

Projekt 2, Zadanie 36

Wiktor Murawski, 333255, grupa 3, środa 12:15

Metoda Adamsa-Bashfortha rzędu 4-go dla liniowych równań różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu. Wartości początkowe y_1 , y_2 , y_3 obliczane metodą Rungego-Kutty rzędu 4-go (wzór Ralstona).

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu

Dane jest równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu oraz warunek początkowy:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Przekształcając równanie otrzymujemy

$$y' = f(x, y) = \frac{b(x) - a_0(x)y}{a_1(x)}$$

Równanie różniczkowe drugiego rzędu

Dane jest równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu oraz warunki początkowe:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad \begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \end{aligned}$$

Sprowadzamy równanie do układu równań różniczkowych liniowych stopnia pierwszego:

$$Y' = F(x, Y),$$

gdzie

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \stackrel{\text{ozn}}{=} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad Y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix}$$

Przekształcając równanie otrzymujemy

$$Y' = F(x, Y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{1}{a_2(x)}(b(x) - a_0y_1 - a_1y_2) \end{bmatrix}$$

Jawne metody Rungego-Kutty 4-go rzędu

Mając wartość Y_n , jawne metody Rungego-Kutty rzędu czwartego pozwalają na wyznaczenie wartości Y_{n+1} następująco:

$$K_1 = hF(x_n, Y_n)$$

$$K_2 = hF(x_n + a_2h, Y_n + b_{21}K_1)$$

$$K_3 = hF(x_n + a_3h, Y_n + b_{31}K_1 + b_{32}K_2)$$

$$K_4 = hF(x_n + a_4h, Y_n + b_{41}K_1 + b_{42}K_2 + b_{43}K_3)$$

$$Y_{n+1} - Y_n = c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 + c_4 K_4$$

Współczynniki a_i, b_{ij}, c_i przedstawione w tablicy Butchera:

0	0	0	0	0
a_2	b_{21}	0	0	0
a_3	b_{31}	b_{32}	0	0
a_4	b_{41}	b_{42}	b_{43}	0
	c_1	c_2	c_3	c_4

Ogólne wzory na współczynniki

Współczynniki a_i, b_{ij}, c_i tworzą rodzinę dwuparametrową zależną od parametrów α i β gdzie $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha \neq \beta$.

0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	$\beta - \frac{\beta(\beta - \alpha)}{2\alpha(1 - 2\alpha)}$	$\frac{\beta(\beta - \alpha)}{2\alpha(1 - 2\alpha)}$	0	0
1	$1 - \frac{(1 - \alpha)(\beta(\alpha + \beta - 1 - (2\beta - 1)^2) + 2\alpha(1 - 2\alpha)(1 - \beta))}{2\alpha\beta(\beta - \alpha)(6\alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 3)}$	$\frac{(1 - \alpha)(\alpha + \beta - 1 - (2\beta - 1)^2)}{2\alpha(\beta - \alpha)(6\alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 3)}$	$\frac{(1 - 2\alpha)(1 - \alpha)(1 - \beta)}{\beta(\beta - \alpha)(6\alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 3)}$	0
	$\frac{1}{2} - \frac{1 - 2(\alpha + \beta)}{12\alpha\beta}$	$\frac{2\beta - 1}{12\alpha(\beta - \alpha)(1 - \alpha)}$	$\frac{1 - 2\alpha}{12\beta(\beta - \alpha)(1 - \beta)}$	$\frac{1}{2} + \frac{2(\alpha + \beta) - 3}{12(1 - \alpha)(1 - \beta)}$

Dla parametrów $\alpha = \frac{2}{5}$ i $\beta = \frac{7}{8} - \frac{3\sqrt{5}}{16}$ otrzymujemy ograniczenie górne na E , gdzie:

$$y(x_{n+1}) = y_{n+1} + Eh^5$$

$$|E| < 5.46 \cdot 10^{-2} ML^4$$

gdzie, dla pewnego obszaru $B(x, y)$ zawierającego (x_n, y_n) , zachodzi

$$|f(x, y)| \leq M \quad \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} < \frac{L^{i+j}}{M^{j-1}}$$

Tabela Butchera (wartości dokładne)

0	0	0	0	0
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	0
$\frac{14 - 3\sqrt{5}}{16}$	$\frac{-2889 + 1428\sqrt{5}}{1024}$	$\frac{3785 - 1620\sqrt{5}}{1024}$	0	0
1	$\frac{-3365 + 2094\sqrt{5}}{6040}$	$\frac{-975 - 3046\sqrt{5}}{2552}$	$\frac{467040 + 203968\sqrt{5}}{240845}$	0
	$\frac{263 + 24\sqrt{5}}{1812}$	$\frac{125 - 1000\sqrt{5}}{3828}$	$\frac{3426304 + 1661952\sqrt{5}}{5924787}$	$\frac{30 - 4\sqrt{5}}{123}$

Tabela Butchera (wartości przybliżone)

0	0	0	0	0
0.4	0.4	0	0	0
0.45573725	0.29697761	0.15875964	0	0
1	0.21810039	-3.05096515	3.83286476	0
	0.17476028	-0.55148066	1.20553560	0.17118478

Metoda Adamsa-Bashfortha

Metoda Adamsa-Bashfortha rzędu czwartego jest metodą wielokrokową opartą na 4 węzłach: $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$. Y_{n+1} obliczane jest następująco:

$$Y_{n+1} = Y_n + h \sum_{i=0}^3 \alpha_i F(Y_{n-i})$$

Z faktu, że $Y' = F(x, Y)$, otrzymujemy:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} Y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(Y(x)) dx$$

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(Y(x)) dx$$

Chcemy dobrać współczynniki α_i tak, aby metoda dawała najlepsze przybliżenie całki w powyższym wyrażeniu.

Współczynniki metody Adamsa-Bashfortha

Chcemy, aby kwadratura

$$h \sum_{i=0}^3 \alpha_i F(Y_{n-i}) \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(Y(x)) dx$$

była dokładna dla wielomianów stopnia ≤ 3 .

Wyznaczone współczynniki mają następujące wartości:

$$\alpha_0 = \frac{55}{24} \quad \alpha_1 = -\frac{59}{24} \quad \alpha_2 = \frac{37}{24} \quad \alpha_3 = -\frac{9}{24}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$Y_{n+1} = Y_n + h \left(\frac{55}{24} F(Y_n) - \frac{59}{24} F(Y_{n-1}) + \frac{37}{24} F(Y_{n-2}) - \frac{9}{24} F(Y_{n-3}) \right)$$

Testy poprawności

$$y' = 4x^3, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = x^4$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny
0	1.0	$1.421\,085 \times 10^{-14}$
1	0.5	$8.881\,784 \times 10^{-16}$
2	0.25	$5.551\,115 \times 10^{-17}$
3	0.125	$3.469\,447 \times 10^{-18}$
4	0.0625	$2.168\,404 \times 10^{-19}$
5	0.03125	$1.355\,253 \times 10^{-20}$
6	0.015625	$8.470\,329 \times 10^{-22}$
7	0.0078125	$5.293\,956 \times 10^{-23}$
8	0.00390625	$3.308\,722 \times 10^{-24}$
9	0.001953125	$2.067\,952 \times 10^{-25}$
10	0.0009765625	$1.292\,470 \times 10^{-26}$

Testy poprawności

$$y'' = 12x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = x^4$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny
0	1.0	$1.421\,085 \times 10^{-13}$
1	0.5	$8.881\,784 \times 10^{-15}$
2	0.25	$5.551\,115 \times 10^{-16}$
3	0.125	$3.469\,447 \times 10^{-17}$
4	0.0625	$2.168\,404 \times 10^{-18}$
5	0.03125	$1.355\,253 \times 10^{-19}$
6	0.015625	$8.470\,329 \times 10^{-21}$
7	0.0078125	$5.293\,956 \times 10^{-22}$
8	0.00390625	$3.308\,722 \times 10^{-23}$
9	0.001953125	$2.067\,952 \times 10^{-24}$
10	0.0009765625	$1.292\,470 \times 10^{-25}$

Testy poprawności

$$y' = 5x^4, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = x^5$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny
0	1.0	$2.926\,973 \times 10^2$
1	0.5	$2.221\,971 \times 10^1$
2	0.25	1.511 423
3	0.125	$9.829\,805 \times 10^{-2}$
4	0.0625	$6.263\,444 \times 10^{-3}$
5	0.03125	$3.952\,096 \times 10^{-4}$
6	0.015625	$2.481\,748 \times 10^{-5}$
7	0.0078125	$1.555\,003 \times 10^{-6}$
8	0.00390625	$9.727\,955 \times 10^{-8}$
9	0.001953125	$6.097\,252 \times 10^{-9}$
10	0.0009765625	$3.565\,219 \times 10^{-10}$

Testy poprawności

$$y'' = 20x^3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [0, 10]$$

Rozwiązanie: $y = x^5$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny
0	1.0	$2.933\,776 \times 10^2$
1	0.5	$2.224\,097 \times 10^1$
2	0.25	1.512 087
3	0.125	$9.831\,881 \times 10^{-2}$
4	0.0625	$6.264\,093 \times 10^{-3}$
5	0.03125	$3.952\,298 \times 10^{-4}$
6	0.015625	$2.481\,812 \times 10^{-5}$
7	0.0078125	$1.555\,018 \times 10^{-6}$
8	0.00390625	$9.727\,955 \times 10^{-8}$
9	0.001953125	$6.097\,252 \times 10^{-9}$
10	0.0009765625	$3.565\,219 \times 10^{-10}$

Testy numeryczne

Zaimplementowana metoda Adamsa-Bashfortha jest rzędu czwartego, zatem błąd globalny

$$E = \max_{0 \leq k \leq N} |y(x_k) - y_k|$$

powinien zmieniać się proporcjonalnie do h^4 . Przykładowo, dwukrotne zmniejszenie h powinno spowodować szesnastokrotne zmniejszenie wartości błędu globalnego.

Testy numeryczne

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [0, 10]$$

$$\text{Rozwiązanie: } y = e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny	Zmiana błędu
0	1.0	$8.090\,118 \times 10^4$	—
1	0.5	$8.386\,933 \times 10^3$	9.646
2	0.25	$3.662\,088 \times 10^2$	22.902
3	0.125	$4.481\,169 \times 10^1$	8.172
4	0.0625	3.849 399	11.641
5	0.03125	$2.780\,551 \times 10^{-1}$	13.844
6	0.015625	$1.862\,380 \times 10^{-2}$	14.930
7	0.0078125	$1.204\,076 \times 10^{-3}$	15.467
8	0.00390625	$7.652\,592 \times 10^{-5}$	15.734
9	0.001953125	$4.822\,753 \times 10^{-6}$	15.868
10	0.0009765625	$3.027\,453 \times 10^{-7}$	15.930
11	0.00048828125	$1.870\,649 \times 10^{-8}$	16.184
12	0.000244140625	$1.072\,294 \times 10^{-9}$	17.445
13	0.0001220703125	$5.074\,980 \times 10^{-10}$	2.113

Testy numeryczne - porównanie do ode45

$$y'' + xy' + x^2y = x^3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [0, 3]$$

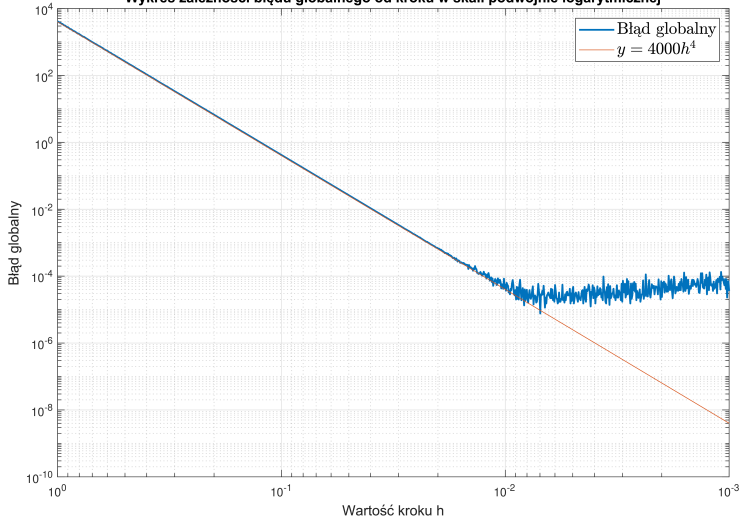
Za dokładne wartości y przyjęto rozwiązanie uzyskane przez użycie funkcji ode45 środowiska MATLAB z ustawieniami RelTol=1e-12 oraz AbsTol=1e-12.

i	$h = 2^{-i}$	Błąd globalny	Zmiana błędu
0	1.0	$1.607\,416 \times 10^{-1}$	—
1	0.5	$6.927\,388 \times 10^{-1}$	0.232
2	0.25	$1.772\,034 \times 10^{-2}$	39.093
3	0.125	$1.231\,859 \times 10^{-3}$	14.385
4	0.0625	$7.846\,671 \times 10^{-5}$	15.699
5	0.03125	$4.937\,812 \times 10^{-6}$	15.891
6	0.015625	$3.085\,769 \times 10^{-7}$	16.002
7	0.0078125	$1.927\,596 \times 10^{-8}$	16.008
8	0.00390625	$1.204\,157 \times 10^{-9}$	16.008
9	0.001953125	$7.514\,256 \times 10^{-11}$	16.025
10	0.0009765625	$4.589\,662 \times 10^{-12}$	16.372
11	0.00048828125	$4.662\,937 \times 10^{-13}$	9.843
12	0.000244140625	$6.226\,131 \times 10^{-13}$	0.749
13	0.0001220703125	$6.359\,357 \times 10^{-13}$	0.979

Wykres zależności błędu globalnego od wartości kroku

$$y'' = 20x^3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [0, 100]$$

Wykres zależności błędu globalnego od kroku w skali podwójnie logarytmicznej



Źródła

- [1] Paweł Keller. *Numerical Methods 2*. Leon. 2022. URL:
https://leon.pw.edu.pl/pluginfile.php/108139/mod_resource/content/1/NM2_Script.pdf.
- [2] Max Lotkin. "On the accuracy of Runge-Kutta's method". W:
Mathematics of Computation 5 (1951), s. 128–133. URL:
<https://www.ams.org/journals/mcom/1951-05-035/S0025-5718-1951-0043566-3/S0025-5718-1951-0043566-3.pdf>.
- [3] Anthony Ralston. "Runge-Kutta methods with minimum error bounds". W:
Mathematics of Computation 16 (1962), s. 431–437. URL:
<https://www.ams.org/journals/mcom/1962-16-080/S0025-5718-1962-0150954-0/S0025-5718-1962-0150954-0.pdf>.
- [4] Wikipedia. *List of Runge–Kutta methods*. URL:
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Runge-Kutta_methods.