LABORATORIUM – FIZYKA DLA INFORMATYKÓW

B.SZ.

Ten pdf:
https://goo.gl/pXXp6o
Udostępniony folder z pewnymi plikami:
https://www.dropbox.com/sh/lbtoxbfqso15tqv/AADYnTei7do7LHZ6Wz8vxCA0a?dl=0
Tutorial dla Octave:
http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/CD/engapps/octave/octavetut.pdf
Wikibooks PL i EN:
http://pl.wikibooks.org/wiki/GNU_Octave
http://en.wikibooks.org/wiki/Octave_Programming_Tutorial
Pewne wizualizacje i symulacje:
http://visual.icse.us.edu.pl/
Podwójne wahadło matematyczne:
http://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU
Zasada zachowania energii działa:
http://www.youtube.com/watch?v=4a0FbQdH3dY&t=23m41s
E-doświadczenia:
http://e-doswiadczenia.mif.pg.gda.pl/e_doswiadczenia-pl

Cel zajęć: zaznajomienie się z zastosowaniem komputera w fizyce na przykładzie numerycznego symulowania prostych modeli z zakresu mechaniki.

Zaliczenie:

- ocena *dostateczna*: symulacja dwuwymiarowego rzutu ukośnego w zależności od podanej wysokości oraz kąta rzutu;
- ocena *dobra* (tylko jedno z poniższych):
  - symulacja wahadła matematycznego razem z analizą zachowania energii w czasie;
  - numeryczna symulacja rzutu ukośnego przy dowolnych warunkach początkowych razem z analizą błędu (porównanie z rozwiązaniem dokładnym) oraz analiza zachowania energii w czasie;
- ocen *bardzo dobra* (tylko jedno z poniższych):
  - symulacja podwójnego wahadła matematycznego razem z analizą zachowania energii w czasie;
  - symulacja dwuwymiarowego rzutu ukośnego z uwzględnieniem oporu aerodynamicznego, dodatkowo w przypadku braku oporu analiza błędu oraz zachowania energii w czasie;
  - symulacja ruchu w jednowymiarowym polu potencjalnym charakteryzowanym przez różne funkcje z analizą zachowania energii w czasie;
  - ***symulacja wahadła matematycznego z analizą błędu (porównanie z rozwiązaniem dokładnym) oraz analiza zachowania energii w czasie (uwaga: potencjalna mina!!!).

Uwaga: dopuszczalna jest maksymalnie tylko jedna nieobecność!

Date: semestr letni 2015.

1. Równania ruchu

Notacja wprowadzona przez Newtona i często używana przez fizyków dla pochodnych względem czasu:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \qquad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Jeden stopień swobody. Załóżmy, że ruch jednowymiarowy odbywa się w polu siły potencjalnej:

$$F = -\frac{dU}{dx},$$

gdzie energia potencjalna U jest tylko funkcją położenia x, tzn. $U = U(x)$.

Z druguej zasady dynamiki Newtona wynika, że siła jest proporcjonalna do przyśpieszenia $a = \ddot{x}$,

$$m\ddot{x} = F,$$

gdzie $\ddot{x} \equiv \dfrac{d^2x}{dt^2}$ oraz m jest masą. W związku z czym w tym przypadku równanie ruchu przybiera postać

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx},$$

lub wprowadzając prędkość $v = \dot{x}$:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -\frac{dU}{dx}, \\ \dot{x} &= v. \end{aligned}$$

Czyli dynamika Newtona jest opisywana równaniami różniczkowymi pierwszego lub drugiego stopnia. Rozwiązaniem tych równań jest trajektoria oraz zależność prędkości od czasu:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ v &= v(t), \end{aligned}$$

które zależą od warunków początkowych

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ v(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Dla siły potencjalnej obowiązuje prawo zachowania energii całkowitej:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

tzn. że

$$\frac{dE}{dt} = mv\dot{v} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = mv\left(-\frac{1}{m}\frac{dU}{dx}\right) + \frac{dU}{dx}v = 0,$$

czyli powyższa energia nie zmienia się w czasie. Energia całkowita jest sumą energii kinetycznej oraz potencjalnej.

n**-stopni swobody.** W przypadku wielowymiarowym i-składowa wektora siły potencjalnej jest zdefiniowana jako

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

gdzie energia potencjalna U jest funkcją wszystkich położeń x_i, tzn. $U = U(x_1, \ldots, x_n)$. W tym przypadku równania ruchu przybierają postać:

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

lub

$$m\dot{v}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i},$$
$$\dot{x}_i = v_i,$$

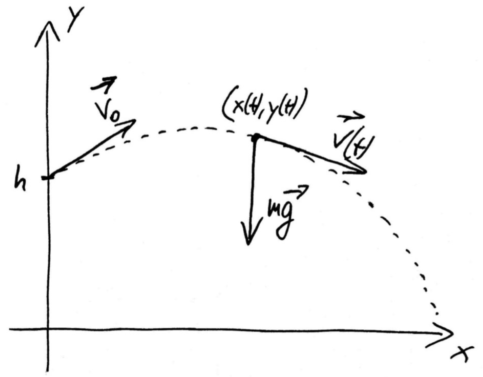
gdzie $i = 1, \ldots, n$ oraz v_i jest i-tą składową prędkości. Energia całkowita przybiera postać

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m (v_i)^2 + U.$$

Energia ta jest zachowana w czasie:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i}^{n} \left(m v_i \dot{v}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) = 0.$$

2. Rzut poziomy w dwóch wymiarach



Rzut ukośny bez oporu. Równania ruchu dla ciała rzuconego w polu grawitacyjnym mają prostą postać:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= 0 \\ m\,\ddot{y} &= -m\,g \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g\,, \end{aligned}$$

gdzie $x = x(t)$ i $y = y(t)$ są współrzędnymi punktów na trajektorii lotu ciała.

Jeżeli ciało zostało rzucone z wysokości h z prędkością początkową $\mathbf{v}_0$, wtedy otrzymujemy następujące warunki początkowe:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \qquad & v_x(0) &= v_{0x} \\ y(0) &= h \qquad & v_y(0) &= v_{0y}\,. \end{aligned}$$

Trajektoria rzuconego ciała jest parabolą.

Rzut ukośny z oporem aerodynamicznym. Siła oporu aerodynamicznego, proporcjonalna do kwadratu prędkości, ma postać

$$\mathbf{F} = -\kappa\,|\dot{\mathbf{x}}|\,\dot{\mathbf{x}},$$

gdzie dla kuli o promieniu r:

$$\kappa = 0,45 \cdot \pi r^2 \cdot \frac{\rho_p}{2}\,.$$

Gęstość powietrza $\rho_p = 1,2\,\dfrac{kg}{m^3}$.

Uwzględniając opór aerodynamiczny w przypadku rzutu ukośnego w dwóch wymiarach otrzymujemy następujące równania ruchu:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= -\kappa\,\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\dot{x} \\ m\,\ddot{y} &= -m\,g - \kappa\,\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\dot{y}\,. \end{aligned}$$

3. Schemat Eulera i nie tylko

Naszym celem jest rozwiązanie w sposób numeryczny n-wymiarowego równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = K(\mathbf{z}(t)) \,, \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \,, \tag{1}$$

przy warunku początkowym:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \,.$$

Korzystając z definicji pochodnej dla (infinitesymalnie) małych h mamy następujące przybliżenie:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} \approx \frac{\mathbf{z}(t+h) - \mathbf{z}(t)}{h} \,.$$

Wstawiając to przybliżenie pochodnej do (1) mamy równanie

$$\frac{\mathbf{z}(t+h) - \mathbf{z}(t)}{h} \approx K(\mathbf{z}(t)) \,,$$

które rozwiązujemy ze względu na $\mathbf{x}(t+h)$ otrzymując

$$\mathbf{z}(t+h) \approx \mathbf{z}(t) + h\,K(\mathbf{z}(t)) \,. \tag{2}$$

Czyli znając $\mathbf{z}$ w chwili czasu t korzystając z (2) możemy obliczyć przybliżoną wartość $\mathbf{z}$ w chwili $t+h$.

Oznaczmy punkt na trajektorii $\mathbf{z}(t)$ w k-tym czasowym kroku przez

$$\mathbf{z}_k := \mathbf{z}(k\,h) \,,$$

gdzie h jest odpowiednio małym pojedynczym krokiem czasowym. Czas początkowy przyjeliśmy jako 0, wtedy punkt początkowy to $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(0)$. Korzystając w sposób rekurencyjny ze wzoru (2) otrzymujemy punkty:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{z}_0 + h\,K(\mathbf{z}_0) \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{z}_1 + h\,K(\mathbf{z}_1) \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_k + h\,K(\mathbf{z}_k) \\ &\vdots\,, \end{aligned} \tag{3}$$

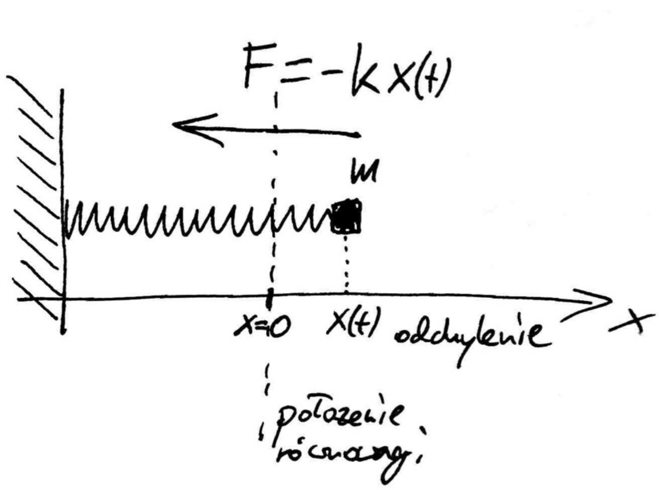
które powinny znajdować się na trajektorii, lub w jej pobliżu, będącej rozwiązaniem równania (1). W praktyce taki schemat jest za prosty i daje duże błędy.

Alternatywny schemat. Znacznie lepsze wyniki daje następujący schemat, gdzie aby otrzymać punkt na trajektorii w $k+1$–kroku, należy rozwiązać równanie:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + h\,K\Big(\frac{1}{2}(\mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{z}_k)\Big) \,. \tag{4}$$

Powyższe równanie zazwyczaj ma postać niejawną.

4. Ruch harmoniczny



Jedno-wymiarowe zagadnienie ciała na sprężynie. Na ciało działa wtedy siła co do wartości proporcjonalna do wychylenia x od stanu równowagi, $x = 0$, oraz o przeciwnym zwrocie niż to wychylenie:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -k\,x\,, \qquad U(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2\,,$$

gdzie k jest stałą sprężystości, a U energią potencjalną. Równanie ruchu ma postać:

$$m\,\ddot{x} = -k\,x\,,$$

warunki początkowe:

$$x(0) = x_0$$
$$\dot{x}(0) \equiv v_0 = 0\,,$$

gdzie x_0 jest początkowym wychyleniem oraz przyjmujemy zerową prędkość początkowa.

Aby rozwiązać w sposób numeryczny powyższe równanie ruchu zapisujemy w postaci równań pierwszego rzędu:

(5)
$$\dot{x} = v \qquad x(0) = x_0$$
$$\dot{v} = -\frac{k}{m}\,x\,, \qquad v(0) = v_0 = 0\,.$$

Całkowita energia, ma postać

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2\,,$$

i jest ona zachowana w czasie, tzn. $\frac{dE}{dt} = 0$.

Równania różniczkowe (5) można łatwo rozwiązać otrzymując rozwiązanie analityczne:

(6)
$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\,,$$
$$v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\,x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\,.$$

Żeby zastosować schemat Eulera przyjmujemy

$$\mathbf{z}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Na podstawie (5):

$$K(\mathbf{z}_n) = \begin{pmatrix} v_n \\ -\dfrac{k}{m}\, x_n \end{pmatrix} .$$

Stąd stosując schemat Eulera (3) otrzymujemy rekurencję

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\, v_n, \\ v_{n+1} &= v_n - h\, \frac{k}{m}\, x_n\, . \end{aligned}$$

Dla alternatywnego schematu (4) otrzymujemy

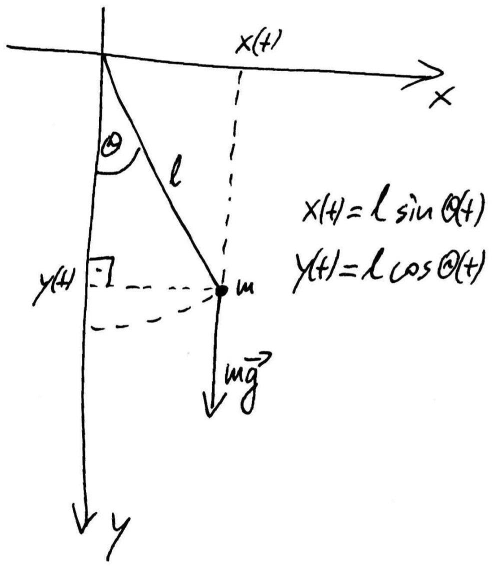
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\, \frac{1}{2}\, (v_{n+1} + v_n), \\ v_{n+1} &= v_n - h\, \frac{k}{2m}\, (x_{n+1} + x_n)\, . \end{aligned}$$

Równania te możemy rozwiązać na x_{n+1} i v_{n+1}, stąd

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\left(4 - h^2 \dfrac{k}{m}\right)\, x_n + 4h\, v_n}{4 + h^2 \dfrac{k}{m}}, \\ v_{n+1} &= \frac{\left(4 - h^2\, \dfrac{k}{m}\right)\, v_n - 4h\, \dfrac{k}{m} x_n}{4 + h^2\, \dfrac{k}{m}}\, . \end{aligned}$$

Rozwiązanie numeryczne układu równań (5) należy porównać z rozwiązaniem analitycznym (6).

5. Wahadło matematyczne



Równania ruchu przybierają postać:

$$m\,\ddot{x} = 0 \qquad\qquad x^2 + y^2 = l^2\,,$$
$$m\,\ddot{y} = m\,g\,,$$

gdzie narzuciliśmy więz, który musi cały czas być spełniony. Wahadło matematyczne ma jeden stopień swobody $\theta(t)$, będący odchyleniem (w chwili czasu t) od położenia równowagi. Zachodzą następujące związki

$$x(t) = l\,\sin\theta(t)$$
$$y(t) = l\,\cos\theta(t)\,,$$

na podstawie których otrzymujemy następujące równanie ruchu:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\sin\theta\,,$$

które możemy zapisać w postaci równań pierwszego rzędu

(7)
$$\dot{\theta} = \omega,$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\,\sin\theta\,,$$

gdzie ω jest prędkością kątową. Przyjmujemy warunki początkowe:

$$\theta(0) = \theta_0$$
$$\omega(0) \equiv \omega_0 = 0\,.$$

Całkowita energia, zachowana w czasie, w przypadku wahadła matematycznego ma postać:

$$E = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{y}^2 + m\,g\,(l - y) = \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,l\,(1 - \cos\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\,m\,l^2\,\omega^2 + m\,g\,l\,(1 - \cos\theta)\,.$$

Żeby zastosować schemat Eulera przyjmujemy

$$\mathbf{z}_n = \begin{pmatrix} \theta_n \\ \omega_n \end{pmatrix} .$$

Na podstawie (7):

$$K(\mathbf{z}_n) = \begin{pmatrix} \omega_n \\ -\frac{g}{l} \sin\theta_n \end{pmatrix} .$$

Stąd stosując schemat Eulera (3) otrzymujemy relację

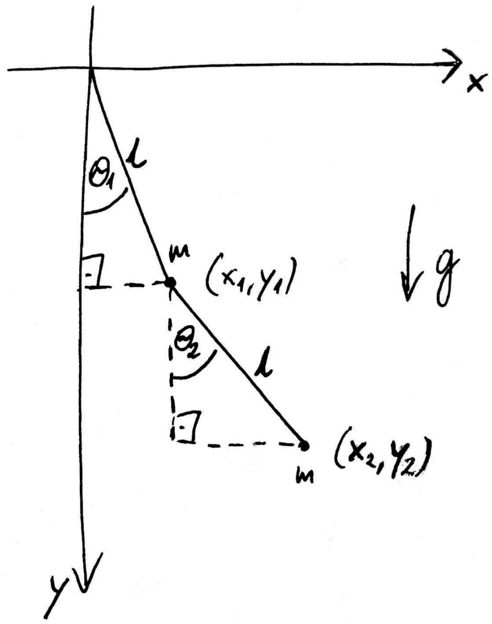
$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + h\,\omega_n \\ \omega_{n+1} &= \omega_n - h\,\frac{g}{l}\,\sin\theta_n \,. \end{aligned}$$

Dla zmodyfikowanego schematu (4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + h\,\frac{\omega_{n+1} + \omega_n}{2} \\ \omega_{n+1} &= \omega_n - h\,\frac{g}{l}\,\sin\frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{2} \,. \end{aligned}$$

Równania te są w postaci uwikłanej i aby otrzymać θ_{n+1} oraz ω_{n+1} należy je rozwiązać numerycznie.

6. Podwójne wahadło matematyczne



Równania ruchu mają postać:

$$m\,\ddot{x}_1 = 0 \qquad\qquad m\,\ddot{x}_2 = 0$$
$$m\,\ddot{y}_1 = m\,g\,, \qquad\qquad m\,\ddot{y}_2 = m\,g\,,$$

na powyższe równania narzucamy więzy:

$$x_1^2 + y_1^2 = l^2\,, \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2\,.$$

Na podstawie rysunku

$$x_1 = l\sin\theta_1 \qquad\qquad x_2 = x_1 + l\sin\theta_2$$
$$y_1 = l\cos\theta_1\,, \qquad\qquad y_1 = y_1 + l\cos\theta_2\,.$$

W rezultacie równania ruchu możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\
\dot{\theta}_2 &= \omega_2 \\
\dot{\omega}_1 &= \frac{3g\sin\theta_1 + g\sin(\theta_1 - 2\theta_2) + l\sin(2\theta_1 - 2\theta_2)\,\omega_1^2 + 2l\sin(\theta_1 - \theta_2)\,\omega_2^2}{-3l + l\cos(2\theta_1 - 2\theta_2)} \\
\dot{\omega}_2 &= -\frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)\,(2g\cos\theta_1 + 2l\,\omega_1^2 + l\cos(\theta_1 - \theta_2)\,\omega_2^2)}{-3l + l\cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}\,.
\end{aligned}$$

Całkowita energia, która jest zachowana w czasie, ma postać

$$E = E_K + U\,,$$

gdzie energia kinetyczna

$$\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}l^2 m\left(2\omega_1^2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2)\,\omega_1\omega_2 + \omega_2^2\right)
\end{aligned}$$

oraz energia potencjalna

$$\begin{aligned} U &= mg\,(l - y_1) + mg\,(2l - y_1 - y_2) \\ &= mgl\,(3 - 2\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\ . \end{aligned}$$