INFO183 Análisis de Sistemas Lineales, Primavera 2018, Prueba N°1

Profesor: Pablo Huijse H. **Tiempo:** 1.5 horas

$\mathbb{FT}[s(t)] = S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$	$\mathbb{FT}^{-1}[S(\omega)] = s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$
$\mathbb{FT}[(s_1 * s_2)(t)] = S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$	$\mathbb{FT}[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \frac{1}{2\pi}(S_1 * S_2)(\omega)$
$S[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$	$s[n] = \sum_{k=0}^{N-1} S[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

1. Responda de manera breve y justificando donde corresponda
   (a) (1pt) Considere su vídeo favorito de *youtube*. ¿Es esto un ejemplo de señal? ¿Cuáles son las variables dependientes e independientes? ¿Son las variables continuas o discretas?
   (b) (1pt) ¿Cómo se obtiene una señal digital a partir de una señal analógica?
   (c) (1pt) ¿Qué diferencia una señal determinista de una estocástica? ¿Qué es el ruido?
   (d) (1.5pt) Explique el concepto de aliasing, indique cuando ocurre y como se puede evitar
   (e) (1.5pt) Explique el principio de incertidumbre en el contexto del análisis de *Fourier*

2. Sea una señal continua $s(t)$ con espectro $S(\omega)$ que es multiplicada por una peineta de *Dirac* con período $1/F_s$ resultando en

$$s_d(t) = s(t) \cdot \mathrm{III}_{1/F_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t - n/F_s)$$

   (a) (1pt) Use la propiedad de modulación para mostrar que $S_d(\omega) = \mathbb{FT}[s_d(t)]$ es una versión periódica de $S(\omega)$ ¿Cuál es su periodo? HINT: $\mathbb{FT}[\mathrm{III}_T(t)] = \frac{2\pi}{T}\mathrm{III}_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$
   (b) (2pt) Encuentre la transformada de *Fourier* inversa del filtro pasabajos ideal

$$H(\omega) = \begin{cases} 1/F_s & |\omega| \leq \pi F_s \\ 0 & |\omega| > \pi F_s \end{cases}$$

   (c) (2pt) Use la propiedad de convolución para mostrar que $\mathbb{FT}^{-1}[S_d(\omega)H(\omega)]$ es igual a

$$\widehat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]\mathrm{sinc}(\pi(tF_s - n)),$$

   donde $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ y $s[n] \equiv s(t = n/F_s), \forall n$
   (d) (1pt) ¿Qué se debe cumplir en términos espectrales para que $\widehat{s}(t) = s(t)$?

3. Sea una secuencia $s[n]$ con $n = 0, 1, \ldots, N-1$. HINT: $e^{\pm j2\pi n} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$
   (a) (1pt) Muestre que $S[k] = \mathrm{DFT}_N(s[n])$ es periódica en N
   (b) (1pt) Muestre que $S[k] = \mathrm{DFT}_{N/2}(s[2n]) + e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\mathrm{DFT}_{N/2}(s[2n+1])$
   (c) (1pt) Muestre que $S[k]$ y $S[k + N/2]$ solo difieren en un signo
   (d) (2pt) Suponga ahora que $N = 4$. Escriba las expresiones de $S[0]$, $S[1]$, $S[2]$ y $S[3]$ y compruebe que se cumple la propiedad anterior.
   (e) (1pt) Sea $s[n] = [1, 1, 0, 0]$ encuentre $S[k]$ para $k = 0, 1, 2, 3$