李超线段树

引入¶

▾ 洛谷 4097 [HEOI2013]Segment

要求在平面直角坐标系下维护两个操作（强制在线）：

1. 在平面上加入一条线段。记第 i 条被插入的线段的标号为 i，该线段的两个端点分别为 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)。
2. 给定一个数 k，询问与直线 $x=k$ 相交的线段中，交点纵坐标最大的线段的编号（若有多条线段与查询直线的交点纵坐标都是最大的，则输出编号最小的线段）。特别地，若不存在线段与给定直线相交，输出 0。

数据满足：操作总数 $1\leq n\leq 10^5$，$1\leq k,x_0,x_1\leq 39989$，$1\leq y_0,y_1\leq 10^9$。

我们发现，传统的线段树无法很好地维护这样的信息。这种情况下，**李超线段树** 便应运而生。

概述¶

我们设法维护每个区间中，可能成为最优解的线段。

称一条线段在 $x=x_0$ 处最优，当且仅当该线段在 x_0 处取值最大。

称一条线段能成为区间 $[l,r]$ 中的 **最优线段**，当且仅当：

1. 该线段的定义域完整覆盖了区间 $[l,r]$；
2. 该线段在区间中点处最优。

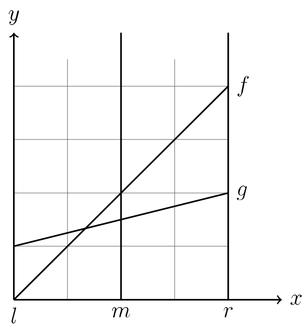
现在我们需要插入一条线段 f，在这条线段完整覆盖的区间中，某些区间的最优线段可能发生改变。

考虑某个被新线段 f 完整覆盖的区间，若该区间无最优线段，则该线段可以直接成为最优线段。

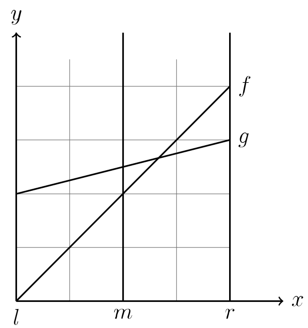
否则，设该区间的中点为 m，我们拿新线段 f 在中点处的值与原最优线段 g 在中点处的值作比较。

首先，如果新线段 f 斜率大于原线段 g，

1. 如果 f 在 m 处更优，则 f 在右半区间 **一定** 最优，g 在左半区间 **可能** 最优；

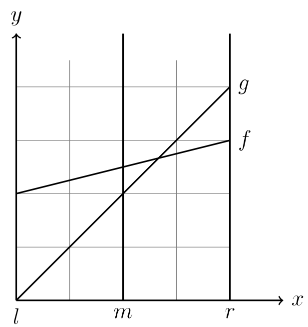


1. 反之，g 在左半区间 **一定** 最优，f 在右半区间 **可能** 最优。

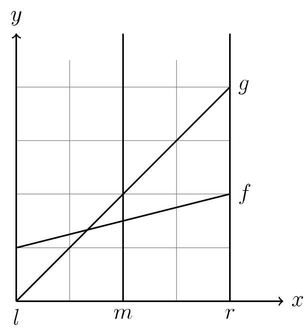


接下来考虑 f 斜率小于 g 的情况，

1. 如果 f 在 m 处更优，则 f 在左半区间 **一定** 最优，g 在右半区间 **可能** 最优；



1. 反之，g 在右半区间 **一定** 最优，f 在左半区间 **可能** 最优。



最后考虑新线段和旧线段斜率相同的情况，此时只需比较截距即可，截距大的一定在整个区间内更优。

确定完当前区间的最优线段后，我们需要递归进入子区间，更新最优线段可能改变的区间。

这样的过程与一般线段树的递归过程类似，因此我们可以使用线段树来维护。

现在考虑如何查询一个区间的最优线段。

查询过程利用了标记永久化的思想，简单地说，我们将所有包含 x_0 区间（易知这样的区间只有 $O(\log n)$ 个）的最优线段拿出来，在这些线段中比较，从而得出最优线段。

根据上面的描述，查询过程的时间复杂度显然为 $O(\log n)$，而插入过程中，我们需要将原线段分割到 $O(\log n)$ 个区间中，对于每个区间，我们又需要花费 $O(\log n)$ 的时间更新该区间以及其子区间的最优线段，从而插入过程的时间复杂度为 $O(\log^2 n)$。