Projekt 2, Zadanie 36

Wiktor Murawski, 333255, grupa 3, środa 12:15

Metoda Adamsa-Bashfortha rzędu 4-go dla liniowych równań różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu. Wartości początkowe y_1, y_2, y_3 obliczane metodą Rungego-Kutty rzędu 4-go (wzór Ralstona).

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu

Dane jest równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu oraz warunek początkowy:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

Przekształcając równanie otrzymujemy

$$y' = f(x,y) = \frac{b(x) - a_0(x)y}{a_1(x)}$$

Równanie różniczkowe drugiego rzędu

Dane jest równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu oraz warunki początkowe:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \qquad \begin{matrix} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{matrix}$$

Sprowadzamy równanie do układu równań różniczkowych liniowych stopnia pierwszego:

$$Y' = F(x, Y),$$

gdzie

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \overset{\text{ozn}}{=} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$$

Przekształacając równanie otrzymujemy

$$Y' = F(x, Y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{1}{a_2(x)}(b(x) - a_0 y_1 - a_1 y_2) \end{bmatrix}$$

Jawne metody Rungego-Kutty 4-go rzędu

Mając wartość Y_n, jawne metody Rungego-Kutty rzędu czwartego pozwalają na wyznaczenie wartości Y_{n+1} następująco:

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(x_n, Y_n) \\ K_2 &= hF(x_n + a_2 h, Y_n + b_{21}K_1) \\ K_3 &= hF(x_n + a_3 h, Y_n + b_{31}K_1 + b_{32}K_2) \\ K_4 &= hF(x_n + a_4 h, Y_n + b_{41}K_1 + b_{42}K_2 + b_{43}K_3) \\ Y_{n+1} - Y_n &= c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + c_4K_4 \end{aligned}$$

Współczynniki a_i, b_{ij}, c_i przedstawione w tablicy Butchera:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ a_4 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array}$$

Ogólne wzory na współczynniki

Współczynniki a_i, b_{ij}, c_i tworzą rodzinę dwuparametrową zależną od parametrów α i β gdzie $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha \neq \beta$.

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
\beta & \beta - \frac{\beta(\beta-\alpha)}{2\alpha(1-2\alpha)} & \frac{\beta(\beta-\alpha)}{2\alpha(1-2\alpha)} & 0 & 0 \\
1 & 1 - \frac{(1-\alpha)(\beta(\alpha+\beta-1-(2\beta-1)^2)+2\alpha(1-2\alpha)(1-\beta))}{2\alpha\beta(\beta-\alpha)(6\alpha\beta-4(\alpha+\beta)+3)} & \frac{(1-\alpha)(\alpha+\beta-1-(2\beta-1)^2)}{2\alpha(\beta-\alpha)(6\alpha\beta-4(\alpha+\beta)+3)} & \frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta(\beta-\alpha)(6\alpha\beta-4(\alpha+\beta)+3)} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{2} - \frac{1-2(\alpha+\beta)}{12\alpha\beta} & \frac{2\beta-1}{12\alpha(\beta-\alpha)(1-\alpha)} & \frac{1-2\alpha}{12\beta(\beta-\alpha)(1-\beta)} & \frac{1}{2} + \frac{2(\alpha+\beta)-3}{12(1-\alpha)(1-\beta)}
\end{array}$$

Dla parametrów $\alpha = \frac{2}{5}$ i $\beta = \frac{7}{8} - \frac{3\sqrt{5}}{16}$ otrzymujemy ograniczenie górne na E, gdzie:

$$y(x_{n+1}) = y_{n+1} + Eh^5$$

$$|E| < 5.46 \cdot 10^{-2} M L^4$$

gdzie, dla pewnego obszaru $B(x, y)$ zawierającego (x_n, y_n), zachodzi

$$|f(x,y)| \leq M \qquad \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} < \frac{L^{i+j}}{M^{j-1}}$$

Tabela Butchera (wartości dokładne)

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{14-3\sqrt{5}}{16} & \frac{-2\,889+1\,428\sqrt{5}}{1\,024} & \frac{3\,785-1\,620\sqrt{5}}{1\,024} & 0 & 0 \\
1 & \frac{-3\,365+2\,094\sqrt{5}}{6\,040} & \frac{-975-3\,046\sqrt{5}}{2\,552} & \frac{467\,040+203\,968\sqrt{5}}{240\,845} & 0 \\
\hline
 & \frac{263+24\sqrt{5}}{1\,812} & \frac{125-1\,000\sqrt{5}}{3\,828} & \frac{3\,426\,304+1\,661\,952\sqrt{5}}{5\,924\,787} & \frac{30-4\sqrt{5}}{123}
\end{array}
$$

Tabela Butchera (wartości przybliżone)

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
0.45573725 & 0.29697761 & 0.15875964 & 0 & 0 \\
1 & 0.21810039 & -3.05096515 & 3.83286476 & 0 \\
\hline
 & 0.17476028 & -0.55148066 & 1.20553560 & 0.17118478
\end{array}
$$

Metoda Adamsa-Bashfortha

Metoda Adamsa-Bashfortha rzędu czwartego jest metodą wielokrokową opartą na 4 węzłach: $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$. Y_{n+1} obliczane jest następująco:

$$Y_{n+1} = Y_n + h\sum_{i=0}^{3} \alpha_i F(Y_{n-i})$$

Z faktu, że $Y' = F(x, Y)$, otrzymujemy:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} Y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(Y(x))dx$$

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(Y(x))dx$$

Chcemy dobrać współczynniki α_i tak, aby metoda dawała najlepsze przybliżenie całki w powyższym wyrażeniu.

Współczynniki metody Adamsa-Bashfortha

Chcemy, aby kwadratura

$$h\sum_{i=0}^{3}\alpha_i F(Y_{n-i}) \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(Y(x))dx$$

była dokładna dla wielomianów stopnia ≤ 3.
Wyznaczone współczynniki mają następujące wartości:

$$\alpha_0 = \frac{55}{24} \qquad \alpha_1 = -\frac{59}{24} \qquad \alpha_2 = \frac{37}{24} \qquad \alpha_3 = -\frac{9}{24}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$Y_{n+1} = Y_n + h\left(\frac{55}{24}F(Y_n) - \frac{59}{24}F(Y_{n-1}) + \frac{37}{24}F(Y_{n-2}) - \frac{9}{24}F(Y_{n-3})\right)$$

Testy poprawności

$$y' = 4x^3, \qquad y(0) = 0, \qquad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = x^4$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny
0	1.0	$1.421\,085 \times 10^{-14}$
1	0.5	$8.881\,784 \times 10^{-16}$
2	0.25	$5.551\,115 \times 10^{-17}$
3	0.125	$3.469\,447 \times 10^{-18}$
4	0.0625	$2.168\,404 \times 10^{-19}$
5	0.03125	$1.355\,253 \times 10^{-20}$
6	0.015625	$8.470\,329 \times 10^{-22}$
7	0.0078125	$5.293\,956 \times 10^{-23}$
8	0.00390625	$3.308\,722 \times 10^{-24}$
9	0.001953125	$2.067\,952 \times 10^{-25}$
10	0.0009765625	$1.292\,470 \times 10^{-26}$

Testy poprawności

$$y'' = 12x^2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \qquad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = x^4$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny
0	1.0	$1.421\,085 \times 10^{-13}$
1	0.5	$8.881\,784 \times 10^{-15}$
2	0.25	$5.551\,115 \times 10^{-16}$
3	0.125	$3.469\,447 \times 10^{-17}$
4	0.0625	$2.168\,404 \times 10^{-18}$
5	0.03125	$1.355\,253 \times 10^{-19}$
6	0.015625	$8.470\,329 \times 10^{-21}$
7	0.0078125	$5.293\,956 \times 10^{-22}$
8	0.00390625	$3.308\,722 \times 10^{-23}$
9	0.001953125	$2.067\,952 \times 10^{-24}$
10	0.0009765625	$1.292\,470 \times 10^{-25}$

Testy poprawności

$$y' = 5x^4, \qquad y(0) = 0, \qquad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = x^5$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny
0	1.0	$2.926\,973\times10^{2}$
1	0.5	$2.221\,971\times10^{1}$
2	0.25	$1.511\,423$
3	0.125	$9.829\,805\times10^{-2}$
4	0.0625	$6.263\,444\times10^{-3}$
5	0.03125	$3.952\,096\times10^{-4}$
6	0.015625	$2.481\,748\times10^{-5}$
7	0.0078125	$1.555\,003\times10^{-6}$
8	0.00390625	$9.727\,955\times10^{-8}$
9	0.001953125	$6.097\,252\times10^{-9}$
10	0.0009765625	$3.565\,219\times10^{-10}$

Testy poprawności

$$y'' = 20x^3, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \qquad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = x^5$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny
0	1.0	$2.933\,776 \times 10^{2}$
1	0.5	$2.224\,097 \times 10^{1}$
2	0.25	$1.512\,087$
3	0.125	$9.831\,881 \times 10^{-2}$
4	0.0625	$6.264\,093 \times 10^{-3}$
5	0.03125	$3.952\,298 \times 10^{-4}$
6	0.015625	$2.481\,812 \times 10^{-5}$
7	0.0078125	$1.555\,018 \times 10^{-6}$
8	0.00390625	$9.727\,955 \times 10^{-8}$
9	0.001953125	$6.097\,252 \times 10^{-9}$
10	0.0009765625	$3.565\,219 \times 10^{-10}$

Testy numeryczne

Zaimplementowana metoda Adamsa-Bashfortha jest rzędu czwartego, zatem błąd globalny

$$E = \max_{0 \le k \le N} |y(x_k) - y_k|$$

powinien zmieniać się proporcjonalnie do h^4. Przykładowo, dwukrotne zmniejszenie h powinno spowodować szesnastokrotne zmniejszenie wartości błędu globalnego.

Testy numeryczne

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \qquad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = e^x(\cos(x) - \sin(x))$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny	Zmiana błędu
0	1.0	$8.090\,118 \times 10^{4}$	—
1	0.5	$8.386\,933 \times 10^{3}$	9.646
2	0.25	$3.662\,088 \times 10^{2}$	22.902
3	0.125	$4.481\,169 \times 10^{1}$	8.172
4	0.0625	$3.849\,399$	11.641
5	0.03125	$2.780\,551 \times 10^{-1}$	13.844
6	0.015625	$1.862\,380 \times 10^{-2}$	14.930
7	0.0078125	$1.204\,076 \times 10^{-3}$	15.467
8	0.00390625	$7.652\,590 \times 10^{-5}$	15.734
9	0.001953125	$4.822\,753 \times 10^{-6}$	15.868
10	0.0009765625	$3.027\,235 \times 10^{-7}$	15.931
11	0.00048828125	$1.870\,649 \times 10^{-8}$	16.183
12	0.000244140625	$1.079\,570 \times 10^{-9}$	17.328
13	0.0001220703125	$5.684\,342 \times 10^{-10}$	1.899

Testy numeryczne - porównanie do ode45

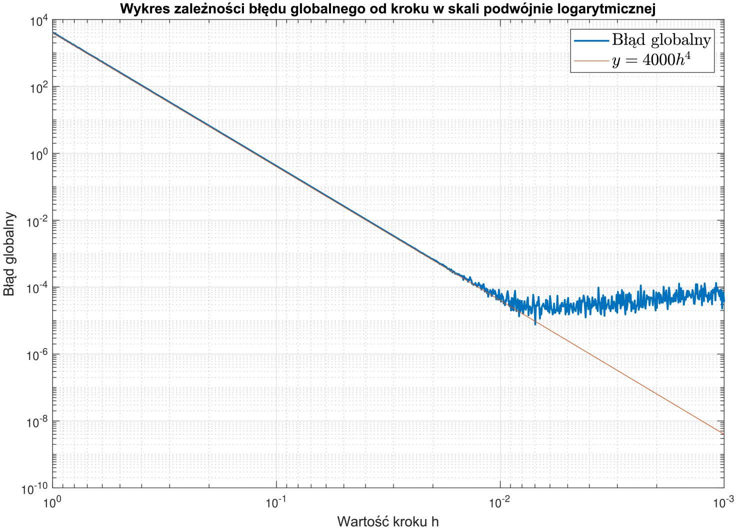
$$y'' + xy' + x^2 y = x^3, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \qquad x \in [0, 3]$$

Za dokładne wartości y przyjęto rozwiązanie uzyskane przez użycie funkcji ode45 środowiska MATLAB z ustawieniami `RelTol=1e-12` oraz `AbsTol=1e-12`.

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny	Zmiana błędu
0	1.0	$1.607\,416 \times 10^{-1}$	—
1	0.5	$6.927\,388 \times 10^{-1}$	0.232
2	0.25	$1.772\,034 \times 10^{-2}$	39.093
3	0.125	$1.231\,859 \times 10^{-3}$	14.385
4	0.0625	$7.846\,671 \times 10^{-5}$	15.699
5	0.03125	$4.937\,812 \times 10^{-6}$	15.891
6	0.015625	$3.085\,769 \times 10^{-7}$	16.002
7	0.0078125	$1.927\,596 \times 10^{-8}$	16.008
8	0.00390625	$1.204\,157 \times 10^{-9}$	16.008
9	0.001953125	$7.514\,256 \times 10^{-11}$	16.025
10	0.0009765625	$4.589\,662 \times 10^{-12}$	16.372
11	0.00048828125	$4.662\,937 \times 10^{-13}$	9.843
12	0.000244140625	$6.226\,131 \times 10^{-13}$	0.749
13	0.0001220703125	$6.359\,357 \times 10^{-13}$	0.979

Wykres zależności błędu globalnego od wartości kroku

$$y'' = 20x^3, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \qquad x \in [0, 100]$$



Źródła

[1] Paweł Keller. *Numerical Methods 2*. Leon. 2022. URL: https://leon.pw.edu.pl/pluginfile.php/108139/mod_resource/content/1/NM2_Script.pdf.

[2] Max Lotkin. "On the accuracy of Runge-Kutta's method". W: *Mathematics of Computation* 5 (1951), s. 128–133. URL: https://www.ams.org/journals/mcom/1951-05-035/S0025-5718-1951-0043566-3/S0025-5718-1951-0043566-3.pdf.

[3] Anthony Ralston. "Runge-Kutta methods with minimum error bounds". W: *Mathematics of Computation* 16 (1962), s. 431–437. URL: https://www.ams.org/journals/mcom/1962-16-080/S0025-5718-1962-0150954-0/S0025-5718-1962-0150954-0.pdf.

[4] Wikipedia. *List of Runge–Kutta methods*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Runge-Kutta_methods.