

Obliczanie całek $\iint_D f(x, y) dx dy$ na obszarze $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ poprzez podział obszaru D na $4n^2$ trójkątów przystających oraz zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu drugiego.

Wyznaczenie analityczne całki z funkcji stopnia 1

Obliczmy analitycznie $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ gdzie

$$f(x, y) = ax + by + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Niech $D_1 = \{(x, y) \in D : x \leq 0\}$ oraz $D_2 = \{(x, y) \in D : x > 0\}$

Oznaczmy $I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$, $I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$

Wtedy $D = D_1 \cup D_2$ oraz $I = I_1 + I_2$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{x+1} ax + by + c dy dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_{x-1}^{-x+1} ax + by + c dy dx$$

Wyznaczenie analityczne całki z funkcji stopnia 1

$$I_1 = \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{x+1} ax + by + c \, dy dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{-x-1}^{x+1} dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 2ax^2 + 2ax + 2cx + 2c \, dx$$

$$I_1 = 2 \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + \frac{cx^2}{2} + cx \right]_{-1}^0$$

$$I_1 = -\frac{a}{3} + c$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_{x-1}^{-x+1} ax + by + c \, dy dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[axy + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{x-1}^{-x+1} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 -2ax^2 + 2ax - 2cx + 2c \, dx$$

$$I_2 = 2 \left[-\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{cx^2}{2} + cx \right]_0^1$$

$$I_2 = \frac{a}{3} + c$$

Ostatecznie otrzymujemy $I = I_1 + I_2 = 2c$