矩阵

排列和逆序对

- 排列的定义
- 逆序对的定义：τ
- 定义：在一个排列中，对换其中某两个数，其余的数不动，得到另一个排列，这种操作称为一个对换。
- 定义：如果一个排列的逆序数是偶数，则称此排列为偶排列，否则称为奇排列。

排列和逆序对

- 定理：对换改变排列的奇偶性。
- 定理：在全部n阶$(n \geq 2)$排列中，奇偶排列各占一半。
- 定理：任意一个排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同。

行列式

- 定义：N阶行列式是由N^2个数$a_{ij}(i,j=1,2\ldots,n)$通过下式确定的一个数
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} sgn(j_1 j_2 \ldots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$
- 也称为行列式的完全展开式。
- $sgn(j_1 j_2 \ldots j_n) = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)} = \begin{cases} 1 & j_1 j_2 \ldots j_n\text{是偶排列} \\ -1 & j_1 j_2 \ldots j_n\text{是奇排列} \end{cases}$

行列式

- 引理：行列互换，值不变。
- 引理：用一个数乘行列式的某行等于用这个数乘此行列式。
- 引理：如果行列式中某一行是两组数之和，则这个行列式等于两个行列式之和，这两个行列式分别以这两组数为该行，而其余各行与原行列式对应各行相同。
- 引理：对换行列式中两行的位置，行列式反号。
- 引理：如果行列式中有两行成比例，则行列式等于0。
- 引理：把一行的某个倍数加到另一行，行列式的值不变。

矩阵

- 定义：由mn个数排成m行n列矩形的数表
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- 称为一个$m \times n$的矩阵，记做A。其中a_{ij}称为第i行第j列的元素。

矩阵

- 特殊的矩阵种类：
- 零矩阵 0
- 对角矩阵
- 单位矩阵 I
- 纯量矩阵：$A = diag(c, c, \ldots, c)$
- 上三角矩阵
- 下三角矩阵
- 对称矩阵
- 反对称矩阵

矩阵

- 定义：矩阵的相等
- 定义：矩阵的加法
- 定义：矩阵的数量乘法

矩阵乘法

- 定义：矩阵的乘法
- 设$A = (a_{ij})_{m\times r}, B = (b_{ij})_{r\times n}$，则矩阵$C = (c_{ij})_{m\times n}$，其中
- $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$
- 称为A与B的乘积，记做$C = AB$

矩阵乘法

- 矩阵乘法的一个重要例子：
- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

矩阵乘法

- 令$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$
- 则方程组可以写为$Ax = b$

矩阵乘法

- 矩阵乘法的性质:
- $0A = 0, A0 = 0$
- $IA = A, AI = A$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$

逆矩阵

- 定义：设A是n阶方阵,如果存在n阶方阵B使得$AB = BA = I$
- 则称A是可逆的（或者非奇异的），B是A的一个逆矩阵。
- 否则称A是不可逆的（或奇异的）

逆矩阵

- 定理：逆矩阵如果存在，则逆矩阵唯一

逆矩阵

- 定义：det运算符
- 定理：设A, B是n阶方阵，则
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- 证明的提示：构造$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix}$
- 引理：$\det(A_1 A_2 \dots A_s) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_s)$

逆矩阵

- 引理：设A为n阶方阵，$AX=0$有非零解的充分必要条件是A奇异。
- 引理：设A为n阶方阵，若$\exists B$为n阶方阵，使得$AB=I$(或$BA=I$)，则A可逆且$A^{-1}=B$
- 引理：若$\det(A)\neq 0$，则$\det\left(A^{-1}\right)=(\det(A))^{-1}$

逆矩阵

- 逆矩阵的性质:
- $(A^{-1})^{-1}= A$
- $(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$
- $(kA)^{-1}= k^{-1}A^{-1}$

逆矩阵

- 定理：设A为n阶方阵，若A可逆，则线性方程组$AX = b$有唯一解$X = A^{-1}b$

初等变换

- 定义：矩阵的初等行（列）变换
  - 用一个非零的数乘以某行
  - 将某一行的k倍加到另一行
  - 互换两行
- 定义：单位阵I经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵，

初等变换

- 初等矩阵：
- $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换

- 初等矩阵：
- $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & & \mu & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换

- $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \dots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \dots & & \dots & & \dots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \dots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换

- 定理：用初等矩阵左（右）乘矩阵A，相当于对矩阵A实行相应的初等行（列）变换
- 定理：初等矩阵都可逆。

初等变换

- 定义：若矩阵B可以由矩阵A经过一系列初等变换得到，则称A与B相抵（等价），记做$A \cong B$
- 定理：相抵是一种等价关系。

初等变换

- 初等变换求逆矩阵：
- 构造一个 $n \times 2n$的矩阵$(A\ I)$
- $A^{-1}(A\ I) = (A^{-1}A\ A^{-1}) = (I\ A^{-1})$
- $(A\ I) \rightarrow \cdots \rightarrow (I\ A^{-1})$一系列的初等变换

基尔霍夫矩阵

- 定义：如果图G有总共N个点，那么图G的基尔霍夫矩阵D可以表示为：
- $D_{ii} = \mathrm{degree}(i)$
- $D_{ij} = -\mathrm{cnt}(i, j)$

基尔霍夫矩阵

- 引理：$|D| = 0$
- 引理：如果图G不连通，任意余子式$M_{ii} = 0$。
- 引理：如果图G是一棵树，那么任意余子式$M_{ii} = 1$。
- 引理：如果图G是一棵树，那么给矩阵D_{11}加上1之后，余子式$M_{11} = 1$。

矩阵树定理

- 定理：给定图G，则图G的生成树的个数等于其对应的基尔霍夫矩阵的主余子式的值。

矩阵树定理拓展形式

- 给定有向图图G和某个固定点，求外向树个数。
- $D_{ii} = in[i], D_{ij} = \#e(i,j)$
- 以i为根的外向树个数为i的主余子式。

- 内向树则变成出度
- https://noip.ac/show_problem/3189

相似矩阵

- 如果存在矩阵P使得$P^{-1}AP = B$
- 则这两个矩阵相似

- 记做$A \sim B$

相似矩阵的性质

- $A \sim A$
- $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$
- $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$
- $A \sim B \Rightarrow rank(A) = rank(B), tr(A) = tr(B)$
- $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$
- $A \sim B \Rightarrow A, B$特征多项式相同

相关概念

- $rank$：矩阵的秩，矩阵行数减去未定元个数
- tr：矩阵的迹，对角线元素之和

矩阵特征值

- 如果数λ和向量x满足$Ax = \lambda x$，则λ是A的特征值，x是A的特征向量
- 系数行列式$|A - \lambda E|$叫做A的特征多项式，特征多项式的N个根即为特征值
- 相似矩阵的特征值一定一样

矩阵对角化

- 转换成相似对角矩阵
- 特征值求法：解n次方程

Problem 1

- 你突然有了一个大房子，房子里面有一些房间。事实上，你的房子可以看做是一个包含n*m个格子的格状矩形，每个格子是一个房间或者是一个柱子。在一开始的时候，相邻的格子之间都有墙隔着。
- 你想要打通一些相邻房间的墙，使得所有房间能够互相到达。在此过程中，你不能把房子给打穿，或者打通柱子（以及柱子旁边的墙）。同时，你不希望在房子中有小偷的时候会很难抓，所以你希望任意两个房间之间都只有一条通路。现在，你希望统计一共有多少种可行的方案。
- N,m<=9

Problem 1

- 裸生成树计数
- https://noip.ac/show_problem/3187

Problem 2

- 轮状病毒有很多变种。许多轮状病毒都是由一个轮状基产生。一个n轮状基由圆环上n个不同的基原子和圆心的一个核原子构成。n轮状病毒的产生规律是在n轮状基中删除若干边，使各原子之间有唯一一条信息通道。给定n(N<=10000)，编程计算有多少个不同的n轮状病毒。

Problem 2

- 代数余子式递推
- https://noip.ac/show_problem/3188

Problem 3

- 小Van的CP最喜欢玩与OI有关的游戏啦~小Van为了讨好她，于是冥思苦想，终于创造了一个新游戏。下面是小Van的OI游戏规则：给定一个无向连通图，有N个节点，编号为0~N-1。图里的每一条边都有一个正整数权值，边权在1~9之间。要求从图里删掉某些边（有可能0条），使得剩下的图满足以下两个条件：
- 1） 剩下的图是一棵树，有N-1条边。
- 2） 对于所有v (0 < v < N)，0到v的最短路（也就是树中唯一路径长度）和原图中的最短路长度相同。
- 最终要报出有多少种不同的删法可以满足上述条件。（两种删法不同当且仅当存在两个点，一种删法删完之后这两个点之间存在边而另外一种删法不存在。）由于答案有可能非常大，良心的小Van只需要答案膜1,000,000,007的结果。

Problem 3

- 最短路图的有向生成树计数
- https://noip.ac/show_problem/3190

Problem 4

- 幽香上台以后，第一项措施就是要修建幻想乡的公路。幻想乡有 N 个城市，之间原来没有任何路。幽香向选民承诺要减税，所以她打算只修 N- 1 条路将这些城市连接起来。但是幻想乡有正好 N- 1 个建筑公司，每个建筑公司都想在修路的过程中获得一些好处。虽然这些建筑公司在选举前没有给幽香钱，幽香还是打算和他们搞好关系，因为她还指望他们帮她建墙。所以她打算让每个建筑公司都负责一条路来修。每个建筑公司都告诉了幽香自己有能力负责修建的路是哪些城市之间的。所以幽香打算选择 N-1 条能够连接幻想乡所有城市的边，然后每条边都交给一个能够负责该边的建筑公司修建，并且每个建筑公司都恰好修一条边。幽香现在想要知道一共有多少种可能的方案呢？两个方案不同当且仅当它们要么修的边的集合不同，要么边的分配方式不同。
- N<=17

Problem 4

- 容斥原理
- 容斥哪些公司没有修路

- https://noip.ac/show_problem/3191

Problem 5

- 给定一张n个点m条边的带权有向图，每条边的边权只可能是1，2，3中的一种。
  将所有可能的路径按路径长度排序，请输出第k小的路径的长度，注意路径不一定是简单路径，即可以重复走同一个点。

- N40
- M1000
- K10^18

Problem 5

- 二分答案
- 变化为算路径条数
- 拆点

- https://noip.ac/show_problem/3192

Problem 6

- 杰杰所在的世界有n个城市，从1到n进行编号。任意两个城市都通过有向道路连接。每个城市u有k个入点权：in[u][1],in[u][2]...in[u][k]，有k个出点权：ou[u][1],ou[u][2]...ou[u][k]。对于任意两个城市(u,v)（u可以等于v），u到v的道路条数为(ou[u][1]*in[v][1]+ou[u][2]*in[v][2]+...+ou[u][k]*in[v][k])条。杰杰有m次询问，每次询问由三元组(u,v,d)构成，询问从u城市通过不超过d条道路到达v城市的方案数。

- N1000 k20 m50

Problem 6

- 矩阵乘法结合律
- https://noip.ac/show_problem/3193

Problem 7

对于一个 m 位的十进制数$N = (n_1 n_2 \dots n_m)_{10}$，定义$g(N) = \sum_{i=1}^{m} n_i$。

定义集合$S_N = \{x \mid x > 0, g(x) \le N,\ x$ 的十进制表示中任意数位不为 $0\}$。

神秘盒上的密码 $f(N)$的计算式如下：

$$f(N) = \left(\sum_{x \in S_N} \sum_{\substack{y \in S_N \\ x < y}} x \times y \right) \bmod p$$

其中 p 为 1000003。

Problem 7

- 矩阵转移数的个数、和、平方和

- https://noip.ac/show_problem/3194

Problem 8

小 Z 是一个很富很富的同学，所以他买了一座学校。

学校里有无数的男生女生，小 Z 每天都要把他们拉出来站队。小 Z 对这个队形有以下三点要求：

1、 学生们恰好站成N行M列。

2、 由于小 Z 喜欢妹子，所以一行上不能有连续P个男生。

3、 由于小 Z 喜欢妹子，所以全是男生的列数不能超过Q列。

另外，在小 Z 看来，男生与男生以及女生与女生之间都是没有区别的。（即两个队形不同当且仅当有某些同样位置的同学的性别不同）

现在，小 Z 需要你帮他算出一个有多少种合法的队形。

- N8 Mint P,Q<=3

Problem 8

- 记录本质不同的行的数量
- https://noip.ac/show_problem/3195