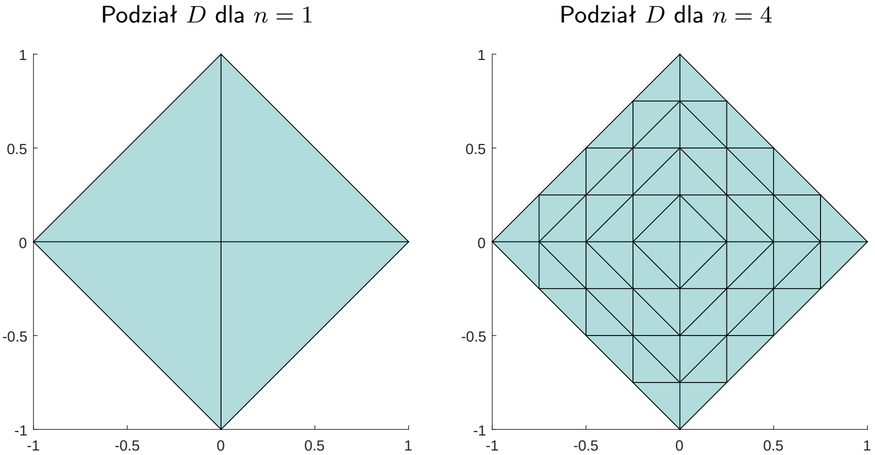
Projekt 1, Zadanie 23

Wiktor Murawski, 333255, grupa 3, środa 12:15

Obliczanie całek $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ na obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ poprzez podział obszaru D na $4n^2$ trójkątów przystających oraz zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu drugiego.


Podział D dla $n = 1$
Podział D dla $n = 4$
1
0.5
0
-0.5
-1
-1 -0.5 0 0.5 1

TU MA BYĆ ALGORYTM

Niech T będzie trójkątem o wierzchołkach $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$
Niech P oznacza pole trójkąta T oraz niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Wtedy

$$P = \frac{1}{2} |\det A|$$

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wówczas

$$S_S(f) = Pf\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$S_W(f) = \frac{P}{3}\Big(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3)\Big)$$

Są kwadraturami rzędu 2-go.

Mając podział obszaru D na $4n^2$ trójkątów przystających oraz kwadraturę drugiego rzędu na dowolnym trójkącie, możemy obliczyć całkę

$$I(f) = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

poprzez zastosowanie na każdym z kwadratów kwadratury rzędu drugiego.

Zastosujemy kwadraturę S_S na każdym z trójkątów, sumę wyników oznaczymy przez $S_S^{[n]}(f)$.

W celu sprawdzenia poprawności metody przetestujemy ją na wielomianach dwóch zmiennych stopnia pierwszego.
Obliczymy analitycznie

$$I = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$$

gdzie

$$f(x,y) = ax + by + c \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Niech

$$D_1 = \{(x,y) \in D : x \leq 0\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in D : x > 0\}$$

Oznaczmy

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$$

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

Wtedy $D = D_1 \cup D_2$ oraz $I = I_1 + I_2$.

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \int_{-x-1}^{x+1} ax + by + c \, dy dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{-x-1}^{x+1} dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} 2ax^2 + 2ax + 2cx + 2c \, dx$$

$$I_1 = 2 \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + \frac{cx^2}{2} + cx \right]_{-1}^{0}$$

$$I_1 = -\frac{a}{3} + c$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} \int_{x-1}^{-x+1} ax + by + c \, dy dx$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{x-1}^{-x+1} dx$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} -2ax^2 + 2ax - 2cx + 2c \, dx$$

$$I_2 = 2 \left[-\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{cx^2}{2} + cx \right]_{0}^{1}$$

$$I_2 = \frac{a}{3} + c$$

Ostatecznie otrzymujemy $I = I_1 + I_2 = 2c$

funkcja podcałkowa	wynik dokładny	n	wynik uzyskany	błąd bezwzględny	błąd względny
$f(x,y) = 1$	2.000	1	2.000	1.000×10^{-20}	0.000
		5	2.000	1.332×10^{-15}	6.661×10^{-16}
		10	2.000	2.065×10^{-14}	1.033×10^{-14}
		50	2.000	1.876×10^{-13}	9.381×10^{-14}
		100	2.000	2.008×10^{-12}	1.004×10^{-12}
		500	2.000	1.584×10^{-11}	7.918×10^{-12}
$f(x,y) = x + y + 0.5$	2.000	1	2.000	0.000	0.000
		5	2.000	8.882×10^{-16}	4.441×10^{-16}
		10	2.000	2.442×10^{-15}	1.221×10^{-15}
		50	2.000	4.663×10^{-15}	2.331×10^{-15}
		100	2.000	4.885×10^{-15}	2.442×10^{-15}
		500	2.000	7.594×10^{-14}	3.797×10^{-14}
$f(x,y) = x + 2y + 3$	6.000	1	6.000	8.882×10^{-16}	1.480×10^{-16}
		5	6.000	0.000	0.000
		10	6.000	8.882×10^{-16}	1.480×10^{-16}
		50	6.000	8.882×10^{-16}	1.480×10^{-16}
		100	6.000	1.776×10^{-15}	2.961×10^{-16}
		500	6.000	2.665×10^{-14}	4.441×10^{-15}

TESTY NUMERYCZNE

TU MA BYĆ WYKRES