

§ 2.4 麦克斯韦速度分布

- 前面已指出，麦克斯韦是先导出速度分布，然后再从速度分布得到速率分布的。
- 本节中介绍麦克斯韦速度分布。
- 为了说明速度分布的含义，先介绍速度空间的概念。

§ 2.4.1 速度空间

§ 2.4.2 麦克斯韦速度分布

麦克斯韦最早用概率统计的方法导出了理想气体分子的速度分布，它可表示为

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp \left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right] \cdot dv_x dv_y dv_z$$

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = f(v_x) dv_x \cdot f(v_y) dv_y f(v_z) dv_z$$

• 麦克斯韦速度分量分布可以表示为

$$f(v_i) dv_i = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \cdot \exp \left(-\frac{mv_i^2}{2kT} \right) \cdot dv_i$$

其中 i 可分别代表 x 、 y 、 z 。

- 欲求分子速度的x分量在 v_x 到 v_x+dv_x 内, 而 v_y 、 v_z 任意的概率 $f(v_x) dv_x$ 只要对 v_y 、 v_z 积分后求出:

$$f(v_x)dv_x = f(v_x)dv_x \int_{-\infty}^{\infty} f(v_y)dv_y \int_{-\infty}^{\infty} f(v_z)dv_z$$

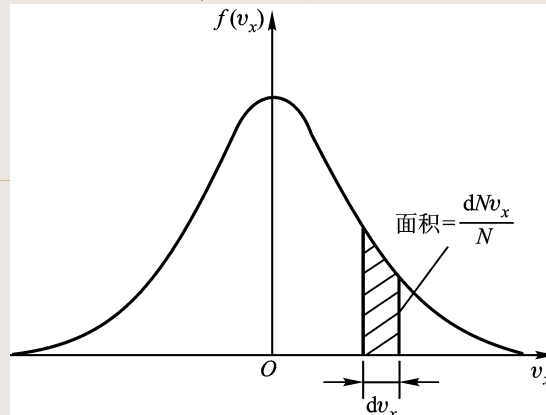
$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)dv_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}$$

$$\times \exp\left[-\frac{mv_y^2}{2kT}\right]dv_y \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right) \exp\left[-\frac{mv_z^2}{2kT}\right] \cdot dv_z$$

用定积分公式知上式中两个积分都是1, 故

$$f(v_x)dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right] \cdot dv_x$$

- x 方向速度分量的概率分布曲线如图所示：

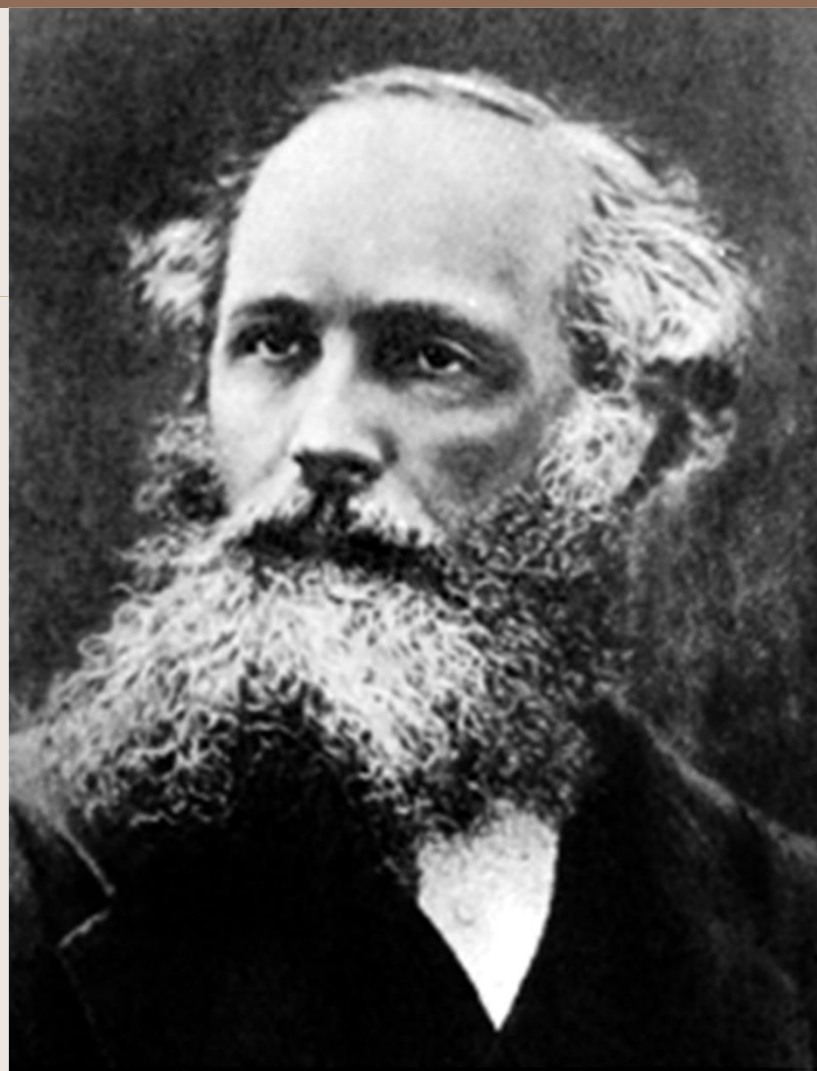


- 它对称于纵轴，图中打上斜线狭条面积即

$$f(v_x)dv_x = \frac{dN(v_x)}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right] \cdot dv_x$$

其中 $dN(v_x)$ 是所有速度分量在 v_x 到 $v_x + dv_x$ 的总分子数。

最后说明，由于麦克斯韦在导出麦克斯韦速度分布律过程中没有考虑到气体分子间的相互作用，故这一速度分布律一般适用于平衡态的理想气体。



麦克斯韦, J. C.

* § 2.4.3 相对于 v_p 的速度分量分布
与速率分布 误差函数

§ 2.4.4 从麦克斯韦速度分布导出速率分布

(一) 以极坐标表示的射击点分布

按极坐标表示的射击点分布。

若用相等的 Δr 为间隔，

在靶板上画出很多个同心圆，

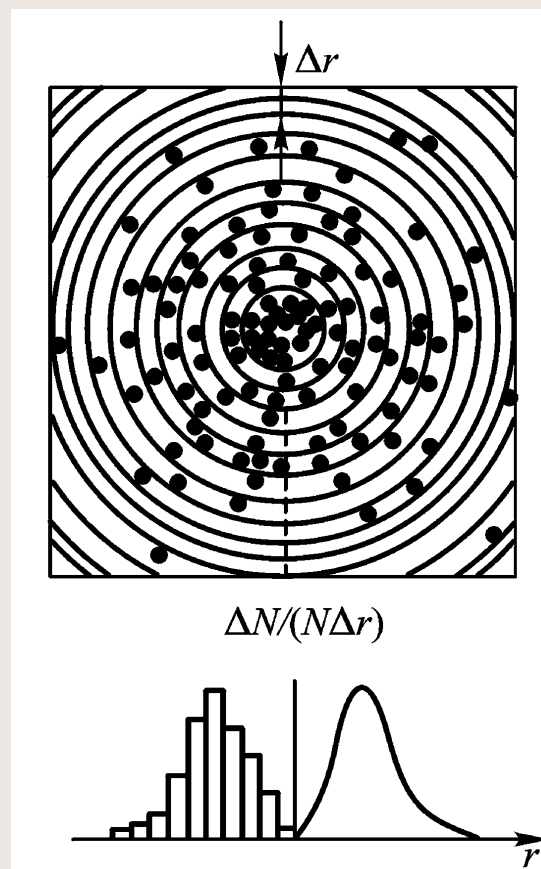
数出每个圆环中的黑点数 ΔN 。

以 $\Delta N/N \Delta r$ 为纵坐标，

r 为横坐标画出竖条，如右下图。

令 $\Delta r \rightarrow 0$ ，得到光滑曲线，

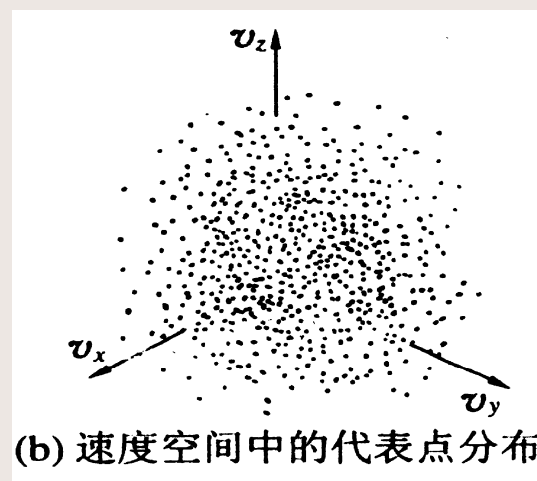
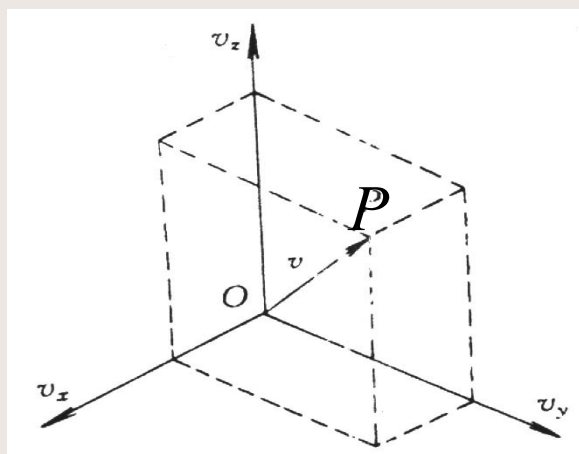
它表示离靶心不同距离处存在黑点的概率。



(二) 在速度空间中的气体分子速率分布

我们知道, 速度空间是能够同时表示分子的速度矢量的大小和方向的直角坐标系。

在任一瞬时, 一个气体分子在速度空间中与一个代表点相对应, 气体的 N 个分子对应应有 N 个代表点。这样就构成代表点在速度空间中的一种分布图形, 如图所示。



- 而麦克斯韦速率分布表示了, 在速度空间中, 所有其速率介于 v 到 $v + dv$ 范围内的分子的代表点都落在以原点为球心, 半径为 v 的厚度为 dv 的一薄层球壳中的概率, 如图所示。

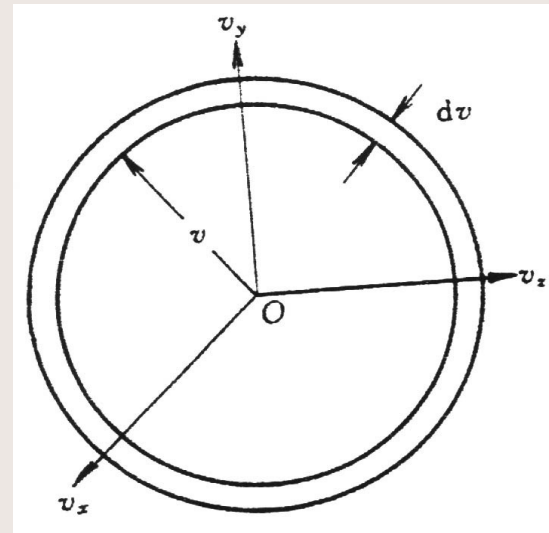
- 根据分子混沌性假设, 气体分子速度没有择优取向, 在各个方向上应该是等概率的,

- 说明代表点的数密度 D 是球对称的, D 仅是离开原点的距离 v 的函数。

- 设代表点的数密度为 $D(v)$ 。

在球壳内的代表点数 dN_v 应是 $D(v)$ 与球壳体积的乘积

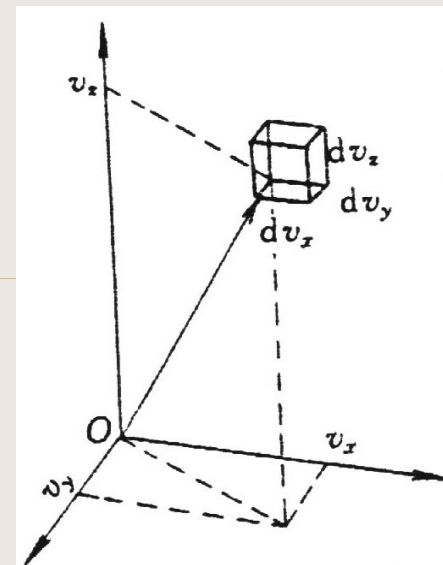
$$dN_v = D(v) \cdot 4\pi v^2 \cdot dv$$



在速度空间中，在速度分量 v_x 、 v_y 、 v_z 附近的小立方体 $dv_x dv_y dv_z$ 区间范围内的代表点数（即分子数）就是麦克斯韦速度分布

$$Nf(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z,$$

代表点数密度（单位体积中的代表点数）应该是代表点数被除以速度空间中的体积 $dv_x dv_y dv_z$ ，



$$D(v_x, v_y, v_z) = \frac{Nf(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}{dv_x dv_y dv_z} = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

而

$$D(v_x, v_y, v_z) = D(v)$$

将上二式代入到 $dN_v = D(v) \cdot 4\pi v^2 \cdot dv$

$$dN_v = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot v^2 \cdot dv$$

$$dN_v = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot v^2 \cdot dv$$

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot v^2 dv$$

- 这就是麦克斯韦速率分布.

§ 2.4.5 绝对零度时金属中自由电子的速度分布与速率分布 费米球