Wiktor Murawski #58

Modelowanie matematyczne 2024 – zadanie projektowe nr 1
Rozwiązywanie układów równań różniczkowych zwyczajnych

Dany jest następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych (URRZ):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{14}{3}y_1(t) - \frac{2}{3}y_2(t) + x(t)\\ \frac{\mathrm{d}y_2(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{3}y_1(t) - \frac{19}{3}y_2(t) + x(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla } t \in \Big[0, 8\Big], \text{ w którym } x(t) = \exp\left(-t\right)\sin\left(t\right)$$

Zadanie 1. Wyznacz dokładne rozwiązanie URRZ, $\dot{y}_1(t)$ i $\dot{y}_2(t)$, dla zerowych warunków początkowych za pomocą procedury ***dsolve*** (*MATLAB Symbolic Toolbox*).

Zadanie 2. Rozwiąż URRZ za pomocą:

- procedury ***ode45***
- metody zdefiniowanej wzorem $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-1} + h\mathbf{f}\Big(t_{n-1} + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_{n-1} + \frac{h}{2}\mathbf{f}\Big(t_{n-1}, \mathbf{y}_{n-1}\Big)\Big)$
- metody zdefiniowanej wzorem $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-2} + h\Big[\mathbf{f}\Big(t_n, \mathbf{y}_n\Big) + \mathbf{f}\Big(t_{n-2}, \mathbf{y}_{n-2}\Big)\Big]$
- metody zdefiniowanej wzorem $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-1} + h\sum_{k=1}^{3} w_k \mathbf{f}_k$, gdzie $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}\left(t_{n-1} + c_k h, \mathbf{y}_{n-1} + h\sum_{\kappa=1}^{3} a_{k,\kappa}\mathbf{f}_\kappa\right)$, a współczynniki przyjmują wartości przedstawione w poniższej tabeli Butchera:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ c_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\\ \hline & w_1 & w_2 & w_3\end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0\\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}\end{array}$$

gdzie $\mathbf{y}_n = \Big[y_1\Big(t_n\Big)\ \ y_2\Big(t_n\Big)\Big]^T$, a funkcja $\mathbf{f}\Big(t_n, \mathbf{y}_n\Big)$ określona jest przez URRZ: $\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_n} = \mathbf{f}\Big(t_n, \mathbf{y}_n\Big)$.

Zadanie 3. Zbadaj zależność dokładności rozwiązań numerycznych, uzyskanych za pomocą trzech ostatnich metod zdefiniowanych w zadaniu 2, od długości kroku całkowania $h \in [h_{\text{min}}, h_{\text{max}}]$. Dobierz zakres zmienności $h \in [h_{\text{min}}, h_{\text{max}}]$ w taki sposób, aby zaobserwować zjawisko niestabilności numerycznej dla zbyt dużego kroku h. Jako kryterium dokładności rozwiązań przyjmij zagregowane błędy względne:

$$\delta_1(h) = \frac{\sum_{n=1}^{N(h)}\Big(\hat{y}_1\Big(t_n, h\Big) - \dot{y}_1\Big(t_n\Big)\Big)^2}{\sum_{n=1}^{N(h)}\Big(\dot{y}_1\Big(t_n\Big)\Big)^2} \quad \text{i} \quad \delta_2(h) = \frac{\sum_{n=1}^{N(h)}\Big(\hat{y}_2\Big(t_n, h\Big) - \dot{y}_2\Big(t_n\Big)\Big)^2}{\sum_{n=1}^{N(h)}\Big(\dot{y}_2\Big(t_n\Big)\Big)^2}$$

gdzie $\dot{y}_1\Big(t_n\Big)$ i $\dot{y}_2\Big(t_n\Big)$ to wartości funkcji uzyskanych w zadaniu 1, a $\hat{y}_1\Big(t_n, h\Big)$ i $\hat{y}_2\Big(t_n, h\Big)$ to ich estymaty uzyskane dla kroku całkowania h. $N(h)$ oznacza zależną od kroku całkowania liczbę punktów rozwiązania.