

Liceum

Wiktoria Borek

1 Logarytmy

1.1 Zadanie

Wykaż, że dla $x > 1$ zachodzi równość:
$$2 \log_2(x^2 - 1) - 3 \log_2(x - 1) = \log_2 \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

Rozwiązanie

$$D : x > 1$$

$$\begin{aligned} L &= 2 \log_2(x^2 - 1) - 3 \log_2(x - 1) \\ P &= \log_2 \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \log_2(x^2 - 1)^2 - \log_2(x - 1)^3 = \log_2 \frac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^3} = \log_2 \frac{(x - 1)^2(x + 1)^2}{(x - 1)^3} = \\ &= \log_2 \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = P \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2 Zadanie

Wykaż, że $\log_{17} 19 : \log_{18} 19 = \log_{16} 18 \cdot \log_{17} 16$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \log_{17} 19 \cdot \log_{19} 18 &= \log_{17} 16 \cdot \log_{16} 18 \\ \log_{17} 19 \cdot \log_{19} 18 &= \log_{17} 16 \cdot \log_{16} 18 \\ \log_{17} 18 &= \log_{17} 18 \\ L &= P \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3 Zadanie

Dane są liczby $a = \log_3 2$ oraz $b = \log_{2^{2024}} 3^{1012} + \log_{\frac{1}{3}} 54$. Wyraź liczbę b za pomocą liczby a .

Rozwiązanie

$$b = \frac{1}{2} \cdot \log_2 3 - \log_3(27 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} - (\log_3 3^3 + a) = \frac{1}{2a} - 3 - a$$

1.4 Zadanie

Wiadomo, że $\frac{1}{\log_{p-q} 2} = 3$ oraz $(\log_{pq} 3)^{-1} = 2$. Udowodnij, że liczba $\sqrt{p^2 - 1 + q^2}$ jest wymierna.

Rozwiązanie

$$\log_2 p - q = 3 \quad \wedge \quad \log_3 pq = 2 \rightarrow pq = 3^2 = 9$$

$$p - q = 2^3 / 2$$

$$(p - q)^2 = 64$$

$$p^2 + q^2 - 2pq = 64$$

$$p^2 + q^2 = 82$$

$$\sqrt{p^2 - 1 + q^2} = \sqrt{p^2 + q^2 - 1} = \sqrt{82 - 1} = \sqrt{81} = 9 \in \mathbb{Q} \quad \blacksquare$$