第一章 复变函数论

Theory of Complex Variable Functions

引 言1

一、复变函数的内容：

1、把实数扩展到复数。

2、将实变函数中：函数、极限、连续、微分、解析函数、 积分、级数等概念推广至复变函数中。

3、解析函数的性质。

引 言

The imaginary numbers are a wonderful flight of God's spirit; they are almost an amphibian between being and not being.

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ, 1702

本篇研究的中心问题是**解析函数**的问题。

引 言

中心内容：解析函数

学习目的：

1、熟练掌握复数的各种表示及运算规则；

2、熟练掌握复变函数中与实变函数平行的概念；

3、重点掌握解析函数的概念及性质；

一、复数概念

$$x = \mathrm{Re}\, z$$

$$y = \mathrm{Im}\, z$$

复数：　$z = \ x, y \ = x + iy$

共轭复数：$z^* = x - iy$

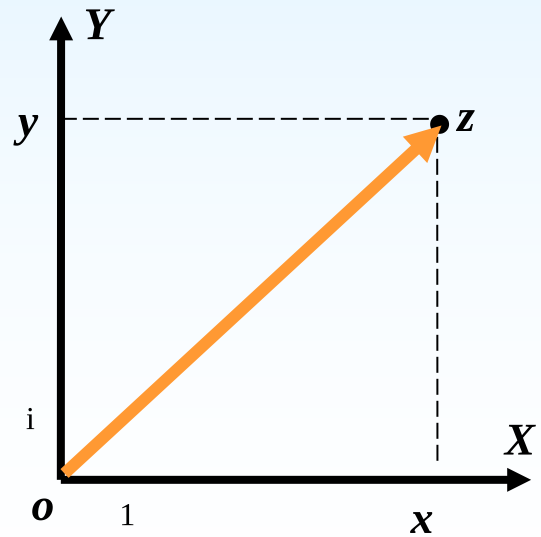
复数相等：　实部和虚部分别相等。

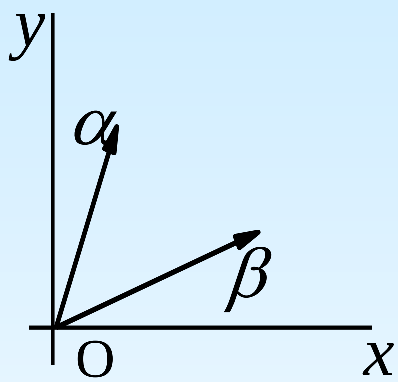
二、复数的表示方法

1、几何表示

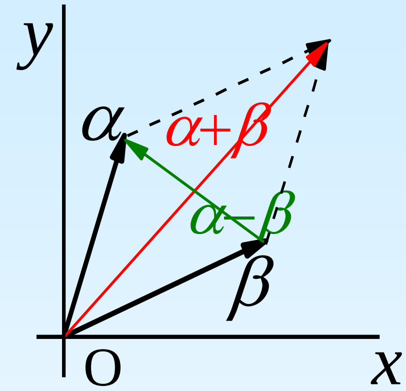
(1) 复平面上的点z；

(2) 矢量 $\overrightarrow{oz}$；

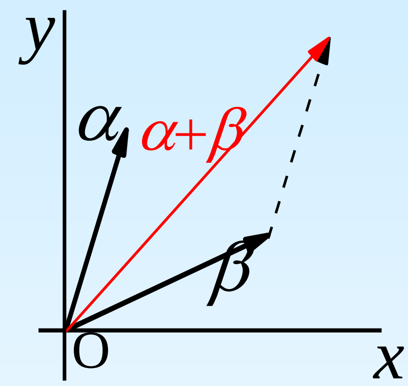




矢量叠加图



平行四边形法则



三角形法则

- **思考题：** 下列公式的意义？

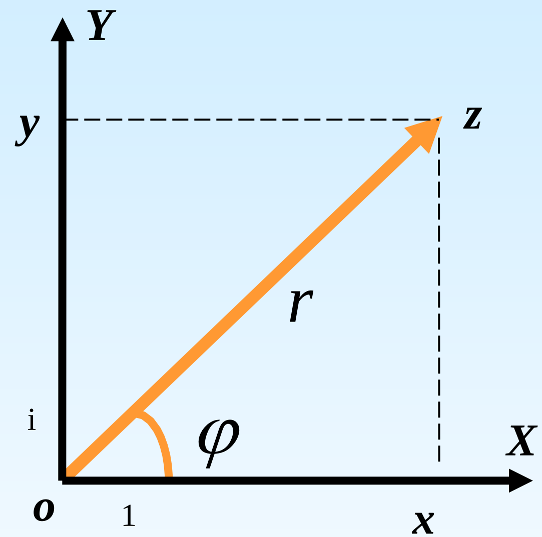
1) $|\alpha|-|\beta| \leq |\alpha-\beta|$

2) $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$

3）$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2\left[|\alpha|^2+|\beta|^2\right]$

2、极坐标

$$r,\varphi \ : z = r \ \cos\varphi + i\sin\varphi$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ **z** 的模

$$\varphi = Argz = Arg\tan\frac{y}{x}$$

z 的幅角，多值

规定： $0 \le \arg z < \pi$ 幅角的主值

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \ , k = 0 \ , \pm 1, \pm 2, \cdots$$

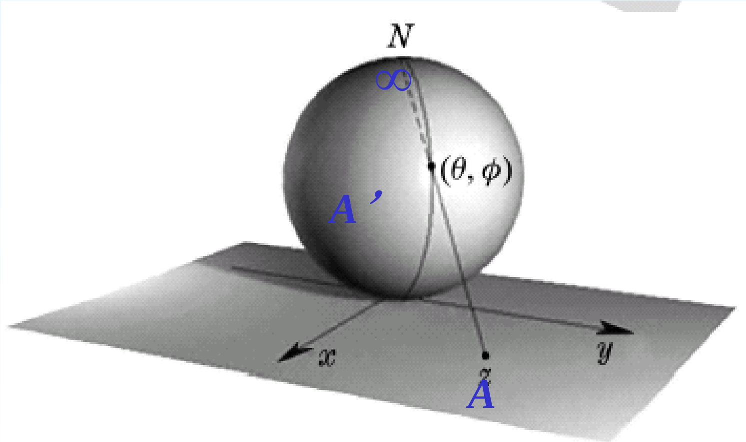
3、复球表示

直径为1的球面与复平面相切于原点—球面的南极*S*。

设复平面上点*A*到球面北极*N*的连线与球面交于点*A'*

球面上的点$A' \longleftrightarrow$复平面上的点A

北极$N \longleftrightarrow$复平面上的∞



无穷远点∞与微积分中+∞、-∞ 完全不同

其模大于任何正数，　幅角不定。

4、代数表示

$$z=\begin{cases} x+iy & \text{直角} \\ r(\cos\varphi+i\sin\varphi) & \text{极坐标} \\ re^{i\varphi} & \text{指数} \end{cases}$$

三、复数的运算

$$x_1+iy_1 \ \pm \ x_2+iy_2 \ = \ x_1\pm x_2 \ \pm i \ \ y_1\pm y_2$$ 加减法

$$x_1+iy_1 \quad x_2+iy_2 \ = \ x_1x_2-y_1y_2 \ +i \ \ x_2y_1+x_1y_2$$ 乘法

$$Z_1Z_2=r_1r_2e^{i\ \varphi_1+\varphi_2}$$

除法: $\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\dfrac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}e^{i\,\varphi_2-\varphi_1}$$

乘方: $z^n=r^ne^{in\varphi}$

棣模佛(Denoivre)公式 : $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$

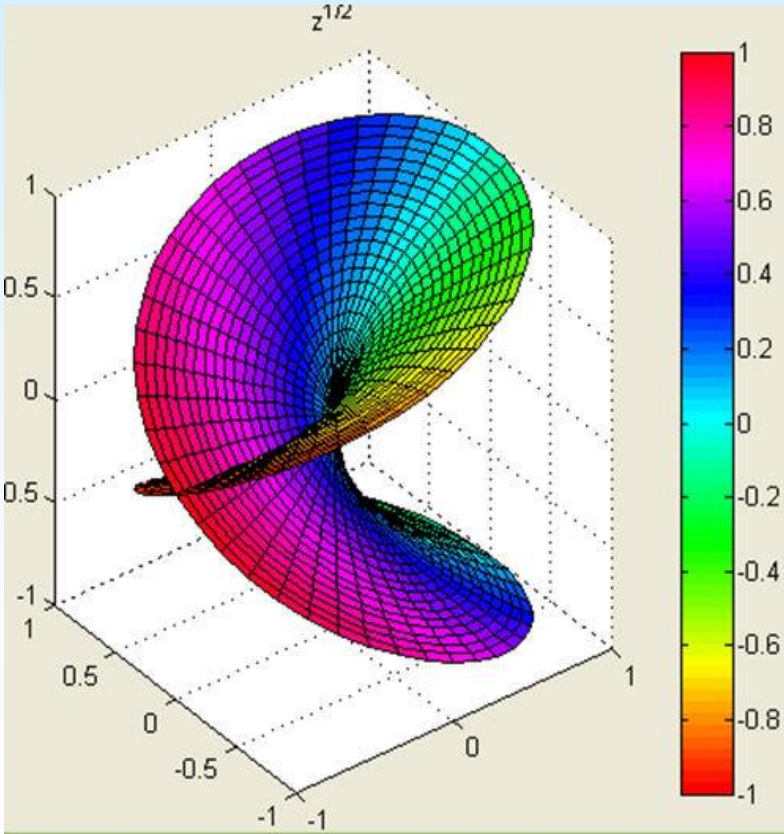
开方: $\sqrt[n]{z}=r^{1/n}e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$

开方结果幅角有n个值， (k=0,1,2,…，n-1)。n个值，是以原点为圆心、$r^{1/n}$为半径的圆内接正n边形的n个顶点。

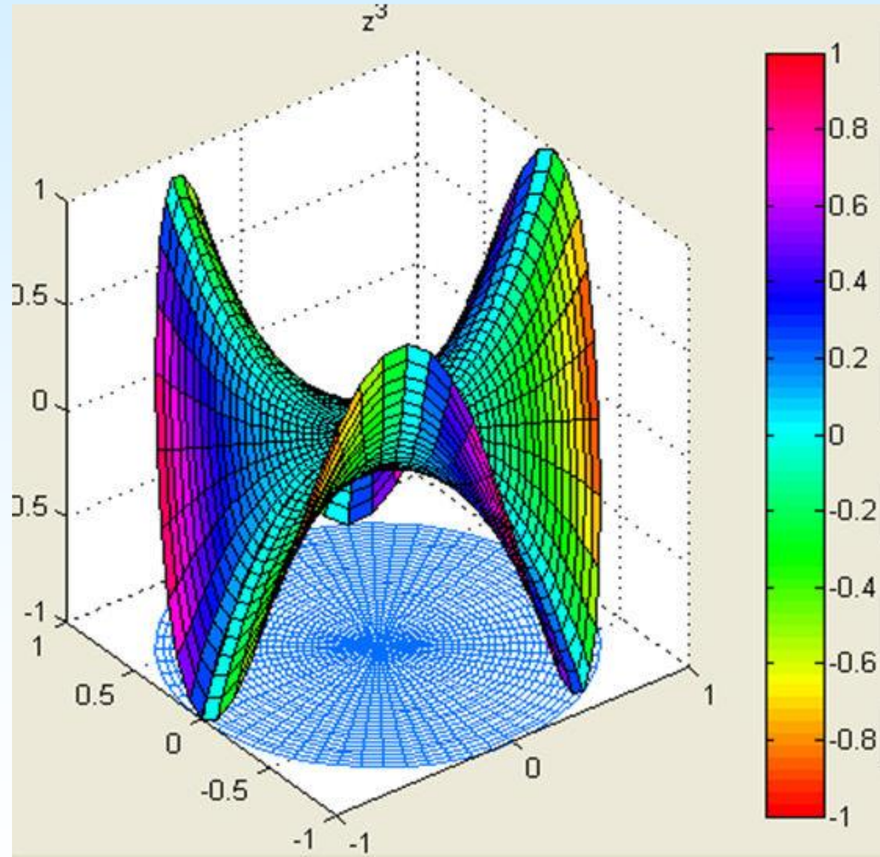
$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

复变函数 $z^{1/2}$ 的图形



复变函数Z^3图形



坐标系X实轴,y虚轴,纵轴表函数实部，颜色表虚部。每一横条有相同实部值；从左到右形成条状色带，与平面上y轴正负相对应。

– 共轭运算

$$ {z^*}^{*} = z $$

$$ {z_1 + z_2}^{*} = z_1^{*} + z_2^{*} $$

$$ {z_1 z_2}^{*} = z_1^{*} z_2^{*} $$

例1将直线方程 $Ax+By+C=0$ (A、B不全为0)化为复数方程。

解 将 $x=\frac{1}{2}\,z+z^*$ 和 $y=\frac{1}{2i}\,z-z^*$ 代入得

$$ \frac{A}{2}\,z+z^* + \frac{B}{2i}\,z-z^* + C = 0 \qquad \left(\frac{A}{2}-i\frac{B}{2}\right)z+\left(\frac{A}{2}+i\frac{B}{2}\right)z^*+C=0 $$

例2 $0 < \arg\dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{4}$ 的 z 所构成的点集具有怎样的意义？

解：设 $z = x + iy$ 可得

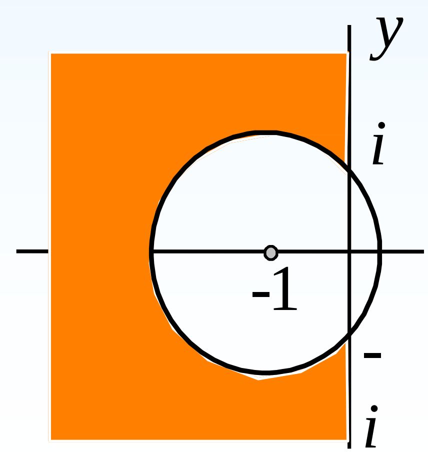
$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

在第一象限 $x < 0, \quad x^2+y^2-1 > 0$

$$\arg\frac{z-i}{z+i} = \arctan\frac{-2x}{x^2+y^2-1} \qquad 0 < \frac{-2x}{x^2+y^2-1} < 1$$

$$x^2+y^2-1 > -2x$$

故 ⇒ $\begin{cases} x < 0 \\ (x+1)^2 + y^2 > 2 \end{cases}$



在圆$(x+1)^2+y^2 = 2$外，且 以y轴为上界的左开平面

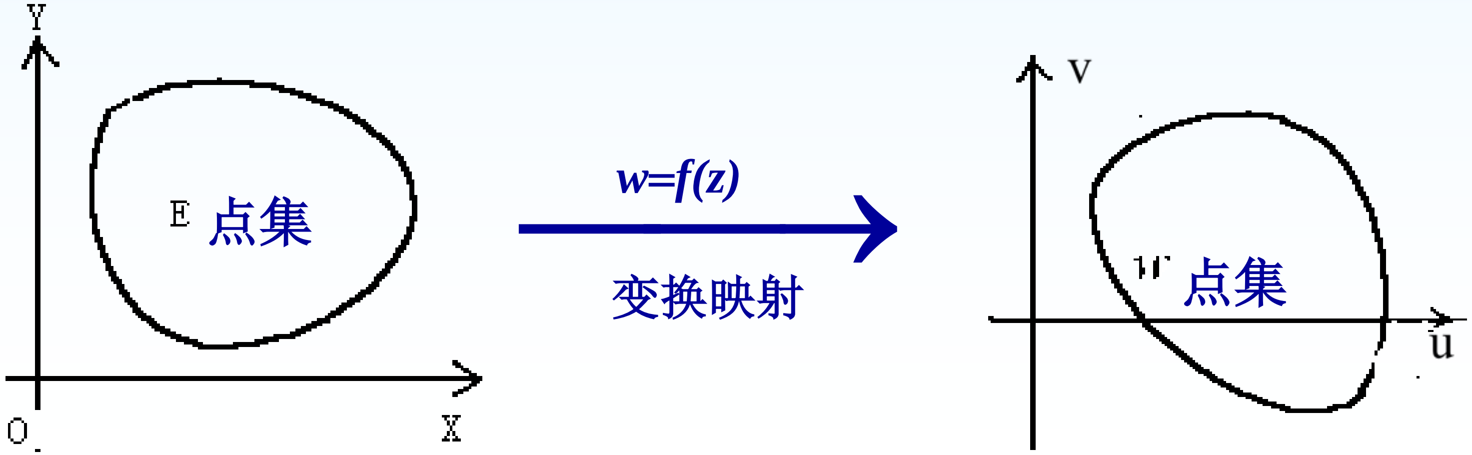
四、复变函数

定义：为在复数平面上存在一点集E，对于E 的每一点，按照一定的规律，有一个或多个复数值w与之相对应，则称w为z的函数，z称为w的宗量，

记为： $w = f(z), z \in E$

E为定义域，w为值域

几何意义：

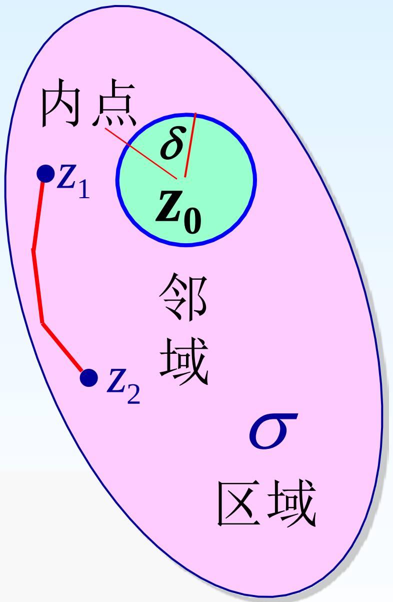


五、区域的概念：

1、邻域：$|z-z_0|<\delta$ 的点集称为z_0的δ邻域。

2、内点：

若z_0有一个邻域全含于点集σ内，则称z_0为σ的内点。



3、区域：具备下述两个性质的点集σ。

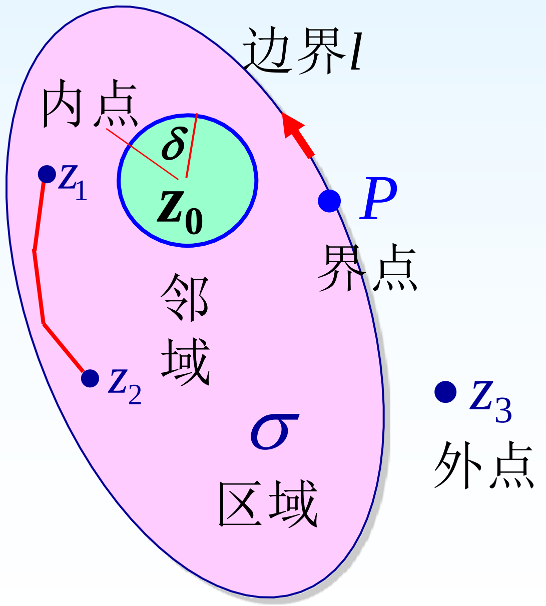
$$\begin{cases}\text{(1) 全由内点组成}\\ \text{(2) 其中任意两点都可用全在}\sigma\text{内的折线连接。}\end{cases}$$

4、外点：

若z及其邻域内的点都不属于区域σ，则称z为σ的外点。

5、界点：

若z不属于区域σ，但其邻域内含有属于σ的点，则称 z为σ的界点.



边界:全体界点构成区域边界l

正向：

沿着边界走，区域总在左方，　则此走向称为边界的正方向。

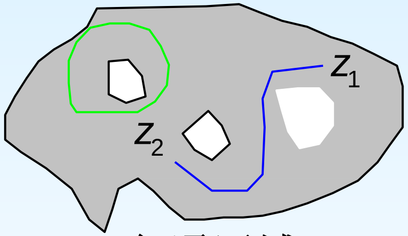
闭区域：$\bar{\sigma}=\sigma+l$，　其中l为边界。

6、单连通区域：

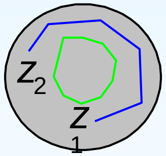
若区域D内任意闭合简单曲线（没有重点的连续曲线） 的内部全是属于D的点，则称该区域为单连通区域。

7、复连通区域

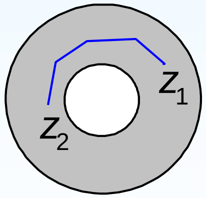
不是单连通的区域称为复连通区域。



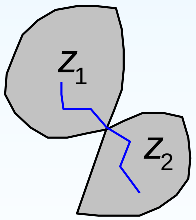
(*b*) 复通区域



(*a*) 单通区域



(*c*) 复通区域



(*d*) 非区域

注意：

$|x|<2$ 是连通的， $1<|x|$是不连通的；

$|z|<2$是单连通的， $1<|z|$是复连通的。

复变函数例子

$$\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

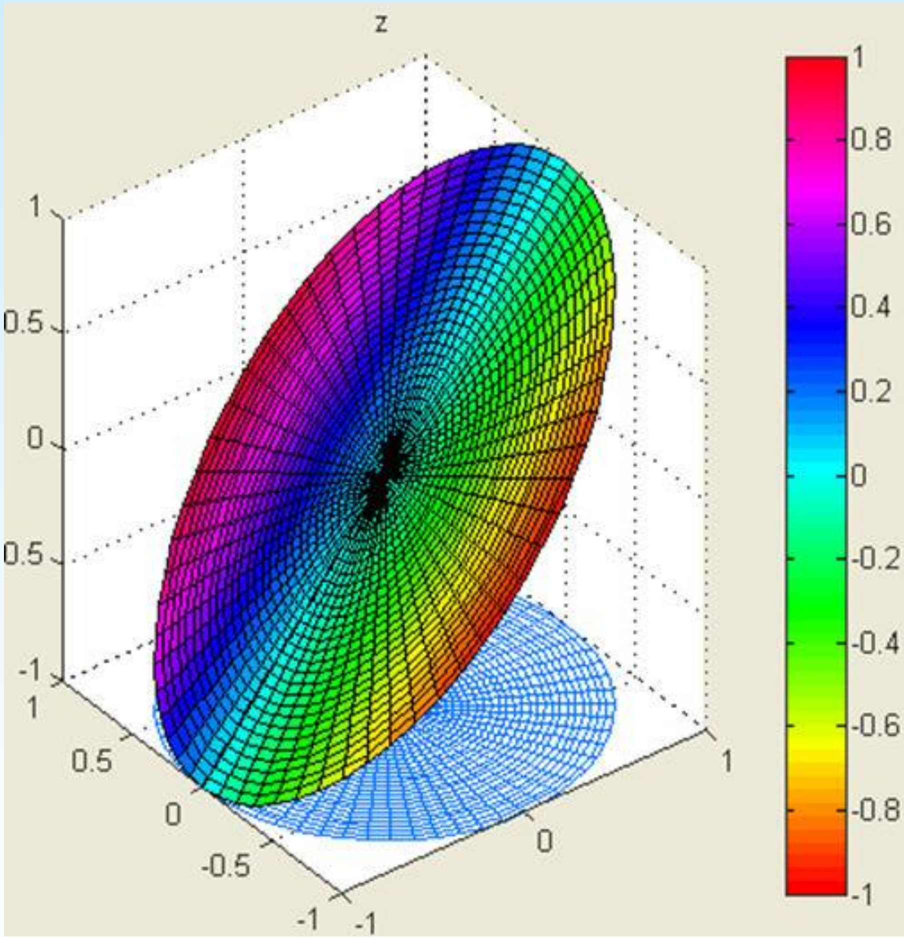
$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}\ e^{iz}+e^{-iz}$$

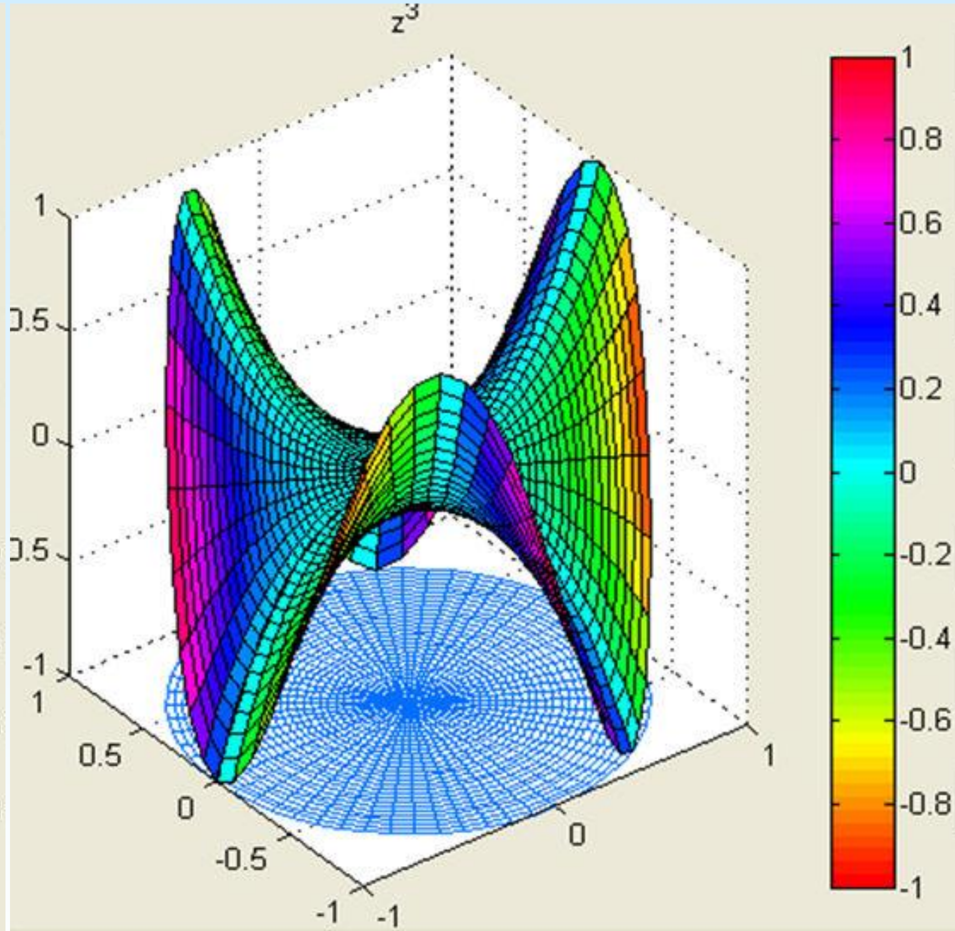
$$\mathrm{sh}\,z=\frac{1}{2}\ e^{z}-e^{-z}$$

$$\mathrm{ch}\,z=\frac{1}{2}\ e^{z}+e^{-z}$$

复变函数z图形



复变函数z^3图形

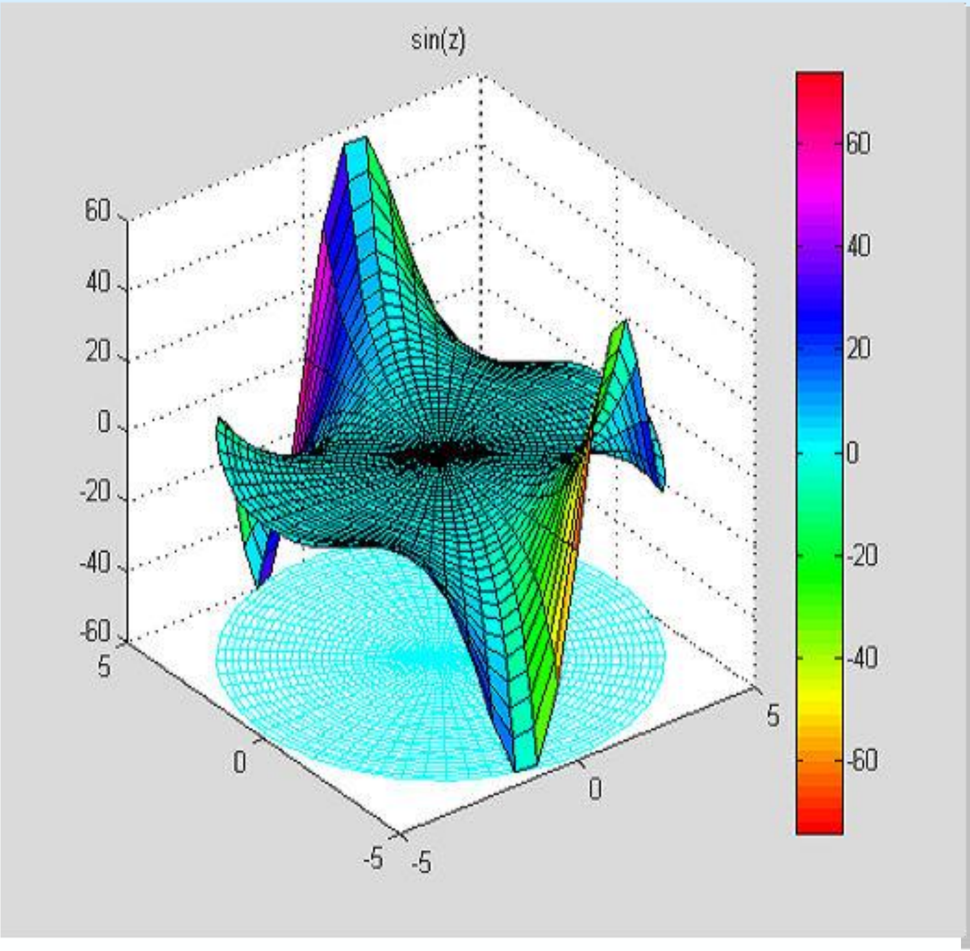


坐标系X实轴，y虚轴，纵轴表函数实部，颜色表虚部。每一横条有相同实部值；从左到右形成条状色带，与平面上y轴正负相对应。

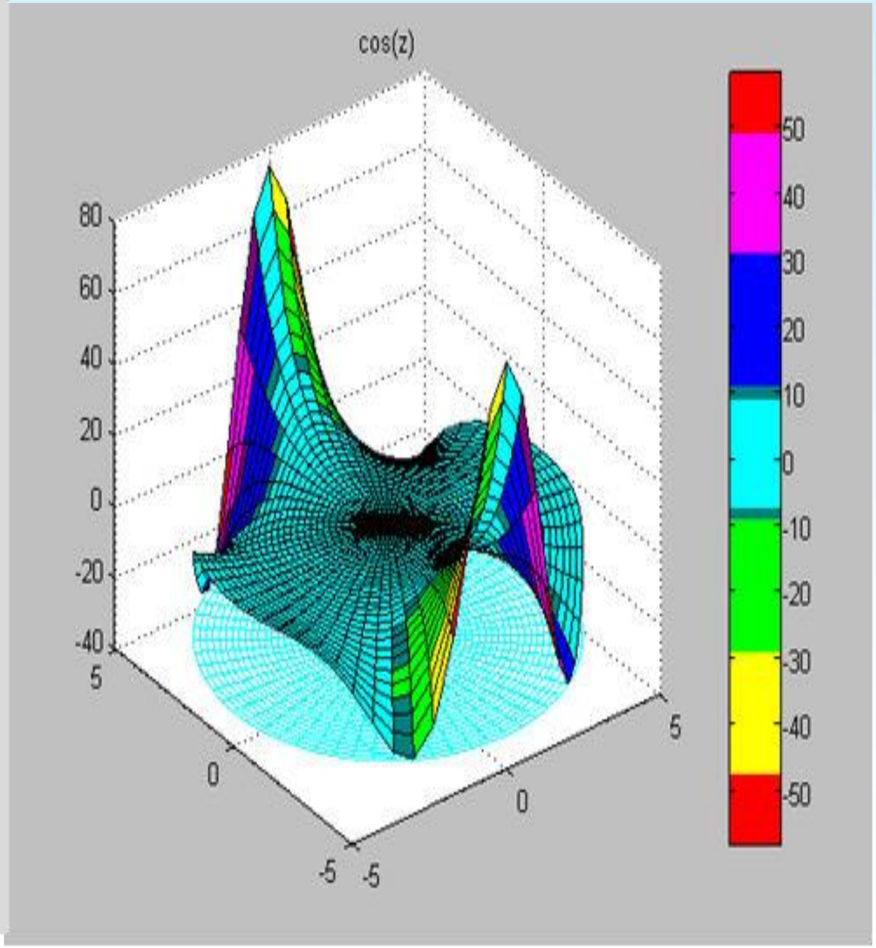
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

三角函数（图）

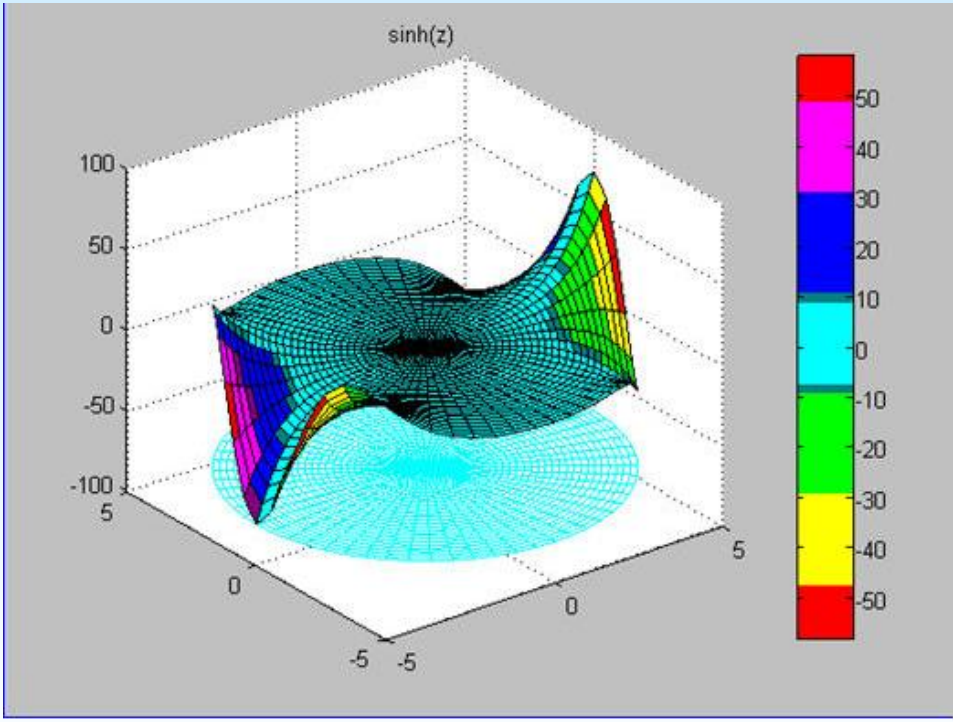
复变函数sin(z)的图形

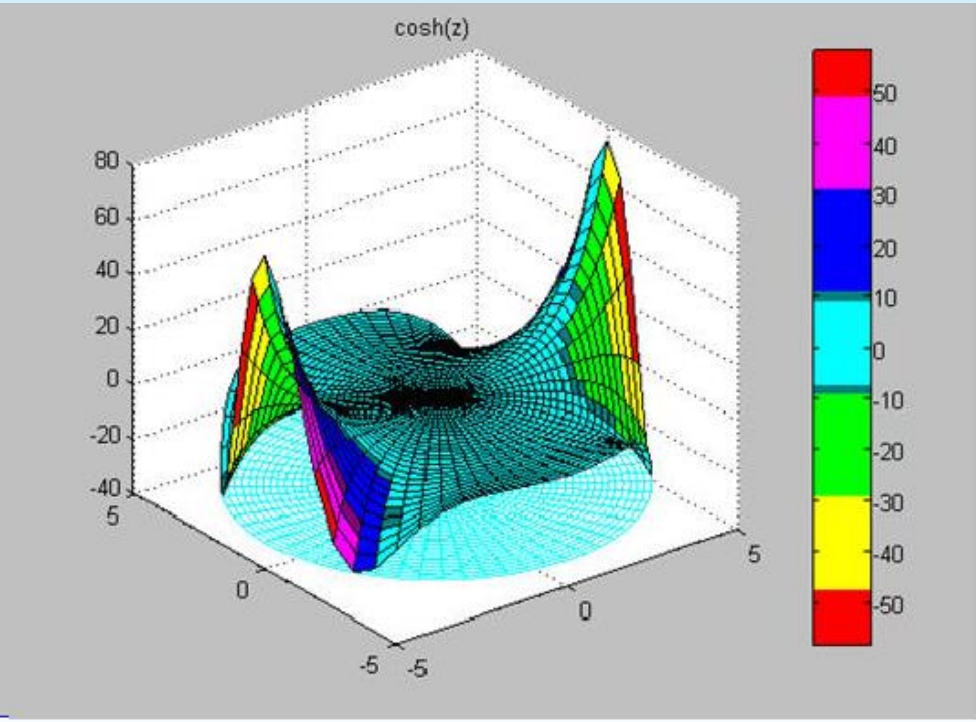


$w = \cos z$



复变双曲函数sinhz的图像　　复变双曲函数coshz的图像





以上的幂、指数、三角、双曲函数，等等单值函数都可看成是相应实变函数在复数域中的推广，在其定义域内均解析。

多值函数的概念和应用，在复变函数中占有重要地位

复变函数 $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

是两个二元实变函数的有序组合 。

实变函数中许多定义、公式、定理推广到复变函数中。

类型 \ 性质	实变函数	复变函数
极限	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$
连续	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
导数	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$	$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z)$

六、复变函数的连续性

定义：

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$，则$f(z)$在$z_0$点连续

连续性判断

1) 在z_0连续的充要条件：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都连续；

例 函数 $f(z) = \bar{z} = x + i(-y)$在复平面上处处连续。

2) 连续函数的和、差、积、商(分母不为0)仍连续；

七、复变函数的导数

导数的定义 ：

对于区域 B 上定义的单值函数 $w=f(z)$, 若在B上的某点z，极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

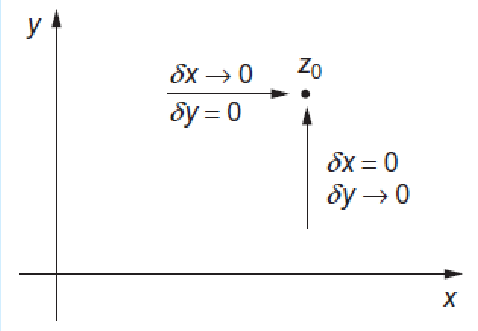
存在，并且与$\Delta z \to 0$的方式无关则称 $f(z)$ 在z点可导

此极限值称为

$f(z)$ 在 z点的导数(微商)，记作 $f'(z)$ 或 $\dfrac{df}{dz}$

$$f'(z) \equiv \left.\frac{df}{dz}\right|_z \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY



柯西—黎曼（Cauchy—Riemann）条件（方程）：

Δz以任意方式趋于0时，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$都趋于同样的有限值

沿x轴方向趋于0，$\Delta x \to 0, \Delta y = 0$ ，则

$$f'(z) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

沿y轴方向趋于0，$\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ ，则

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

可导→ $$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

柯西—黎曼（C—R）条件

意义：可导函数的虚部与实部不独立，互相关联。

C-R条件是函数可导的必要条件，不是充分条件

函数可导的充分条件：

1)u 、v 有连续的一阶偏导数

2)u、 v 满足C-R条件

证明： 复变函数f(z)作微分

$$\delta f=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y$$

应用C-R条件：$\delta f=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta y$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\delta x+i\delta y)$$

作代换 $\delta z = \delta x + i\delta y$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

右边与δz无关，满足可导要求，证毕！

复变函数比实变函数要求严格：
实部和虚部不独立，通过柯西-黎曼方程相联系

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

计算方法！

连续函数不一定可导

例如： 复变函数 $f(z)=\operatorname{Re} z = x$

实部：u(x, y)=x， 虚部：v(x, y)=0

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

不满足C-R条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \neq -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

极坐标的柯西-黎曼方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

证明思路：两种逼近方式求$\Delta f/\Delta z$

$$\Delta z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\Delta\rho \to 0$$

$$\Delta z = \rho\Delta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\Delta\varphi \to 0$$

实变函数中关于导数的规则和公式往往可用于复变函数

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(w_1 \pm w_2\right) = \dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} \pm \dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(w_1 w_2\right) = \dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} w_2 + w_1 \dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right) = \dfrac{w_1' w_2 - w_1 w_2'}{w_2^2} \\
\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = 1 / \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F(w) = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w} \cdot \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^n = n z^{n-1} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin z = \cos z \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z = \dfrac{1}{z} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln z = \dfrac{1}{z}
\end{cases}
$$

八、解析函数

– 点解析：函数 $f(z)$ 在点z_0及其邻域处处可导

– 区域解析：函数 $f(z)$ 在区域B内处处可导

对于 $z=\infty$ 点的解析性，可做变换 $t=\dfrac{1}{z}$，讨论 $f(\dfrac{1}{t})$ 在点 $t=0$是否解析即可。

解析函数又称正则函数或全纯函数。

函数在区域内解析与在区域内可导是等价的。但函数在一点处解析与在一点处可导是不等价的。函数在某点可导, 不一定在该点解析。解析要求高得多。

函数在某点可导, 不一定在该点解析

函数 $f(z)=|z|^2$

$$|z|^2=x^2+y^2$$

实部$u=x^2+y^2$,虚部v=0

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=2y,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

仅在z=0处可导

根据解析定义，在该点并且整个复平面不解析

例题 ： 判定下列函数是否解析

1) $f(z)=1/z$ 除奇点z=0之外，处处解析

2) $f(z)=x^2-iy$ 在直线ReZ=-1/2上可导，处处不解析

3) $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 在Z=0处可导，但处处不解析

4) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 处处解析，且 $f'(z)=f(z)$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

解析函数是一类具有特殊性质的复变函数，在物理学中有重要用途

解析函数的性质

– 正交性：解析函数的实部和虚部描述的曲线族互相正交。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \xrightarrow{\text{左左，右右相乘}} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \nabla u \cdot \nabla v = 0$$

∇u 是 $u = c1$ 曲线的法向

∇v 是 $v = c2$ 曲线的法向

正交!

解析函数的性质

– 调和性：实部与虚部都是调和函数 (满足Laplace方程)

C-R条件：
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

前一式对x求导，后一式对y求导，消去v，得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ 同理： $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

构成解析函数 $u+iv$的两个调和函数称为共轭调和函数。

实部和虚部必为调和函数

已知一个调和函数，可以当作实部(虚部)，应用C-R条件求虚部(实部)

例如：已知调和函数u(x,y)为实部，求虚部v(x,y)?

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}v=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$v(x,y)=\int dv$$

可采用以下办法计算：

(1) 曲线积分法

(2) 凑全微分显式法

(3) 不定积分法

例题：

例1：已知某解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=x^2-y^2$，求虚部和这个解析函数。

例2：已知某解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$，求实部 $u(x,y)$ 和这个解析函数 $f(z)$。

九、平面标量场

- 恒定场：　场与时间无关
- 平面场：在空间某方向上是均匀的，从而只需要在垂直于该方向的平面上研究

- 平面静电场
- 平面无旋液体
- 平面温度场

平面静电场

- 电势满足二维拉普拉斯方程，是调和函数，可以是解析函数$\boldsymbol{f(z)=u(x,y)+iv(x,y)}$的实部或虚部

- 解析函数称为平面静电场的复势

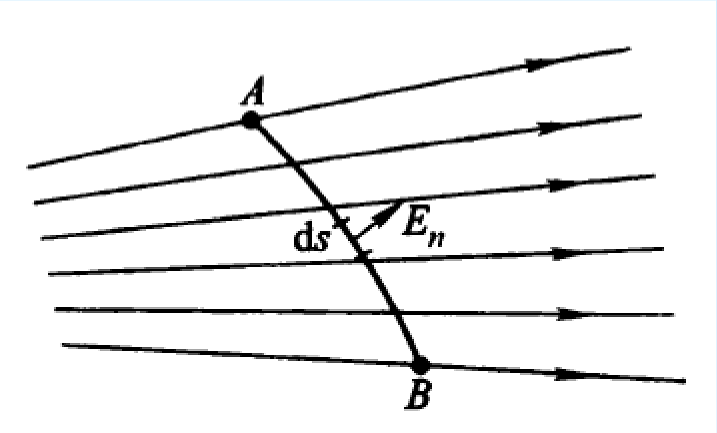
- 若$\boldsymbol{u(x,y)}$为电势，曲线族$\boldsymbol{u(x,y)}=$常数为等势线族

- 曲线族$\mathbf{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=$常数，垂直等势线族，是电场线族

$v(x,y)$的物理意义:通量函数

穿过曲线AB的电场强度通量：

$$N=\int_A^B E_n\mathrm{d}s$$



$$E_n = E\cdot n = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}$$

$$N=\int_A^B \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x = \int_A^B \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_A^B \mathrm{d}v = v\ \ x_2, y_2\ \ - v\ \ x_1, y_1$$

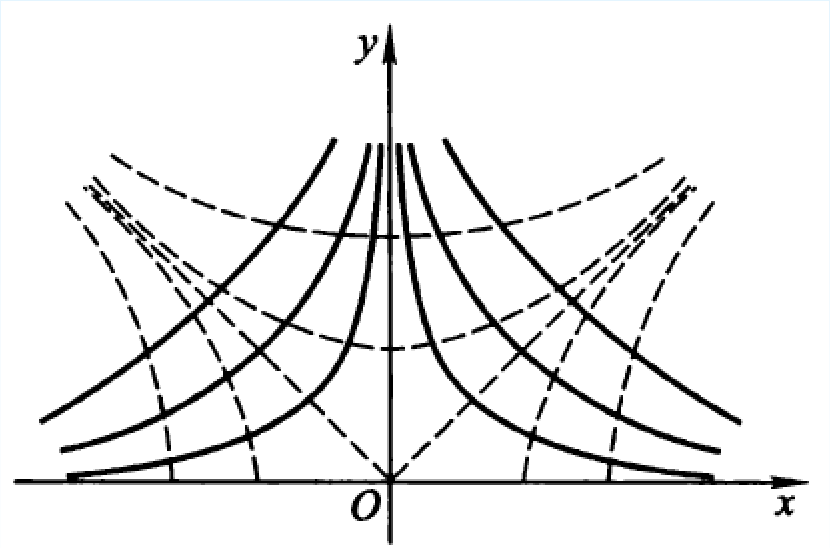
复势：可以给出电势分布，还直接给出电场线族

平面上的解析函数

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

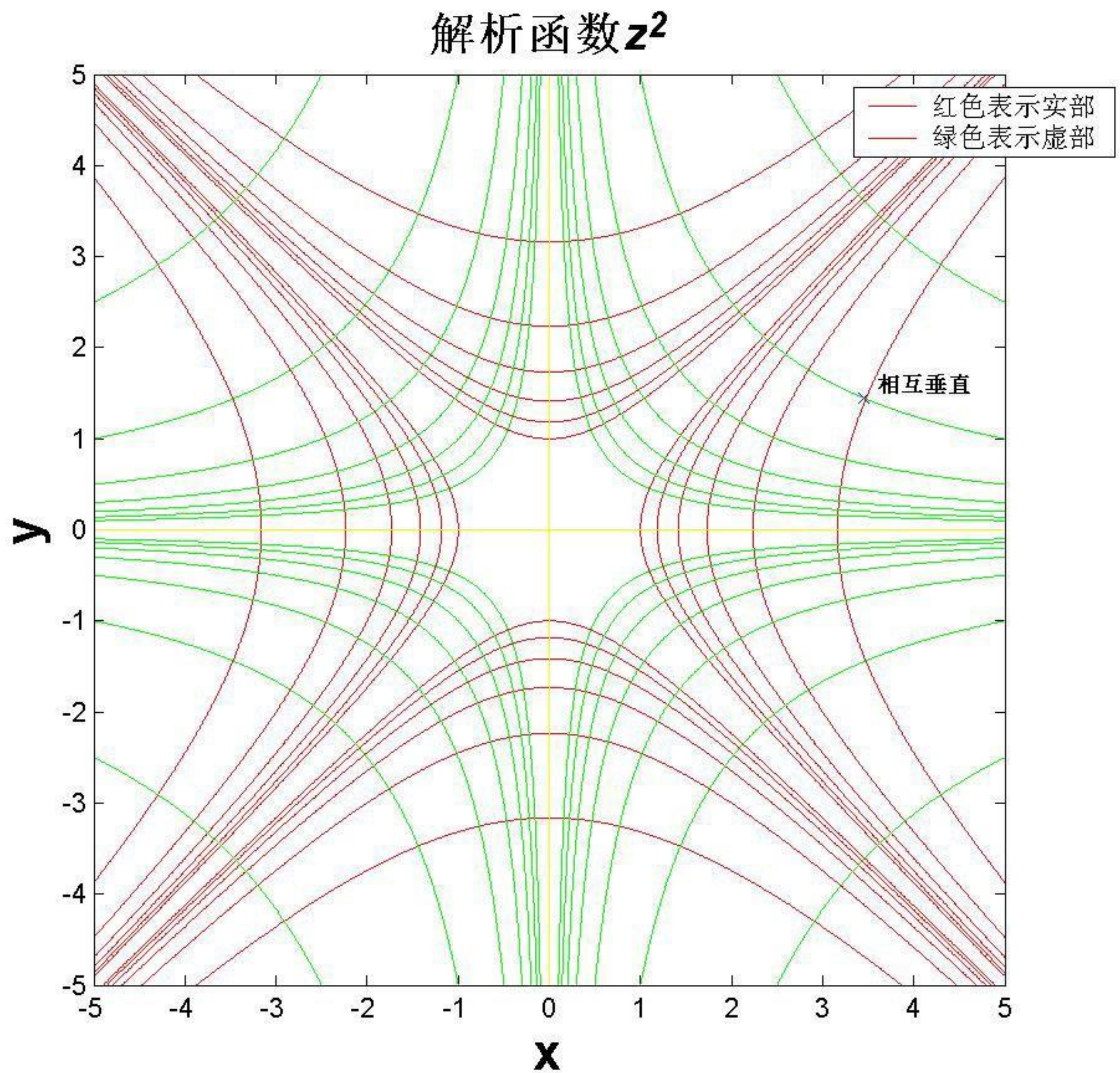
实部：$(x^2 - y^2)$

虚部：$2xy$



--两块互相垂直的很大的带电导体平面

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



例2：证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数，求其共轭调和函数及相应复势

解：

因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$　　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2$　　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

故 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数

由 $$\mathrm{d}v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$=\;3x^2-3y^2\;\;\mathrm{d}x-6xy\mathrm{d}y=\mathrm{d}\;\;x^3-3xy^2+c$$

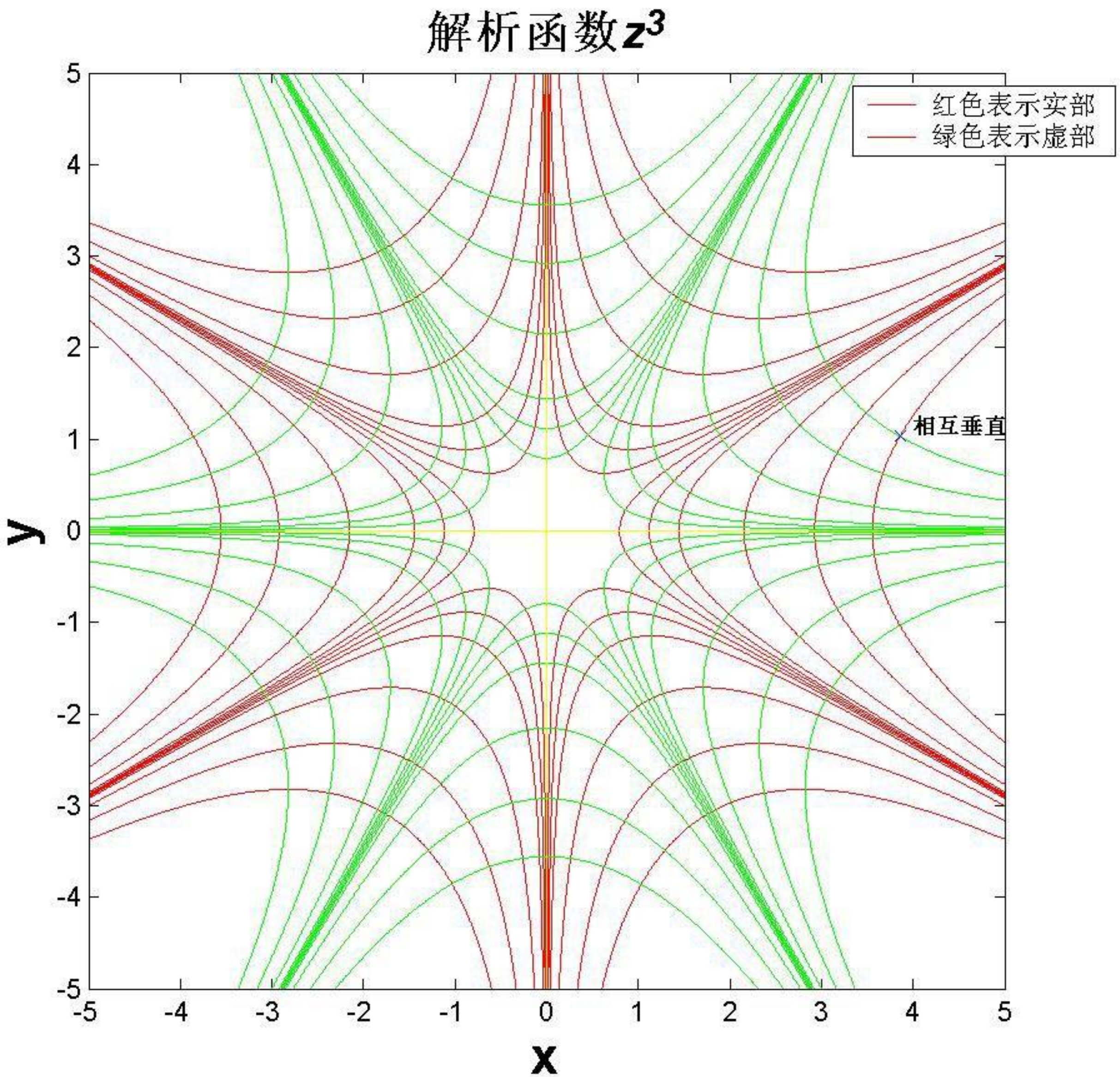
得 $$v(x,y)=x^3-3xy^2+c$$

复势 $$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$=\;\;y^3-3x^2y\;\;+i\;\;x^3-3xy^2+c$$

$$=i\;\;x^3-3xy^2+i3x^2y-iy^3+c$$

$$=i(x+iy)^3+c'=iz^3+c'$$


解析函数z^3
红色表示实部
绿色表示虚部
相互垂直
y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

多值函数：根式函数，对数函数，。。。

举例：根式函数 $w=\sqrt{z}$

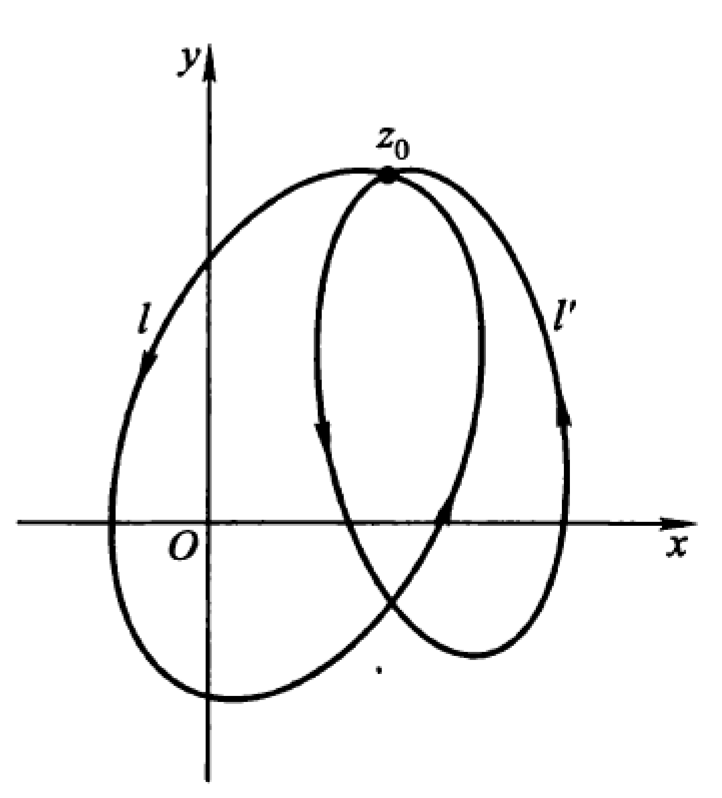
$$w=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{i(Argz)/2}$$

$$r=\sqrt{|z|} \quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\,z=\frac{1}{2}\arg z+n\pi$$

两个独立的辐角主值：$\theta_1=\dfrac{1}{2}\arg z,\quad \theta_2=\dfrac{1}{2}\arg z+\pi$

两个不同的w值—两个单值分支：$\begin{cases} w_1=\sqrt{|z|}e^{i(\arg z)/2} \\ w_2=\sqrt{|z|}e^{i(\arg z)/2+i\pi} \end{cases}$

- 与实变函数不同，两个单值不独立
- Z=0点的特殊性，当z绕该点一周回到原处，对应函数值不复原
- 支点：多值函数f=w(z)绕某点一周，函数值不复原，并且在该点各单值分支函数值相同
- 当z绕支点n周，函数值w复原，称该点为多值函数的n-1阶支点

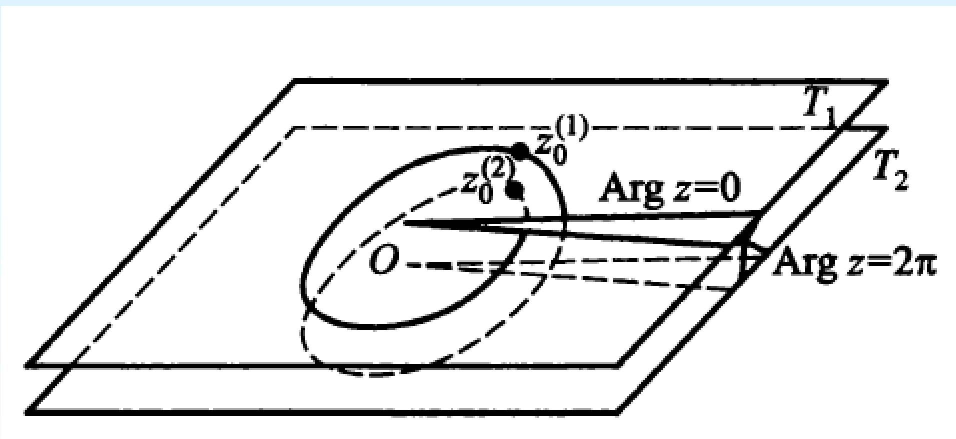


北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

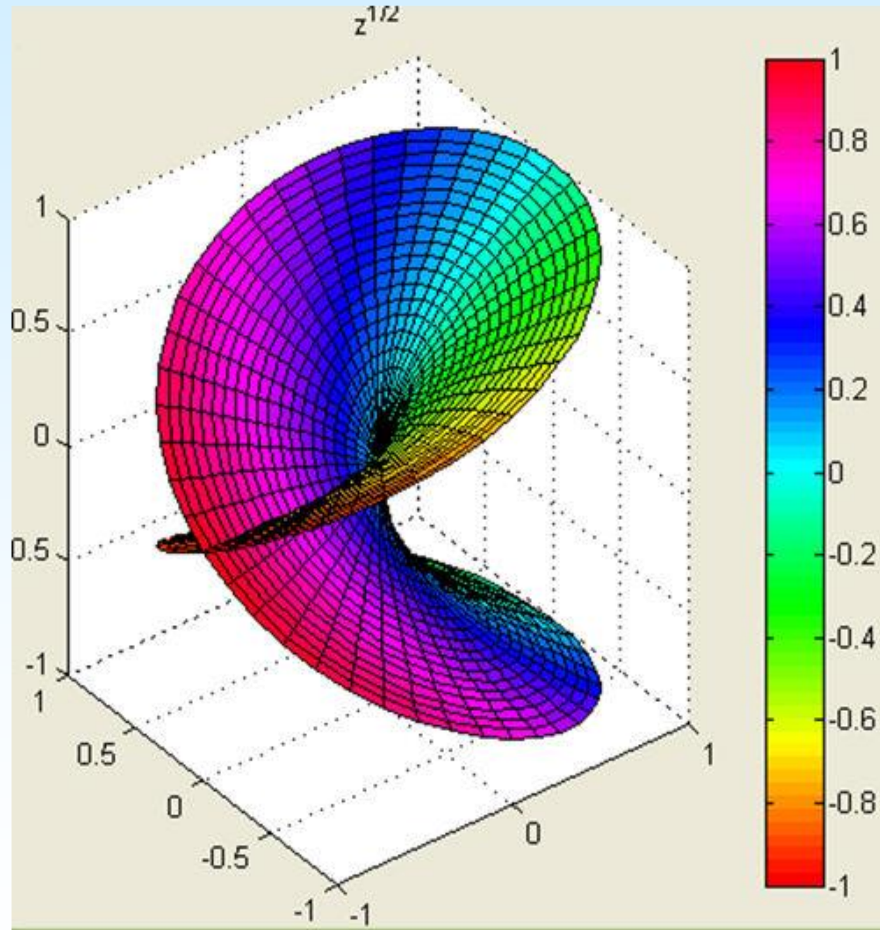
黎曼面

对于单值分支 w_1，$0 \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$；

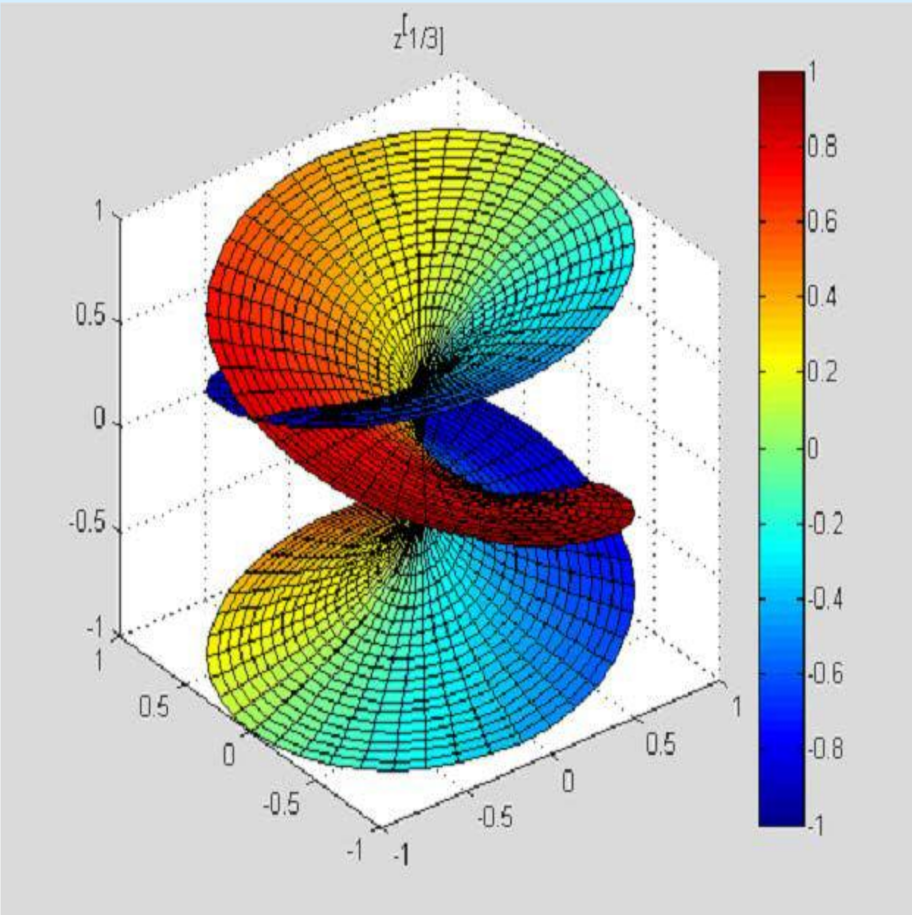
对于单值分支 w_2，$2\pi \leqslant \operatorname{Arg} z < 4\pi$.



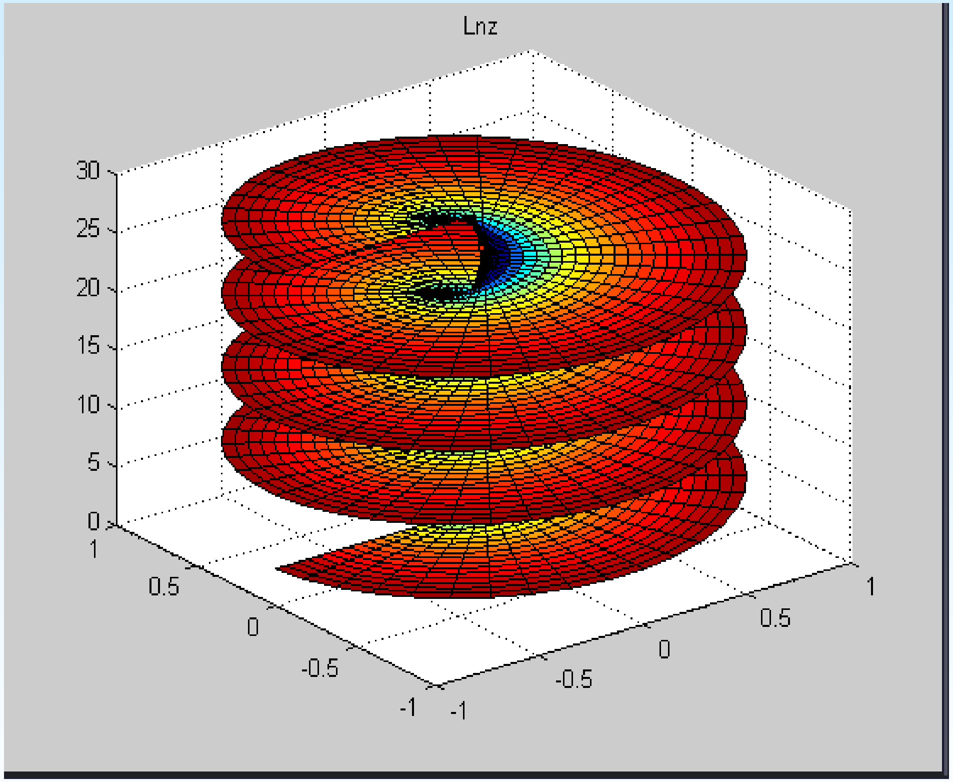
复变函数 $z^{1/2}$ 的图形



例： 复变函数 $z^{1/3}$ 的图形



对数函数 **LnZ** (图)



此图中纵轴表函数虚部，颜色表实部。

更直观表示多值性。

$$\mathbf{Lnz = \ln z} + \boldsymbol{i}\mathbf{(argz} + \boldsymbol{2k\pi}\mathbf{), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}$$