理学院 邓胜华

第 二 章 复变函数的积分

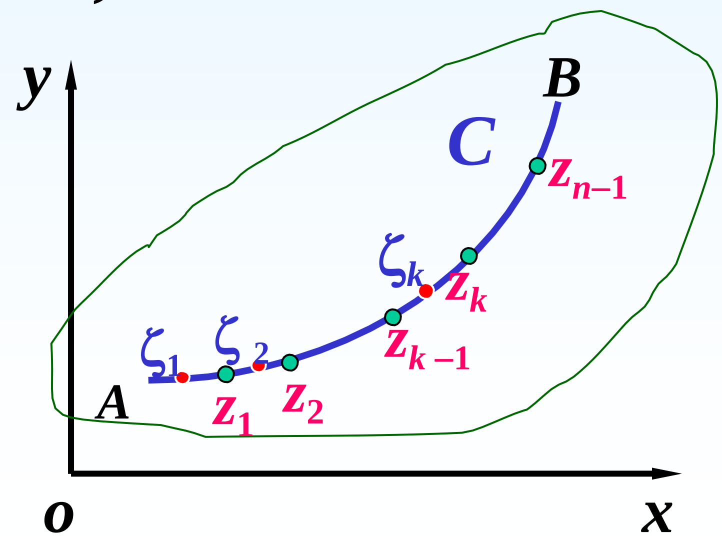
1：复变积分

一. 复积分的定义

设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 内, C 为区域 D 内起点为 A 终点为 B的一条光滑的有向曲线 ，把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$A = z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n = B,$$

在每个弧段 $z_{k-1}z_k$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 上任意取一点 ζ_k



作和式： $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot \Delta z_k$

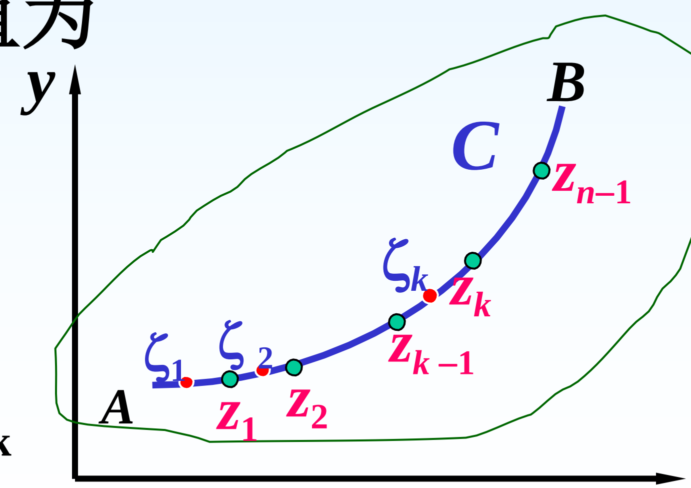
这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta s_k = z_k z_{k-1}$ 的长度，

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$ 当n无限增加且 $\delta \to 0$ 时，

如果不论对C的分法及 ζ_k 的取法如何，Sn有唯一极限，那么称这一极限值为函数f(z)沿曲线C的积分，

记为

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$



关于定义的说明:

(1) 如果C是闭曲线，则沿此闭曲线的积分记为

$$\oint_C f(z)dz$$

(2) 如果 C 是 x 轴上的区间 $a \le x \le b$, 而 $f(z) = u(x)$, 这个积分定义就是一元实变函数定积分的定义.

二. 复积分存在的条件

如果 $f(z)$ 是连续函数,而 C 是光滑曲线时,

积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 一定存在.

如果 C 是由 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 等光滑曲线依次 相互连接所组成的按段 光滑曲线, 则

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + L + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

在今后讨论中, 总假定被积函数是连续的, 曲线 C 是按段光滑的.

三、复积分的计算法

$\int_C f(z)dz$ 可以通过两个二元实变函数的线积分来计算。

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta [u(x,y) + iv(x,y)](dx + idy)$$

$$= \int_\alpha^\beta [u(x,y)dx - v(x,y)dy] +$$

$$\int_\alpha^\beta i[u(x,y)dy + v(x,y)dx]$$

例1计算 $\oint_C \mathrm{Re}\, z dz$，其中C为：

(1)从原点到点1+i的直线段；

(2)抛物线 $y = x^2$ 上从原点到点1+i的弧线；

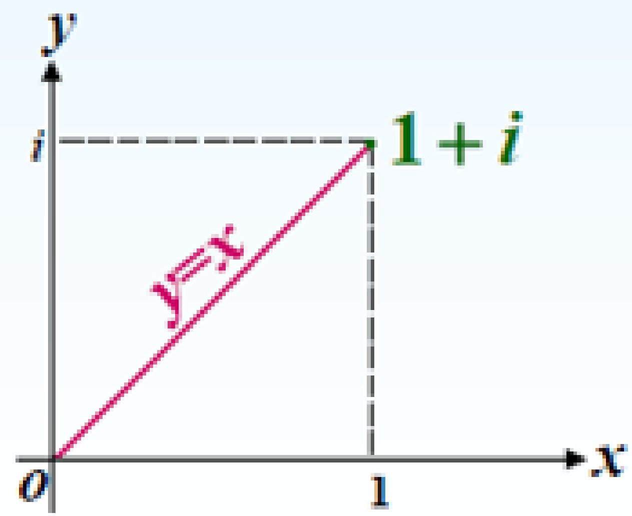
(3)从原点沿x轴到点1再到1+i的折线。

解： (1)积分路径的直线方程为

$$y = x \quad (0 \le x \le 1),$$

于是 $\int_C \mathrm{Re}\, z dz = \int_{y=x} x dx + ix dy$

$$= \int_0^1 x dx + ix dx = \frac{1}{2}(1+i)$$



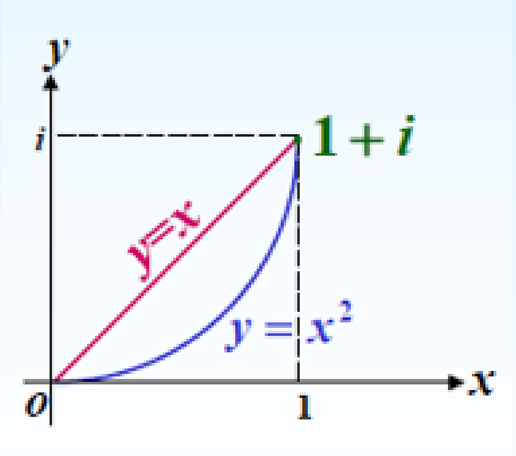
(2)积分路径的方程为

$$y = x^2 \quad (0 \le x \le 1),$$

于是 $$\int_C \mathrm{Re}z\,dz = \int_{y=x^2} x\,dx + ix\,dy$$

$$= \int_0^1 x\,dx + ix\,d(x^2)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2i}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i;$$



(3)积分路径由两段直线段构成

X轴上直线段的方程为 $y=0 \quad (0 \le x \le 1)$

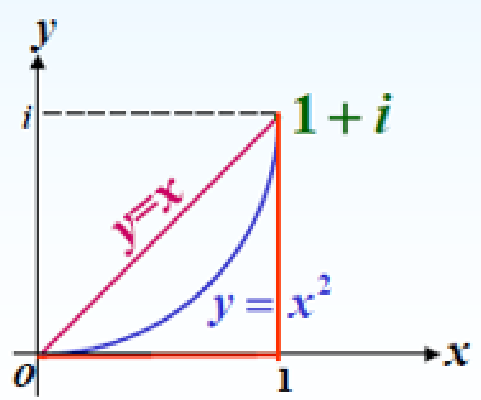
于是 $\operatorname{Re} z = x, \quad dz = dx,$

1到1+i直线段的方程为 $x = 1 (0 \le y \le 1)$

于是 $\operatorname{Re} z = 1, dz = i dy,$

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 x dx + \int_0^1 1 * i dy$$

$$= \frac{1}{2} + i.$$

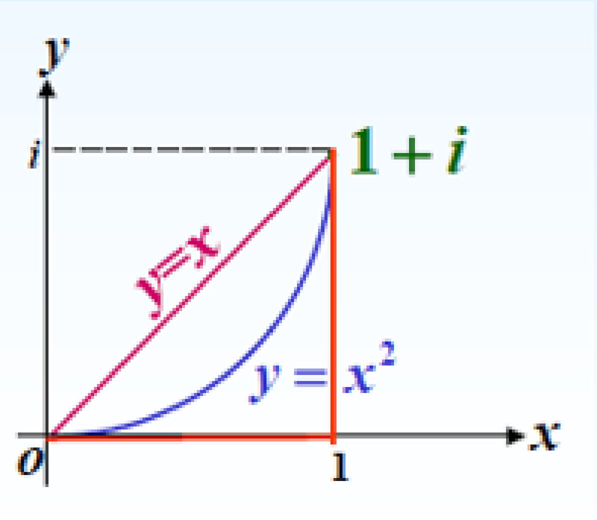


$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$，其中C为：

(1)从原点到点1+i的直线段；

$$\frac{1}{2}(1+i);$$

(2)抛物线$y=x^2$上从原点到点1+i的弧段；

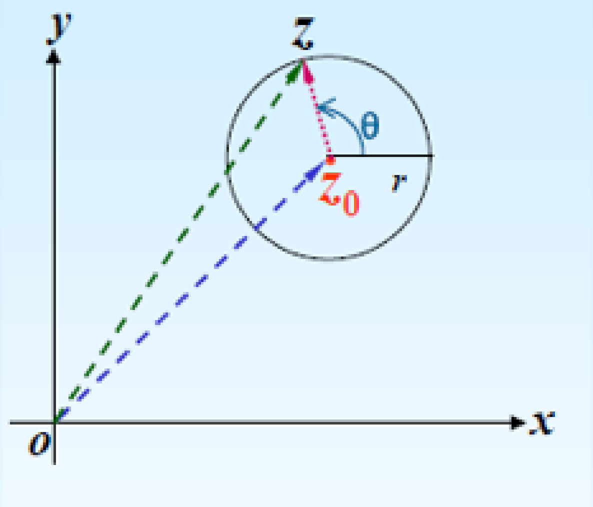


$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i;$$

(3)从原点沿x轴到点1再到1+i的折线。

$$\frac{1}{2}+i.$$

例2 求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ ，C是以z0为中心，r为半径的正向周期，n为整数。



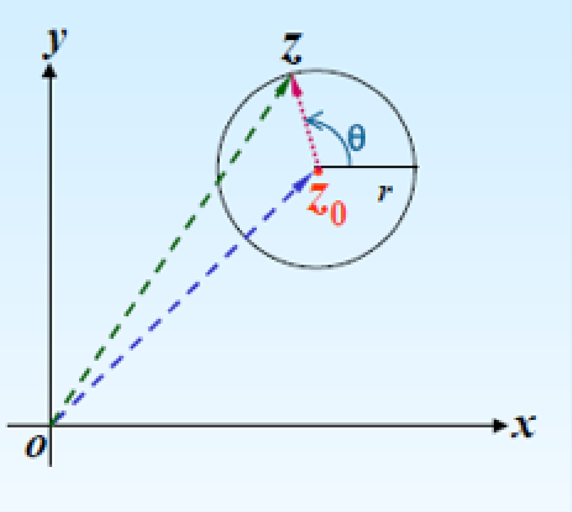
解 积分路径的方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta,$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta,$$



当$n = 0$时， $$= i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$

当$n \neq 0$时， $$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta = 0;$$

所以 $$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

重要结论：积分值与圆周的中心及半径无关。

思考：若z_0不在积分回路C内，此积分=？

四.复积分的性质

复积分与实变函数的定积分有类似的性质

$$(1)\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz;$$

$$(2)\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz;$$

$$(3)\int_C [f(z)\pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz;$$

(4)曲线C的长度为L，函数f(z)在C上满足

$|f(z)|\le M$, 那么 $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz| \le ML$

估值不等式

2: 单连通区域的柯西定理

由上讨论知，复变函数的积分值不仅与积分起点和终点有关，且与积分路径有关，决定于被积函数的解析性及区域的连通性。

1825年，柯西给出如下定理，是研究复变函数的钥匙。

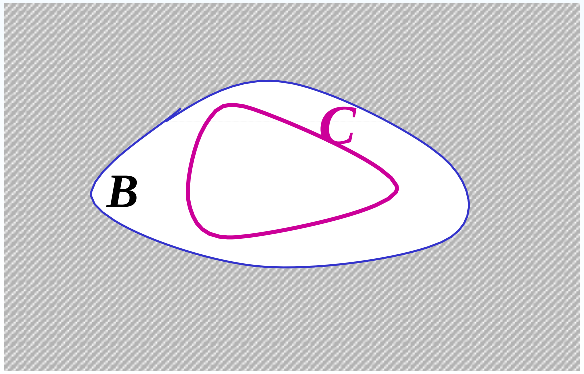
柯西(Cauchy)定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析,

那么函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C

的积分为零:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$



其中 C 可以不是简单曲线。

简单证明：

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C [u(x,y)dx - v(x,y)dy]$$
$$+i\oint_C [u(x,y)dy + v(x,y)dx]$$

u_x,u_y,v_x,v_y在D内连续，并满足C-R方程

由格林公式 $$\oint_C [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \iint_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

可得 $$\oint_C [udx + vdy] = \iint_S (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy = 0$$

$$\oint_C [udx - vdy] = \iint_S (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy = 0$$

故得 $$\oint_C f(z)dz = 0$$

关于定理的说明：

如果曲线C是区域B的边界，函数f(z)在B内解析，在闭区域$\overline{B} = B + C$上连续，那定理仍成立，即

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

3: 复通区域的柯西定理

一、复通区域的柯西定理

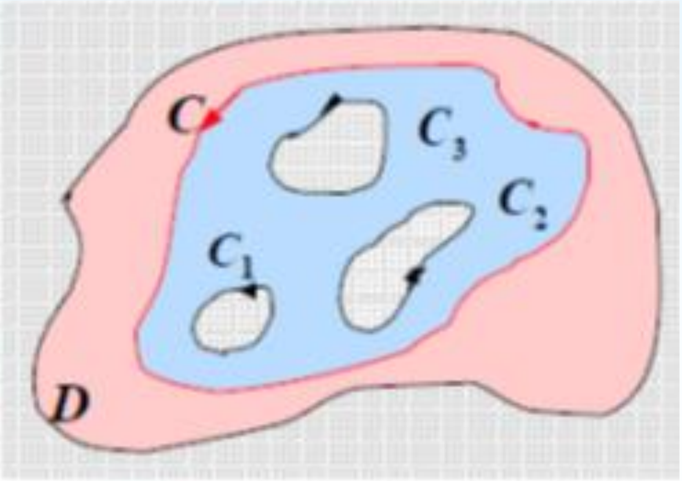
设C为复通区域D的一个边界曲线，

C1，C2，…，Cn是在C内部的边界曲线，

如果f(z)在D内解析，则

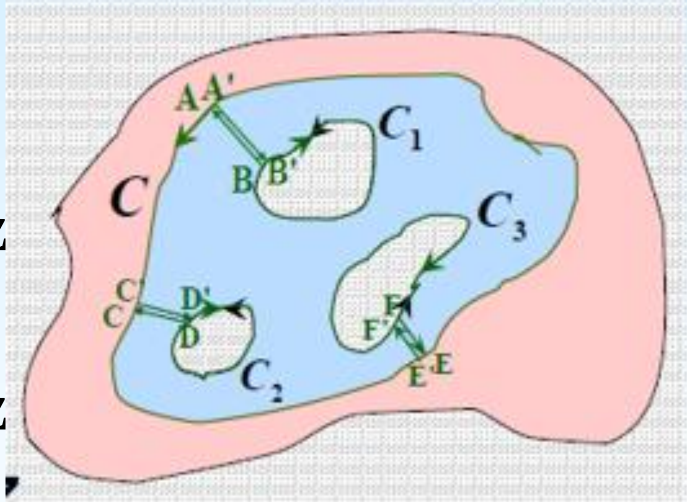
$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz,$$

其中C与C_k均取逆时针方向。



证明：作割线AB、A’B’和CD、C’D’及EF、E’F’，
则曲线$BAC'D'C_2DCE'F'C_3FEA'B'C_1B$围成单连通区域，故

$$\oint_{BAC'D'C_2DCE'F'C_3FEA'B'C_1B} f(z)dz = 0$$



$$0 = \oint_{A'B'} f(z)dz + \oint_{C^-_1} f(z)dz + \oint_{BA} f(z)dz$$

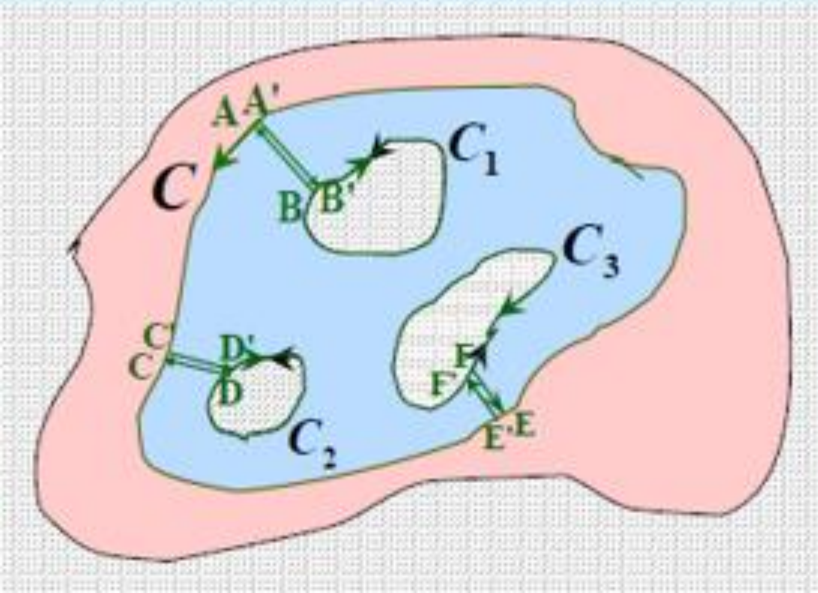
$$+ \oint_{C'D'} f(z)dz + \oint_{C^-_2} f(z)dz + \oint_{DC} f(z)dz$$

$$+ \oint_{E'F'} f(z)dz + \oint_{C_3^-} f(z)dz + \oint_{FE} f(z)dz + \oint_{C} f(z)dz$$

即： $$\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz + \oint_{C_2^-} f(z)dz + \oint_{C_3^-} f(z)dz = 0$$

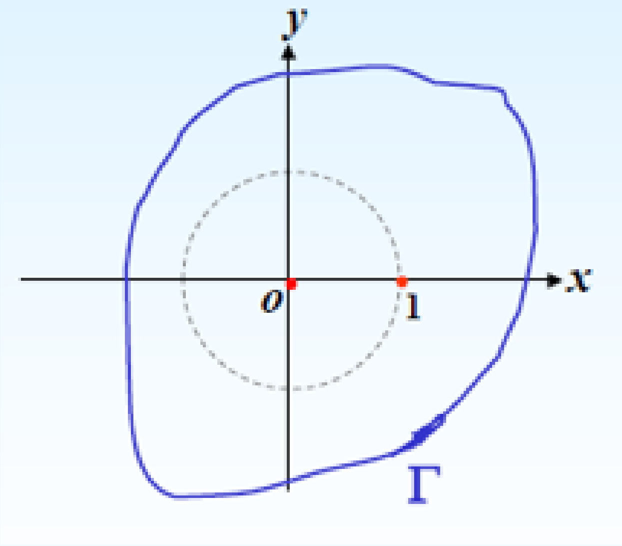
故： $$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

定理证毕。



二、典型例题

例1 计算积分$\oint_{\Gamma}\dfrac{2z-1}{z^2-z}dz$，其中Γ为包含圆周|z|=1在内的任意正向简单曲线。



解： 因为函数$\dfrac{2z-1}{z^2-z}$在复平面内有两个奇点z=0和z=1，依题意，Γ也包含这两个奇点

在Γ内作两个互不包含也互不相交的正向圆周

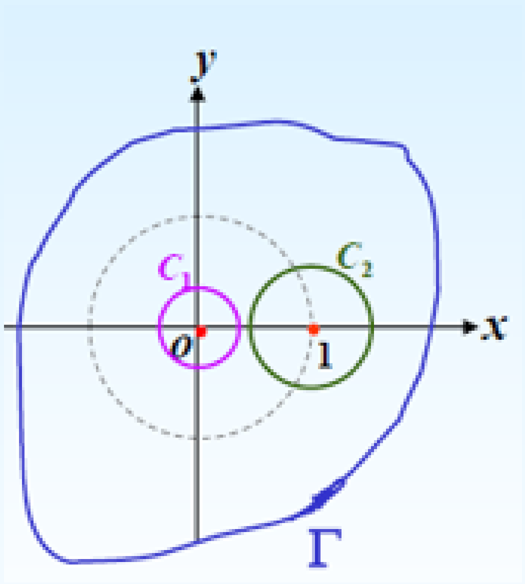
C_1和C_2，C_1、C_2分别只包含奇点z=0，z=1，

根据复通区域柯西定理，

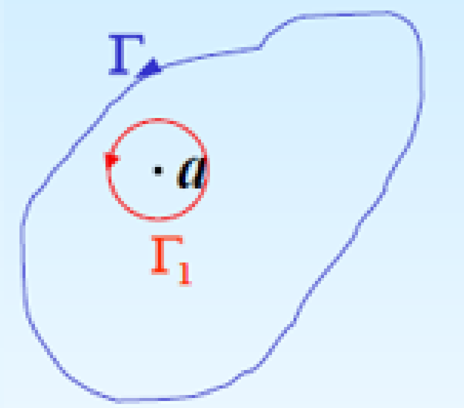
$$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz=\oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}dz+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz$$

$$=0+2\pi i+2\pi i+0=4\pi i.$$



例2　求 $\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz$ ，Γ为含a的任一简单闭路，n为整数.



解　因为a在曲线Γ内部，

故可取很小的正数ρ，

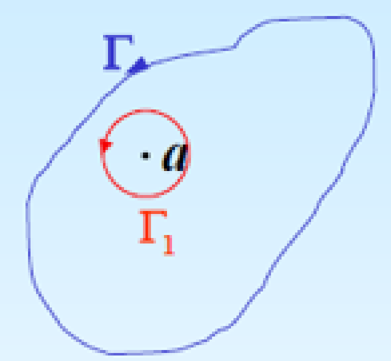
使Γ_1： $|z-a|=\rho$含在Γ内部，

$\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$在以$\Gamma+\Gamma_1^-$为边界的复联通区域

内处处解析

由复合区域柯西定理，

$$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz=\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz$$



令$z=a+\rho e^{i\theta}\quad 0<\theta\leq 2\pi$,

$$\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz=\int_0^{2\pi}\frac{\rho i e^{i\theta}}{(\rho e^{i\theta})^{n+1}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{i e^{-in\theta}}{\rho^n}d\theta$$

故$$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

三、小结

复通区域柯西定理是复积分中的重要定理, 掌握并能 灵活应用它是本章的难点.

常用结论:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

此结论非常重要, 用起来很方便, 因为Γ不必是圆, a也不必是圆的圆心, 只要a在简单闭曲线Γ内即可.

4: 不定积分与原函数

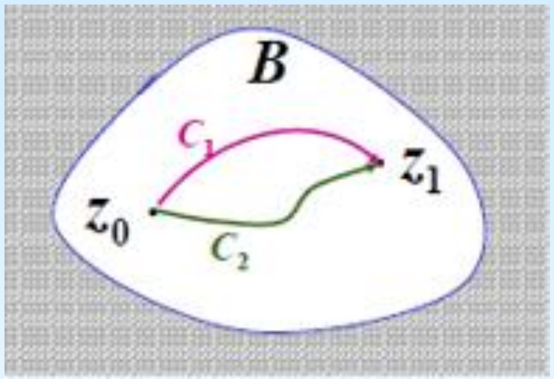
三个主要定理:

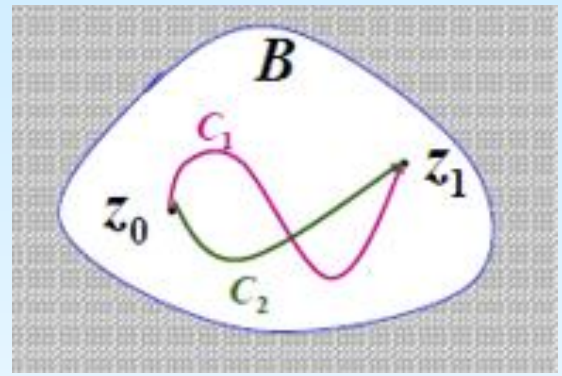
定理一（柯西基本定理）：

如果函数*f(z)*在单连通区域B内处处解析，那么积分 $\int_C f(z)dz$ 与连接起点及终点的路径C无关。

即：解析函数在单连通域内的积分只与起点和终点有关。 （如下页图）

如果起点为z_0，终点为z_1，





$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

如果固定z_0，让z_1在B内变动，并令$z_1=z$，

便可确定B内的一个单值函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$

并称F(z)为f(z)的不定积分。

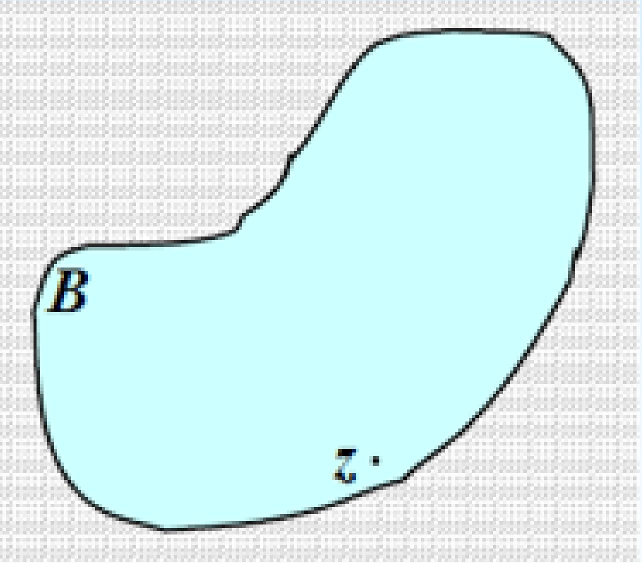
定理二

如果函数f(z)在单连通域B内处处解析，

那么函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 必为B内的一个解析函数，并且 $F'(z)=f(z)$

可以利用导数的定义来证（略）

此与微积分学中对变上限积分的求导定理完全类似。



$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 称为f(z)在区域B内的原函数

定理三

如果函数f(z)在单连通域B内处处解析，F(z)为f(z)的一个原函数，那么

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

这里z0，z1为域B内的两点。

说明：有了以上定理，复变函数的积分就可以用跟微积分学中类似的办法去计算。

例1 求 $\int_0^i z\cos z dz$ 的值。

解

$$\int_0^i z\cos z dz = \int_0^i z d(\sin z)$$

$$= [z\sin z]_0^i - \int_0^i \sin z dz$$

$$= [z\sin z + \cos z]_0^i = e^{-1} - 1.$$

此方法使用了微积分中的“分部积分法”

例2 试沿区域$\mathrm{Im}(z)\geq 0, \mathrm{Re}(z)\geq 0$内的圆弧$|z|=1$，

求$\displaystyle\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$的值。

解 函数$\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$在所设区域内解析，

它的一个原函数为$\dfrac{\ln^2(z+1)}{2}$， $e^{\frac{\pi}{4}i}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz=\left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i=\frac{1}{2}\left[\ln^2(1+i)-\ln^2 2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i\right)^2-\ln^2 2\right]=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}i.$$

5: 柯西积分公式

定理： 如果函数f(z)在区域D内处处解析，C为D 内的任意一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于D，z_0为C内任一点，那么

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

因为f(z)在z_0连续，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

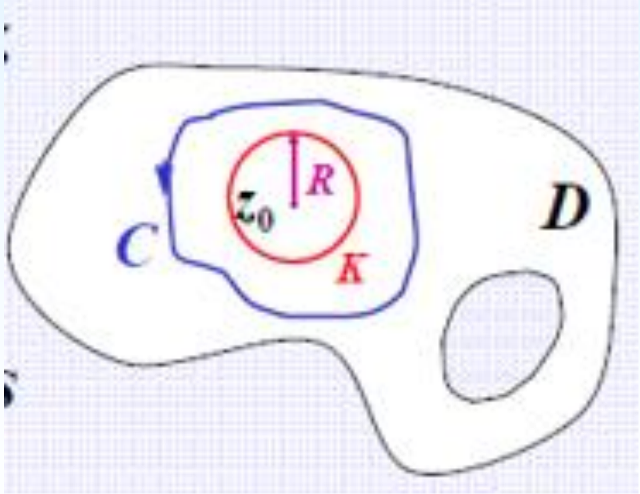
当 $|z - z_0| < \delta$ 时，$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$

设以z_0为中心，半径为R(R<δ)的正向圆周K:

$|z-z_0|$=R全在C的内部，

则 $$\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

且与R取值无关。



$$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \oint_K \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| ds$$

$$< \frac{\varepsilon}{R}\oint_K ds = 2\pi\varepsilon$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz$$

$$\because \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)$$

$$\therefore \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$ 柯西积分公式 [证毕]

常用公式表示： $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

关于柯西积分公式的说明：

(1)把函数在C内部任一点的值用它在边界上的值表示。

（解析函数的又一个特征）

(2)公式不但提供了计算某些复变函数沿闭路积分的一种方法，而且给出了解析函数的一个积分表达式。

（研究解析函数的有力工具）

(3)一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值。

如果C是圆周$z = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R * e^{i\theta})d\theta$$

(4)若D是复通区域，则C是所有边界线，积分沿各边界正向

解析函数的高阶导数

如果在 $\overline{D}$ 中f(z)解析，则f(z)的任何阶导数均存在，并且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

其中C是包围点z的位于D内的一个正向闭合曲线

证：

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z-\Delta z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\right]$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi\right]$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi$$

$$\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi-\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}d\xi$$

设$|f(z)|$在C上的最大值为M，z到C的最短距离为δ，C的长度为L，则有

$$\left|\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi-\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right|\le|\Delta z|\frac{ML}{(\delta-|\Delta z|)\delta^2}\xrightarrow{\Delta z\to 0}0$$

因此，
$$\lim_{\Delta z\to 0}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)}d\xi = \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$$

故
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$$

同理
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

（此结果说明，一个复变函数，在一个区域内，只要一节导数存在，则它的任何阶导数都存在）

例1 计算积分：$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\dfrac{\sin z}{z}dz$

解 因为$f(z)=\sin z$在复平面内解析，

$z=0$位于$|z|<4$内，

由柯西积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz=\sin z\big|_{z=0}=0$$

例2 设C表示正向圆周$x^2+y^2=3$,

$$f(z)=\int_C \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta,\text{求}f'(1+i).$$

解 根据柯西积分公式知，当z在C内时,

$$f(z)=2\pi i(3\zeta^2+7\zeta+1)\big|_{\zeta=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

故 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$, 而$1+i$在C内,

因此 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$.

例3 计算积分$\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$,其中C:

$$(1)\ |z+1|=\frac{1}{2}\quad (2)\ |z-1|=\frac{1}{2}\quad (3)\ |z|=2$$

解:

$$(1)\ \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}dz = 2\pi i \left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

(2) $$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}}{z-1}dz = 2\pi i \left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\right|_{z=1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

(3) $$\oint_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i = \sqrt{2}\pi i$$

例4　计算积分：$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz.$ n为大于1 的自然数。

解：　$z = 0$是$\frac{e^z}{z^n}$的奇点，由高阶导数公式，得

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \left(e^z\right)^{(n-1)}\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!} e^z\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

例5 计算积分 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz.$

解： 回路$|z|=3$内有三个奇点： $z=0, z=1, z=-1$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz. + \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{4}} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz.$$

$$+ \oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{4}} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz.$$

$$= i\pi(e+e^{-1}-2)$$