

Obliczanie całek $\iint_D f(x, y) dx dy$ na obszarze $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ poprzez podział obszaru D na $4n^2$ trójkątów przystających oraz zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu drugiego.

Obliczymy analitycznie $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ gdzie

$$f(x, y) = ax + by + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Niech $D_1 = \{(x, y) \in D : x \leq 0\}$ oraz $D_2 = \{(x, y) \in D : x > 0\}$

Oznaczmy $I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$, $I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$

Wtedy $D = D_1 \cup D_2$ oraz $I = I_1 + I_2$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{x+1} ax + by + c dy dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_{x-1}^{-x+1} ax + by + c dy dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{x+1} ax + by + c \, dy \, dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{-x-1}^{x+1} dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 2ax^2 + 2ax + 2cx + 2c \, dx$$

$$I_1 = 2 \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + \frac{cx^2}{2} + cx \right]_{-1}^0$$

$$I_1 = -\frac{a}{3} + c$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_{x-1}^{-x+1} ax + by + c \, dy \, dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{x-1}^{-x+1} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 -2ax^2 + 2ax - 2cx + 2c \, dx$$

$$I_2 = 2 \left[-\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{cx^2}{2} + cx \right]_0^1$$

$$I_2 = \frac{a}{3} + c$$

Ostatecznie otrzymujemy $I = I_1 + I_2 = 2c$

funkcja podcałkowa	wynik dokładny	n	wynik uzyskany	błąd bezwzględny	błąd względny
$f(x, y) = 1$	2.000	1	2.000	1.000×10^{-20}	0.000
		5	2.000	1.332×10^{-15}	6.661×10^{-16}
		10	2.000	2.065×10^{-14}	1.033×10^{-14}
		50	2.000	1.876×10^{-13}	9.381×10^{-14}
		100	2.000	2.008×10^{-12}	1.004×10^{-12}
		500	2.000	1.584×10^{-11}	7.918×10^{-12}
$f(x, y) = x + y + 0.5$	2.000	1	2.000	0.000	0.000
		5	2.000	8.882×10^{-16}	4.441×10^{-16}
		10	2.000	2.442×10^{-15}	1.221×10^{-15}
		50	2.000	4.663×10^{-15}	2.331×10^{-15}
		100	2.000	4.885×10^{-15}	2.442×10^{-15}
		500	2.000	7.594×10^{-14}	3.797×10^{-14}
$f(x, y) = x + 2y + 3$	6.000	1	6.000	8.882×10^{-16}	1.480×10^{-16}
		5	6.000	0.000	0.000
		10	6.000	8.882×10^{-16}	1.480×10^{-16}
		50	6.000	8.882×10^{-16}	1.480×10^{-16}
		100	6.000	1.776×10^{-15}	2.961×10^{-16}
		500	6.000	2.665×10^{-14}	4.441×10^{-15}