Obliczanie całek $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ na obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ poprzez podział obszaru D na $4n^2$ trójkątów przystających oraz zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu drugiego.

Wyznaczenie analityczne całki z funkcji stopnia 1

Obliczymy analitycznie $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ gdzie

$f(x,y) = ax + by + c \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$

Niech $D_1 = \{(x,y) \in D : x \leq 0\}$ oraz $D_2 = \{(x,y) \in D : x > 0\}$

Oznaczmy $I_1 = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$, $I_2 = \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

Wtedy $D = D_1 \cup D_2$ oraz $I = I_1 + I_2$

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{0} \int\limits_{-x-1}^{x+1} ax + by + c\,dydx$$

$$I_2 = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{x-1}^{-x+1} ax + by + c\,dydx$$

Obliczamy I_1 oraz I_2

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \int_{-x-1}^{x+1} ax + by + c\, dydx$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy\right]_{-x-1}^{x+1} dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} 2ax^2 + 2ax + 2cx + 2c\, dx$$

$$I_1 = 2\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + \frac{cx^2}{2} + cx\right]_{-1}^{0}$$

$$I_1 = -\frac{a}{3} + c$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} \int_{x-1}^{-x+1} ax + by + c\, dydx$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy\right]_{x-1}^{-x+1} dx$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} -2ax^2 + 2ax - 2cx + 2c\, dx$$

$$I_2 = 2\left[-\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{cx^2}{2} + cx\right]_{0}^{1}$$

$$I_2 = \frac{a}{3} + c$$

Ostatecznie otrzymujemy $I = I_1 + I_2 = 2c$