czyli jest spełniony warunek zadania, natomiast dla $k=-1$ mamy $g(x)=-2x+1$, czyli nie jest spełniony warunek zadania
	Zauważenie, że dla $k^2\neq 1$ funkcja g jest funkcją kwadratową, zatem warunek zadania spełniony jest dla tych k, które spełniają układ nierówności: $$\begin{cases}1-k^2>0\\ \Delta\leqslant 0\end{cases}$$
	Rozwiązanie układu nierówności: $k\in\left\langle -\frac{3}{5};1\right)$
	Podanie odpowiedzi: $k\in\left\langle -\frac{3}{5};1\right\rangle$
12.	Zapisanie wzoru funkcji f w postaci: $f(x)=\begin{cases}-4 & \text{dla } x\in(-\infty;-4)\\ 2x+4 & \text{dla } x\in\langle -4;0)\\ 4 & \text{dla } x\in\langle 0;\infty)\end{cases}$ i naszkicowanie jej wykresu 
	Naszkicowanie wykresu funkcji g i zaznaczenie figury ograniczonej wykresami funkcji f i g 
	Obliczenie pola figury: $P=6$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13.	Wykonanie rysunku pomocniczego  Zauważenie, że trójkąt ABC jest trójkątem o kątach $30°, 60°, 90°$
	Obliczenie pola trójkąta ABC: $P_{ABC} = 50\sqrt{3}$
	Obliczenie pól wycinków dwóch kół NAM i CBM: $P_{NAM} = \frac{25}{3}\pi$, $P_{CBM} = \frac{50}{3}\pi$
	Obliczenie pola zacieniowanego obszaru: $P = 25(2\sqrt{3} - \pi)$
14.	Wyznaczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = n(n-1)$, gdzie $n > 2$ i $n \in \mathbf{N}$
	Wypisanie zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającemu na tym, że wylosowana para liczb (x, y) spełnia warunek $\lvert x - y\rvert = 2$: $$A = \{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), \ldots, (n-2, n), (n, n-2)\}$$
	Wyznaczenie $\lvert A\rvert$: $\lvert A\rvert = 2 \cdot (n-2) = 2n - 4$
	Rozwiązanie nierówności $\frac{2n-4}{n(n-1)} < 0{,}25$ dla $n > 2$: $$n \in \left(2; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{17}}{2}; \infty\right) \text{ i } n \in \mathbf{N}$$
	Podanie odpowiedzi: $n \in \{7, 8, 9, 10, \ldots\}$
15.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń  a – krawędź sześcianu $\lvert AC\rvert = a\sqrt{2}$ $\lvert OC\rvert = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $\lvert OM\rvert = 3$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15. cd.	**Obliczenie** długości tworzącej stożka: $l = 9$
	Obliczenie wysokości stożka: $H = 6\sqrt{2}$
	Zauważenie, **że** trójkąty SOM i $A'AM$ są podobne, **i zapisanie równania:** $$\frac{6\sqrt{2}}{3} = \frac{a}{3-\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$
	Rozwiązanie **równania:** $a = 2\sqrt{2}$
16.	**Wykonanie** rysunku pomocniczego i wprowadzenie **oznaczeń**  $a = \lvert AB\rvert$ $h = h_1 + h_2$
	Wykorzystanie własności czworokąta opisanego na okręgu i zapisanie równania: $a + b = 28$ **cm**
	Zapisanie równania $168 = \frac{a+b}{2} \cdot h$ **i obliczenie wysokości trapezu:** $h = 12$ **cm**
	Obliczenie x **i** y: $x = 9$ **cm**, $y = 5$ **cm**
	Obliczenie długości podstaw trapezu: $a = 21$ **cm**, $b = 7$ **cm**
	Zauważenie, że trójkąty ABS **i** DCS **są podobne, oraz obliczenie skali podobieństwa** k**, a następnie wysokości** h_2: $k = 3$, $h_2 = 9$ **cm**
	Obliczenie pola trójkąta ABS: $P = 94{,}5$ **cm**^{2}
17.	**Zapisanie równania prostej w postaci:** $y = a(x-4) + 6a = ax + 6 - 4a$, **gdzie** $a < 0$, **i wyznaczenie współrzędnych punktów** A **i** B: $A(0, 6-4a)$, $B\left(\frac{4a-6}{a}, 0\right)$
	Zapisanie pola trójkąta jako funkcji zmiennej a: $P(a) = \frac{1}{2}(6-4a)\frac{4a-6}{a} = -8a + 24 - \frac{18}{a}$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(a) = -8 + \frac{18}{a^2}$
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $a = -\frac{3}{2}$
	Stwierdzenie, że $P'(a) > 0$ **dla** $a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ **oraz** $P'(a) < 0$ **dla** $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, **więc dla** $a = -\frac{3}{2}$ **funkcja przyjmuje wartość najmniejszą**
	Wyznaczenie równania prostej: $y = -\frac{3}{2}x + 12$ **i podanie odpowiedzi:** $a = -\frac{3}{2}$

Zestaw 8 – odpowiedzi

1. C **2.** A **3.** A **4.** B **5.** A

6. 125 $\left(\frac{5}{4}\right)$

7. 223 $\left(a = \sqrt{5}\right)$

8. 577 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

9. 916 $\left(|PQ| = 2\sqrt{21}\right)$

10. $\frac{13}{28}$

12. $v = 55$ km/h

13. $x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\right\}$

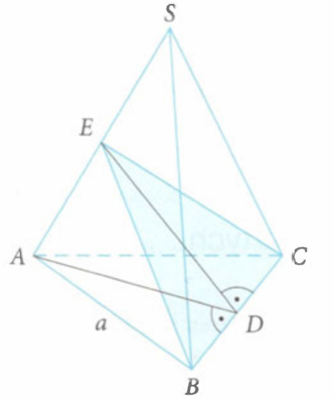
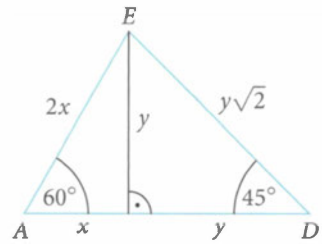
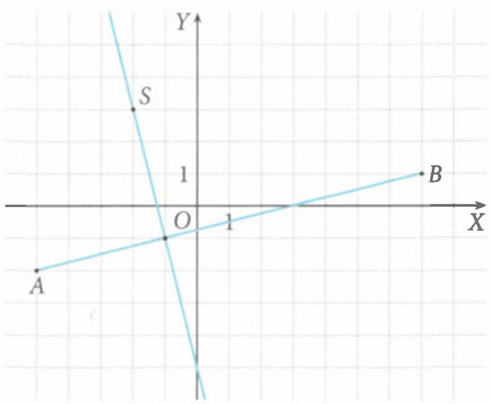
14. $P = \frac{3a^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$

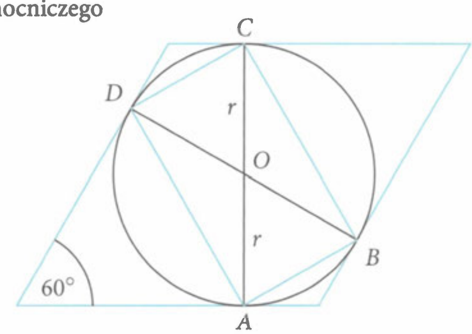
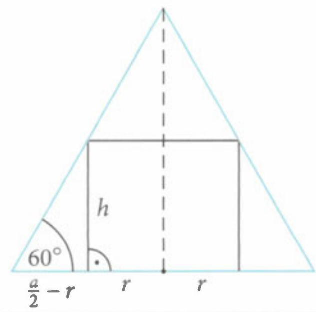
15. $C(-3, 7)$

16. b) $P = 8\sqrt{3}$

Zestaw 8 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Oznaczenie zdarzeń: A – wyrzucenie nieparzystej liczby oczek, B_1 – wypadnięcie orła, B_2 – wypadnięcie reszki
	Obliczenie prawdopodobieństwa: $P(A\|B_1) = \frac{8}{21}$ oraz podanie prawdopodobieństw: $P(A\|B_2) = P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$
	Zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo całkowite: $P(A) = P(B_1)P(A\|B_1) + P(B_2)P(A\|B_2)$ i obliczenie szukanego prawdopodobieństwa: $P(A) = \frac{13}{28}$
11.	Wykorzystanie wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q oraz zapisanie wzoru ogólnego ciągu (b_n) w postaci: $b_n = \log^2\left(a_1q^n\right) - \log^2\left(a_1q^{n-1}\right)$
	Wykorzystanie wzorów na sumę i różnicę logarytmów i przekształcenie wzoru ogólnego ciągu (b_n) do postaci: $b_n = \left(\log\left(a_1q^n\right) - \log\left(a_1q^{n-1}\right)\right)\left(\log\left(a_1q^n\right) + \log\left(a_1q^{n-1}\right)\right) = \log q \cdot \log\left(a_1^2q^{2n-1}\right)$
	Wyznaczenie różnicy ciągu (b_n): $r = b_{n+1} - b_n = 2\log^2 q$ oraz stwierdzenie, że różnica jest stała i nie zależy od n, zatem ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym
12.	Ułożenie równania: $t = \frac{220}{v}$
	Ułożenie równania: $t - \frac{1}{3} = \frac{220}{v+5}$
	Zapisanie równania: $\frac{220}{v} - \frac{1}{3} = \frac{220}{v+5}$ oraz rozwiązanie go: $v = 55$ lub $v = -60$
	Wybór poprawnego rozwiązania: $v = 55$ km/h
13.	Zapisanie równania: $\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$
	Przekształcenie równania do postaci: $\sin x(\sin x - \cos x) = 0$
	Rozwiązanie równania $\sin x - \cos x = 0$ dla $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$
	Podanie odpowiedzi: $x = 0$ lub $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \pi$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$ lub $x = 2\pi$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14.	Wykonanie rysunku pomocniczego, zaznaczenie odpowiedniego przekroju i wprowadzenie koniecznych oznaczeń  
	Zauważenie, że $\lvert AD\rvert = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{2x\sqrt{3}}{2}$, $\lvert AD\rvert = x + y$, i wyznaczenie długości x: $x = a\frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}$
	Wyznaczenie długości y: $y = \frac{3a}{2(1+\sqrt{3})}$
	Wyznaczenie długości odcinka ED z zależności $\lvert ED\rvert = y\sqrt{2}$: $\lvert ED\rvert = \frac{3\sqrt{2}a}{2(1+\sqrt{3})}$
	Wyznaczenie pola przekroju BEC: $P = \frac{3\sqrt{2}a^2}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{3a^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$
15.	Wykonanie rysunku i wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB} = \frac{1}{4}$ 
	Wyznaczenie równania prostej SC: $y = -4x - 5$ i zapisanie współrzędnych punktu C w postaci: $C(x_0, -4x_0 - 5)$
	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AS: $a_{AS} = \frac{5}{3}$ i współczynnika kierunkowego prostej BC: $a_{BC} = \frac{-4x_0-6}{x_0-7}$
	Skorzystanie z warunku $a_{AS} \cdot a_{BC} = -1$ i obliczenie x_0: $x_0 = -3$
	Podanie współrzędnych punktu C: $C(-3, 7)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że przekątne czworokąta $ABCD$ są średnicami okręgu, czyli są równej długości i przecinają się w połowie, zatem czworokąt ten jest prostokątem
16. b)	Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle AOB\rvert = \lvert\sphericalangle COD\rvert = 60^\circ$ oraz $\lvert\sphericalangle AOD\rvert = \lvert\sphericalangle BOC\rvert = 120^\circ$
	Zapisanie pola prostokąta $ABCD$ jako sumy pól czterech trójkątów: AOB, COD, AOD, BOC i obliczenie promienia okręgu: $r = \sqrt{3}$
	Obliczenie długości boku rombu: $a = 4$
	Obliczenie pola rombu: $P = 8\sqrt{3}$
17.	Wykonanie rysunku przekroju stożka i wprowadzenie oznaczeń: a – tworząca stożka, r – promień walca, h – wysokość walca 
	Wyznaczenie wysokości walca: $h = \operatorname{tg} 60^\circ \left(\frac{a}{2} - r\right) = \sqrt{3}\left(\frac{a}{2} - r\right)$
	Zapisanie objętości walca jako funkcji zmiennej r: $V(r) = \pi r^2 \sqrt{3}\left(\frac{a}{2} - r\right)$, gdzie $r \in (0; a)$
	Obliczenie pochodnej funkcji V: $V'(r) = \pi\sqrt{3}r(a - 3r)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $r = \frac{1}{3}a$
	Stwierdzenie, że $V'(r) > 0$ dla $r \in \left(0; \frac{1}{3}a\right)$ oraz $V'(r) < 0$ dla $r \in \left(\frac{1}{3}a; a\right)$, więc dla $r = \frac{1}{3}a$ funkcja V przyjmuje wartość największą
	Obliczenie największej objętości walca: $V\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3$
	Wyznaczenie promienia kuli: $R = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, obliczenie objętości kuli: $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3$ i zapisanie wniosku: Objętości kuli i największego walca są równe.

Zestaw 9 – odpowiedzi

1. A **2.** B **3.** C **4.** B **5.** A

6. 172 $(n = 1728)$

7. 559 $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

8. 043 $\left(a_4 = \frac{89}{2048}\right)$

9. 793 $(3\sqrt{7})$

10. $S_{10} = -\frac{341}{1024}$

11. $x \in (-1;0) \cup (0;1)$

12. $\frac{11}{24}$

13. $\frac{8}{15}$

14. $f(D) = \langle -2;7 \rangle$

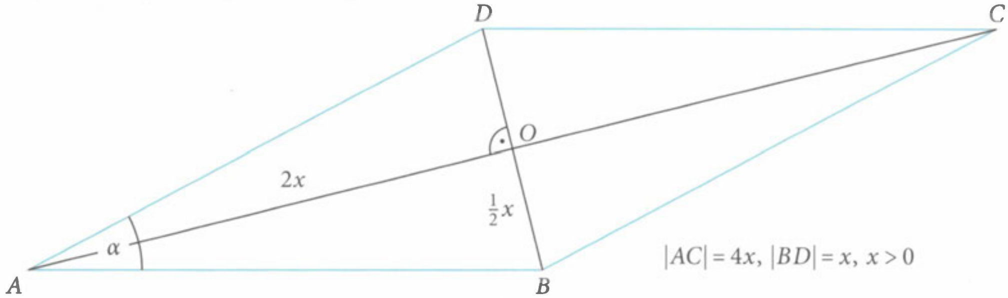
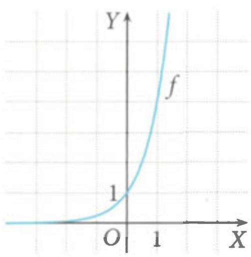
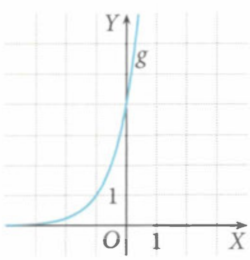
15. a) $a = 4$ **b)** $x = 0$

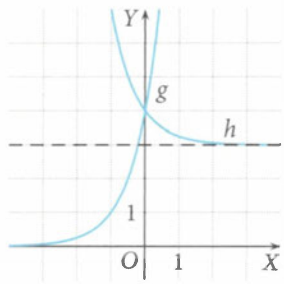
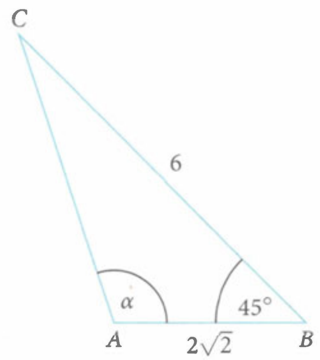
16. b) $V = 12\sqrt{2}\pi$

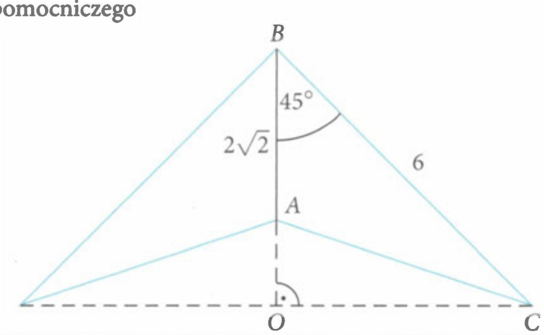
17. $V = 2\sqrt{3}$

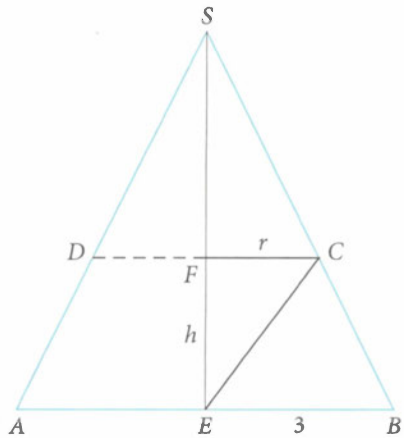
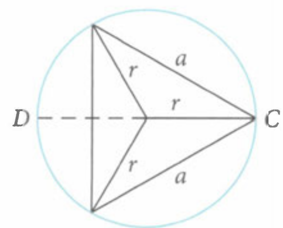
Zestaw 9 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10.	Wyznaczenie reszty z dzielenia wielomianu w_n przez dwumian $x+1$: $$a_n = w_n(-1) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n$$
	Zauważenie, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = -\frac{1}{2}$ i ilorazie $q = -\frac{1}{2}$
	Obliczenie sumy dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n): $$S_{10} = \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{341}{1024}$$
11.	Zapisanie nierówności w postaci: $4 - \frac{3}{x-1} - 4 + \frac{3}{x+1} > 6$, $x \neq -1$, $x \neq 1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $x^2(x^2 - 1) < 0$
	Rozwiązanie nierówności: $x \in (-1;0) \cup (0;1)$
12.	Przyjęcie, że w urnie jest $3n$ kul, w tym n kul czarnych i $2n$ białych, $n \geqslant 1$, oraz wyznaczenie $\lvert\Omega\rvert$: $$\lvert\Omega\rvert = \binom{3n}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}$$
	Wyznaczenie $\lvert B\rvert$, gdzie B jest zdarzeniem polegającym na tym, że wylosowano dwie kule białe: $$\lvert B\rvert = \frac{2n(2n-1)}{2}$$
	Wyznaczenie $P(B)$ i rozwiązanie równania $\frac{2n(2n-1)}{3n(3n-1)} = \frac{7}{16}$: $n = 11$
	Obliczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = 528$
	Opis zdarzenia A – wylosowano dwie kule różnych kolorów, i obliczenie jego prawdopodobieństwa: $$P(A) = \frac{22 \cdot 11}{528} = \frac{11}{24}$$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13.	Wykonanie rysunku pomocniczego  Wyznaczenie długości boku rombu: $\|AB\| = \frac{x\sqrt{17}}{2}$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD: $$x^2 = \left(\frac{x\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x\sqrt{17}}{2}\right)^2 \cdot \cos\alpha$$
	Obliczenie wartości $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{15}{17}$
	Obliczenie wartości $\operatorname{tg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$
14.	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x) = 4\sin^2 x - 4\sin x - 1$. Podstawienie pomocniczej niewiadomej $t = \sin x$ i zapisanie wzoru funkcji g: $g(t) = 4t^2 - 4t - 1,\ t \in \langle -1; 1\rangle$
	Obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $t_w = \frac{1}{2} \in \langle -1; 1\rangle$, $y_w = g\left(\frac{1}{2}\right) = -2$
	Obliczenie wartości $g(-1)$ i $g(1)$: $g(-1) = 7$, $g(1) = -1$
	Podanie odpowiedzi: $f(D_f) = \langle -2; 7\rangle$
15. a)	Obliczenie a: $a = 4$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ 
15. b)	Naszkicowanie wykresu funkcji g 

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="2">15. b) cd.</td><td>Naszkicowanie wykresu funkcji h

</td></tr>
<tr><td>Odczytanie z rysunku rozwiązania równania $g(x) = h(x)$: $x = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">16. a)</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego


i obliczenie długości boku AC na podstawie twierdzenia cosinusów: $|AC| = 2\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie wartości $\cos\alpha$ na podstawie twierdzenia cosinusów: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$</td></tr>
<tr><td>Podanie wniosku: $\cos\alpha < 0$, zatem $\alpha \in (90°; 180°)$, czyli trójkąt ABC jest rozwartokątny.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">16. b)</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

</td></tr>
<tr><td>Obliczenie długości odcinka OC: $|OC| = 3\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie długości odcinka OA: $|OA| = \sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie objętości bryły, która powstała w wyniku obrotu trójkąta ABC wokół boku AB: $V = 12\sqrt{2}\pi$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
17.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń: a – krawędź podstawy ostrosłupa, r – promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa, h – wysokość ostrosłupa   Zauważenie, że trójkąty EBS i FCS są podobne na podstawie cechy KKK, zatem $\frac{3}{r} = \frac{6}{6-h}$, stąd $h = 6 - 2r$
	Wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$, czyli $a = r\sqrt{3}$
	Zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej r: $$V(r) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \cdot (6-2r) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2} - \frac{\sqrt{3}r^3}{2}, \text{ gdzie } r \in (0;3)$$
	Obliczenie pochodnej funkcji V: $V'(r) = 3\sqrt{3}r - \frac{3\sqrt{3}r^2}{2}$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $r = 2$
	Stwierdzenie, że $V'(r) > 0$ dla $r \in (0;2)$ oraz $V'(r) < 0$ dla $r \in (2;3)$, więc dla $r = 2$ funkcja V przyjmuje wartość największą
	Obliczenie największej objętości ostrosłupa: $V(2) = 2\sqrt{3}$

Zestaw 10 – odpowiedzi

1. C **2.** C **3.** C **4.** B **5.** C

6. 321 $\left(\frac{45}{14}\right)$

7. 585 $\left(f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{99}{169}\right)$

8. 259 $\left(P = \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

9. 272 $\left(S = \frac{\sqrt{6}}{9}\right)$

10. $|AB| = 4 + 4\sqrt{3}$

11. $p \in (0;2) \cup (6;\infty)$

13. $p = -16$, $q = 0$

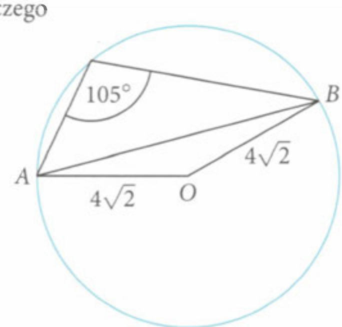
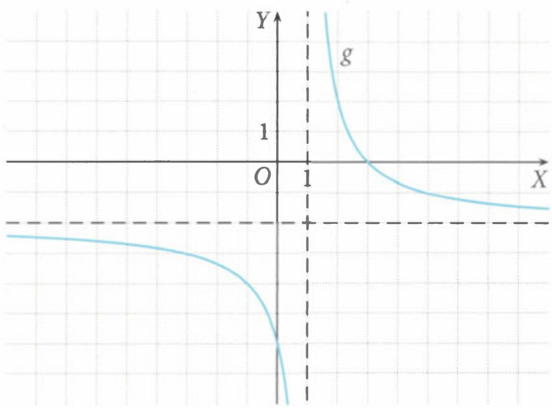
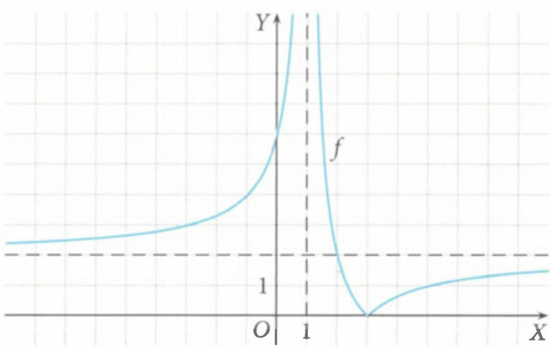
14. bardziej prawdopodobne jest zdarzenie B

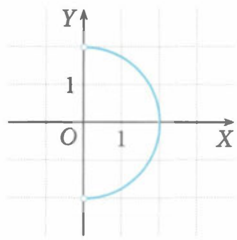
15. $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{5}{4}\pi\right\}$

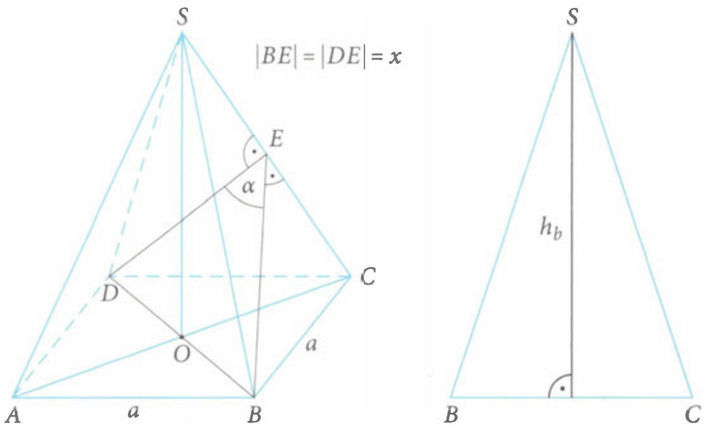
16. $P = 32$

17. $-\frac{1}{4}$

Zestaw 10 – modele rozwiązań zadań otwartych

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="3">10.</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego

</td></tr>
<tr><td>Obliczenie miary kąta AOB, gdzie O jest środkiem okręgu: $|\sphericalangle AOB| = 150°$</td></tr>
<tr><td>Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta AOB i obliczenie długości cięciwy AB:
$|AB| = 4 + 4\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">11.</td><td>Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \frac{4}{x-1} - 2$

</td></tr>
<tr><td>Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \left|\frac{4}{x-1} - 2\right|$

</td></tr>
<tr><td>Odczytanie z wykresu, dla jakich wartości p równanie $f(x) = p$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie: $p \in (0; 2) \cup (6; \infty)$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
12.	Zapisanie założeń: $x > 0$ i $-2 < y < 2$
	Przekształcenie równania do postaci: $\frac{x^2}{2+y} = 2 - y$
	Przekształcenie równania do postaci: $x^2 + y^2 = 4$
	Zaznaczenie w układzie współrzędnych szukanego zbioru 
13.	Zapisanie wielomianu w w postaci: $w(x) = (x-(a-4))(x-a)(x-(a+4))$, gdzie a jest drugim wyrazem ciągu arytmetycznego
	Przekształcenie wielomianu do postaci: $w(x) = x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - 16)x - a^3 + 16a$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} -3a = 0 \\ 3a^2 - 16 = p \\ -a^3 + 16a = q \end{cases}$
	Obliczenie p i q: $p = -16$, $q = 0$
14.	Obliczenie $\lvert\Omega\rvert$: $\lvert\Omega\rvert = 6^4 = 1296$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A': $P(A') = \frac{16}{81}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{65}{81}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B: $P(B) = \frac{5}{6}$
	Porównanie prawdopodobieństw i zapisanie wniosku: Bardziej prawdopodobne jest zdarzenie B.
15.	Zapisanie równania $\left\lvert 1 - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert = 1$ w postaci: $1 - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ lub $1 - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$
	Rozwiązanie pierwszego równania: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Wyznaczenie rozwiązań pierwszego równania dla $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$
	Rozwiązanie drugiego równania: $x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Wyznaczenie rozwiązań drugiego równania dla $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$: $x = \frac{5}{12}\pi$ lub $x = \frac{13}{12}\pi$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16.	Zauważenie, że wierzchołki trapezu mają współrzędne: $A(3,0)$, $B(x,9-x^2)$, $C(-x,9-x^2)$, $D(-3,0)$ dla pewnego $x \in (0;3)$ Zatem podstawy trapezu mają długości: 6 i $2x$, a wysokość jest równa $9-x^2$
	Zapisanie pola trapezu jako funkcji zmiennej x: $P(x)=\frac{(6+2x)(9-x^2)}{2}=-x^3-3x^2+9x+27$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x)=-3x^2-6x+9$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x=1$
	Stwierdzenie, że $P'(x)>0$ dla $x \in (0;1)$ oraz $P'(x)<0$ dla $x \in (1;3)$, więc dla $x=1$ funkcja P przyjmuje wartość największą
	Obliczenie największego pola trapezu: $P(1)=32$
17.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Wyznaczenie wysokości ściany bocznej opuszczonej na krawędź podstawy: $h_b=a$
	Wyznaczenie długości krawędzi bocznej: $\|CS\|=\frac{a\sqrt{5}}{2}$
	Zapisanie pola ściany bocznej na dwa sposoby i ułożenie równania: $\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}\cdot x=\frac{a^2}{2}$
	Wyznaczenie wysokości ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną: $x=\frac{2\sqrt{5}a}{5}$
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBE: $\left(a\sqrt{2}\right)^2=x^2+x^2-2x^2\cos\alpha$
	Obliczenie wartości $\cos\alpha$: $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$

Schematy oceniania zadań otwartych

Począwszy od egzaminu maturalnego przeprowadzonego w 2015 roku zmienia się sposób oceniania zadań otwartych z oceniania analitycznego na holistyczne. Nowo stosowany sposób polega na całościowym spojrzeniu na rozwiązanie, a ocena zależy od tego, jak daleko zdający je doprowadzi. Sposób ten uwzględnia pokonanie „zasadniczej trudności zadania" oraz kolejne niezbędne czynności prowadzące do pełnego rozwiązania.
Przedstawiamy kilka przykładów takiego oceniania. W części z nich wykorzystano materiał opublikowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Uwaga. Ze względów praktycznych w modelach rozwiązań na stronach 139–261 przedstawiono główne etapy rozwiązania zadania.

Ogólny schemat oceniania zadań optymalizacyjnych

Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego za pomocą rachunku różniczkowego zwykle składa się z trzech etapów:

1. Zbudowanie modelu matematycznego (3 pkt):
   a) wybór zmiennej i wyrażenie za pomocą tej zmiennej wielkości, które będą potrzebne do zdefiniowania funkcji,
   b) zdefiniowanie funkcji jednej zmiennej,
   c) określenie dziedziny tej funkcji.

Zdający otrzymuje 2 punkty za poprawne zdefiniowanie funkcji. Ponadto zdający otrzymuje 1 punkt za poprawne określenie dziedziny wynikającej z treści zadania, a nie z wyznaczonego wzoru funkcji.

2. Zbadanie modelu (3 pkt):
   a) wyznaczenie pochodnej,
   b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej,
   c) uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja posiada wartość najmniejszą/największą.

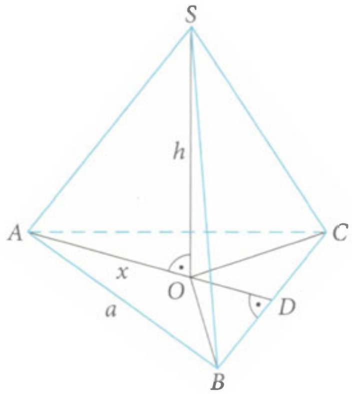
Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

3. Wyciągnięcie wniosków, końcowe obliczenia itp. (1 pkt)

Zadanie 1. (7 pkt) – Informator CKE
Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. Wyznacz promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Rozwiązanie

Niech $x = |AO| = |BO| = |CO|$ (zobacz rysunek) oznacza promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz $h = |SO|$ oznacza wysokość tego ostrosłupa. Wówczas $x + h = 24$.



Wysokość AD w trójkącie ABC jest równa $|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$. Zatem promień x okręgu opisanego na trójkącie ABC (podstawie ostrosłupa) jest równy:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|AB| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AB|$$

stąd $|AB| = \sqrt{3}x$. Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa:

$$P = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2$$

Ponadto z równości $x + h = 24$ otrzymujemy $h = 24 - x$, gdzie $0 < x < 24$. Zatem objętość tego ostrosłupa jest określona wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot (24 - x)$$

czyli

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^3 + 24x^2)$$

Należy obliczyć, dla jakiego $x \in (0; 24)$ funkcja $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^3 + 24x^2)$ przyjmuje wartość największą.

Rozważamy funkcję $f(x) = -x^3 + 24x^2$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznaczamy pochodną tej funkcji: $f'(x) = -3x^2 + 48x$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = 16$, $x_2 = 0$. Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ oraz $(16; \infty)$,
- $f'(x) > 0$ w przedziale $(0; 16)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0\rangle$ oraz $\langle 16; \infty)$, i rosnąca w przedziale $\langle 0, 16\rangle$.

Ponieważ $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}f(x)$ dla $x \in (0; 24)$, więc w przedziale $(0; 24)$ funkcja V ma ekstremum w tym samym punkcie co funkcja f. Stąd wynika, że w punkcie $x = 16$ funkcja V przyjmuje wartość największą.

Objętość ostrosłupa jest równa:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}(-16^3 + 24 \cdot 16^2) = 512\sqrt{3}$$

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest największa i równa $512\sqrt{3}$, gdy promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 16.

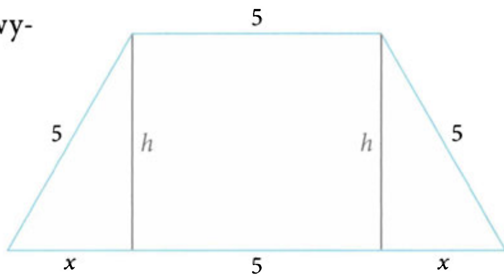
Schemat oceniania

1. a) Oznaczenie literą x promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz zapisanie wysokości ostrosłupa w postaci $(24-x)$.
   b) Zapisanie objętości jako funkcji zmiennej x: $V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^3+24x^2)$.
   c) Zapisanie warunku, który musi spełniać promień: $x \in (0;24)$.
2. a) Wyznaczenie pochodnej wprowadzonej funkcji f: $f'(x)=-3x^2+48x$.
   b) Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1=16$, $x_2=0$.
   c) Stwierdzenie, że $f'(x)>0$ w przedziale $(0;16)$ oraz $f'(x)<0$ w przedziale $(16;24)$, więc dla $x=16$ funkcja przyjmuje największą wartość w dziedzinie $(0;24)$.
3. Zapisanie, że promień okręgu jest równy 16 i obliczenie największej objętości: $V=512\sqrt{3}$.

Zadanie 2. (7 pkt) – Informator CKE

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa ma długość 5 i każde z ramion też ma długość 5. Oblicz długość dłuższej podstawy tego z rozpatrywanych trapezów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

Rozwiązanie



Niech $2x+5$ oznacza długość dłuższej podstawy, a h wysokość trapezu. Pole tego trapezu jest określone wzorem:

$$P=\frac{2\cdot 5+2x}{2}\cdot h=(5+x)\cdot h \quad \text{i} \quad 0<x<5$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność $x^2+h^2=5^2$, stąd $h=\sqrt{25-x^2}$.

Pole tego trapezu jest określone wzorem:

$$P=(5+x)\cdot\sqrt{25-x^2}=\sqrt{(5+x)^2(25-x^2)}=\sqrt{(5+x)^3(5-x)}=\sqrt{-x^4-10x^3+250x+625}$$

gdzie $0<x<5$.

Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0<x<5$ funkcja P określona wzorem:

$$P(x)=\sqrt{-x^4-10x^3+250x+625}$$

przyjmuje wartość największą.

Ponieważ funkcja pierwiastkowa ($y=\sqrt{t}$) jest rosnąca, więc wystarczy zbadać funkcję:

$$f(x)=-x^4-10x^3+250x+625$$

Wyznaczamy pochodną tej funkcji:

$$f'(x)=-4x^3-30x^2+250$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=-5$, $x_2=\frac{5}{2}$. Ponadto:

- $f'(x)<0$ w każdym z przedziałów $(-\infty;-5)$ oraz $\left(\frac{5}{2};\infty\right)$,
- $f'(x)>0$ w przedziale $\left(-5;\frac{5}{2}\right)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-5\rangle$ oraz $\left\langle\frac{5}{2};\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle-5;\frac{5}{2}\right\rangle$.

Ponieważ $P(x)=\sqrt{f(x)}$ dla $x \in (0;5)$, więc w przedziale $(0;5)$ funkcja P ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja f. Stąd wynika, że w punkcie $x=\frac{5}{2}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.

Zauważmy, że jeżeli $x=\frac{5}{2}$, to $2x+5=10$. Zatem dłuższa podstawa ma długość 10. Obliczamy największe pole trapezu:

$$P\left(\tfrac{5}{2}\right)=\left(5+\tfrac{5}{2}\right)\sqrt{25-\left(\tfrac{5}{2}\right)^2}=\tfrac{15}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\sqrt{3}=\tfrac{75}{4}\sqrt{3}$$

Największe pole ma trapez, którego dłuższa podstawa ma długość 10. Pole tego trapezu jest równe $\frac{75}{4}\sqrt{3}$.

Schemat oceniania

1. a) Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie niewiadomej x oraz zapisanie dłuższej podstawy w postaci $(2x+5)$.
   b) Zapisanie pola trapezu jako funkcji zmiennej x: $P(x)=-x^4-10x^3+250x+625$.
   c) Zapisanie warunku, który musi spełniać x: $x \in (0;5)$.
2. a) Wyznaczenie pochodnej wprowadzonej funkcji f: $f'(x)=-4x^3-30x^2+250$.
   b) Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1=-5$, $x_2=\frac{5}{2}$.
   c) Stwierdzenie, że $f'(x)>0$ w przedziale $\left(-5;\frac{5}{2}\right)$ oraz $f'(x)<0$ w $(-\infty;-5)$ i $\left(\frac{5}{2};\infty\right)$, więc dla $x=\frac{5}{2}$ funkcja przyjmuje największą wartość w dziedzinie $(0;5)$.
3. Zapisanie, że dłuższa podstawa ma długość 10 i obliczenie największego pola trapezu: $P=\frac{75}{4}\sqrt{3}$.

Przykładowe schematy oceniania innych zadań

Zadanie 3 (4 pkt)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=mx^3+(m+1)x^2-(6m-1)x-2m$ przez dwumian $x+2$ jest równa 20. Oblicz pierwiastki tego wielomianu.

Rozwiązanie

Obliczamy wartość parametru m.

Zauważmy, że reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x+2$ jest równa $W(-2)$.

$$W(-2)=m(-2)^3+(m+1)(-2)^2-(6m-1)(-2)-2m=20$$

Stąd $m=3$, czyli wielomian W ma postać $W(x)=3x^3+4x^2-17x-6$.

1. Zauważmy, że $W(2)=3\cdot2^3+4\cdot2^2-17\cdot2-6=0$, czyli liczba 2 jest jednym z pierwiastków wielomianu W.

   Wykonujemy dzielenie wielomianu W przez dwumian $x-2$:

   $$(3x^3+4x^2-17x-6):(x-2)=3x^2+10x+3,\quad \text{czyli}\quad W(x)=(x-2)(3x^2+10x+3)$$

   Obliczamy pierwiastki trójmianu $3x^2+10x+3$ i otrzymujemy: $x=-3$ lub $x=-\frac{1}{3}$.

   Ostatecznie, wielomian W ma trzy pierwiastki: $x=-3$, $x=-\frac{1}{3}$, $x=2$.

albo

2. Zauważmy, że $W(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 - 17 \cdot (-3) - 6 = 0$, czyli liczba -3 jest jednym z pierwiastków wielomianu W.
   Wykonujemy dzielenie wielomianu W przez dwumian $x + 3$:
   $$(3x^3 + 4x^2 - 17x - 6) : (x + 3) = 3x^2 - 5x - 2, \text{ czyli } W(x) = (x + 3)(3x^2 - 5x - 2)$$
   Obliczamy pierwiastki trójmianu $3x^2 - 5x - 2$ i otrzymujemy: $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 2$.
   Ostatecznie, wielomian W ma trzy pierwiastki: $x = -3$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = 2$.

albo

3. Zauważmy, że $W(-\frac{1}{3}) = 3 \cdot (-\frac{1}{3})^3 + 4 \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 17 \cdot (-\frac{1}{3}) - 6 = 0$, czyli liczba $-\frac{1}{3}$ jest jednym z pierwiastków wielomianu W.
   Wykonujemy dzielenie wielomianu W przez dwumian $x + \frac{1}{3}$:
   $$(3x^3 + 4x^2 - 17x - 6) : (x + \tfrac{1}{3}) = 3x^2 + 3x - 18, \text{ czyli } W(x) = (x + \tfrac{1}{3})(3x^2 + 3x - 18)$$
   Obliczamy pierwiastki trójmianu $3x^2 + 3x - 18$ i otrzymujemy: $x = -3$ lub $x = 2$.
   Ostatecznie, wielomian W ma trzy pierwiastki: $x = -3$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... **1 pkt**

Zdający zapisze równanie z niewiadomą m, np.:
$$m(-2)^3 + (m + 1)(-2)^2 - (6m - 1)(-2) - 2m = 20$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający obliczy wartość współczynnika m: $m = 3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający:

zauważy, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu, podzieli wielomian przez dwumian $(x - 2)$ i otrzyma iloraz $3x^2 + 10x + 3$,

albo

zauważy, że liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu, podzieli wielomian przez dwumian $(x + 3)$ i otrzyma iloraz $3x^2 - 5x - 2$,

albo

zauważy, że liczba $-\frac{1}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu, podzieli wielomian przez dwumian $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ i otrzyma iloraz $3x^2 + 3x - 18$.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu: $x = -3$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = 2$.

Zadanie 4 (4 pkt) – maj 2011
Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi)$.

I sposób rozwiązania

Wyłączamy przed nawias $2\sin^2 x$: $2\sin^2 x(1-\cos x) = 1-\cos x$ i zapisujemy równanie w postaci iloczynowej: $2\sin^2 x(1-\cos x) - (1-\cos x) = 0$, $(2\sin^2 x - 1)(1-\cos x) = 0$.

Zatem $2\sin^2 x - 1 = 0$ lub $1 - \cos x = 0$.

Stąd otrzymujemy:

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos x = 1$

$x = \frac{5}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$ $\qquad$ $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$ $\qquad$ $x = 0$ lub $x = 2\pi$

albo

$x = 225^\circ$ lub $x = 315^\circ$ $\qquad$ $x = 45^\circ$ lub $x = 135^\circ$ $\qquad$ $x = 0^\circ$ lub $x = 360^\circ$

Zatem rozwiązaniami równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ są:

$$x = 0,\ x = \tfrac{1}{4}\pi,\ x = \tfrac{3}{4}\pi,\ x = \tfrac{5}{4}\pi,\ x = \tfrac{7}{4}\pi,\ x = 2\pi$$

albo

$$x = 0^\circ,\ x = 45^\circ,\ x = 135^\circ,\ x = 225^\circ,\ x = 315^\circ,\ x = 360^\circ$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... **1 pkt**

Zapisanie równania w postaci, np.:

$$2\sin^2 x(1-\cos x) = 1-\cos x \ \text{ lub } \ 2\sin^2 x(1-\cos x) - (1-\cos x) = 0$$

lub

$$(2\sin^2 x - 1) - \cos x(2\sin^2 x - 1) = 0$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zapisanie równania w postaci alternatywy:

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} \ \text{ lub } \ \cos x = 1$$

$$\sin x = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ lub } \ \sin x = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ lub } \ \cos x = 1$$

$$\cos 2x = 0 \ \text{ lub } \ \cos x = 1$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Rozwiązanie jednego z otrzymanych równań.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w podanym przedziale:

$$x = 0,\ x = \tfrac{1}{4}\pi,\ x = \tfrac{3}{4}\pi,\ x = \tfrac{5}{4}\pi,\ x = \tfrac{7}{4}\pi,\ x = 2\pi$$

albo

$$x = 0^\circ,\ x = 45^\circ,\ x = 135^\circ,\ x = 225^\circ,\ x = 315^\circ,\ x = 360^\circ$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązania równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ bez uwzględnienia przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$, to otrzymuje 3 punkty.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci $2\sin^2 x(1 - \cos x) = 1 - \cos x$, a następnie podzieli obie strony równania przez $\cos x - 1$ bez odpowiedniego założenia i rozwiąże tylko równanie $2\sin^2 x - 1 = 0$, to za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.
3. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci $2\sin^2 x(1 - \cos x) = 1 - \cos x$, a następnie podzieli obie strony równania przez $\cos x - 1$, zakładając, że $\cos x \neq 1$, rozwiąże tylko równanie $2\sin^2 x - 1 = 0$ i nie rozpatrzy równania $\cos x = 1$, to za całe zadanie otrzymuje 2 punkty.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy równanie za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej:

$$2(1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 1 - \cos x$$

i przekształcamy do postaci:

$$2 - 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x - 1 + \cos x = 0$$
$$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

Następnie zapisujemy to równanie w postaci iloczynowej:

$$(2\cos^2 x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

Zatem:

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \text{ lub } \cos x - 1 = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos x = 1$

$x = \frac{3}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$ $\quad$ $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$ $\quad$ $x = 0$ lub $x = 2\pi$

albo

$x = 135^\circ$ lub $x = 225^\circ$ $\quad$ $x = 45^\circ$ lub $x = 315^\circ$ $\quad$ $x = 0^\circ$ lub $x = 360^\circ$

Zatem rozwiązaniami równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ są:

$$x = 0,\ x = \tfrac{1}{4}\pi,\ x = \tfrac{3}{4}\pi,\ x = \tfrac{5}{4}\pi,\ x = \tfrac{7}{4}\pi,\ x = 2\pi$$

albo

$$x = 0^\circ,\ x = 45^\circ,\ x = 135^\circ,\ x = 225^\circ,\ x = 315^\circ,\ x = 360^\circ$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania w postaci iloczynowej, np.:

$$(2\cos^2 x - 1)(\cos x - 1) = 0 \text{ lub } (\sqrt{2}\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zapisanie równania w postaci alternatywy:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \text{ lub } \cos x = 1$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \cos x = 1$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Rozwiązanie jednego z otrzymanych równań.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w podanym przedziale:

$$x = 0,\ x = \frac{1}{4}\pi,\ x = \frac{3}{4}\pi,\ x = \frac{5}{4}\pi,\ x = \frac{7}{4}\pi,\ x = 2\pi$$

albo

$$x = 0^\circ,\ x = 45^\circ,\ x = 135^\circ,\ x = 225^\circ,\ x = 315^\circ,\ x = 360^\circ$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązania równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ bez uwzględnienia przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$, to otrzymuje 3 punkty.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci $2\cos^2 x(\cos x - 1) = \cos x - 1$, a następnie podzieli obie strony równania przez $\cos x - 1$ bez odpowiedniego założenia i rozwiąże tylko równanie $2\cos^2 x - 1 = 0$, to za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.
3. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci $2\cos^2 x(\cos x - 1) = \cos x - 1$, a następnie podzieli obie strony równania przez $\cos x - 1$, zakładając, że $\cos x \neq 1$, rozwiąże tylko równanie $2\cos^2 x - 1 = 0$, i nie rozpatrzy równania $\cos x = 1$, to za całe zadanie otrzymuje 2 punkty.

Wybrane wzory matematyczne

1. Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geqslant 0 \qquad\qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad\qquad |x-y| \leqslant |x| + |y| \qquad\qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geqslant 0$ mamy warunki równoważne:

$$|x-a| \leqslant r \Leftrightarrow a - r \leqslant x \leqslant a + r$$
$$|x-a| \geqslant r \Leftrightarrow x \leqslant a - r \text{ lub } x \geqslant a + r$$

2. Potęgi i pierwiastki

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geqslant 0$ nazywamy liczbę $b \geqslant 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

* * *

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$

– dla $a \geqslant 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. Logarytmy

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę c:

$$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\qquad$ $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ $\qquad$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$\log x$ oraz $\lg x$ oznacza $\log_{10} x$.

4. Silnia. Współczynnik dwumianowy

Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

* * *

Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leqslant k \leqslant n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

5. Wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb a, b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

6. Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \ldots + a^{n-1})$$

7. Ciągi

- **Ciąg arytmetyczny**

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geqslant 2$$

- **Ciąg geometryczny**

Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geqslant 2$$

- **Procent składany**

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

8. Funkcja kwadratowa

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{\Delta}{4a},\ \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p, q). Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta \geqslant 0$, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

9. Geometria analityczna

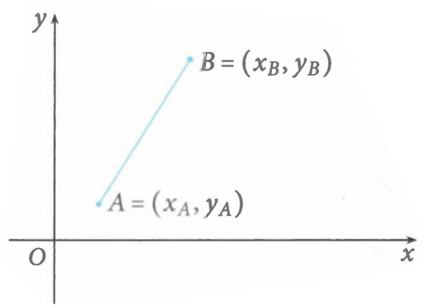
- **Odcinek**

Długość odcinka o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



- **Wektory**

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

- **Prosta**

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

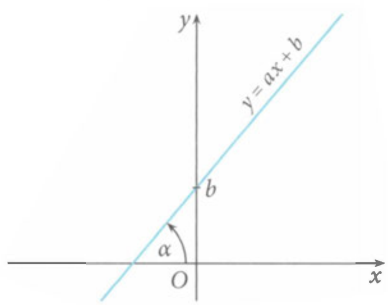
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.



Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- **Prosta i punkt**

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest dana wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- **Para prostych**

Dwie proste o równaniach kierunkowych

$$y = a_1x + b_1 \qquad y = a_2x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1 = a_2$

– są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$

– tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg} \varphi = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}\right|$

Dwie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

– są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

– są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

– tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$

- **Trójkąt**

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

- **Przekształcenia geometryczne**

– przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x + a, y + b)$

– symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$

– symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$

– symetria względem punktu (a, b) przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (2a - x, 2b - y)$

– jednokładność o środku w punkcie $(0, 0)$ i skali $s \neq 0$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx, sy)$

- **Równanie okręgu**

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

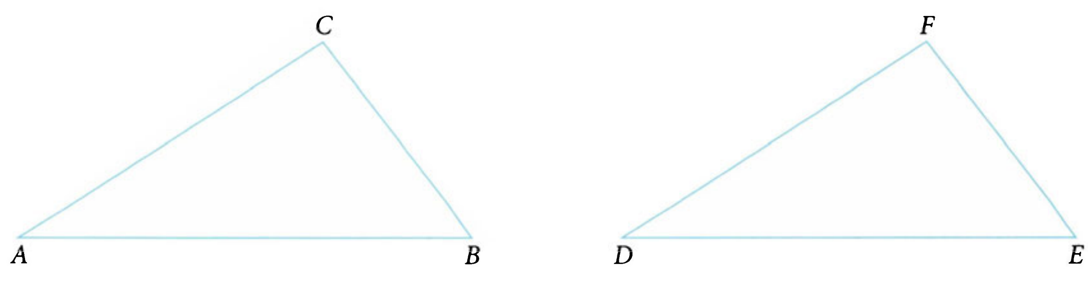
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad \text{gdy} \quad r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$$

10. Planimetria

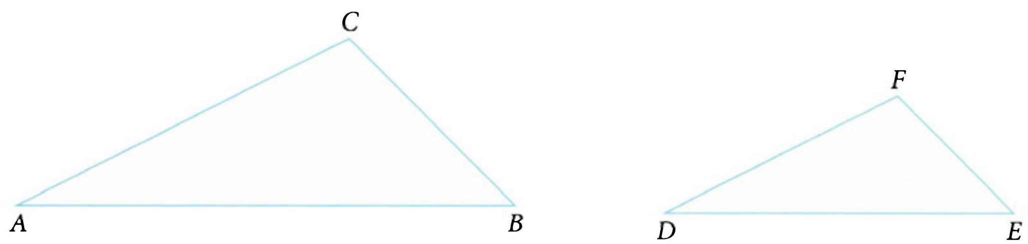
- **Cechy przystawania trójkątów**



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawania trójkątów**:

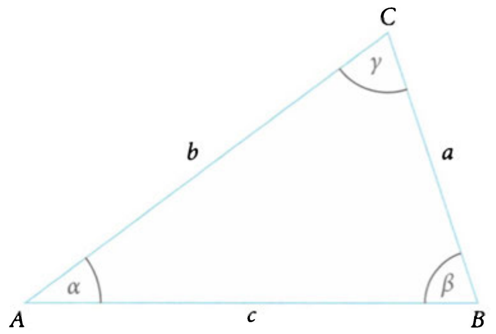
- cecha przystawania „bok – bok – bok”:
  odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości:
  $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$
- cecha przystawania „bok – kąt – bok”:
  dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np.
  $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
- cecha przystawania „kąt – bok – kąt”:
  jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np.
  $|AB| = |DE|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$

• **Cechy podobieństwa trójkątów**



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

- cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:
  długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, np.
  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$
- cecha podobieństwa „bok – kąt – bok”:
  długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np.
  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
- cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:
  dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też i trzecie kąty obu trójkątów są przystające):
  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie *ABC*:

a, b, c – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C

$2p = a + b + c$ – obwód trójkąta

α, β, γ – miary kątów przy wierzchołkach A, B, C

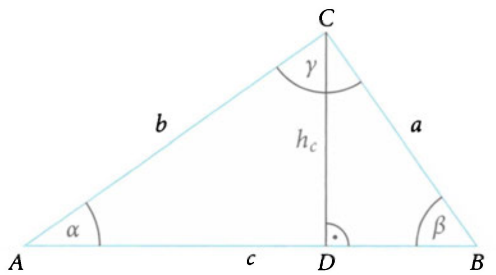
h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone z wierzchołków A, B, C

R, r – promienie okręgów opisanego i wpisanego

• **Twierdzenie Pitagorasa** (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie ABC kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

• **Związki miarowe w trójkącie prostokątnym**



Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$

$h_c = \frac{ab}{c}$

$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$

$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$

$R = \frac{1}{2}c \qquad r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$

• **Twierdzenie sinusów**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

• **Twierdzenie cosinusów**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

• **Wzory na pole trójkąta**

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• **Trójkąt równoboczny**

a – długość boku

h – wysokość trójkąta

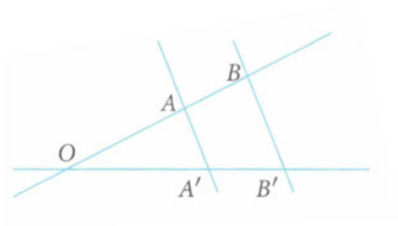
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

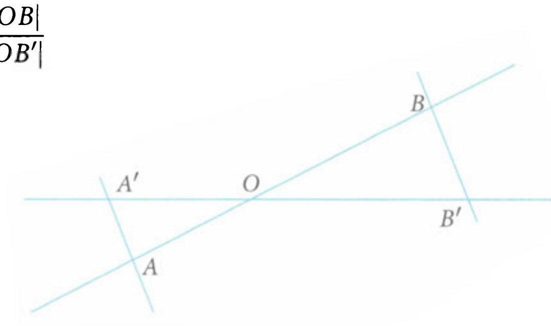
$$P_{\triangle} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

- **Twierdzenie Talesa**

Jeżeli proste równoległe AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O, to

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$$

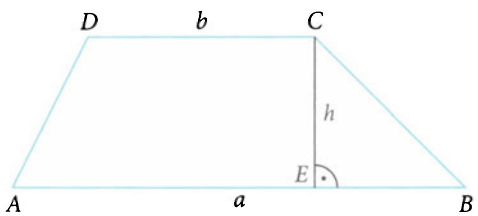




- **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa**

Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O oraz $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$, to proste AA' i BB' są równoległe.

- **Czworokąty**

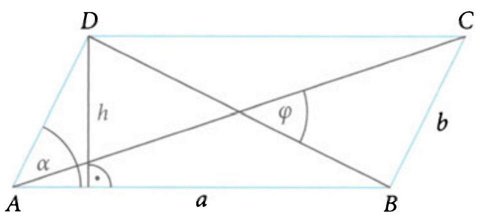


Trapez

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

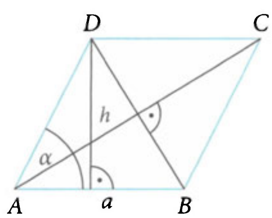


Równoległobok

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$$

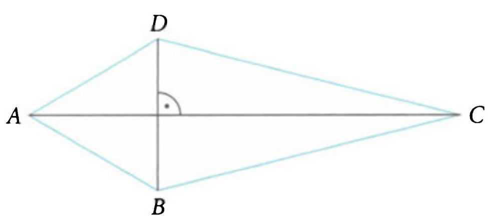


Romb

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



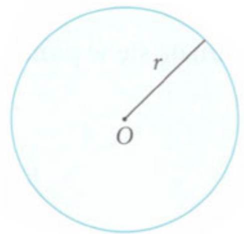
Deltoid

Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

- **Koło**



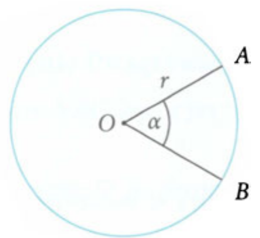
Wzór na pole koła o promieniu r:

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu r:

$$Ob = 2\pi r$$

- **Wycinek koła**



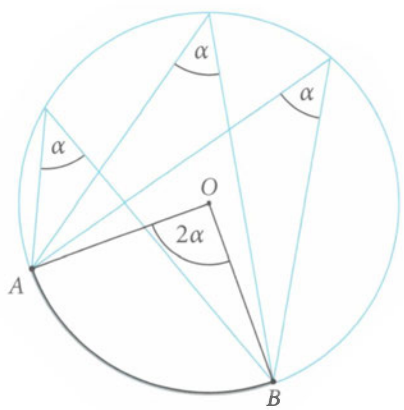
Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

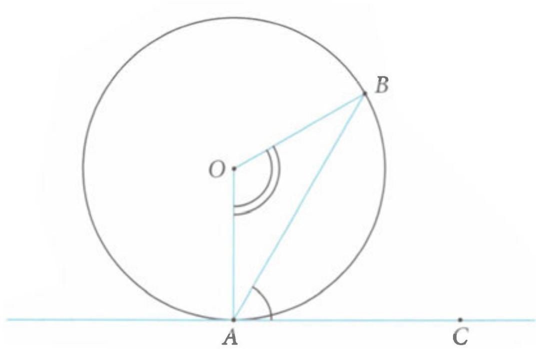
- **Kąty w okręgu**

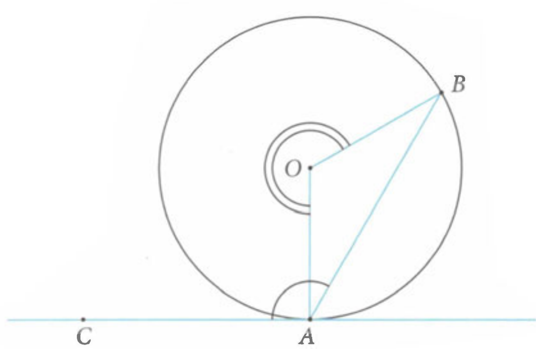


Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

- **Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą**



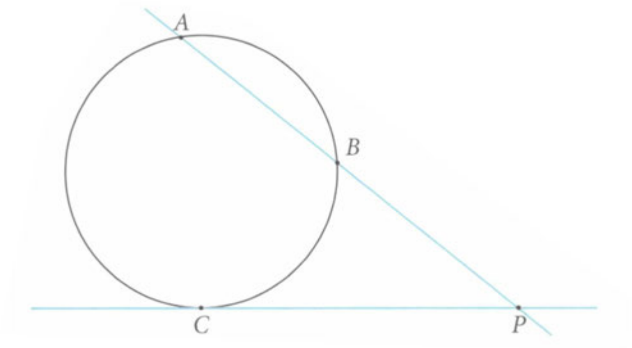


Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A. Wtedy $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.

- **Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej**

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to

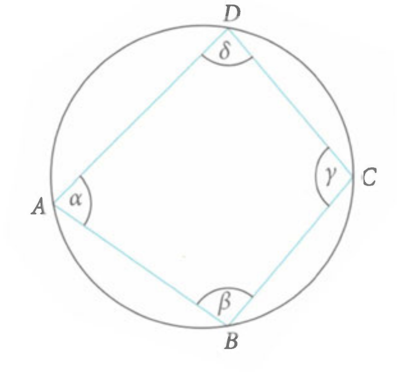
$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



- **Okrąg opisany na czworokącie**

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

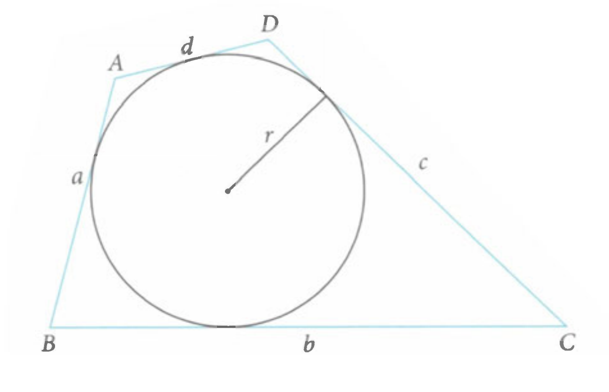
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



- **Okrąg wpisany w czworokąt**

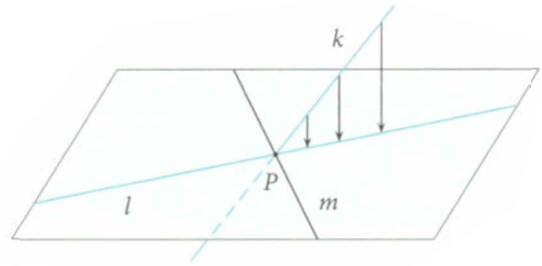
W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$



11. Stereometria

- **Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych**

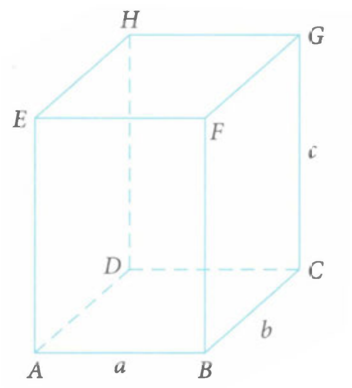


Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P. Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l.

- **Oznaczenia**

P – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole powierzchni podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
V – objętość

- **Prostopadłościan**

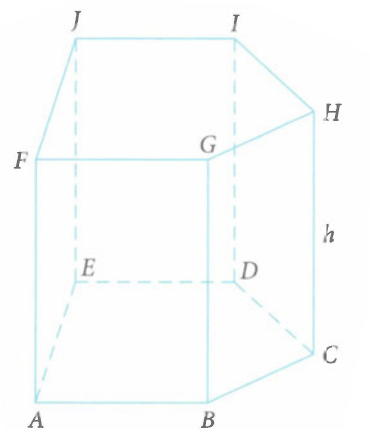


$P = 2(ab + bc + ac)$

$V = abc$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

- **Graniastosłup prosty**

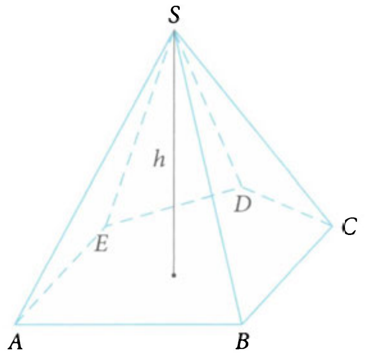


$P_b = 2p \cdot h$

$V = P_p \cdot h$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa

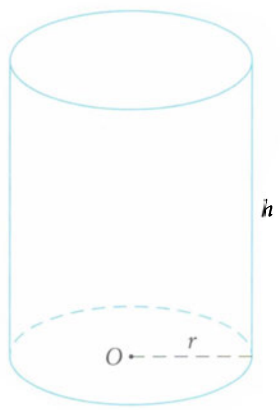
- **Ostrosłup**



$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

- **Walec**



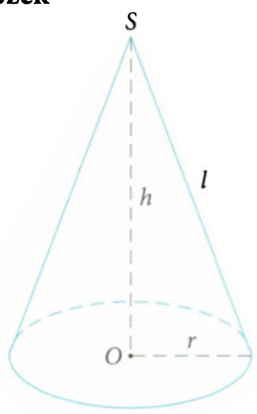
$P_b = 2\pi r h$

$P = 2\pi r(r + h)$

$V = \pi r^2 h$

gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością walca

- **Stożek**



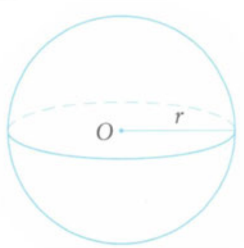
$P_b = \pi r l$

$P = \pi r(r + l)$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością, l długością tworzącej stożka

- **Kula**



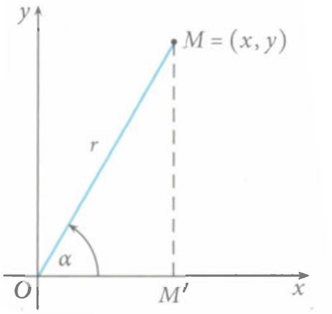
$P = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

gdzie r jest promieniem kuli

12. Trygonometria

• Definicje funkcji trygonometrycznych



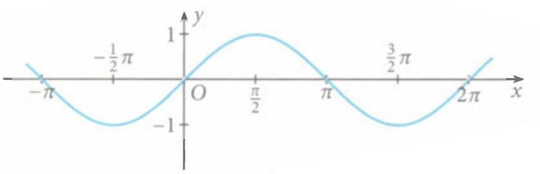
$\sin\alpha = \frac{y}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$

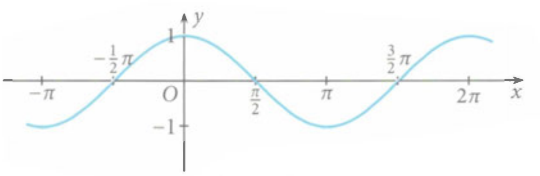
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, gdy $x \neq 0$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M

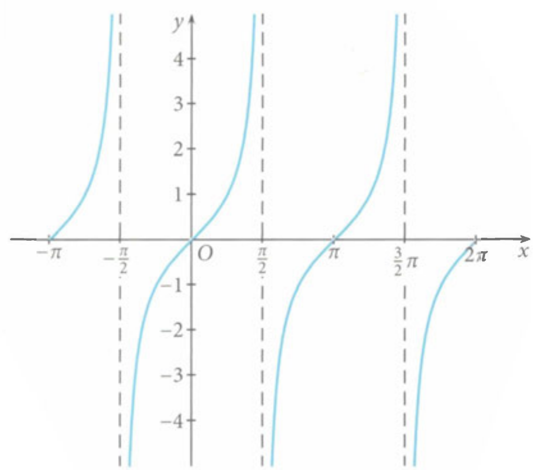
• Wykresy funkcji trygonometrycznych



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$

• Związki między funkcjami tego samego kąta

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dla $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ k – całkowite

• Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- **Funkcje sumy i różnicy kątów**

Dla dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto mamy równości:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta} \qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- **Funkcje podwojonego kąta**

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

13. Kombinatoryka

- **Wariacje z powtórzeniami**

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k.

- **Wariacje bez powtórzeń**

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k $(1\leqslant k\leqslant n)$ różnych wyrazów, jest równa

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Permutacje**

Liczba sposobów, na które $n\geqslant 1$ różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- **Kombinacje**

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k $(0\leqslant k\leqslant n)$ elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

14. Rachunek prawdopodobieństwa

- **Własności prawdopodobieństwa**

$0\leqslant P(A)\leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A\subset\Omega$

$P(\Omega)=1$ $\quad\Omega$ – zdarzenie pewne

$P(\emptyset)=0$ $\quad\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A)\leqslant P(B)$ gdy $A\subset B\subset\Omega$

$P(A')=1-P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A,B\subset\Omega$

$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A,B\subset\Omega$

- **Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa**

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

15. Parametry danych statystycznych

- **Średnia arytmetyczna**

Średnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- **Średnia ważona**

Średnia ważona n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ jest równa:

$$\frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

- **Średnia geometryczna**

Średnia geometryczna n nieujemnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

- **Mediana**

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)
- dla n parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

- **Wariancja i odchylenie standardowe**

Wariancją n danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{a}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + \ldots + (a_n - \overline{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} - (\overline{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

16. Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

$\alpha[°]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[°]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha[°]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[°]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	–	**0**

Wybrane wzory matematyczne zostały przygotowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Są dostępne pod adresem: http://www.cke.edu.pl/images/stories/Tablice/tablice_matematyczne.pdf

Uzupełnienie zestawu wybranych wzorów matematycznych

Granica ciągu

Dane są ciągi (a_n) i (b_n), określone dla $n \geqslant 1$.
Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geqslant 1$ oraz $b \neq 0$, to:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, o ilorazie q.
Niech S_n oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), tzn. ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg S_n ma granicę

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Tę granicę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

Pochodna funkcji

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in \mathbf{R}$

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, gdy $g(x) \neq 0$

- **Pochodne niektórych funkcji**

Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, $n \geqslant 2$ dowolną liczbą naturalną.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

- **Równanie stycznej**

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem:

$$y = ax + b$$

gdzie współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pochodnej funkcji f w punkcie x_0, tzn. $a = f'(x_0)$, natomiast $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Trygonometria

- **Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych**

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Rachunek prawdopodobieństwa

- **Prawdopodobieństwo warunkowe**

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P(B) > 0$.
Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym**

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$,
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$,

to dla każdego zdarzenia losowego A zawartego w Ω zachodzi równość

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Uzupełnienie zestawu wybranych wzorów matematycznych dostępne jest pod adresem:
http://www.cke.edu.pl/files/file/Matura-2015/Informatory-2015/Matematyka-Uzupelnienie-zestawu-wzorow.pdf

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI