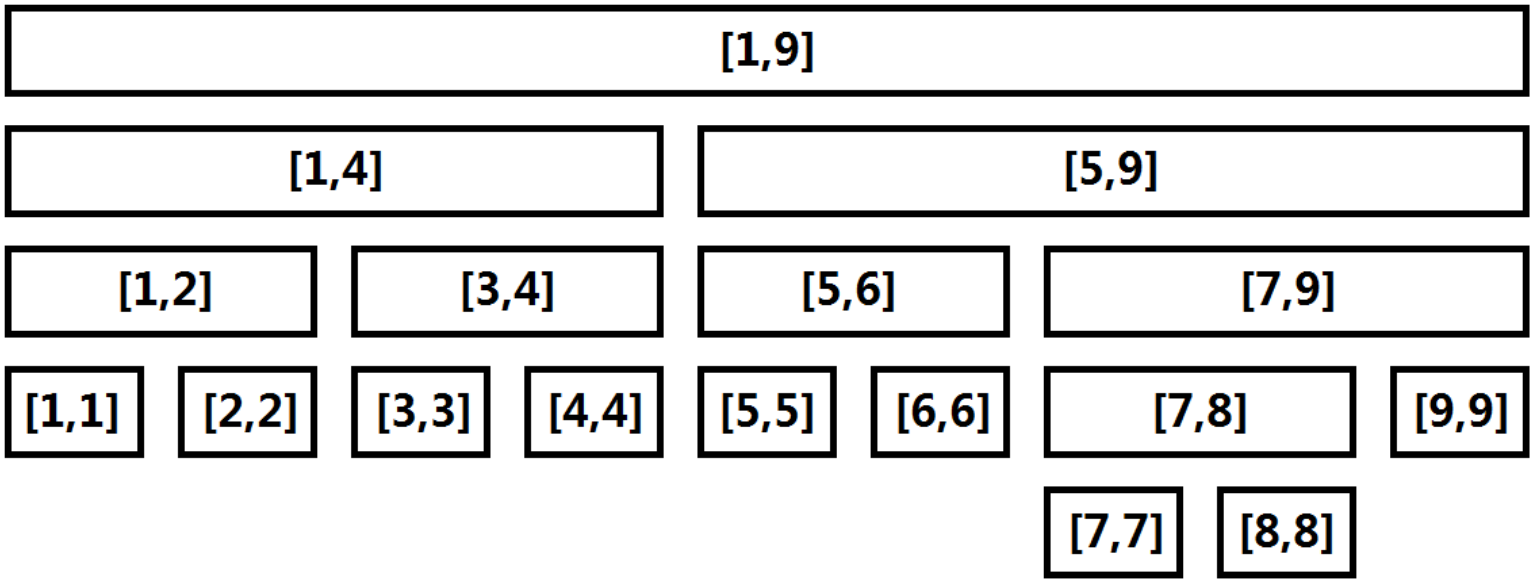
# 简单数据结构

成都七中 nzhtl1477

# 1.序列维护（线段树&平衡树）

# 线段树

- 我相信大家都会线段树了，所以就不讲原理了

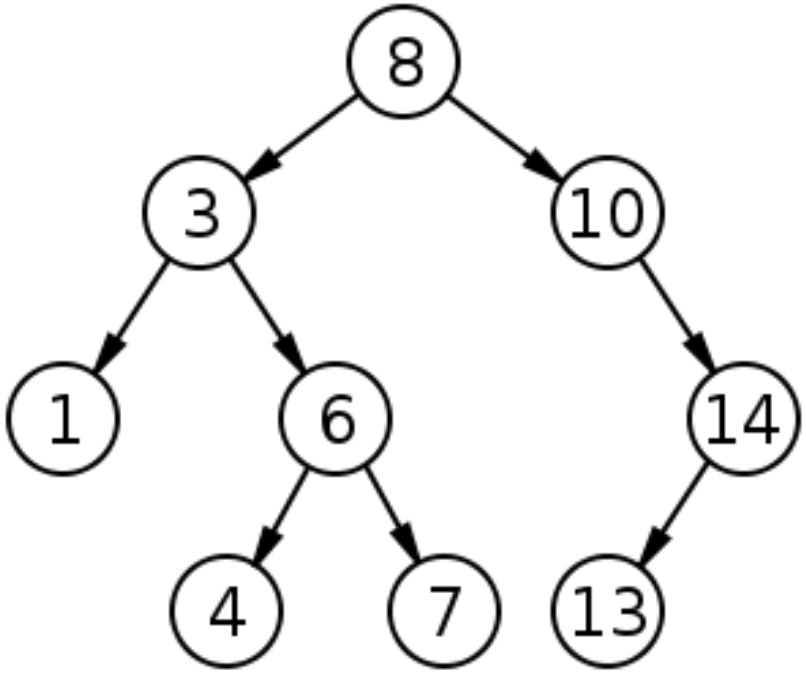


# 平衡树

- 全称“平衡二叉搜索树”，常见的类型有：
- 1.splay
- 2.treap
- 3.AVL Tree
- 4.Red Black Tree
- 5.Scape Goat Tree
- 6.Weight Balanced Leafy Tree（特殊结构）

# 二叉搜索树

- 性质：一个节点x左子树所有点的关键字都比x的关键字小，右子树所有点的关键字都比x的关键字大



# 平衡树

- 限于篇幅，这里只讲一下treap和splay

# treap

- “树堆”“Tree + Heap”
- 性质：每个点随机分配一个权值，使treap同时满足堆性质和二叉搜索树性质
- 复杂度：期望O( logn )

# treap

- 设每个节点的关键字是key，随机权值是rand

- 1.如果v是u的左儿子，则key[v] < key[u]
  2.如果v是u的右儿子，则key[v] > key[u]
  3.如果v是u的子节点，则rand[u] > rand[v]

# treap

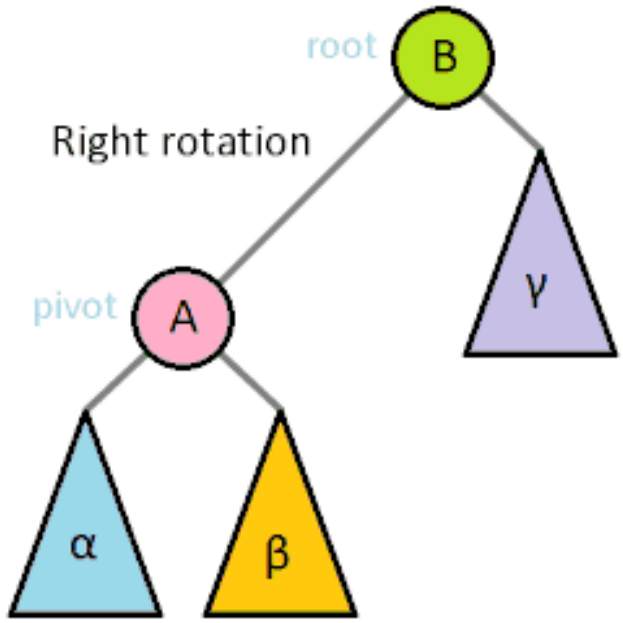
- Treap维护权值的时候一般会把相同的权值放在同一个节点上
- 所以一个treap节点需要维护以下信息：
- 左右儿子
- 关键字
- 关键字出现次数
- 堆随机值
- 节点大小（即子树大小）

# 说要讲模板，这里就利用一下hzwer的吧

```
struct data{
    int l,r,v,size,rnd,w;
}tr[100005];
int n,size,root,ans;
void update(int k)//更新结点信息
{
    tr[k].size=tr[tr[k].l].size+tr[tr[k].r].size+tr[k].w;
}
```

# 旋转

- 平衡二叉搜索树主要通过旋转来保持树的平衡，即保证复杂度



# Treap的旋转

- 旋转有单旋和双旋，treap只需要单旋，这一点比较简单

```
void rturn(int &k)
{
    int t=tr[k].l;tr[k].l=tr[t].r;tr[t].r=k;
    tr[t].size=tr[k].size;update(k);k=t;
}
void lturn(int &k)
{
    int t=tr[k].r;tr[k].r=tr[t].l;tr[t].l=k;
    tr[t].size=tr[k].size;update(k);k=t;
}
```

# Treap的插入

- 先给这个节点分配一个随机的堆权值
- 然后把这个节点按照bst的规则插入到一个叶子上：
- 从根节点开始，逐个判断当前节点的值与插入值的大小关系。如果插入值小于当前节点值，则递归至左儿子；大于则递归至右儿子；
- 然后通过旋转来调整，使得treap满足堆性质

# Code

```
void insert(int &k,int x)
{
    if(k==0)
    {
        size++;k=size;
        tr[k].size=tr[k].w=1;tr[k].v=x;tr[k].rnd=rand();
        return;
    }
    tr[k].size++;
    if(tr[k].v==x)tr[k].w++;//每个结点顺便记录下与该节点相同值的数的个数
    else if(x>tr[k].v)
    {
        insert(tr[k].r,x);
        if(tr[tr[k].r].rnd<tr[k].rnd)lturn(k);//维护堆性质
    }
    else
    {
        insert(tr[k].l,x);
        if(tr[tr[k].l].rnd<tr[k].rnd)rturn(k);
    }
}
```

# Treap的删除

- 和普通的BST删除一样：
- 如果删除值小于当前节点值，则递归至左儿子；大于则递归至右儿子
- 若当前节点数值的出现次数大于 1，则减一（通常将同一个权值缩掉）

# Treap的删除

- 若当前节点数值的出现次数等于 1：
- 若当前节点没有左儿子与右儿子，则直接删除该节点（置 0）；
- 若当前节点没有左儿子或右儿子，则将左儿子或右儿子替代该节点；
- 若当前节点有左儿子与右儿子，则不断旋转当前节点，并走到当前节点新的对应位置，直到没有左儿子或右儿子为止。

# Code

```
void del(int &k,int x)
{
    if(k==0)return;
    if(tr[k].v==x)
    {
        if(tr[k].w>1)
        {
            tr[k].w--;tr[k].size--;return;//若不止相同值的个数有多个，删去一个
        }
        if(tr[k].l*tr[k].r==0)k=tr[k].l+tr[k].r;//有一个儿子为空
        else if(tr[tr[k].l].rnd<tr[tr[k].r].rnd)
            rturn(k),del(k,x);
        else lturn(k),del(k,x);
    }
    else if(x>tr[k].v)
        tr[k].size--,del(tr[k].r,x);
    else tr[k].size--,del(tr[k].l,x);
}
```

# Treap的查询

- 递归到叶子节点，一路维护信息即可

```
int query_rank(int k,int x)
{
    if(k==0)return 0;
    if(tr[k].v==x)return tr[tr[k].l].size+1;
    else if(x>tr[k].v)
        return tr[tr[k].l].size+tr[k].w+query_rank(tr[k].r,x);
    else return query_rank(tr[k].l,x);
}
int query_num(int k,int x)
{
    if(k==0)return 0;
    if(x<=tr[tr[k].l].size)
        return query_num(tr[k].l,x);
    else if(x>tr[tr[k].l].size+tr[k].w)
        return query_num(tr[k].r,x-tr[tr[k].l].size-tr[k].w);
    else return tr[k].v;
}
```

# Treap维护权值

- 现在大家都会用treap来维护一个集合
- 支持插入，删除，查询（kth，rank等）了吧

# Treap的其他功能

- Treap还可以支持维护序列时的分裂合并
- 这里不详细讲了（我也不会）
- 具体可以看luogu日报？

# splay

- “伸展树” “自适应查找树”

# splay

- 每次对一个节点进行操作的时候通过一种方法把这个点旋转至根
- 需要根据不同的情况判断应该怎么旋转，这里就不详细介绍了

# splay

- Splay具有“自适应性”
- 大概就是说splay会根据操作的特点调整树结构，使得操作尽可能高效
- 可以去了解了解splay的动态最优性猜想，是个著名的open problem

# Disadvantage

- 可以通过势能分析证明splay的复杂度是均摊O( logn )的，也就是说splay在很多次操作中可能会有一次O( n )复杂度的操作
- 而且这样的操作也很好构造
- 所以splay不适合做一些需要撤销操作/可持久化的题目（虽然可以通过随机旋转什么的方法来规避，但还是感觉很吃力）
- 自身常数比较大

# Advantage

- Splay用来维护序列还是比较好写的，用来维护名次树感觉不好写
- 由于自适应性，splay不需要特殊的技巧就可以高效启发式合并，还可以高效实现LCT（STT）等动态树

# 打个广告——WBLT

- 全称：Weight Balanced Leafy Tree
- 这个Weight Balanced是指的Balanced by Boundary，也就是BB[α]
- 和clj那个定义不一样
- 大概可以理解为通过旋转而不是重构来满足替罪羊树那个平衡关系
- 也就是说替罪羊树是Weight Balanced Tree的一种

# 打个广告——WBLT

- 线段树就是一种Leafy Tree，也就是说把信息都存在叶子上，非叶节点都是存储了信息的合并的虚点（大家可以感性理解一下大概是什么样的一个结构）
- 优点：目前最好写的平衡树，可持久化效率很高
- 缺点：非可持久化的情况下要两倍空间，拿来写LCT（STT）很吃力

# 替罪羊树

- 定义常数平衡因子α
- 如果一个点的某个儿子，占到了子树大小的α，则认为不平衡，重构这个子树
- 复杂度也是带均摊的，均摊O(logn)，最坏单次操作O(n)
- 复杂度证明平凡

# 大概拿来解决什么样的题

- 给你一个序列，每次查询区间的******
- 给你一个树，每次查询链******

# Key

- 是维护的可快速合并的信息，具体怎么定义快速合并比较复杂，这里不进行严谨介绍，只感性理解

# Fact

- 其实这些题就改改线段树的merge函数之类的，相当无聊

# Luogu2023 [AHOI2009]维护序列

- 1.区间加x
- 2.区间乘x
- 3.区间和
- 取膜

# Problem

- 如果只是区间加或者区间乘，直接打个标记就可以了
- 但是同时有两个操作怎么办

# Solution

- 当然是打两个标记啦，不过需要注意一下处理顺序
- 维护两个标记，分别是加标记和乘标记
- 分别设为add和mul
- 如果一个节点的被加上了x
- 则add+=x
- 如果一个节点被乘上了x
- 则add*=x，mul*=x
- 注意取膜
- 即对于标记按顺序维护
- 先加后乘

# 常见的打标记的操作

- 区间加
- 区间乘
- 区间染色（区间修改为一个数）
- 区间翻转
- 区间xor

# Luogu4513 小白逛公园

- 序列，单点修改，询问区间最大子段和

# Solution

- 著名的新手杀手题。。。
- 很经典来着
- 对于每个区间，维护一个左边的最大前缀，右边的最大后缀，以及区间内部的答案
- 每次合并的时候，即答案选取左子区间的max，右子区间的max，或者左子区间的最大后缀，右子区间的最大前缀即可
- 很简单的题

# Solution

红色为左边的最大连续子区间

绿色为右边的最大连续子区间

蓝色的为各自的最大前缀和后缀

# Luogu2042 [NOI2005]维护数列

- 请写一个程序，要求维护一个数列，支持以下 6 种操作：（请注意，格式栏 中的下划线‘_’表示实际输入文件中的空格）

| | | |
|---|---|---|
| 1. 插入 | INSERT_*posi*_*tot*_*c1*_*c2*_..._*ctot* | 在当前数列的第 *posi* 个数字后插入 *tot* 个数字：*c1*，*c2*，…，*ctot*；若在数列首插入，则 *posi* 为 0 |
| 2. 删除 | DELETE_*posi*_*tot* | 从当前数列的第 *posi* 个数字开始连续删除 *tot* 个数字 |
| 3. 修改 | MAKE-SAME_*posi*_*tot*_*c* | 将当前数列的第 *posi* 个数字开始的连续 *tot* 个数字统一修改为 *c* |
| 4. 翻转 | REVERSE_*posi*_*tot* | 取出从当前数列的第 *posi* 个数字开始的 *tot* 个数字，翻转后放入原来的位置 |
| 5. 求和 | GET-SUM_*posi*_*tot* | 计算从当前数列开始的第 *posi* 个数字开始的 *tot* 个数字的和并输出 |
| 6. 求和最大的子列 | MAX-SUM | 求出当前数列中和最大的一段子列，并输出最大和 |

# Solution

- pushdown就维护一下区间赋值和区间翻转的标记
- update就维护一下区间的最大前后缀和区间的最大子段和，然后更新就可以了

# Luogu5482 [JLOI2011]不等式组

- 你需要维护一堆不等式
- 1.插入一个ax+b>c的不等式
- 2.删除第i个插入的
- 3.查询x=k的时候成立的不等式个数

# Solution

- 如果a>0：ax+b>c ⇔ x > ( c – b ) / a
- 如果a<0：ax+b>c ⇔ x < ( c – b ) / a
- 如果a=0：是否成立是确定性的
- 开个平衡树维护值（按值域开个树状数组也行）
- 然后每次插入取个整
- 查询直接查rank即可
- 注意细节

# Luogu1471 方差

- 神犇HansBug在一本数学书里面发现了一个神奇的数列，包含N个实数。他想算算这个数列的平均数和方差。
- 操作1：1 x y k，表示将第x到第y项每项加上k，k为一实数。
- 操作2：2 x y，表示求出第x到第y项这一子数列的平均数。
- 操作3：3 x y，表示求出第x到第y项这一子数列的方差。

# Solution

- 可以通过维护区间和来维护区间平均数
- 其实就是区间和/区间长度
- 但是方差呢？

# Solution

- 这里直接粘一个题解里面的公式了
- 方差可以通过维护平方和和和的平方来算出来
- 很多这种题直接推推式子就可以维护了
- 比如SDOI那个无聊的东西

$$\frac{(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+(a_3-\bar{a})^2+\cdots+(a_n-\bar{a})^2}{n}$$

$$=\frac{{a_1}^2-2a_1\bar{a}+\bar{a}^2+{a_2}^2-2a_2\bar{a}+\bar{a}^2+{a_3}^2-2a_3\bar{a}+\bar{a}^2+\cdots+{a_n}^2-2a_n\bar{a}+\bar{a}^2}{n}$$

$$=\frac{n\bar{a}^2-2\bar{a}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}$$

$$\because \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\to\bar{a}$$

$$\therefore -\bar{a}^2+\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}$$

洛谷 < 3.0 > Luogu Enjoy Coding Life

# 某经典问题

给一个长为N的数列，有M次操作，每次操作时以下三种之一：

（1）修改数列中的一个数

（2）求数列中某连续一段所有数的两两乘积的和 mod 1000000007

（3）求数列中某连续一段所有相邻两数乘积的和 mod 1000000007

# Solution

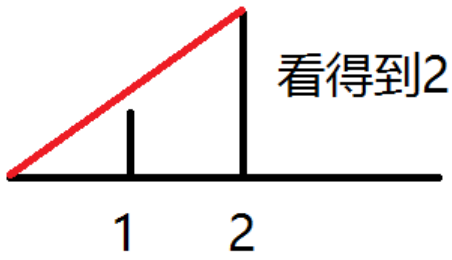
- 假设x节点的儿子为y和z
- x相邻两数乘积的和为：
- y相邻两数乘积的和+z相邻两数乘积的和+y最右边的数*z最左边的数

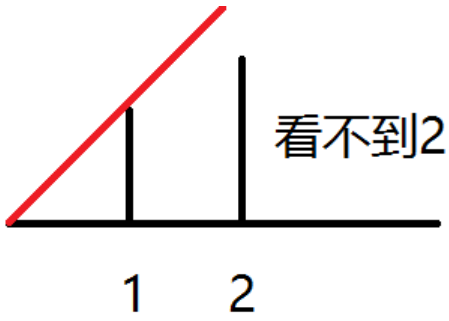
# Solution

- 假设x节点的儿子为y和z
- x任意两数乘积的和为：
- y任意两数乘积的和+ z任意两数乘积的和+y的和*z的和
- 然后直接维护即可。。。

# Luogu4198 楼房重建

- 有一排楼，每次把一个位置的楼的高度修改为x，每次输出可以从最左边看到的楼个数



# Solution1

- 发现一个楼房能被看到可以等价于它的斜率比之前的任何一个都大
- 所以说我们这里可以直接维护斜率，而不用管楼的高度
- 问题转化为：
- 1.单点修改
- 2.查询全局有多少位置是前缀最大值

# Solution1

- 可以试试分块维护
- 复杂度好像是O( nsqrt( nlogn ) )的
- 这里不仔细讲了

# Solution2

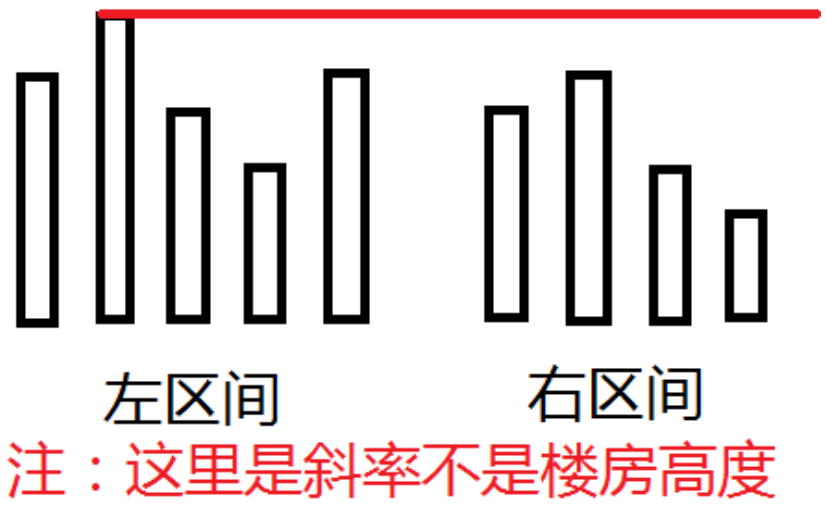
- 考虑用线段树维护
- 对于线段树每个结点维护两个值：ans和max，ans表示只考虑这个区间内的可以被看到的楼房，max表示这个区间的最大楼房斜率。
- 如何合并区间？

# Solution2

- 合并左右区间的时候：
- 显然左区间的答案不会变化
- 问题就是考虑右区间有多少个楼房在左区间的约束条件下仍然可以被看到

# Solution2

- 如果右区间最大值都小于等于左区间最大值，那么右区间就没有贡献了，相当于是被整个挡住了。



# Solution2

- 如果右区间最大值大于左区间最大值
- 考虑右区间的两个子区间：左子区间、右子区间

# Solution2

- 如果左子区间的最大值小于等于左区间最大值
- 那么就递归处理右子区间
- 因为相当于左子区间里面所有楼房都被前面的楼房挡住了了，递归查询右边有多少楼房没被挡住
- 否则就递归处理左子区间，然后加上右子区间原本的答案，因为这个约束条件弱于左子区间对右子区间的约束，所以只考虑这个约束条件对左子区间的影响~

# Solution2

- 由于要合并O( logn )次，每次合并会递归O( logn )个节点
- 所以总复杂度O( mlog^2n )
- 实际上常数非常小

# Luogu4036 [JSOI2008]火星人

- 维护一个字符串序列
- 1.单点插入
- 2.查询两个区间的LCP的长度
- LCP就是两个字符串的最长公共前缀

# Solution

- 如何判断两个字符串是否相等？
- 哈希
- 如何在带插入的情况下维护一个区间的哈希值？
- 使用平衡树，预处理base的每个次幂的值，这样可以合并两个区间的哈希值
- 如何查询LCP？

# Solution

- 可以使用二分答案的方法
- 二分一个区间长度，使用平衡树维护区间哈希的方法来查询这个长度的两个前缀是否相等
- 时间复杂度O( mlog^2n )，可以优化为O( mlog^2n/loglogn )
- 其实题目中说了询问次数比较少，询问是O( log^2n )的，插入是O( logn )的

# Luogu6327 区间加区间sin和

给出一个长度为 $n$ 的整数序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，进行 $m$ 次操作，操作分为两类。

操作 1：给出 $l, r, v$，将 $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 分别加上 $v$。

操作 2：给出 $l, r$，询问 $\sum_{i=l}^{r} \sin(a_i)$。

# Solution

- 考虑这个区间sin和如何维护
- 大家都记得数学课学过一个东西叫做和差角公式吗

# Solution

- sin(x+y)=sinxcosy+cosxsiny
- cos(x+y)=cosxcosy−sinxsiny
- 所以我们维护区间的sin和，cos和，然后就可以打区间加标记了，这个标记可以合并，也可以下放

# Luogu5278: 算术天才⑨与等差数列

- （Luogu3792:由乃与大母神原型和偶像崇拜是这个的弱化版）

- 给了你一个长度为n的序列
- 1.询问l,r,k，问区间[l,r]内的数从小到大排序后能否形成公差为k的等差数列。
- 2.修改一个位置的值
- 可以先思考一个简单版本：查询的k=1
- n<=5e5

# Solution1

- Luogu3792是Luogu5278的弱化版，所以这里讲5278那个题的做法
- 首先通过维护区间的min和max就可以知道这个区间是首项为多少，公差为k的等差序列了
- 直接维护这个信息比较复杂，所以考虑有什么其他的方法可以快速维护

# Solution1

- 首先维护区间的排序后的顺序非常困难
- 所以考虑维护区间的某些信息，使得这个区间被随机打乱之后维护出来的值是一样的
- 比如区间1 2 3 4 5和3 4 2 5 1会得到相同的结果

# Solution1

- 首先可以想到区间和，但是比如1 3 5 7和1 4 4 7这两个的和是一样的，但是第一个是公差为2的等差序列，后面的不是

# Solution1

- 那我们同时维护平方和，乘积，立方和之类的不就好了吗
- 一个给定首项和公差的等差序列的和，平方和是很好计算的
- 通过维护这些信息就可以极高概率确定这个区间是不是满足条件的了

# Solution1

- 那如果出题人构造数据卡你呢
- 有个确定性的做法，但存在正确性正确的hash
- https://www.luogu.com.cn/problem/solution/P3792
- 可以将每个数随机映射为一个数，然后求异或和，这样的方法在映射后值域充分大的情况下是目前难以攻击的

# Solution2

- 有没有确定性算法呢？

# Solution2

- 首先我们还是要维护区间的min和max，这样能知道首项和末项
- 然后考虑一个等差数列的性质：
- 公差为k的等差数列中任意选出两个元素，他们做差一定是k的倍数。
- 这样想到，如果把原序列做个差分呢？

# Solution2

- 把一个等差数列重排一下，然后做一个差分，这个差分数组的gcd一定是恰好等于k的，这个是必要条件。
- 1.如果这个等差数列差分后gcd=a*k，我们发现这个等差数列的公差一定是a*k>k。
- 2.如果这个等差数列公差是k，差分数组的gcd一定也是k，否则和1一样反证了。

# Solution2

- 考虑把原序列差分，然后维护区间gcd。
- 还需要什么？还需要区间中不能出现重复的数。
- 这个我们对每个数维护前驱，然后变成一个数点的问题了。

- 总时间复杂度O( mlog^2n )

# Solution2

- 其实这个条件比数点弱，是查区间是否每个数的前驱都在区间外，所以维护区间前驱的max就可以了
- 区间gcd是O( logn + logv )的

- 总时间复杂度O( m(logn+logv) )

# Luogu3586 [POI2015]Logistyka

- 维护一个长度为n的序列，一开始都是0，支持以下两种操作：
- U k a 将序列中第k个数修改为a。
- Z c s 在这个序列上，每次选出c个正数，并将它们都减去1，询问能否进行s次操作。
- 每次询问独立，即每次询问不会对序列进行修改。

- 1<=n,m<=1000000
- 1<=k,c<=n，0<=a<=10^9，1<=s<=10^9。

# Solution

- 对于每次询问：
- 如果ai>=s，则ai可以每s次操作都被选中
- 如果ai<s，则ai可以被ai次操作选中
- 设数列中大于等于s的数有k个，小于s的数的和为sum。
- 则只需要判断sum>=(c-k)*s即可

# Proof

- 若sum<(c-k)*s
- 则肯定不能，因为既然和都不够，所以根本不够取

# Proof

- 若sum>=(c-k)*s
- 由于每个数都小于s，所以有不少于c-k个数
- 每次从最大的数开始取，一定存在解

# Solution

- 发现需要维护小于x的数的个数，小于x的数的权值和
- 于是我们用平衡树维护这个序列里面的所有值即可

# Luogu6105 [Ynoi2010]iepsmCmq

- 给定一个常数 c，你需要维护一个集合 s，支持 n 次操作：
- 1.插入x
- 2.删除x
- 每次操作结束后，需要输出从 s 集合中选出两个不同的元素，其的和 mod c 的最大值
- n<=5e5，强制在线，不过可以想想离线做法

# Solution

- 我们把每个数对C取模，所以可以认为值域在[0,C)中
- 发现x+y在[0,2C)中，所以最多减去一个C
- 对每个x，找出最大的y使得x+y<C（不减去C）
- 对每个x，找出最大的y（减去一个C）

# Solution

- 发现x+y>=C的情况可以直接找出最大的两个x和y，平凡
- 只需要考虑x+y<C的情况
- 如果我们把所有数都排序，假设x<y，则对于x1,x2，对应的是y1,y2 ，
- 如果x1<=x2，则y1>=y2，这个满足单调性

# Solution1

- 问题即，给出一个点集，支持插入删除，和查询max(x+y)，使得x+y < C
- 再继续分析一下，发现如果x,y < C/2，这个也是平凡的
- x,y < C/2可以推出 x+y < C，所以选两个最大的C/2以内的数就可以覆盖这部分的贡献

# Solution1

- 目前非平凡的部分在于从[0,C/2)中选一个数x，[C/2,C)中选一个数y，x+y的贡献
- x+y<C 等价于 x<C-y
- 我们可以认为最大化x+y是在最小化C-x-y
- 于是用一棵平衡树维护，这里平衡树这个结构是用来满足x<C-y这个条件的
- 每个在[0,C/2)中的x就直接插入，每个在[C/2,C)中的y，就变成C-y然后插入
- 平衡树需要维护子树内最小的C-y，最大的x，最小的C-y-x

# Solution1

- 具体一点来说，所有[0,C/2)中的数x看做A集合，所有[C/2,C)中的数y变成C-y后看做B集合
- 我们要在A和B集合中选出两个数a,b，使得：
- a<b，b-a最小
- 平衡树可以维护这个

# Solution1

- 这个信息显然可以合并
- 于是我们使用分治结构，做到了O( logn )单次修改

- 总时间复杂度O( nlogn )

# Solution2

- 还可以发现：
- 对每个A集合中的x，维护出其在B集合中的后继C-y
- 对每个B集合中的C-y，维护出其在A集合中的前驱x
- 这样一定是最优的，
- 每次修改这个前驱后继变动是O(1)的
- 这样就可以不用手写平衡树，只需要stl的set就可以了
- 总时间复杂度O( nlogn )

# Luogu6617查找 Search

- 序列，给定常数w
- 1.单点修改
- 2.查询区间是否存在两个数和为w
- 5e5,4s

# Solution

- 看到问题可以先想到二维数点的转化
- 每个点x，设置其前驱为离其最近的w-x的位置
- 这个和区间颜色数的转化类似
- 如何带修改？

# Solution

- 每次修改可能影响O(n)个位置：
- w-x x x x x x x...
- 这样后面每个位置的前驱都是w-x
- 如果修改了w-x的值，这样会导致O(n)个修改
- 观察性质？

# Solution

- 注意到这个是存在性判定
- 如果存在两个(i1,j1)，(i2,j2)使得a[i1]+a[j1]=w,a[i2]+a[j2]=w，而且[i2,j2]包含了[i1,j1]，则(i2,j2)没有任何意义
- 这样每个点只存在O(1)个配对关系

# Solution

- 由于是存在性，所以我们维护b[i]表示每个点的前驱
- 如果区间[l,r]内b[i]最大值在[l,r]中，则存在，否则不存在
- 这样只需要rmq线段树，和set维护前驱后继即可

- O( n+mlogn )

# Luogu5069 [Ynoi2015]纵使日薄西山

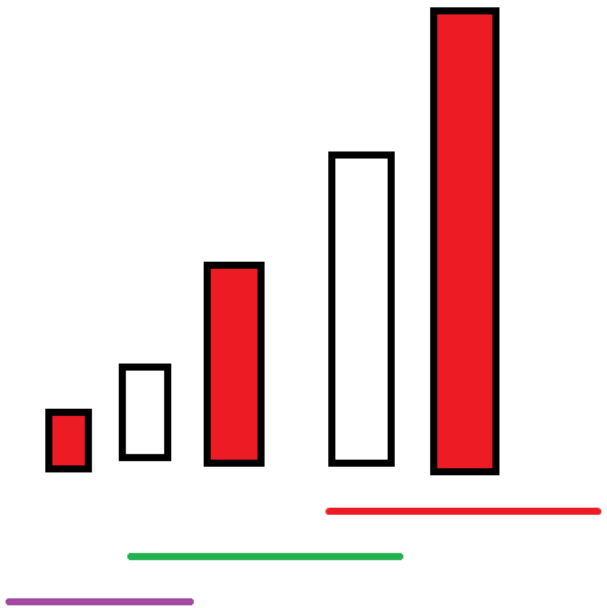
- 珂朵莉想让你维护一个长度为 n 的正整数序列 a[1],…a[n]，支持修改序列中某个位置的值。
- 每次修改后问对序列重复进行以下操作，需要进行几次操作才能使序列变为全 0（询问后序列和询问前相同，不会变为全 0）：
- 选出序列中最大值的出现位置，若有多个最大值则选位置标号最小的一个，设位置为 x，则将 a[x],a[x-1],a[x+1] 的值减 1，如果序列中存在小于0的数，则把对应的数改为 0。

# Solution

- 可以发现如果一个位置被操作了，那这个值和旁边两个值会一起减，而且一个位置被操作意味着这个值不会比旁边两个值小
- 所以这里旁边两个值就不会有贡献了，因为会被中间那个一直操作给提前减到0

# Solution

- 将原序列进行极长单调划分
- 发现对于每个极长单调区间，答案一定是所有奇数位置或者所有偶数位置的和



# Solution

- 可以发现每次单点修改只会影响到这个点以及左右两个点是否成为局部极大值
- 还有可能影响到旁边两个极长单调区间的状态
- 这里影响是O(1)的，所以可以高效维护
- 细节比较多

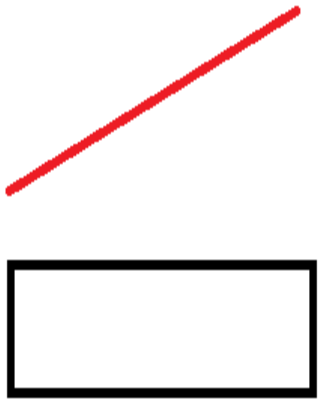
- O( mlogn )

# “李超线段树”

- Luogu4069 [SDOI2016]游戏
- Luogu4097 [HEOI2013]Segment
- 区间对一个等差数列取max，查询单点的值，具体题意可以找那个题看看。

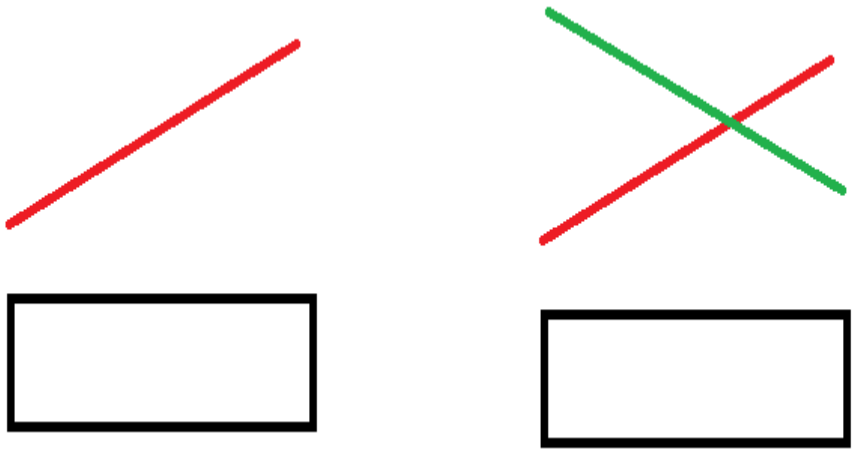
# Solution

- 写个线段树
- 每个节点维护一个永久化的标记，标记存的是一个等差数列，表示这个节点对这个等差数列取了max



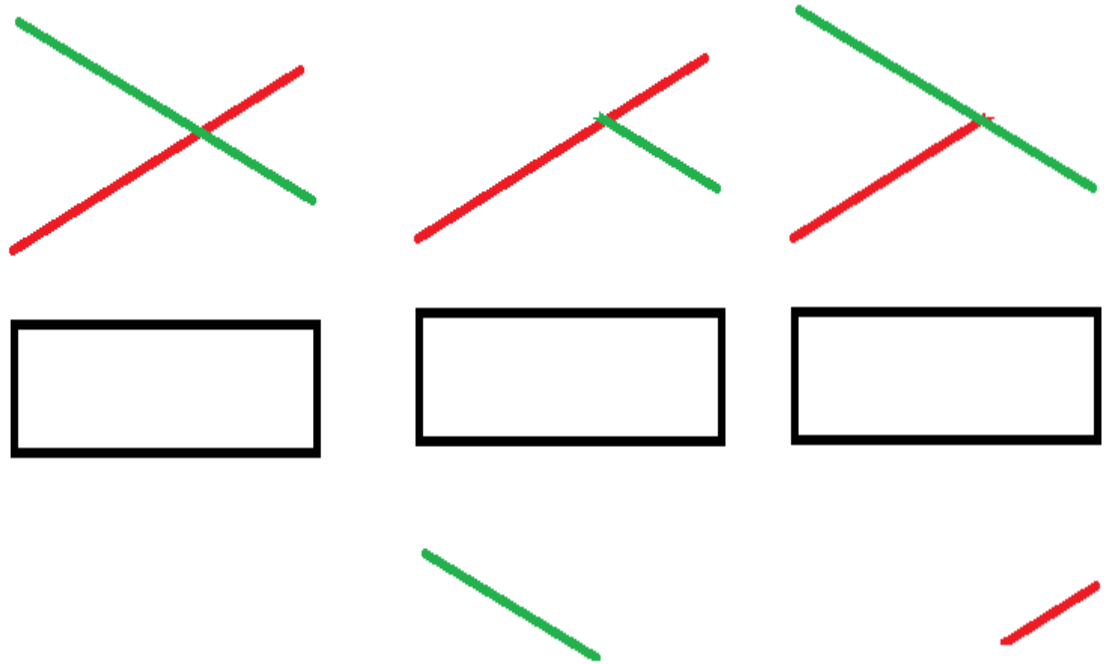
# Solution

- 如果这个节点被打上了一个新标记



# Solution

- 我们可以选择把一边的标记下放



# Solution

- 那我们肯定考虑pushdown小的那一段
- 可以发现每次pushdown的时候标记长度会/2
- 每次pushdown的复杂度是O( logn )，每个标记会pushdown O( logn )次
- 所以复杂度为O( mlog^2n )

# Solution

- 查询就是，我们和线段树一样找出和这个位置有关的O( logn )个线段树节点，然后计算这个位置在这些节点上的高度，取个max。
- 查询复杂度O( logn )

- 应该可以通过多叉树平衡做到O( mlog^2n/loglogn )

# Luogu5608 [Ynoi2013]文化课

- n,m<=1e5,4s

Chimuzu 手上有一个数字序列 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 和一个运算符序列 $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$。其中 $p_i$ 只能为 $+$ 或 $\times$。

我们定义一个区间 $[l, r]$ 的权值 $w(l, r)$ 为将字符串

$$a_l\ p_l\ a_{l+1}\ p_{l+1} \cdots a_{r-1}\ p_{r-1}\ a_r$$

写下来之后，按照运算符的优先级计算出的结果。

下面给出一个运算的例子：

若 $a = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$，$p = \{+, \times, \times, +, \times\}$，那么有：

$$w(1, 6) = 1 + 3 \times 5 \times 7 + 9 \times 11 = 205$$

$$w(3, 6) = 5 \times 7 + 9 \times 11 = 134$$

Chimuzu 需要你对这两个序列进行修改，同时查询某个给定区间的权值。

你需要维护这 3 个操作：

操作一：给定 $l, r, x$，将$a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 全部修改成 $x$。

操作二：给定 $l, r, y$：将 $p_l, p_{l+1}, \ldots, p_r$ 全部修改成 $y$，$0$ 表示 $+$，$1$ 表示 $\times$。

操作三：给定 $l, r$：查询 $w(l, r) \bmod 1000000007$ 的值。

# Solution

- 对原序列建一棵线段树，考虑怎么在线段树上面修改和查询
- 定义 极长 “X” 段为一个极长的子区间，使得区间中符号均为乘法

# 区间值修改

- 维护出区间中每个极长的 “X” 段的长度，可以发现这个存在一个自然根号：
- 假设区间长度为size，则最多只有O( sqrt( size ) )种极长 “X” 段的长度
- 每次对区间进行值修改的时候，即对这个长度为O( sqrt( size ) )的多项式进行求值，暴力计算即可，求值复杂度为O( sqrt( size ) )，即可以O( sqrt( size ) )的时间将一个节点值进行修改，同时维护信息

# 区间符号修改

- 每次对区间符号进行修改的时候，区间的信息只会变成区间和或者区间乘积，所以我们每个节点要维护区间和和区间乘积
- 符号修改之后，这个节点的极长“X”段只会有O(１)种了
- 符号进行修改可能影响一些节点的极长“X”段，考虑如何维护这个

# 区间符号修改

- 对一个节点，我们可以归并两个儿子的极长 “X” 段，来维护出这个节点的极长 “X” 段
- 对一个大小为size的节点进行归并，代价是O( sqrt( size ) )的
- 注意需要特判左儿子的最右极长 “X” 段是否和右儿子的最左极长 “X” 段进行合并

# 区间信息合并

- 合并区间信息的时候，只需要把左右儿子信息加起来，同时特判O(1)个位置即可
- 这O(1)个位置就是左儿子的最右部分和右儿子的最左部分
- 可以处理：
- 标记对标记的影响
- 标记对信息的影响
- 信息和信息的合并
- 所以我们正确性有保证了

# Complexity

- 我们所有地方的复杂度都是O( sqrt( size ) )的
- 线段树在每层只会递归到2=O(1)个节点中，所以每层只有O(1)个节点的信息需要更新

# Complexity

- T( n ) = T( n / 2 ) + O( sqrtn )
- sqrt( n ) + sqrt( n / 2 ) + sqrt( n / 4 ) + … + sqrt( 1 ) = O( sqrtn )
- 空间：
- T( n ) = 2T( n / 2 ) + O( sqrtn )
- sqrt( n ) + 2sqrt( n / 2 ) + 4sqrt( n / 4 ) + … + nsqrt( 1 ) = O( n )
- 总时间复杂度O( msqrtn )，空间复杂度O( n )

- 由于我不会多项式技术，所以不确定是否存在更优做法，但目前感觉不容易优一个poly(n)

# 2.简单的均摊复杂度问题

# 序列染色段数均摊

- 特点：修改只有区间染色操作
- 用平衡树维护区间的颜色连续段
- 区间染色每次最多只会增加O( 1 )个连续颜色段，用平衡树维护所有连续段即可
- 均摊的颜色段插入删除次数O( n + m )

# 序列染色段数均摊

- 应用：
- 区间染色，维护区间的复杂信息
- 区间排序
- “ODT”类问题

- 注意这里这个颜色段数均摊是有2~3的常数，常数很大

# 忘了在哪里看到的题1

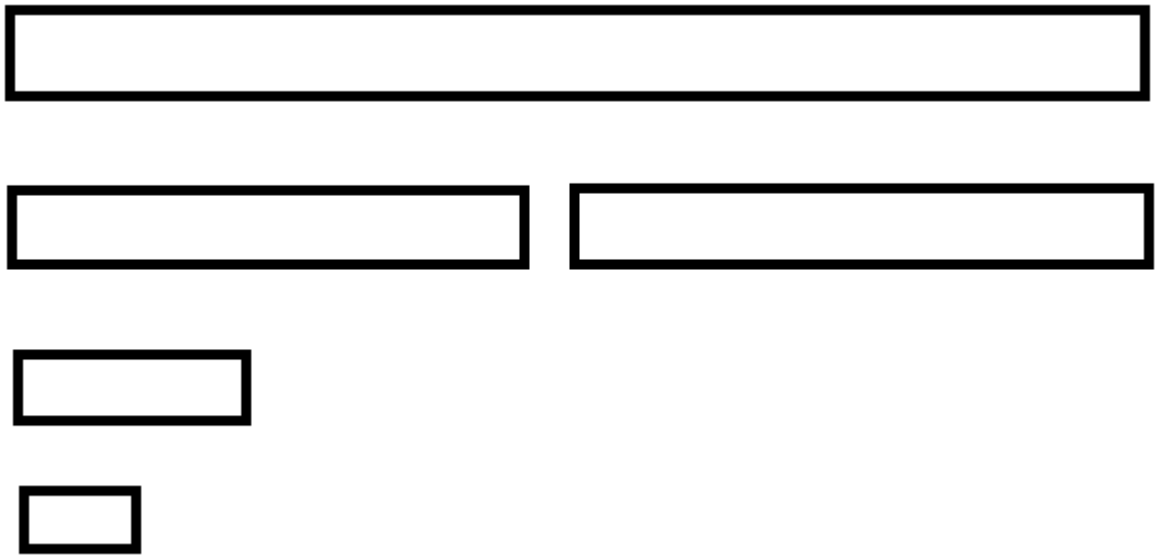
- 给一个序列，每个位置是一个3*3的矩阵
- 1.区间修改为同一个矩阵
- 2.查询区间矩阵从左到右的乘积
- 要求1log

# Solution

- 如果用线段树直接做的话，会发现复杂度是2log的
- 我们线段树每次push_down的时候，要根据左右两个儿子的size而重新计算矩阵快速幂
- 如何解决这个问题？

# Solution1

- 我们可以把线段树建成一个2^k长度形式的
- 然后记录下区间修改矩阵的2^0,2^1…2^k次幂的值



# Solution1

- 每次push_down的时候，儿子的长度也是2^k形式的，这样可以直接利用记录的信息求解

- O( n+mlogn )

# Solution2

- 使用序列上的颜色段均摊
- 每个完整的颜色段我们计算出快速幂
- 每次查询区间乘积时，发现会完整包含一些颜色段，以及边界上会有O(1)个不完全包含的段
- O(1)个不完整的段直接快速幂即可
- O( (n+m)logn )

# “重量”平衡树

- 平衡树旋转/重构的节点的size的和是O( nlogn )
- 这样可以在旋转的时候暴力重构一些信息
- 一般用来解决动态标号问题：
- 序列
- 1.在x后面插入y
- 2.查询x和y在序列上的先后问题，这个要求O(1)
- 可以线性解决，但是由于其他部分一般带log
  所以OI中一般采用O( nlogn )的解决方法

# “重量”平衡树

- 应用：

- 套用动态标号法可以得到平衡树维护后缀数组的算法，被称为“后缀平衡树”
- 可以实现树套树的外层树插入

# Luogu5610 [Ynoi2013]大学

- 序列
- 1.区间x倍数/x
- 2.区间和
- 强制在线

- 序列长度<=1e5，值域<=5e5

# Solution

- 考虑到一个数最多被除log次，如果除数非1
- 所以问题变成了如何快速找出x的倍数

# Solution

- 我只会一个很无聊很幼稚很简单很暴力的做法
- 就是把每个下标插入到其因数的所有平衡树里
- 然后每次x的倍数/x，就在x对应的平衡树里面暴力查询一段区间的每个数是否是x倍数
- 由于平衡树的复杂度是O( logn + s )（s是这个区间的点数）
- d(v)表示<=v的所有数里面最大的约数个数
- 所以总复杂度是O( nd(v) + nlognlogv + mlogn )

# CF438D

- 单点修改
- 区间mod p
- 区间和
- p <= 1e9

# Solution

- 如果x>=2p,x mod p<=p<=2p/2<=x
- 如果p<=x<2p,x mod p=x-p<x/2
- 所以每个数每次会减半，最多logv次之后就变成0了
- 线段树维护一个区间最大值，能减就减
- 总复杂度O( (n+m)lognlogv )

# HDU 6315 Naive Operations

- 给两个序列a和b，b是1-n的排列
- 1.a区间加1
- 2.求区间内所有[ai/bi]的和

# Solution

- 假设进行了n次全局加
- 发现全局的和是sigma( n/1 + n/2 + … + n/n ) = O( nlogn )
- 这是一个调和级数
- 用树状数组维护答案序列
- 于是每次如果有一个点的答案发生变化，就在一个点位置+1即可
- 总复杂度O( mlog^2n )

# Solution

- 怎么找出每次修改的位置呢
- 线段树维护序列，每个位置初始是 -bi
- 每次区间加1相当于线段树的区间加1
- 每次操作完之后，找哪些位置是0，这个可以维护一个最大值来维护出来
- 把这些0位置直接进行修改即可

# UOJ228. 基础数据结构练习题

给出一个长度为 $n$ 的数列 $A$，接下来有 $m$ 次操作，操作有三种：

1. 对于所有的 $i \in [l,r]$，将 $A_i$ 变成 $A_i + x$。
2. 对于所有的 $i \in [l,r]$，将 $A_i$ 变成 $\lfloor \sqrt{A_i} \rfloor$。
3. 对于所有的 $i \in [l,r]$，询问 $A_i$ 的和。

# Solution

- sqrt这个操作肯定是一个均摊，因为下降很快
- 但是有区间加，怎么办呢
- 想一想感觉可以维护值相同的连续段试试？

# Solution

- 然后就TLE了
- 发现会被奇怪的数据卡
- 比如3 4 3 4 3 4
- 开sqrt后变成1 2 1 2 1 2
- 然后加2又变成3 4 3 4 3 4
- Oh no !

# Solution

- 发现这种情况仅当a=b-1且b是完全平方数的时候会出现
- 于是想办法维护一下区间极差就可以判掉这种情况
- 由于取sqrt的次数是O( loglogv )的
- 所以总复杂度是O( (n+m)lognloglogv )
- 大概是使用所有连续段以外相邻位置的差来作为势能的均摊

# Luogu5068 [Ynoi2015]我回来了& [Code+#7]教科书般的亵渎

- 珂朵莉在玩炉石传说的时候总是打不出教科书般的亵渎，于是他重新写了一个炉石传说’，并且将亵渎的描述改为：“等概率随机在 [L,R] 中选出一个整数作为伤害值 d，对所有随从造成 d 点伤害，如果有随从死亡，则再次施放该法术，但伤害值不重新随机；如果没有随从死亡，则停止释放”，还去掉了场面上随从上限和亵渎最多触发14次的限制。
- 珂朵莉不知道这个改版亵渎的效果怎么样，于是他打算进行一些测试，其中共进行 m 次如下类型的操作：
- 在场面上加入一个血量为 h 的随从，这里随从的血量都不能超过 n；
- 给定 L, R，询问亵渎期望触发多少次；
- 珂朵莉只会做操作1，于是他就把操作2交给你啦。
- 保证： n<=1e5，h<=n，m<=1e6；

# Solution

- 我们考虑亵渎什么时候可以被触发
- 首先他一定会触发一次，那么这个时候需要让场上所有人的血量-d，想要触发下一次，一定需要有一个人的血量在[1,d]的范围内，如果触发第三次呢？不难发现就是需要有一个人的血量在[d+1,2d]的范围内，以此类推
- 所以对于伤害值为d的情况，亵渎能够被触发的次数就是最大的k，使得对任意i在[1,k),存在hj∈[i*(d-1)+1,i*d)
- 因为每次只有插入一个数，所以我们发现对每个d，k一定会逐渐变大

# Solution

- 变化量是多少呢？
- 可以发现这个实际上是 n/1+n/2+…+n/n=O( nlogn )，是一个调和级数
- 我们用平衡树维护每个d当前延伸到的位置，每次插入x的时候即在平衡树上暴力找出有哪些d需要继续向后延伸，然后一直延伸
- 每次一个d改变了延伸到的位置后需要一个树状数组进行单点修改
- 总时间复杂度O( nlog^2n + mlogn )

# Luogu5066[Ynoi2014]誰も彼もが、正義の名のもとに

你需要帮珂朵莉维护一个长为 $n$ 的 `01` 序列 $a$，有 $m$个操作：

- `1 l r`：把区间 $[l,r]$ 的数变成 $0$。
- `2 l r`：把区间 $[l,r]$ 的数变成 $1$。
- `3 l r`：$[l,r-1]$ 内所有数 $a_i$，变为 $a_i$ 与 $a_{i+1}$ 按位或的值，这些数同时进行这个操作。
- `4 l r`：$[l+1,r]$ 内所有数 $a_i$，变为 $a_i$ 与 $a_{i-1}$ 按位或的值，这些数同时进行这个操作。
- `5 l r`：$[l,r-1]$ 内所有数 $a_i$，变为 $a_i$ 与 $a_{i+1}$ 按位与的值，这些数同时进行这个操作。
- `6 l r`：$[l+1,r]$ 内所有数 $a_i$，变为 $a_i$ 与 $a_{i-1}$ 按位与的值，这些数同时进行这个操作。
- `7 l r`：查询区间 $[l,r]$ 的和。

# Solution

- 考虑用平衡树维护序列，将一段连续的同色极长段缩为一个点
- 发现操作具有对称性，本质上只有
- 区间染色为0/1
- 区间每个数or/and上左/右
- 区间和
- 这三种操作

# Solution

- 发现第二种操作其实就是让区间中0/1的同色极长段各自向左/右扩散一格的位置
- 我们修改的时候不修改这个给定的区间，而是让区间两端点根据操作种类和所在的同色极长段的颜色进行调整，具体来说就是检查一下是否包含这个同色极长段，然后调节我们这次修改的区间的位置
- 然后问题便转化为，每次区间中0/1的同色极长段各自变大1或者缩小1，这个可以通过在缩点平衡树结构上打标记来实现

# Solution

- 因为有可能一个同色极长段在缩了之后变成0，所以我们需要维护一下区间内最小的同色极长段长度，如果是0则暴力将其删去，同时合并两边的段
- 可以发现每次修改只会增加O(1)个同色极长段，每次删除可以花O(logn) 的代价减少一个同色极长段
- 总时间复杂度O((n+m)logn)，空间复杂度O(n)

# Luogu3747 [六省联考2017]相逢是问候

Informatik verbindet dich und mich.

信息将你我连结。

B 君希望以维护一个长度为 n 的数组，这个数组的下标为从 1 到 n 的正整数。

一共有 m 个操作，可以分为两种：

- 0 l r 表示将第 l 个到第 r 个数（ $a_l, al+1, ...a_r$ ）中的每一个数 $a_i$ 替换为 $c^{a_i}$ ，即 c 的 $a_i$ 次方，其中 c 是输入的一个常数，也就是执行赋值

  $$a_i = c^{a_i}$$

- 1 l r 求第 l 个到第 r 个数的和，也就是输出：

  $$\sum_{i=l}^{r} a_i$$

因为这个结果可能会很大，所以你只需要输出结果 mod p 的值即可。

# Solution

- 由欧拉定理，每个数最多变换O( logv )次

$$a^b \% p \equiv a^{b\%\phi(p)+\phi(p)} \% p, b \geq \phi(p)$$

$$a^b \% p \equiv a^{b\%\phi(p)} \% p, b < \phi(p)$$

- 因为这里指数每次变为phi(p)
- 当p为偶数时，phi(p)至少/2
- 当p为奇数时，phi(p)为偶数
- 如果phi(p)=1，则继续下去值不变

# Solution

- 于是暴力即可
- 需要维护区间中每个数是否下次还能进行题目中的操作
- 每个数可以操作O( logv )次，每次操作需要O( logv )的快速幂，这里均摊的代价是O( log^2v )
- 总复杂度O( (n+m)(logn+logv)logv )

# Old Driver Tree

- “ODT”“珂朵莉树”这个名字其实是开玩笑搞的，当时比较跳，现在感觉这样挺不对的
- 为了方便称呼这样的方法，暂时在这里这么写

# Old Driver Tree

- 在有类区间染色操作，以及保证数据随机的情况下
- 可以用一个平衡树维护颜色连续段的暴力来解决
- 复杂度期望O( (n+m)loglogn )，可以做到O( n + m )，但是not practical

# Old Driver Tree

- 在线可以做到
- O( (n+m)loglogn )（直接做），O( (n+m)logloglogn )（使用exponential tree），
- O( n + m )（使用O( logn/logw )的动态前驱数据结构）
- 离线可以简单的做到O( n + m )，压位即可

# Old Driver Tree

- 可以证明复杂度是期望O( (n+m)logn )的
- 假设有k种操作，其中一种是区间染色，定义势能为颜色段个数
- 每次操作的时候有两种可能性：
- 1.以O( x )的代价消除O( x )势能，势能+2，概率1/k
- 2.以O( x )的代价啥都没做，势能+2，概率1-1/k
- 势能的均摊是O( n + m )
- 于是这部分总的代价是O( (n+m)k )
- 所以复杂度瓶颈在于平衡树而不是暴力的均摊部分…

# Old Driver Tree

- 应用：
- 各种题都能用，基本上不会被卡
- 因为大部分出题人都觉得序列维护的那种数据结构题只需要随机数据就足够强了...
- 不过要注意，别被没有区间染色的部分分给卡了...

- 可以水掉各种题

# Effect

记录列表

| | | |
|---|---|---|
| Accepted 100 | P3215 [HNOI2011]括号修复 / [SOI2011]括号序列 | |
| Accepted 100 | P3215 [HNOI2011]括号修复 / [SOI2011]括号序列 | |

记录列表

| | | |
|---|---|---|
| Accepted 100 | P4344 [SHOI2015]脑洞治疗仪 | |
| Accepted 100 | P4344 [SHOI2015]脑洞治疗仪 | |
| Accepted 100 | P4344 [SHOI2015]脑洞治疗仪 | |

记录列表

| | | |
|---|---|---|
| Accepted 100 | P2042 [NOI2005]维护数列 | |
| Accepted 100 | P2042 [NOI2005]维护数列 | |

记录列表

| | | |
|---|---|---|
| Accepted 100 | P4130 [NOI2007]项链工厂 | |
| Accepted 100 | P4130 [NOI2007]项链工厂 | |
| Accepted 100 | P4130 [NOI2007]项链工厂 | |

记录列表

| | | |
|---|---|---|
| Accepted 100 | P2572 [SCOI2010]序列操作 | |
| Accepted 100 | P2572 [SCOI2010]序列操作 | |

## Problem 3337 Status

| No. | RunID | User | Memory | Time | Language | Code_Length | Submit_Time |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2538009(4) | fengchanghn | 5552 KB | 912 MS | C++ | 6941 B | 2018-01-23 19:06:12 |
| 2 | 2449588(3) | kcznc1 | 23952 KB | 928 MS | C++ | 6527 B | 2017-12-09 19:03:02 |
| 3 | 2438414 | Claris | 5516 KB | 1060 MS | C++ | 4422 B | 2017-12-04 12:04:38 |
| 4 | 2438323 | Darius | 5516 KB | 1088 MS | C++ | 4602 B | 2017-12-04 11:08:13 |
| 5 | 2075410(4) | Drench | 6780 KB | 1652 MS | C++ | 7092 B | 2017-05-23 13:47:20 |
| 6 | 1368530(14) | nzhtl1477 | 22644 KB | 1676 MS | C++ | 6041 B | 2016-04-03 15:08:28 |
| 7 | 2449648 | Zcysky | 28848 KB | 1832 MS | C++ | 6423 B | 2017-12-09 20:06:28 |
| 8 | 2788307 | EMOAIRX | 34888 KB | 2172 MS | C++ | 7646 B | 2018-06-09 13:27:20 |
| 9 | 2736988(3) | Ez3leal | 34888 KB | 2184 MS | C++ | 7642 B | 2018-05-02 17:25:07 |
| 10 | 2466811 | DZYO | 34888 KB | 2188 MS | C++ | 6130 B | 2017-12-18 18:38:17 |
| 11 | 2751069 | Cydiater | 7548 KB | 2680 MS | C++ | 5038 B | 2018-05-14 18:34:59 |
| 12 | 2328023(4) | xehoth | 4980 KB | 5276 MS | C++ | 19623 B | 2017-09-30 22:25:58 |
| 13 | 2693727(2) | zzh2003214 | 12148 KB | 6684 MS | C++ | 4861 B | 2018-04-08 19:36:10 |
| 14 | 2021875 | fjzzq2002 | 17356 KB | 6808 MS | C++ | 4193 B | 2017-04-22 09:09:46 |
| 15 | 2541410(4) | wanhorun | 9176 KB | 7132 MS | C++ | 8801 B | 2018-01-25 09:55:42 |
| 16 | 2537998(2) | Devil_Gary | 9116 KB | 7484 MS | C++ | 8871 B | 2018-01-23 19:00:54 |
| 17 | 2193728 | vjudge5 | 11080 KB | 8940 MS | C++ | 8929 B | 2017-07-28 20:31:54 |
| 18 | 2193661 | vjudge2 | 69860 KB | 8976 MS | C++ | 8929 B | 2017-07-28 20:08:49 |
| 19 | 1275539(2) | _noname | 6688 KB | 9096 MS | C++ | 11626 B | 2016-02-17 21:21:18 |
| 20 | 539882(3) | wangyisong1996 | 33960 KB | 9552 MS | C++ | 24588 B | 2014-01-31 15:41:30 |

## Problem 4649 Status

| No. | RunID | User | Memory | Time | Language | Code_Length | Submit_Time |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1569068(7) | nzhl1477 | 25348 KB | 3056 MS | C++ | 9126 B | 2016-07-30 22:02:34 |
| 2 | 2439867(2) | Claris | 9320 KB | 5600 MS | C++ | 6914 B | 2017-12-05 01:12:25 |
| 3 | 1567261(3) | DpDarkFantasy | 15840 KB | 24476 MS | C++ | 10803 B | 2016-07-29 12:42:45 |

[TOP] [STATUS]

# Thanks for listening