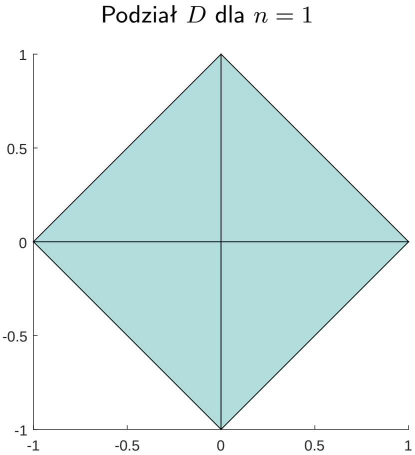
Projekt 1, Zadanie 23

Wiktor Murawski, 333255, grupa 3, środa 12:15

Obliczanie całek $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ na obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ poprzez podział obszaru D na $4n^2$ trójkątów przystających oraz zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu drugiego.


Podział D dla $n = 1$
Podział D dla $n = 4$
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

TU MA BYĆ ALGORYTM

Niech T będzie trójkątem o wierzchołkach $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$
Niech P oznacza pole trójkąta T oraz niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Wtedy

$$P = \frac{1}{2} |\det A|$$

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wówczas

$$S_S(f) = Pf\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$S_W(f) = \frac{P}{3}\Big(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3)\Big)$$

są kwadraturami rzędu 2-go.

Mając podział obszaru D na $4n^2$ trójkątów przystających oraz kwadraturę drugiego rzędu na dowolnym trójkącie, możemy obliczyć całkę

$$I(f) = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$$

poprzez zastosowanie na każdym z trójkątów kwadratury rzędu drugiego.

Stosując kwadraturę $S_S(f)$ na każdym z trójkątów, otrzymamy kwadraturę złożoną $S_S^{[n]}(f)$.

Spodziewamy się, że dla dostatecznie dużego n

$$S_S^{[n]} \approx I(f)$$

a dla wielomianów dwóch zmiennych stopnia < 2

$$S_S^{[n]} = I(f)$$

W celu sprawdzenia poprawności metody przetestujemy ją na wielomianach dwóch zmiennych stopnia pierwszego.
Obliczymy analitycznie

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

gdzie

$$f(x, y) = ax + by + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Niech

$$D_1 = \{(x, y) \in D : x \leq 0\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in D : x > 0\}$$

Oznaczmy

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy$$

$$I_2 = \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy$$

Wtedy $D = D_1 \cup D_2$ oraz $I = I_1 + I_2$.

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \int_{-x-1}^{x+1} ax + by + c \, dydx$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{-x-1}^{x+1} dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} 2ax^2 + 2ax + 2cx + 2c \, dx$$

$$I_1 = 2 \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + \frac{cx^2}{2} + cx \right]_{-1}^{0}$$

$$I_1 = -\frac{a}{3} + c$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} \int_{x-1}^{-x+1} ax + by + c \, dydx$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{x-1}^{-x+1} dx$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} -2ax^2 + 2ax - 2cx + 2c \, dx$$

$$I_2 = 2 \left[-\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{cx^2}{2} + cx \right]_{0}^{1}$$

$$I_2 = \frac{a}{3} + c$$

Ostatecznie otrzymujemy $I = I_1 + I_2 = 2c$

Testy poprawności

Funkcja f	$I(f)$	n	$S_S^{[n]}(f)$	$\lvert S_S^{[n]}(f) - I(f)\rvert$
$f(x,y) = 1$	2.0000	1	2.0000	0.0000
		5	2.0000	1.3323×10^{-15}
		10	2.0000	2.0650×10^{-14}
		50	2.0000	1.8763×10^{-13}
		100	2.0000	2.0082×10^{-12}
		500	2.0000	1.5836×10^{-11}
$f(x,y) = x+y+1$	2.0000	1	2.0000	0.0000
		5	2.0000	8.8818×10^{-16}
		10	2.0000	2.4425×10^{-15}
		50	2.0000	4.6629×10^{-15}
		100	2.0000	4.8850×10^{-15}
		500	2.0000	7.5939×10^{-14}
$f(x,y) = 8x+2y+\frac{1}{2}$	1.0000	1	1.0000	0.0000
		5	1.0000	5.5511×10^{-16}
		10	1.0000	2.2204×10^{-16}
		50	1.0000	1.1102×10^{-15}
		100	1.0000	1.7764×10^{-15}
		500	1.0000	8.2157×10^{-15}

Funkcja f	$I(f)$	n	$S_S^{[n]}(f)$	$\lvert S_S^{[n]}(f) - I(f)\rvert$
$f(x,y) =$ $x - y + \sqrt{2}$	2.8284	1	2.8284	0.0000
		5	2.8284	1.3323×10^{-15}
		10	2.8284	1.7764×10^{-15}
		50	2.8284	5.3291×10^{-15}
		100	2.8284	3.0198×10^{-14}
		500	2.8284	1.5543×10^{-14}
$f(x,y) =$ $-x + 2y - \pi$	-6.2832	1	-6.2832	0.0000
		5	-6.2832	8.8818×10^{-16}
		10	-6.2832	0.0000
		50	-6.2832	3.5527×10^{-15}
		100	-6.2832	4.4409×10^{-15}
		500	-6.2832	3.5527×10^{-14}
$f(x,y) =$ $\pi x - ey$	0.0000	1	0.0000	0.0000
		5	1.3878×10^{-17}	1.3878×10^{-17}
		10	-6.9389×10^{-18}	6.9389×10^{-18}
		50	9.7578×10^{-19}	9.7578×10^{-19}
		100	1.3281×10^{-18}	1.3281×10^{-18}
		500	7.9028×10^{-19}	7.9028×10^{-19}

TESTY NUMERYCZNE

TU MA BYĆ WYKRES