

## Capítulo 5

# Diseños en bloques aleatorizados

### 5.1. Introducción

En las situaciones que hemos estudiado en el Capítulo 1 hemos supuesto que existe bastante homogeneidad entre las unidades experimentales, así, por ejemplo, en el caso de la industria algodonera, hemos supuesto que las parcelas de terreno son de la misma calidad e igual superficie. Pero, puede suceder que dichas parcelas sean distintas y contribuyan a la variabilidad observada en el rendimiento de la semilla de algodón. Si en esta situación se utiliza un diseño completamente aleatorizado, las diferencias entre los rendimientos de dos unidades experimentales sometidas a distintos tratamientos no sabremos si se deben a una diferencia real entre los efectos de los tratamientos o a la heterogeneidad de dichas unidades. Como resultado el error experimental reflejará esta variabilidad entre las parcelas de terreno.

En todo diseño de experimento se desea que el error experimental sea lo más pequeño posible. Por lo tanto, en la situación descrita se debe sustraer del error experimental la variabilidad producida por las parcelas de terreno. Para ello, el experimentador puede:

- Considerar parcelas de terreno muy homogéneas.
- O bien, formar bloques de terreno de manera que el terreno de cada bloque sea lo más homogéneo posible y los bloques entre sí sean heterogéneos.

En esta última situación, cada bloque se divide en  $I$  parcelas de terreno, tantas como tratamientos y cada tratamiento se prueba en cada uno de los bloques. Los  $I$  tratamientos, en este caso las  $I$  variedades del fertilizante, se asignan al azar a cada una de las  $I$  parcelas del bloque; esto se hace con asignación aleatoria independientemente en cada bloque. Este

diseño se conoce como *diseño en bloques*<sup>1</sup> *completos aleatorizados*. La palabra *completo* indica que todos los tratamientos se prueban en cada bloque.

Puede suceder, cuando se realizan diseños en bloques aleatorizados, que no puedan realizarse los ensayos de todos los tratamientos dentro de cada bloque, debido, por ejemplo, a la escasez de recursos del experimento o al tamaño físico de los bloques. Es decir, no se puede aplicar cada fertilizante en cada bloque. En estos casos, es posible usar diseños aleatorizados por bloques en los que no todos los tratamientos se encuentran representados en cada bloque, y aquellos que sí están representados en uno en particular se ensayan en él una sola vez. Estos diseños se conocen como *diseños por bloques incompletos*.

Recordemos que en el diseño completamente aleatorizado asignábamos los tratamientos al azar a las parcelas sin restricción alguna, mientras que en el diseño en bloques aleatorizados primero agrupamos las parcelas en bloques y a continuación asignamos los tratamientos a las parcelas en cada bloque. Podemos decir, por tanto, que un diseño en bloque aleatorizados es un diseño con aleatorización restringida en el cual las unidades experimentales son primero clasificadas en grupos homogéneos, llamados *bloques*, y los tratamientos son entonces asignados aleatoriamente dentro de los bloques.

Esta estrategia de diseño mejora efectivamente la precisión en las comparaciones al reducir la variabilidad residual. Dicho diseño es quizás el diseño experimental más ampliamente utilizado. En la práctica, las situaciones en las que este diseño se aplica son muy numerosas y pueden identificarse fácilmente.

Estudiaremos en primer lugar el *diseño en bloques completos aleatorizados*, y en la sección ?? el diseño en bloques incompletos.

## 5.2. Diseño en bloques completos aleatorizados

Para desarrollar esta sección consideramos el siguiente ejemplo al que seguiremos haciendo referencia en las sucesivas secciones.

### Ejemplo 5.1

*Una industria algodonera, interesada en maximizar el rendimiento de la semilla de algodón, quiere comprobar si dicho rendimiento depende del tipo de fertilizante utilizado para tratar la planta. A su disposición tiene 5 tipos de fertilizantes. Como puede haber diferencia entre las parcelas, el experimentador decide efectuar un diseño en bloques aleatorizados. Para ello, divide el terreno en 4 bloques<sup>2</sup> y cada bloque en 5 parcelas, fumigando dentro*

---

<sup>1</sup> El término *bloques aleatorios* procede de la experimentación agrícola, en la que pueden usarse parcelas de terreno como unidades experimentales. Un *bloque* consiste en varias parcelas adyacentes, y se supone que las parcelas adyacentes son más semejantes que las alejadas entre sí.

<sup>2</sup> El terreno, en cada bloque, debe ser lo más homogéneo posible.

de cada bloque cada una de las parcelas con un fertilizante. Al recoger la cosecha se mide el rendimiento de la semilla, obteniéndose las siguientes observaciones.

**Tabla 4-1.** Rendimiento de la semilla de algodón

Fertilizantes	Bloques			
	A	B	C	D
1	87	86	88	83
2	85	87	95	85
3	90	92	95	90
4	89	97	98	88
5	99	96	91	90

Específicamente, en este experimento, se han considerado 5 tipos de fertilizantes que se han aplicado aleatoriamente a las parcelas dentro de cada bloque. La variable de interés o variable respuesta es el rendimiento de la semilla en peso por unidad de superficie. En este ejemplo hemos supuesto que el tipo de terreno influye en el rendimiento de la semilla de algodón y decidimos “controlar” estadísticamente sus efectos, mediante la formación de *bloques*. Es decir, nuestro propósito es eliminar en el estudio de los efectos del fertilizante la variabilidad debida al terreno e intentar que de esta forma sean más patentes las diferencias entre los fertilizantes, si las hay.

### 5.2.1. Planteamiento del modelo

Todo el planteamiento anterior se puede formalizar de manera general. Supongamos  $I$  tratamientos, ( $I$  fertilizantes), y supongamos también que hay otra variable que pueda influir en la variable respuesta, (por ejemplo el tipo de terreno) y cuyos efectos deseamos “controlar” estadísticamente. Para ello, seleccionamos  $J$  niveles de esta variable,  $J$  bloques, y aplicamos cada uno de los  $I$  niveles del tratamiento en cada bloque. La figura 4-1 muestra este tipo de diseño.

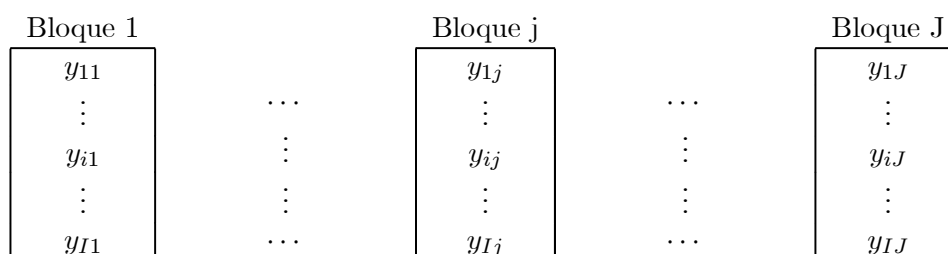


Figura 4-1. Diseño en bloques completos aleatorizados.

Supondremos que se realiza una observación por tratamiento en cada bloque, por tanto, hay un total de  $N = IJ$  observaciones y que la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales en cada bloque se determina aleatoriamente. También se supone que tanto los tratamientos como los bloques son factores de efectos fijos y que no hay interacción entre ellos. Se dice que no hay interacción entre dos factores cuando el efecto de un factor no depende del nivel del otro factor; en este caso se dice que los efectos de los factores son aditivos.

Las observaciones se pueden disponer en forma de tabla de doble entrada como la siguiente

**Tabla 4-2.** Diseño en bloques aleatorizado

Tratamientos	Bloques					
	1	2	$\cdots$	$j$	$\cdots$	$J$
1	$y_{11}$	$y_{12}$	$\cdots$	$y_{1j}$	$\cdots$	$y_{1J}$
2	$y_{21}$	$y_{22}$	$\cdots$	$y_{2j}$	$\cdots$	$y_{2J}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i$	$y_{i1}$	$y_{i2}$	$\cdots$	$y_{ij}$	$\cdots$	$y_{iJ}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
I	$y_{I1}$	$y_{I2}$	$\cdots$	$y_{Ij}$	$\cdots$	$y_{IJ}$

Generalmente no vamos a utilizar el término *completo* cuando en el contexto esté claro que todos los tratamientos están incluidos en cada bloque.

Utilizamos la siguiente notación:

- $N = IJ$  es el número total de observaciones.
- $y_{i.}$  es el total de las observaciones bajo el  $i$ -ésimo tratamiento, es decir

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^J y_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (5.1)$$

- $y_{.j}$  es el total de las observaciones bajo el  $j$ -ésimo bloque, es decir

$$y_{.j} = \sum_{i=1}^I y_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (5.2)$$

- $y_{..}$  es la suma de todas las observaciones, denominado el total general, es decir

$$y_{..} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij} = \sum_{i=1}^I y_{i.} = \sum_{j=1}^J y_{.j} \quad (5.3)$$

- $\bar{y}_{i.}$  es la media de las observaciones del tratamiento  $i$ -ésimo, es decir

$$\bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{J}$$

- $\bar{y}_{.j}$  es la media de las observaciones del bloque  $j$ -ésimo, es decir

$$\bar{y}_{.j} = \frac{y_{.j}}{I}$$

- $\bar{y}_{..}$  es la media general de las observaciones, es decir

$$\bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij} \quad ,$$

que también se puede expresar como media de las medias parciales, es decir

$$\bar{y}_{..} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{y}_{i.} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{y}_{.j} \quad .$$

El modelo estadístico para este diseño es:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + u_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, I \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, J \quad , \quad (5.4)$$

donde

- $y_{ij}$  es la variable aleatoria que representa la observación  $(i)$ -ésima del bloque  $(j)$ -ésimo.
- $\mu$  es un efecto constante que mide el nivel promedio de respuesta para todas las unidades, denominado media global.
- $\tau_i$  es el efecto producido por el nivel  $i$ -ésimo del factor principal. Se supone que  $\sum_i \tau_i = 0$ .
- $\beta_j$  es el efecto producido por el nivel  $j$ -ésimo del factor secundario o factor de bloque. Se supone que  $\sum_j \beta_j = 0$ .

- $u_{ij}$  son variables aleatorias independientes con distribución  $N(0, \sigma)$ , que engloban el efecto de todas las restantes fuentes de variabilidad; al igual que en el modelo completamente aleatorizado, reciben el nombre de *perturbaciones* o *error experimental*.

En este modelo intervienen dos factores, el factor tratamiento y el factor bloque. Al primero es usual llamarlo *factor principal* mientras que al segundo *factor secundario*, puesto que nuestro interés fundamentalmente está centrado en el primero y el factor bloque se introduce en el modelo para eliminar su influencia en la variable respuesta.

Nuestro objetivo es estimar los efectos de los tratamientos y de los bloques y contrastar la hipótesis de que todos los niveles del factor principal producen el mismo efecto, frente a la alternativa de que al menos dos difieren significativamente. También es de interés contrastar la igualdad de los efectos de los bloques.

La expresión y condiciones de este modelo se resumen en:

$$\begin{array}{ll}
 1^o) & y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + u_{ij} \\
 2^o) & u_{ij} \rightsquigarrow N(0, \sigma) \quad \forall i, j \\
 3^o) & u_{ij} \text{ son independientes entre sí} \\
 4^o) & \sum_{i=1}^I \tau_i = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^J \beta_j = 0 \quad .
 \end{array} \tag{5.5}$$

Las hipótesis establecidas para la variable de perturbación pueden ser formuladas también en términos de la variable respuesta. Es decir, las observaciones  $y_{ij}$  son variables aleatorias independientes con distribución normal, con media

$$E[y_{ij}] = \mu + \tau_i + \beta_j \quad , \tag{5.6}$$

y varianza constante

$$\sigma^2[y_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall i, j \quad . \tag{5.7}$$

En este planteamiento, el contraste de hipótesis más importante es

$$\begin{array}{ll}
 H_0 : & \tau_i = 0 \quad \forall i \\
 H_1 : & \tau_i \neq 0 \quad \text{por lo menos para algún } i \quad .
 \end{array} \tag{5.8}$$

A continuación, vamos a estudiar la estimación de los parámetros del modelo  $\mu, \tau_i, \beta_j$  y  $\sigma^2$ .

### 5.2.2. Estimación de los parámetros del modelo

#### Estimación por máxima verosimilitud

Al igual que en modelo completamente aleatorizado se construye la función de verosimilitud asociada a la muestra  $\mathbf{y} = (y_{11}, \dots, y_{1J}, \dots, y_{I1}, \dots, y_{IJ})$ :

$$\mathbb{L}(\mu, \tau_i, \beta_j, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j]^2 \right) , \quad (5.9)$$

se determina el logaritmo de dicha función

$$\ln(\mathbb{L}(\mu, \tau_i, \beta_j, \sigma^2)) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j]^2 , \quad (5.10)$$

y se hallan las primeras derivadas parciales respecto de los parámetros del modelo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \mathbb{L}}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j] \\ \frac{\partial \ln \mathbb{L}}{\partial \tau_i} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j] \quad i = 1, \dots, I \\ \frac{\partial \ln \mathbb{L}}{\partial \beta_j} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^I [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j] \quad j = 1, \dots, J \\ \frac{\partial \ln \mathbb{L}}{\partial \sigma^2} &= -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j]^2 . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Igualando a cero estas derivadas parciales, se obtiene un sistema de ecuaciones que proporciona los estimadores máximo verosímiles. Dichos estimadores vienen dados por las expresiones

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij}}{N} = \bar{y}_{..} , \quad (5.12)$$

$$\hat{\tau}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J y_{ij} - \hat{\mu} = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \quad , \quad (5.13)$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I y_{ij} - \hat{\mu} = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \quad . \quad (5.14)$$

Por tanto, la media general se estima utilizando el promedio de todas las observaciones y cualquiera de los efectos de los factores se estiman usando la diferencia entre el promedio correspondiente al nivel del factor y el promedio total.

Se puede comprobar fácilmente que

$$\sum_i \hat{\tau}_i = 0$$

y

$$\sum_j \hat{\beta}_j = 0$$

siendo, por tanto,  $I - 1$  y  $J - 1$  los grados de libertad asociados a los tratamientos y a los bloques, respectivamente.

Finalmente, sustituyendo  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\tau}_i$  y  $\hat{\beta}_j$  en la última ecuación de (5.11) igualada a cero, obtenemos el estimador de máxima verosimilitud para la varianza

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j \right]^2 \quad . \quad (5.15)$$

## Residuos

Los residuos se definen como las diferencias entre los valores observados  $y_{ij}$  y los valores estimados por el modelo  $\hat{y}_{ij}$  y los denotamos por  $e_{ij}$ ,

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j = y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..} \quad . \quad (5.16)$$

Por lo tanto, el estimador máximo-verosimil,  $\hat{\sigma}^2$ , se puede escribir como

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J e_{ij}^2}{N}$$



Se verifica que la suma de los residuos por filas y por columnas es cero, en efecto

$$\begin{aligned}\sum_j e_{ij} &= \sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j) = J\bar{y}_{i.} - J\bar{y}_{..} - J\hat{\tau}_i - \sum_j \hat{\beta}_j = \\ & J\bar{y}_{i.} - J\bar{y}_{..} - J(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) = 0 \quad i = 1, \dots, I \\ \sum_i e_{ij} &= \sum_i (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j) = I\bar{y}_{.j} - I\bar{y}_{..} - \sum_i \hat{\tau}_i - I\hat{\beta}_j = \\ & I\bar{y}_{.j} - I\bar{y}_{..} - I(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) = 0 \quad j = 1, \dots, J\end{aligned}$$

por lo tanto hay  $(I-1)(J-1)$  residuos independientes, ya que

$$IJ - (I + J - 1) = (I-1)(J-1) \quad .$$

### Propiedades de los estimadores máximo verosímiles

A continuación vamos a ver algunas propiedades que verifican los estimadores del modelo. Concretamente, vamos a determinar su esperanza, su varianza y su distribución en el muestreo.

#### 1) Propiedades de $\hat{\mu}$

a)  $\hat{\mu}$  es un estimador centrado de  $\mu$ , puesto que

$$\begin{aligned}E[\hat{\mu}] &= E[\bar{y}_{..}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J E[y_{ij}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\mu + \tau_i + \beta_j) = \\ & \frac{1}{N} \left( N\mu + J \sum_{i=1}^I \tau_i + I \sum_{j=1}^J \beta_j \right) = \frac{1}{N} N\mu = \mu\end{aligned}$$

b) La varianza de  $\hat{\mu}$  es  $\sigma^2/N$ , puesto que al ser independientes las observaciones se verifica:

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{\mu}] &= \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{y_{ij}}{N} \right] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \text{Var} \left[ \frac{y_{ij}}{N} \right] = \sum_{i,j} \frac{\text{Var}[y_{ij}]}{N^2} = \\ & \sum_{i,j} \frac{\sigma^2}{N^2} = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}\end{aligned}$$

- c)  $\hat{\mu}$  se distribuye según una Normal, puesto que dicho estimador es combinación lineal de variables aleatorias independientes con distribución Normal.

2) Propiedades de  $\hat{\tau}_i$

- a)  $\hat{\tau}_i$  es un estimador centrado de  $\tau_i$ , puesto que

$$E[\hat{\tau}_i] = E[\bar{y}_{i.}] - E[\bar{y}_{..}] = \mu + \tau_i - \mu = \tau_i \quad .$$

En efecto

$$\begin{aligned} E[\bar{y}_{i.}] &= E\left[\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J y_{ij}\right] = \frac{1}{J} E\left[\sum_{j=1}^J (\mu + \tau_i + \beta_j + u_{ij})\right] = \\ &= \frac{1}{J} \left[ J\mu + J\tau_i + \sum_{j=1}^J \beta_j + \sum_{j=1}^J E[u_{ij}] \right] = \mu + \tau_i \end{aligned}$$

- b) La varianza de  $\hat{\tau}_i$  es  $(I-1)\frac{\sigma^2}{N}$ , puesto que

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\tau}_i] &= \text{Var}[\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}] = \text{Var}\left[\frac{1}{J} \sum_j y_{ij} - \frac{1}{N} \sum_{i,j} y_{ij}\right] = \\ &= \frac{1}{J^2} \sum_j \text{Var}(y_{ij}) + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \text{Var}(y_{ij}) - \frac{2}{NJ} \text{Cov}\left[\sum_j y_{ij}, \sum_{i,j} y_{ij}\right] = \\ &= \frac{1}{J^2} \sum_j \sigma^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \sigma^2 - \frac{2}{NJ} J\sigma^2 = \\ &= \frac{1}{J} \sigma^2 + \frac{1}{N} \sigma^2 - \frac{2\sigma^2}{N} = \frac{\sigma^2}{J} - \frac{\sigma^2}{N} = (I-1) \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned} \tag{5.17}$$

- c)  $\hat{\tau}_i$  se distribuye según una Normal, puesto que dicho estimador está expresado como función lineal de variables aleatorias con distribución Normal.

3) Propiedades de  $\hat{\beta}_j$

a)  $\widehat{\beta}_j$  es un estimador centrado de  $\beta_j$ , puesto que

$$E[\widehat{\beta}_j] = E[\bar{y}_{.j}] - E[\bar{y}_{..}] = \mu + \beta_j - \mu = \beta_j \quad .$$

En efecto

$$\begin{aligned} E[\bar{y}_{.j}] &= E\left[\frac{1}{I} \sum_i y_{ij}\right] = \frac{1}{I} E\left[\sum_i (\mu + \tau_i + \beta_j + u_{ij})\right] = \\ &= \frac{1}{I} \left[ I\mu + \sum_i \tau_i + I\beta_j + \sum_i E[u_{ij}] \right] = \mu + \beta_j \end{aligned}$$

b) La varianza de  $\widehat{\beta}_j$  es  $(J-1)\frac{\sigma^2}{N}$

c)  $\widehat{\beta}_j$  se distribuye según una Normal.

4) Propiedades de  $\widehat{\sigma}^2$

$\widehat{\sigma}^2$  no es un estimador insesgado de  $\sigma^2$  puesto que se verifica

$$\frac{N\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (e_{ij})^2 \rightsquigarrow \chi_{(I-1)(J-1)}^2 \quad ,$$

donde los grados de libertad de la distribución  $\chi^2$  corresponden al número de residuos independientes, por tanto

$$E\left[\frac{N\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right] = (I-1)(J-1) \Rightarrow E[\widehat{\sigma}^2] = \frac{(I-1)(J-1)}{N} \sigma^2 \quad ,$$

luego  $\widehat{\sigma}^2$  no es un estimador insesgado de  $\sigma^2$ . Ahora bien, a partir de este resultado se construye fácilmente un estimador centrado simplemente considerando

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{N}{(I-1)(J-1)} \widehat{\sigma}^2 \quad .$$

Dicho estimador recibe el nombre de *varianza residual*, se denota por  $\widehat{S}_R^2$  y se expresa, por tanto, de la siguiente forma

$$\widetilde{\sigma}^2 = \widehat{S}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \widehat{y}_{ij}]^2}{(I-1)(J-1)} = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J e_{ij}^2}{(I-1)(J-1)} \quad . \quad (5.18)$$

Vamos a demostrar que efectivamente

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (e_{ij})^2 \rightsquigarrow \chi_{(I-1)(J-1)}^2 \quad .$$

Para ello, definamos los siguientes vectores, formado cada uno de ellos por  $N$  componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (y_{11}, \dots, y_{1J}, y_{21}, \dots, y_{2J}, \dots, y_{I1}, \dots, y_{IJ})' \\ \underline{\mu} &= (\mu, \dots, \mu, \mu, \dots, \mu, \dots, \mu, \dots, \mu)' \\ \underline{\tau} &= (\tau_1, \dots, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_2, \dots, \tau_I, \dots, \tau_I)' \\ \underline{\beta} &= (\beta_1, \dots, \beta_J, \beta_1, \dots, \beta_J, \dots, \beta_1, \dots, \beta_J)' \\ \mathbf{U} &= (u_{11}, \dots, u_{1J}, u_{21}, \dots, u_{2J}, \dots, u_{I1}, \dots, u_{IJ})' \quad . \end{aligned}$$

De esta forma, el modelo en bloques aleatorizados se puede expresar como:

$$\mathbf{Y} = \underline{\mu} + \underline{\tau} + \underline{\beta} + \mathbf{U} \quad (5.19)$$

Denotemos por  $\hat{\underline{\mu}}$ ,  $\hat{\underline{\tau}}$ ,  $\hat{\underline{\beta}}$  y  $\mathbf{e}$ , los vectores obtenidos al sustituir los parámetros por sus estimadores y las perturbaciones  $u_{ij}$  por los residuos  $e_{ij}$ , respectivamente. Verificándose, por tanto, la siguiente identidad

$$\mathbf{Y} = \hat{\underline{\mu}} + \hat{\underline{\tau}} + \hat{\underline{\beta}} + \mathbf{e} \quad (5.20)$$

De (5.19) y (5.20) se obtiene

$$\mathbf{U} = (\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu}) + (\hat{\underline{\tau}} - \underline{\tau}) + (\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}) + \mathbf{e} \quad (5.21)$$

dividiendo (5.21) por  $\sigma$  y llamando  $\mathbf{Z} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{U}$ , se tiene la siguiente descomposición del vector  $\mathbf{Z}$ , de variables normales  $(0, 1)$ , en componentes ortogonales.

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\sigma} (\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu}) + \frac{1}{\sigma} (\hat{\underline{\tau}} - \underline{\tau}) + \frac{1}{\sigma} (\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}) + \frac{1}{\sigma} \mathbf{e} \quad (5.22)$$

En efecto, los siguientes productos escalares son nulos

\*)

$$(\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu})' \mathbf{e} = (\bar{y}_{..} - \mu) \sum_i \sum_j e_{ij} = 0 \quad (5.23)$$

$$*) \quad (\widehat{\underline{\tau}} - \underline{\tau})' \mathbf{e} = \sum_i \sum_j (\widehat{\tau}_i - \tau_i) e_{ij} = \sum_i (\widehat{\tau}_i - \tau_i) \sum_j e_{ij} = 0 \quad (5.24)$$

$$*) \quad (\widehat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})' \mathbf{e} = \sum_i \sum_j (\widehat{\beta}_j - \beta_j) e_{ij} = \sum_j (\widehat{\beta}_j - \beta_j) \sum_i e_{ij} = 0 \quad (5.25)$$

De forma similar se comprueba que los restantes productos escalares son nulos. Por lo tanto, los vectores en que se descompone  $\mathbf{Z}$  son ortogonales y se verifican las condiciones del teorema de Cochran cuyo enunciado presentamos en el Capítulo 1.

Por consiguiente, los cuadrados de los módulos de los vectores de la descomposición (5.22) seguirán distribuciones  $\chi^2$  independientes cuyos grados de libertad serán la dimensión del subespacio al que pertenezca cada vector. De esta forma,

- a) Como  $(\widehat{\underline{\mu}} - \underline{\mu})$  pertenece a un subespacio de dimensión 1, al tener todas sus coordenadas iguales:

$$\frac{N(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_1^2$$

- b) Como  $(\widehat{\underline{\tau}} - \underline{\tau})$  pertenece a un subespacio de dimensión  $I - 1$ , al tener  $I$  coordenadas distintas y una ecuación de restricción:

$$\frac{1}{\sigma} (\widehat{\underline{\tau}} - \underline{\tau})' \times \frac{1}{\sigma} (\widehat{\underline{\tau}} - \underline{\tau}) = \frac{J}{\sigma^2} \sum_i (\widehat{\tau}_i - \tau_i)^2 \rightsquigarrow \chi_{I-1}^2$$

- c) Como  $(\widehat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})$  pertenece a un subespacio de dimensión  $J - 1$ , al tener  $J$  coordenadas distintas y una ecuación de restricción:

$$\frac{1}{\sigma} (\widehat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})' \times \frac{1}{\sigma} (\widehat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}) = \frac{I}{\sigma^2} \sum_j (\widehat{\beta}_j - \beta_j)^2 \rightsquigarrow \chi_{J-1}^2$$

- d) El vector  $\mathbf{e}$  tiene  $IJ$  coordenadas, en principio distintas, pero sujetas, como hemos visto, a las ecuaciones de restricción

$$\sum_j e_{ij} = 0 \quad ; \quad \sum_i e_{ij} = 0$$

es decir, la suma de los residuos por filas y por columnas es cero, lo que implica  $I + J - 1$  ecuaciones de restricción e  $IJ - (I + J - 1) = (I - 1)(J - 1)$  residuos independientes. Por lo tanto,

$$\frac{\sum_i \sum_j e_{ij}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{(I-1)(J-1)}^2 \quad .$$

En resumen,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &\rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2/N) \\ \hat{\tau}_i &\rightsquigarrow N(\tau_i, (I-1)\sigma^2/N) \\ \hat{\beta}_j &\rightsquigarrow N(\beta_j, (J-1)\sigma^2/N) \\ N\hat{\sigma}^2/\sigma^2 &\rightsquigarrow \chi_{(I-1)(J-1)}^2 \end{aligned}$$

### 5.2.3. Descomposición de la variabilidad

Como dijimos en el Capítulo 1, para comparar globalmente los efectos de los distintos niveles de un factor se emplea la técnica estadística denominada *análisis de la varianza*, que está basada en la descomposición de la variabilidad total de los datos en distintas componentes. En los diseños en bloques aleatorizados también se emplea esta técnica y para ello consideramos la siguiente identidad:

$$y_{ij} = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \quad , \quad (5.26)$$

que expresa cada variable  $y_{ij}$  observada como la suma de cuatro términos:

- La media total  $\bar{y}_{..}$ , es decir el estimador de  $\mu$
- El efecto producido por el tratamiento  $i$ -ésimo, (desviación de la media del  $i$ -ésimo nivel del factor principal respecto de la media total),  $\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$ , es decir el estimador de  $\tau_i$
- El efecto producido por el bloque  $j$ -ésimo, (desviación de la media del  $j$ -ésimo nivel del factor bloque respecto de la media total),  $\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ , es decir el estimador de  $\beta_j$
- La diferencia entre los valores observados  $y_{ij}$  y los valores previstos por el modelo  $\hat{y}_{ij}$ , es decir el estimador de  $u_{ij}$ .

Por tanto, la expresión (5.26) también se puede poner en la forma

$$y_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j + e_{ij} \quad (5.27)$$

Considerando esta expresión para todas las observaciones y expresándola en forma vectorial resultan los siguientes vectores, todos ellos de dimensión  $N$ :

- $\mathbf{Y}$ : Contiene los  $N$  términos independientes  $y_{ij}$ . Tiene, por tanto,  $N$  grados de libertad.
- $\hat{\underline{\mu}}$ : Contiene  $N$  coordenadas iguales a  $\bar{y}_{..}$ . Tiene, por tanto, un grado de libertad.
- $\hat{\underline{\tau}}$ : Contiene  $I$  valores distintos  $\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$ , cada uno repetido  $J$  veces. Tiene  $I - 1$  grados de libertad, ya que  $\sum_i \hat{\tau}_i = 0$ .
- $\hat{\underline{\beta}}$ : Contiene  $J$  valores distintos  $\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ , cada uno repetido  $I$  veces. Tiene  $J - 1$  grados de libertad, ya que  $\sum_j \hat{\beta}_j = 0$ .
- $\mathbf{e}$ : Contiene los  $N$  residuos estimados, que deben sumar cero por filas y por columnas. Tiene, por tanto,  $N - (I + J - 1)$  grados de libertad.

Por lo que, la ecuación (5.26) aplicada a los  $N$  datos tomará la siguiente forma (mostrada anteriormente):

$$\mathbf{Y} = \hat{\underline{\mu}} + \hat{\underline{\tau}} + \hat{\underline{\beta}} + \mathbf{e} \quad (5.28)$$

Esta descomposición está formada por componentes ortogonales dos a dos siendo los grados de libertad de  $\mathbf{Y}$  la suma de los grados de libertad de los componentes. En efecto, se comprueba directamente que

$$\hat{\underline{\mu}}' \times \hat{\underline{\tau}} = \bar{y}_{..} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \hat{\tau}_i = 0$$

$$\hat{\underline{\mu}}' \times \hat{\underline{\beta}} = \bar{y}_{..} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j = 0$$

$$\hat{\underline{\mu}}' \times \mathbf{e} = \bar{y}_{..} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J e_{ij} = 0$$

$$\hat{\underline{\tau}}' \times \hat{\underline{\beta}} = \sum_{i=1}^I \hat{\tau}_i \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j = 0$$

$$\underline{\hat{\tau}}' \times \mathbf{e} = \sum_{i=1}^I \hat{\tau}_i \sum_{j=1}^J e_{ij} = 0$$

$$\underline{\hat{\beta}}' \times \mathbf{e} = \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j \sum_{i=1}^I e_{ij} = 0$$

y

$$N = 1 + (I - 1) + (J - 1) + (I - 1)(J - 1)$$

La ecuación (5.26) también se puede expresar

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \quad , \quad (5.29)$$

elevando los dos miembros al cuadrado y sumando para todas las observaciones tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})]^2 = \\ &= J \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde los dobles productos se anulan (ya que los términos son ortogonales, como acabamos de comprobar), por lo que dicha ecuación queda en la forma



$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = J \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \quad (5.31)$$

que representa la *ecuación básica del análisis de la varianza*, que simbólicamente podemos escribir

$$SCT = SCTr + SCBl + SCR \quad ,$$

donde hemos desglosado la variabilidad total de los datos

$$SCT = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \quad ,$$

denominada *suma total de cuadrados*, en tres componentes:

- 1)  $SCTr = J \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$ , la suma de cuadrados de las diferencias entre las medias de los tratamientos y la media general, que expresa la variabilidad explicada por los tratamientos, denominada *suma de cuadrados entre tratamientos*.
- 2)  $SCBl = I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$ , la suma de cuadrados de las diferencias entre las medias de los bloques y la media general, que expresa la variabilidad explicada por los bloques, denominada *suma de cuadrados entre bloques*.
- 3)  $SCR = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$ , la suma de cuadrados de los residuos, que expresa la variabilidad no explicada por el modelo, denominada *suma de cuadrados del error*.

A partir de la ecuación básica del ANOVA se pueden construir los cuadrados medios definidos como:

\* Cuadrado medio total

$$\hat{S}_T^2 = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2}{N - 1} \quad (5.32)$$

\* Cuadrado medio entre tratamientos

$$\hat{S}_{Tr}^2 = \frac{J \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{I - 1} \quad (5.33)$$

\* Cuadrado medio entre bloques

$$\hat{S}_{Bl}^2 = \frac{I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2}{J - 1} \quad (5.34)$$

\* Cuadrado medio residual

$$\hat{S}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2}{(I - 1)(J - 1)} \quad , \quad (5.35)$$

donde los denominadores, corresponden a los grados de libertad de la distribución en el muestreo de los correspondientes numeradores.

Una notación muy utilizada también en la práctica para los cuadrados medios anteriores es, respectivamente, *CMT*, *CMT<sub>r</sub>*, *CMB<sub>l</sub>* y *CMR* o *CME*.

A continuación vamos a calcular las esperanzas matemáticas de estos cuadrados medios. En primer lugar, recordemos la expresión del modelo (5.4)

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + u_{ij} \quad .$$

Consideremos las expresiones de  $y_{i.}$ ,  $\bar{y}_{i.}$ ,  $y_{.j}$ ,  $\bar{y}_{.j}$ ,  $y_{..}$  e  $\bar{y}_{..}$ , en función de los parámetros del modelo, con objeto de poder hallar las esperanzas de las varianzas muestrales. También tengamos en cuenta que  $\sum_i \tau_i = 0$  y  $\sum_j \beta_j = 0$ . Así tenemos:

$$\begin{aligned}
y_{i.} &= J\mu + J\tau_i + \sum_{j=1}^J \beta_j + u_{i.} \quad ; \quad \bar{y}_{i.} = \mu + \tau_i + \bar{u}_{i.} \\
y_{.j} &= I\mu + \sum_{i=1}^I \tau_i + I\beta_j + u_{.j} \quad ; \quad \bar{y}_{.j} = \mu + \beta_j + \bar{u}_{.j} \\
y_{..} &= N\mu + J \sum_{i=1}^I \tau_i + I \sum_{j=1}^J \beta_j + u_{..} \quad ; \quad \bar{y}_{..} = \mu + \bar{u}_{..}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

1º) El cuadrado medio entre grupos se puede expresar

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{Tr}^2 &= \frac{J \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{I-1} = \frac{J \sum_{i=1}^I [\tau_i + (\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..})]^2}{I-1} = \\
&= \frac{J \sum_{i=1}^I \tau_i^2}{I-1} + \frac{J \sum_{i=1}^I (\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..})^2}{I-1} + \frac{2J \sum_{j=1}^J \tau_i (\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..})}{I-1}
\end{aligned}$$

y su esperanza matemática será la suma de las esperanzas matemáticas de cada sumando; es decir,

$$E \left[ \hat{S}_{Tr}^2 \right] = E \left[ \frac{J \sum_{i=1}^I \tau_i^2}{I-1} \right] + E \left[ \frac{J \sum_{i=1}^I (\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..})^2}{I-1} \right] + E \left[ \frac{2J \sum_{j=1}^J \tau_i (\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..})}{I-1} \right] \tag{5.37}$$

Ahora bien, puesto que:

a) El modelo es de efectos fijos  $E[\tau_i] = \tau_i$ , entonces

$$E \left[ \frac{J \sum_{i=1}^I \tau_i^2}{I-1} \right] = \frac{J}{I-1} \sum_i E [\tau_i^2] = \frac{J}{I-1} \sum_i \tau_i^2 \quad (5.38)$$

b) Como  $E [\hat{\tau}_i - E [\hat{\tau}_i]]^2$  es la Var ( $\hat{\tau}_i$ ), cuya expresión, determinada en la subsección 5.2.2, es  $(I-1)\sigma^2/N$ , luego

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{J \sum_{i=1}^I (\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..})^2}{I-1} \right] &= \frac{J}{I-1} \sum_{i=1}^I E [\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..}]^2 = \\ &= \frac{J}{I-1} \sum_{i=1}^I E [(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) - \tau_i]^2 = \\ &= \frac{J}{I-1} \sum_{i=1}^I E [\hat{\tau}_i - E [\hat{\tau}_i]]^2 = \frac{J}{I-1} \sum_{i=1}^I \text{Var} (\hat{\tau}_i) = \\ &= \frac{J}{I-1} \sum_{i=1}^I (I-1) \frac{\sigma^2}{N} = \frac{J}{I-1} \frac{(I-1)I\sigma^2}{N} = \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

c) Como  $E (\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..}) = 0$ , entonces

$$E \left[ \frac{2J \sum_{i=1}^I \tau_i (\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..})}{I-1} \right] = \frac{2}{I-1} J \sum_{i=1}^I \tau_i E [\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..}] = 0 \quad . \quad (5.40)$$

Por lo tanto, sustituyendo las expresiones (5.38), (5.39) y (5.40) en (5.37) tenemos que el valor esperado del cuadrado medio entre grupos es:

$$E(\hat{S}_{Tr}^2) = \frac{J}{I-1} \sum_{i=1}^I \tau_i^2 + \sigma^2 \quad (5.41)$$

2º) De la misma forma se comprueba que

$$E(\hat{S}_{Bl}^2) = \frac{I}{J-1} \sum_{j=1}^J \beta_j^2 + \sigma^2 \quad (5.42)$$

3º) Ya hemos visto en la subsección 5.2.2 que la varianza residual es un estimador insesgado de la varianza poblacional, es decir

$$E(\hat{S}_R^2) = \sigma^2$$

4º) Por último, calculemos el valor esperado del cuadrado medio total. Para ello nos basaremos en la ecuación básica del ANOVA que podemos poner en función de los cuadrados medios de la siguiente forma:

$$(N-1)\hat{S}_T^2 = (I-1)\hat{S}_{Tr}^2 + (J-1)\hat{S}_{Bl}^2 + (I-1)(J-1)\hat{S}_R^2 \quad ,$$

tomando esperanzas matemáticas en ambos miembros y aplicando la linealidad del valor esperado, tenemos

$$(N-1)E[\hat{S}_T^2] = (I-1)E[\hat{S}_{Tr}^2] + (J-1)E[\hat{S}_{Bl}^2] + (I-1)(J-1)E[\hat{S}_R^2] \quad ,$$

de donde, sustituyendo los valores obtenidos anteriormente para  $E[\hat{S}_{Tr}^2]$ ,  $E[\hat{S}_{Bl}^2]$  y  $E[\hat{S}_R^2]$ , obtenemos

$$E(\hat{S}_T^2) = \frac{J \sum_{i=1}^I \tau_i^2}{N-1} + \frac{I \sum_{j=1}^J \beta_j^2}{N-1} + \sigma^2 \quad . \quad (5.43)$$

### Observación 5.1

*Hemos visto que al aplicar el método de mínimos cuadrados al modelo completamente aleatorizado, se obtiene el sistema de ecuaciones normales (??). En el caso del modelo en bloques completos aleatorizados, las ecuaciones normales para tratamientos no contienen*

*información con respecto a los efectos de bloques, y recíprocamente, las ecuaciones normales para bloques no contienen información alguna sobre los efectos de los tratamientos, (la información con respecto a los tratamientos no se encuentra mezclada con aquella debida a los efectos de los bloques). Y así, un contraste entre efectos de tratamientos se realiza comparando las medias de tratamientos e idénticamente, un contraste entre efectos de bloques se realiza comparando las medias de los bloques. Cuando esto ocurre, se dice que los efectos de bloques y tratamientos son ortogonales.*

#### 5.2.4. Análisis estadístico

El contraste estadístico de más interés en este modelo, como mencionamos anteriormente, es el que tiene como hipótesis nula la igualdad de medias de los tratamientos:

$$H_{0\tau} \equiv \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_I = 0 \quad (5.44)$$

También es interesante contrastar la igualdad de medias de los bloques:

$$H_{0\beta} \equiv \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0 \quad (5.45)$$

Como hemos comprobado anteriormente se verifica que:

- a)  $\hat{S}_R^2 = SCR/(I-1)(J-I)$  es un estimador insesgado de la varianza  $\sigma^2$ , independientemente de que se verifiquen las hipótesis nulas.
- b) Si no hay diferencia entre las medias de los  $I$  tratamientos; es decir, si es cierta la hipótesis de que todo  $\tau_i = 0$ , el primer sumando de  $E(\hat{S}_{Tr}^2)$  es nulo, y entonces  $\hat{S}_{Tr}^2$  es un estimador insesgado de  $\sigma^2$ .
- c) Si no hay diferencia entre las medias de los  $J$  bloques; es decir, si es cierta la hipótesis de que todo  $\beta_j = 0$ , el primer sumando de  $E(\hat{S}_{Bl}^2)$  es nulo, y entonces  $\hat{S}_{Bl}^2$  es un estimador insesgado de  $\sigma^2$ .

Sin embargo, hay que notar que:

- \* Si existe diferencia en las medias de los tratamientos, el valor esperado de  $\hat{S}_{Tr}^2$  es mayor que  $\sigma^2$ .
- \* Si existe diferencia en las medias de los bloques, el valor esperado de  $\hat{S}_{Bl}^2$  es mayor que  $\sigma^2$ .

De todo ésto podemos deducir que:

- 1º) Un contraste para verificar la hipótesis nula de igualdad de medias de los tratamientos puede efectuarse comparando  $\hat{S}_{Tr}^2$  y  $\hat{S}_R^2$ .
- 2º) Un contraste para verificar la hipótesis nula de igualdad de medias de los bloques puede efectuarse comparando  $\hat{S}_{Bl}^2$  y  $\hat{S}_R^2$ .

Para ello, vamos a estudiar la distribución de  $SCT$ ,  $SCTr$ ,  $SCBl$  y  $SCR$  en las hipótesis de que ni los tratamientos ni los bloques influyen, es decir si las hipótesis (5.44) y (5.45) son ciertas o equivalentemente, si las  $N$  observaciones provienen de la misma población.

Tipificando las variables aleatorias  $y_{ij}$  en la descomposición (5.27), se tiene

$$\frac{y_{ij} - \mu}{\sigma} = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma} + \frac{\hat{\tau}_i}{\sigma} + \frac{\hat{\beta}_j}{\sigma} + \frac{e_{ij}}{\sigma} . \quad (5.46)$$

Considerando esta descomposición para todas las observaciones y expresándola en forma vectorial, tenemos

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 \quad (5.47)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{1}{\sigma}(y_{11} - \mu, \dots, y_{1J} - \mu, y_{21} - \mu, \dots, y_{2J} - \mu, \dots, y_{I1} - \mu, \dots, y_{IJ} - \mu)' \\ \mathbf{Z}_1 &= \frac{1}{\sigma}(\bar{y}_{..} - \mu, \dots, \bar{y}_{..} - \mu, \bar{y}_{..} - \mu, \dots, \bar{y}_{..} - \mu, \dots, \bar{y}_{..} - \mu, \dots, \bar{y}_{..} - \mu)' \\ \mathbf{Z}_2 &= \frac{1}{\sigma}(\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_I, \dots, \hat{\tau}_I)' \\ \mathbf{Z}_3 &= \frac{1}{\sigma}(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_J, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_J, \dots, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_J)' \\ \mathbf{Z}_4 &= \frac{1}{\sigma}(e_{11}, \dots, e_{1J}, e_{21}, \dots, e_{2J}, \dots, e_{I1}, \dots, e_{IJ})' \end{aligned}$$

donde

- **Z**: Contiene  $N$  términos independientes  $\frac{1}{\sigma}(y_{ij} - \mu)$ . Tiene, por tanto,  $N$  grados de libertad.
- **Z<sub>1</sub>**: Contiene  $N$  coordenadas iguales a  $\frac{1}{\sigma}(\bar{y}_{..} - \mu)$ . Tiene, por tanto, un grado de libertad.

- **Z<sub>2</sub>**: Contiene  $I$  valores distintos  $\frac{1}{\sigma}\hat{\tau}_i$ , cada uno repetido  $J$  veces y sujetos a una ecuación de restricción,  $\sum_i \hat{\tau}_i = 0$ . Tiene, por tanto,  $I - 1$  grados de libertad.
- **Z<sub>3</sub>**: Contiene  $J$  valores distintos  $\frac{1}{\sigma}\hat{\beta}_j$ , cada uno repetido  $I$  veces y sujetos a una ecuación de restricción,  $\sum_j \hat{\beta}_j = 0$ . Tiene, por tanto,  $J - 1$  grados de libertad.
- **Z<sub>4</sub>**: Contiene  $N$  coordenadas  $\frac{1}{\sigma}e_{ij}$ , sujetas a  $I + J - 1$  ecuaciones de restricción,  $\sum_j e_{ij} = 0$  para  $i = 1, \dots, I$ . y  $\sum_i e_{ij} = 0$  para  $j = 1, \dots, J$ . Tiene, por tanto,  $(I - 1)(J - 1)$  grados de libertad.

Bajo las hipótesis nulas hemos realizado una descomposición del vector **Z**, de variables  $N(0, 1)$  independientes, en componentes ortogonales. Dicha descomposición cumple las condiciones del Teorema de Cochran, verificándose que:

i)

$$\frac{SCTr}{\sigma^2} = \frac{J \sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{I-1}^2$$

ii)

$$\frac{SCBl}{\sigma^2} = \frac{I \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{J-1}^2$$

iii)

$$\frac{SCR}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{(I-1)(J-1)}^2$$

y además estas tres distribuciones son independientes entre sí.

Hay que notar que:

- Por una parte, se tiene que  $SCR/\sigma^2$  se distribuye como una  $\chi^2$  con  $(I - 1)(J - 1)$  grados de libertad, se verifique o no la hipótesis nula, como ya vimos en la subsección 5.2.2
- Por otra parte, bajo las hipótesis (5.44) y (5.45), se tiene que  $SCTr/\sigma^2$  y  $SCBl/\sigma^2$  se distribuyen como una  $\chi^2$  con  $I - 1$  y  $J - 1$  grados de libertad, respectivamente.



Por consiguiente, bajo las hipótesis de igualdad de efectos de los tratamientos y los bloques, se verifica

$$F_\tau = \frac{\frac{SCTr/\sigma^2}{I-1}}{\frac{SCR/\sigma^2}{(I-1)(J-1)}} = \frac{\hat{S}_{Tr}^2}{\hat{S}_R^2} \rightsquigarrow F_{(I-1),(I-1)(J-1)} \quad (5.48)$$

y

$$F_\beta = \frac{\frac{SCBl/\sigma^2}{J-1}}{\frac{SCR/\sigma^2}{(I-1)(J-1)}} = \frac{\hat{S}_{Bl}^2}{\hat{S}_R^2} \rightsquigarrow F_{(J-1),(I-1)(J-1)} \quad (5.49)$$

Estos son los estadísticos de contraste para probar dichas hipótesis nulas. Por lo tanto:

- \* Si la hipótesis de igualdad de efectos de los tratamientos es cierta, tanto el numerador como el denominador del estadístico de contraste (5.48) son estimadores insesgados de  $\sigma^2$ , mientras que si dicha hipótesis no es cierta, la esperanza del numerador del estadístico de contraste (5.48) es mayor que la esperanza del denominador, por lo que rechazaremos  $H_0$  cuando el valor experimental de dicho estadístico sea mayor que el valor teórico,  $F_{(I-1),(I-1)(J-1);\alpha}$ .
- \* Siguiendo el mismo razonamiento anterior, se rechazará la hipótesis nula de igualdad de efectos de los bloques cuando el valor del estadístico de contraste (5.49) sea mayor que el valor teórico,  $F_{(J-1),(I-1)(J-1);\alpha}$ .

Aunque hemos dicho que el contraste principal es el de la igualdad de medias de los tratamientos, también es interesante la comparación entre las medias de los bloques, ya que la eficacia de este diseño depende de los efectos de los bloques. Un valor grande del cociente (5.49), implica que el factor bloque tiene un efecto grande, es decir que los bloques realmente influyen mucho. En este caso, este diseño es más eficaz que el diseño completamente aleatorizado ya que si el cuadrado medio entre bloques,  $\hat{S}_{Bl}^2$ , es grande, el término residual será mucho menor y el contraste principal (5.44) será más sensible a las diferencias entre tratamientos.

Si los efectos de los bloques son muy pequeños, el análisis por bloques quizá no sea necesario y en caso extremo, cuando el cociente (5.49) es próximo a 1, puede llegar a ser perjudicial, ya que el número de grados de libertad,  $(I-1)(J-1)$ , del denominador en la comparación de tratamientos (5.48) es menor que el número de grados de libertad correspondiente,  $IJ - I = I(J-1)$ , en el diseño completamente aleatorizado.

Para una mayor sencillez en el cálculo se utilizan las expresiones abreviadas de  $SCT$ ,  $SCTr$ ,  $SCBl$  y  $SCR$ , dadas a continuación

$$\begin{aligned}
SCT &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ} \\
SCTr &= \frac{1}{J} \sum_{i=1}^I y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ} \\
SCBl &= \frac{1}{I} \sum_{j=1}^J y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ} ,
\end{aligned} \tag{5.50}$$

y la suma de cuadrados del error se obtiene por diferencia

$$SCR = SCT - SCTr - SCBl . \tag{5.51}$$

El análisis de la varianza utiliza la descomposición (5.31), *ecuación básica del análisis de la varianza*, cuyos términos se pueden disponer de la siguiente manera,

**Tabla 4-3.** Tabla ANOVA para el modelo de bloques aleatorizados

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	$F_{exp}$
Entre tratam.	$J \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = SCTr$	$I - 1$	$\hat{S}_{Tr}^2$	$\hat{S}_{Tr}^2 / \hat{S}_R^2$
Entre bloques	$I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 = SCBl$	$J - 1$	$\hat{S}_{Bl}^2$	$\hat{S}_{Bl}^2 / \hat{S}_R^2$
Residual	$SCT - SCTr - SCBl = SCR$	$(I - 1)(J - 1)$	$\hat{S}_R^2$	
TOTAL	$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = SCT$	$IJ - 1$	$\hat{S}_T^2$	

Alternativamente, utilizando las expresiones abreviadas de  $SCT$ ,  $SCTr$ ,  $SCBl$  y  $SCR$ , dadas en (5.50), se construye la siguiente Tabla ANOVA.

**Tabla 4-4.** Forma práctica de la tabla ANOVA para el modelo de bloques aleatorizados

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	$F_{exp}$
Entre tratam.	$\frac{1}{J} \sum_{i=1}^I y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ} = SCTr$	$I - 1$	$\hat{S}_{Tr}^2$	$\hat{S}_{Tr}^2 / \hat{S}_R^2$
Entre bloques	$\frac{1}{I} \sum_{j=1}^J y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ} = SCBl$	$J - 1$	$\hat{S}_{Bl}^2$	$\hat{S}_{Bl}^2 / \hat{S}_R^2$
Residual	$SCT - SCTr - SCBl = SCR$	$(I - 1)(J - 1)$	$\hat{S}_R^2$	
TOTAL	$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ}$	$IJ - 1$	$\hat{S}_T^2$	

Una de las ventajas del diseño en bloques aleatorizados es que se puede transformar en un diseño unifactorial, simplemente suprimiendo el estudio por bloques y uniendo su variabilidad a la residual.

### Coefficientes de determinación

Al igual que en el modelo completamente aleatorizado, una medida apropiada para comprobar la adecuación del modelo a los datos es el coeficiente de determinación, denotado por  $R^2$  y definido como el cociente entre la suma de las variabilidades explicadas por los tratamientos y los bloques, y la variabilidad total

$$R^2 = \frac{SCTr + SCBl}{SCT} .$$

Llamando

- $R_\tau^2$  al cociente entre la variabilidad explicada por los tratamientos y la total, es decir

$$R_\tau^2 = \frac{SCTr}{SCT} ,$$

- $R_\beta^2$  al cociente entre la variabilidad explicada por los bloques y la total, es decir

$$R_\beta^2 = \frac{SCBl}{SCT} ,$$

el coeficiente de determinación también lo podemos expresar como

$$R^2 = R_\tau^2 + R_\beta^2 ,$$

donde  $R_\tau^2$  y  $R_\beta^2$  reciben el nombre de *coeficientes de determinación parciales* asociados a los tratamientos y a los bloques. Estas cantidades son adimensionales y se interpretan como la proporción de la variabilidad que es explicada por los tratamientos y por los bloques, respectivamente.

A fin de ilustrar el análisis de la varianza de bloques aleatorizados vamos a considerar el Ejemplo 4-1, en el que se desea comprobar si se aprecian diferencias significativas, en primer lugar, entre los fertilizantes y en segundo lugar, entre los bloques de terreno.

Para ello, construimos la Tabla 4-5, organizando los datos de la siguiente manera

**Tabla 4-5.** Datos del Ejemplo 4-1

Fertilizantes	bloques				$y_{i.}$	$y_{i.}^2$
	A	B	C	D		
1	87	86	88	83	344	118336
2	85	87	95	85	352	123904
3	90	92	95	90	367	134689
4	89	97	98	88	372	138384
5	99	96	91	90	376	141376
$y_{.j}$	450	458	467	436	1811	656689
$y_{.j}^2$	202500	209764	218089	190096	820449	
$\sum y_{ij}^2$	40616	42054	43679	38058	164407	

Las sumas de cuadrados necesarias para el análisis de la varianza se calculan de la

siguiente forma:

$$SCT = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ} = 164407 - \frac{(1811)^2}{20} = 420,95$$

$$SCTr = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^5 y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ} = \frac{656689}{4} - \frac{(1811)^2}{20} = 186,20$$

$$SCBl = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^4 y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ} = \frac{820449}{5} - \frac{(1811)^2}{20} = 103,75$$

$$SCR = SCT - SCTr - SCBl = 131 \quad .$$

El análisis de la varianza resultante se presenta en la siguiente tabla.

**Tabla 4-6.** Análisis de la varianza para los datos del Ejemplo 4-1

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	$F_{exp}$
Entre tratamientos	186.20	4	46.5500	4.264
Entre bloques	103.75	3	34.5833	3.168
Residual	131.00	12	10.9166	
TOTAL	420.95	19		

Realizando los contrastes al nivel de significación del 5 %, se tiene:

- 1º) Si comparamos el cociente  $F_{\tau(exp)} = 46,55/10,9166 = 4,264$ , con el valor de la  $F$  teórica ( $F_{0,05,4,12} = 3,26$ ), se concluye que se rechaza  $H_0$  (igualdad de medias de tratamientos); en otras palabras, concluimos que, a un nivel de significación del 5 %, el rendimiento de la semilla de algodón difiere significativamente dependiendo del tipo de fertilizante utilizado.
- 2º) Si comparamos el cociente  $F_{\beta(exp)} = 34,5833/10,9166 = 3,168$ , con el valor de la  $F$  teórica ( $F_{0,05,3,12} = 3,49$ ), se concluye que no hay suficiente evidencia para rechazar  $H_0$  (igualdad de medias de bloques); en otras palabras, concluimos que, a un nivel de significación del 5 %, los bloques de terreno no son significativamente distintos.

Comprobamos, mediante los coeficientes de determinación parciales, cuyos valores son

$$R_{\tau}^2 = \frac{SCTr}{SCT} = \frac{186,2}{420,95} = 0,4423$$

$$R_{\beta}^2 = \frac{SCTBl}{SCT} = \frac{103,75}{420,95} = 0,2464 \quad ,$$

que:

- a) El factor “tipo de fertilizante” explica el 44.23 % de la variabilidad en el rendimiento de la semilla de algodón.
- b) El factor “tipo de terreno” explica el 24.64 % de la variabilidad en el rendimiento de la semilla de algodón.

Es interesante ver los resultados que se hubiesen obtenido de no haberse realizado un diseño en bloques aleatorizados. Para ello, supongamos que prescindimos del factor “tipo de terreno” y realizamos un análisis de la varianza de un factor, obteniéndose la tabla ANOVA siguiente

**Tabla 4-7.** Análisis de la varianza para los datos del Ejemplo 4-1

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	$F_{exp}$
Entre tratamientos	186.20	4	46.55	2.974
Residual	234.75	15	15.65	
TOTAL	420.95	19		

Si efectuamos el contraste al 5 % y comparamos el valor de la  $F_{exp} = 2,974$ , con el valor de la  $F$  teórica ( $F_{0,05;4,15} = 3,05$ ), se concluye que no se puede rechazar  $H_0$  (igualdad de medias de tratamientos); es decir, no hemos podido encontrar diferencias significativas entre los distintos tipos de fertilizantes aunque si se detectaron dichas diferencias al aplicar el modelo en bloques aleatorizados.

Con este ejemplo se ilustra el hecho de que aunque los bloques no resulten significativamente diferentes, en algunas situaciones no es conveniente prescindir de ellos. Pero ¿cómo saber cuando se puede prescindir de los bloques? La respuesta la tenemos en el valor de la  $F_{\beta(exp)}$ , experimentalmente se ha comprobado que si dicho valor es mayor que 3, no conviene prescindir de los bloques para efectuar los contrastes.

### 5.3. Comparaciones múltiples

Si el análisis de la varianza confirma la existencia de diferencias significativas entre los tratamientos o entre los bloques, es conveniente investigar qué medias son distintas realizando las comparaciones múltiples correspondientes a los tratamientos o a los bloques o a ambos. Para ello se realizarán cualesquiera de los procedimientos de comparaciones múltiples estudiados en el Capítulo 2. Simplemente hay que recordar que, en el diseño en bloques aleatorizados los grados de libertad del error son  $((I - 1)(J - 1))$  en lugar de  $(N - I)$  del diseño completamente aleatorizado y en el caso de comparaciones de medias relativas a los tratamientos hay que reemplazar en las fórmulas correspondientes el número de repeticiones ( $n$ ) del diseño completamente aleatorizado, por el número de bloques ( $J$ ). Como ilustración vamos a realizar comparaciones entre las medias de los tratamientos utilizando la prueba de rangos múltiples de Tukey con los datos del ejemplo de referencia.

En este ejemplo, los valores de los cinco promedios de los tratamientos son:

$$\bar{y}_1. = 86 \quad ; \quad \bar{y}_2. = 88 \quad ; \quad \bar{y}_3. = 91,75 \quad ; \quad \bar{y}_4. = 93 \quad ; \quad \bar{y}_5. = 94 \quad .$$

Así, por ejemplo, si realizamos la comparación entre los tratamientos 1 y 2, el valor crítico HSD correspondiente a un nivel de significación del 5 % se calcula como

$$HSD = q_{\alpha, I, (I-1)(J-1)} \sqrt{\frac{\widehat{S}_R^2}{J}} = q_{0,05,5,12} \sqrt{\frac{10,9166}{4}} = (4,51)(1,65) = 7,4415 \quad .$$

Puesto que se verifica:

$$| \bar{y}_1. - \bar{y}_2. | = 2 < HSD \quad ,$$

se concluye que las medias 1 y 2 no difieren significativamente.

Además de los procedimientos analíticos de comparaciones múltiples también se puede adaptar el método gráfico visto en la subsección ?? del Capítulo 2 que nos muestra que medias son significativamente diferentes. Este procedimiento consiste en utilizar como distribución de referencia una distribución  $t_\nu$  ajustada por el factor de escala  $\sqrt{S_R^2/J}$ , para la comparación de las medias de los tratamientos, donde  $\nu$  es el número de grados de libertad de la varianza residual.

En la Figura 4-2 se representan las 5 medias de los fertilizantes del Ejemplo 4-1 en relación con la distribución de referencia  $t$  con 12 grados de libertad y con un factor de escala  $\sqrt{10,9166/4} = 1,65$ . Esta figura muestra que los procedimientos gráficos a veces no son suficientemente claros. Sin embargo, en dicha figura puede observarse que hay una

gran diferencia entre los tratamientos 1 y 5, como se comprobará posteriormente en la subsección ?? mediante el procedimiento de Tukey realizado con STATGRAPHICS.

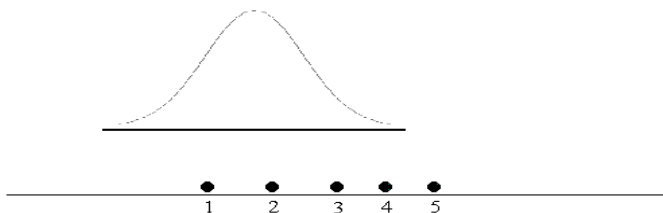


Figura 4-2

También se puede comprobar qué bloques son significativamente distintos mediante un procedimiento gráfico como el anterior, pero con un factor de escala  $\sqrt{\hat{S}_R^2/I}$ , que en nuestro ejemplo tiene el valor  $\sqrt{10,9166/5} = 1,47761$ . Dicho procedimiento se muestra en la Figura 4-3, donde comprobamos que se confirma el resultado del contraste  $F$  del análisis de la varianza, es decir, no hay diferencias significativas entre los bloques.

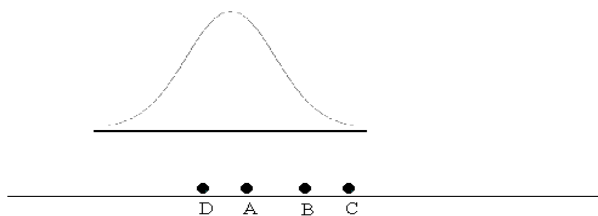


Figura 4-3

## 5.4. Comprobación de la idoneidad del modelo

La comprobación de la idoneidad del modelo requiere contrastar las hipótesis dadas en (5.5). Los contrastes de normalidad, homocedasticidad e independencia son análogos a los realizados en el modelo completamente aleatorizado, por lo que remitimos al lector al Capítulo 3, con la diferencia de que en el modelo en bloques aleatorizados también hay



que estudiar la variabilidad del error por bloques.

En este modelo hemos supuesto otra hipótesis adicional, la aditividad de los efectos de tratamiento y bloque, es decir, hemos supuesto un modelo en el que el efecto de un factor no depende del nivel del otro factor. A pesar de que este modelo aditivo es a menudo útil, existen situaciones en las que resulta inadecuado, por ejemplo, las diferencias entre dos fertilizantes pueden ser mayores cuando se aplican en el bloque 1 que cuando se aplican en el bloque 3. Cuando esto ocurre se dice que existe interacción entre los tratamientos y los bloques, y entonces el modelo de ecuación (5.4) no es adecuado. Por lo tanto, la hipótesis de aditividad también debe ser contrastada.

#### 5.4.1. Test de Interacción de Tukey

Cuando existe interacción entre tratamiento y bloque, el modelo tendrá en general la siguiente ecuación

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + u_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, I \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (5.52)$$

donde el término  $(\tau\beta)_{ij}$  representa la interacción. Se suponen las siguientes restricciones para los parámetros

$$\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = \sum_i (\tau\beta)_{ij} = \sum_j (\tau\beta)_{ij} = 0,$$

por lo tanto el número de parámetros independientes de este modelo sería

$$1 + (I - 1) + (J - 1) + (I - 1)(J - 1) = IJ,$$

que, puesto que hay una sola observación por celdilla, coincide con el número de observaciones, no habiendo suficientes grados de libertad para estimar la varianza residual. Un procedimiento para solventar este problema consiste en tomar más de una observación por celdilla.

Tukey (1949) desarrolló un método para determinar si existe interacción entre tratamientos y bloques, cuando sólo hay una observación por celdilla, conocido como el *test de interacción de un grado de libertad de Tukey*. Este procedimiento supone que la forma de la interacción es particularmente simple, es decir

$$(\tau\beta)_{ij} = \gamma\tau_i\beta_j,$$

en donde  $\gamma$  es una constante desconocida. De esta forma las interacciones añaden únicamente un parámetro, y el modelo resultante es:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma\tau_i\beta_j + u_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, I \ ; \ j = 1, 2, \dots, J \ , \quad (5.53)$$

siendo las restricciones para este modelo

$$\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = \sum_i \gamma\tau_i\beta_j = \sum_j \gamma\tau_i\beta_j = 0 \ .$$

En primer lugar abordaremos la estimación de los parámetros del modelo. Para ello, se construye la función de verosimilitud asociada a la muestra  $\mathbf{y} = (y_{11}, \dots, y_{1J}, \dots, y_{I1}, \dots, y_{IJ})$ :

$$\mathbb{L}(\mu, \tau_i, \beta_j, \gamma, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j - \gamma\tau_i\beta_j]^2 \right) \ , \quad (5.54)$$

se determina el logaritmo de dicha función

$$\ln(\mathbb{L}(\mu, \tau_i, \sigma^2)) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j - \gamma\tau_i\beta_j]^2 \ , \quad (5.55)$$

y se hallan las primeras derivadas parciales respecto de los parámetros del modelo, obteniéndose las mismas expresiones que en (5.12)-(5.14) para los estimadores de los parámetros  $\mu$ ,  $\tau_i$  y  $\beta_j$ .

El estimador máximo verosimil de  $\gamma$  se obtiene realizando la correspondiente derivada parcial, es decir

$$\frac{\partial \ln \mathbb{L}}{\partial \gamma} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j - \gamma\tau_i\beta_j] \tau_i\beta_j = 0 \quad (5.56)$$

de donde

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij} \tau_i \beta_j - \mu \sum_{i=1}^I \tau_i \sum_{j=1}^J \beta_j - \sum_{i=1}^I \tau_i^2 \sum_{j=1}^J \beta_j - \sum_{j=1}^J \beta_j^2 \sum_{i=1}^I \tau_i - \gamma \sum_{i=1}^I \tau_i^2 \sum_{j=1}^J \beta_j^2 = 0 \ .$$

Por lo tanto

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \hat{\tau}_i \hat{\beta}_j y_{ij}}{\sum_{i=1}^I \hat{\tau}_i^2 \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j^2} , \quad (5.57)$$

y reemplazando  $\hat{\tau}_i$  y  $\hat{\beta}_j$  por sus respectivos estimadores muestrales, tenemos

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})y_{ij}}{\sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2} . \quad (5.58)$$

Como hemos supuesto la existencia de interacción entre los factores, hay que introducir en este modelo una suma de cuadrados que represente dicha interacción, esta suma de cuadrados se denota por *SCIT* y viene dada por la expresión

$$SCIT = \sum_i \sum_j \hat{\gamma}^2 \hat{\tau}_i^2 \hat{\beta}_j^2 , \quad (5.59)$$

que recibe el nombre de suma de cuadrados debida a la interacción o no-aditividad del modelo, que también se puede expresar, sustituyendo los correspondientes estimadores muestrales, de la siguiente forma

$$SCIT = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \hat{\gamma}^2 (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{\left[ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})y_{ij} \right]^2}{\sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2} . \quad (5.60)$$

Por lo tanto, la ecuación básica del análisis de la varianza para el modelo con interacción (5.53) debe tener un término más que la citada ecuación del modelo en bloques aleatorizados. Dicha ecuación se expresa simbólicamente en la forma

$$SCT = SCTr + SCBl + SCIT + SCR , \quad (5.61)$$

donde

- $SCTr$  es la suma de cuadrados entre tratamientos
- $SCBl$  es la suma de cuadrados entre bloques
- $SCIT$  es la suma de cuadrados debida a la interacción por Tukey
- $SCR$  es la suma de cuadrados residual que se obtiene como

$$SCR = SCT - SCTr - SCBl - SCIT \quad .$$

Se demuestra que si  $\gamma = 0$ , esto es, si no hay interacción del tipo  $\gamma\tau_i\beta_j$ , entonces  $SCIT/\sigma^2$  y  $SCR/\sigma^2$  son variables aleatorias independientes distribuidas según una  $\chi^2$  con 1 y  $IJ - I - J$  grados de libertad, respectivamente. Por tanto, si  $\gamma = 0$ , el estadístico de contraste

$$F = \frac{SCIT/1}{SCR/(IJ - I - J)} \quad , \quad (5.62)$$

se distribuye según una  $F$  de Snedecor con 1,  $IJ - I - J$  grados de libertad. Así, para contrastar

$$\begin{aligned} H_0 : & \gamma = 0 \text{ (no hay interacción)} \\ H_1 : & \gamma \neq 0 \text{ (hay interacción del tipo } \gamma\tau_i\beta_j) \quad , \end{aligned} \quad (5.63)$$

puesto que,  $F$  se distribuye como una  $F_{1,IJ-I-J}$  cuando  $H_0$  es cierta y puesto que los valores grandes de  $F_{exp}$  conducen a la conclusión  $H_1$ , la decisión apropiada para controlar un riesgo de error de Tipo I igual a  $\alpha$ , es:

$$\begin{aligned} Si \quad F_{exp} &\leq F_{\alpha,1,IJ-I-J} \quad , \quad \text{se acepta } H_0 \\ Si \quad F_{exp} &> F_{\alpha,1,IJ-I-J} \quad , \quad \text{se rechaza } H_0 \quad , \end{aligned} \quad (5.64)$$

donde  $F_{\alpha,1,IJ-I-J}$  es el punto crítico superior de la distribución  $F$  con 1 y  $IJ - I - J$  grados de libertad.

A fin de ilustrar este procedimiento utilicemos el Ejemplo 4-1. Para ello, construimos la Tabla 4-8, organizando los datos de la siguiente manera:

Tabla 4-8. Datos del Ejemplo 4-1

	Bloques							
Fert.	A	B	C	D	$\bar{y}_i$	$\hat{\tau}_i$	$\hat{\tau}_i^2$	$\sum_{j=1}^J \hat{\tau}_i \hat{\beta}_j y_{ij}$
1	87	86	88	83	86,00	-4,55	20,702	-69,16
2	85	87	95	85	88,00	-2,55	6,502	-78,03
3	90	92	95	90	91,75	1,20	1,440	19,62
4	89	97	98	88	93,00	2,45	6,002	91,63
5	99	96	91	90	94,00	3,45	11,902	14,49
$\bar{y}_j$	90	91,6	93,4	87,2	90,55 = $\bar{y}_{..}$		46,55	-21,45
$\hat{\beta}_j$	-0,55	1,05	2,85	-3,35				
$\hat{\beta}_j^2$	0,302	1,102	8,122	11,222	20,75			

En primer lugar calculamos el estimador de  $\gamma$  y la suma de cuadrados de la interacción *SCIT*

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_i \sum_j \hat{\tau}_i \hat{\beta}_j y_{ij}}{\sum_i \hat{\tau}_i^2 \sum_j \hat{\beta}_j^2} = \frac{-21,45}{(46,55)(20,75)} = -0,0222 \quad ,$$

$$SCIT = \sum_i \sum_j \hat{\gamma}^2 \hat{\tau}_i^2 \hat{\beta}_j^2 = (-0,022)^2 (46,55)(20,75) = 0,4760 \quad .$$

Continuamos con la suma de cuadrados debida al error *SCR*

$$SCR = SCT - SCTr - SCBl - SCIT = 420,95 - 186,20 - 103,75 - 0,4760 = 130,524 \quad .$$

Por lo tanto el valor del estadístico de contraste es

$$F_{exp} = \frac{SCIT/1}{SCR^*/(IJ - I - J)} = \frac{0,4760}{130,524/11} = 0,04011 \quad .$$

Si realizamos el contraste al nivel de significación del 5 %, como el valor de la  $F$  teórica es  $F_{0,05,1,11} = 4,84$  y puesto que  $F_{exp} = 0,04011 < 4,84$  se concluye que no hay interacción entre los fertilizantes y los bloques de terreno.

**Bibliografía utilizada**

- \* **García Leal, J. & Lara Porras, A.M.** (1998). *“Diseño Estadístico de Experimentos. Análisis de la Varianza.”* Grupo Editorial Universitario.
- \* **Lara Porras, A.M.** (2000). *“Diseño Estadístico de Experimentos, Análisis de la Varianza y Temas Relacionados: Tratamiento Informático mediante SPSS”* Proyecto Sur de Ediciones.