§2.2 概率论的基本知识

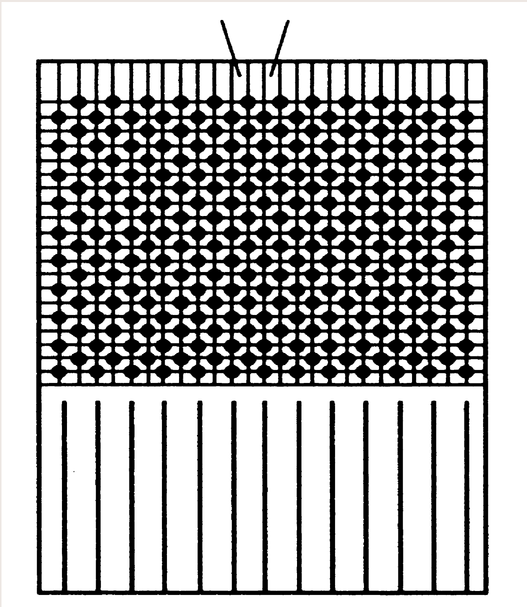
- 在§1.6中讨论气体分子碰壁数及气体压强公式时认为每一分子均以平均速率运动,
- 气体分子的速率是随机变量,如何去求平均速率、方均根速率?
- 其关键是找到一个因分子速率大小不同，因而它们出现的概率也不同的规律，我们称它为分子按速率的概率分布律。
- 本节将介绍有关概率及概率分布函数的基本知识。

§2.2.1伽尔顿板实验

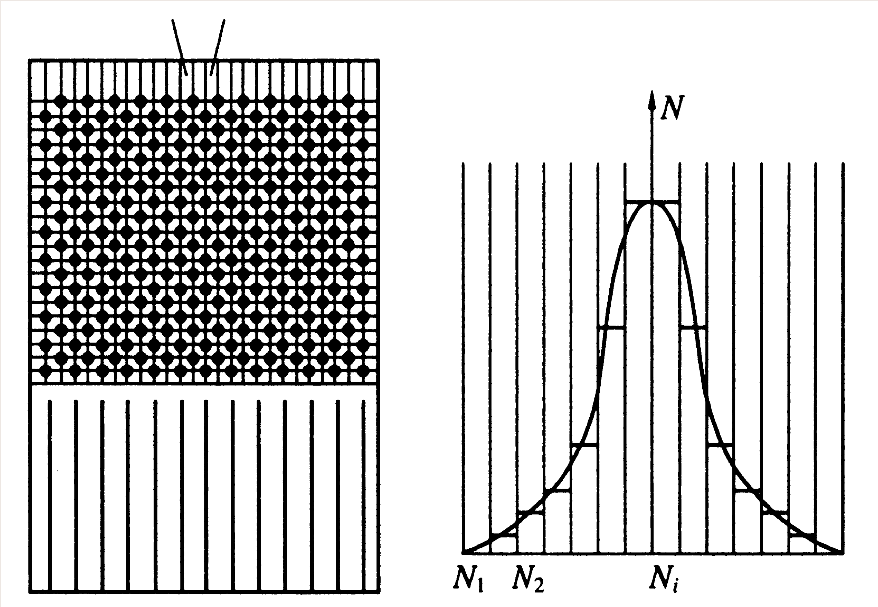
概率统计的最直观的演示是伽尔顿板实验，

如下左图所示。

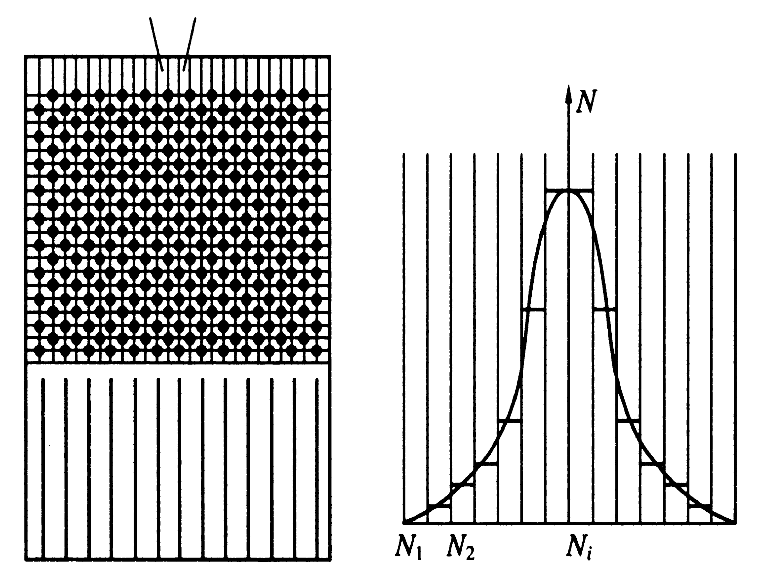
- 因为无法使小球落入漏斗内的初始状态完全相同。因而小球进入那一小槽完全是随机的。



- 只要小球总数足够多（$N\to\infty$），则每一小槽内都有小球落入，且第 i 个槽内小球数 N_i 与小球总数 N（$N=\sum N_i$）之比有一定的分布。
- 若板中各钉子是等距离配置的，则其分布曲线是对称的，如下右图所示。



- 重复实验N次，（ $N \to \infty$ ），其分布曲线都相同。
- 由此可见，虽然各小球在与任一钉子碰撞后向左还是向右运动都是随机的，由很多偶然因素决定，
- 但最终大量小球的总体在各槽内的分布却有一定的分布规律，这种规律由统计相关性所决定。



§2.2.2 等概率性与概率的基本性质

- （一）概率的定义

- 在一定条件下，如果某一现象或某一事件可能发生也可能不发生，就称为随机事件。
- 倒如掷骰子哪一面朝上完全是随机的，受到许多不能确定的偶然因素的影响。
- 若在相同条件下重复进行同一个试验（如掷骰子），在总次数 N 足够多的情况下（即 $N \to\infty$），计算所出现某一事件（如哪一面向上）的次数 N_L，则

•其百分比即该事件出现的概率

$$P_L = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N_L}{N}\right)$$

（二）等概率性

- 在掷骰子时，一般认为出现每一面向上的概率是相等的。
- 但是若在某一面上钻个小孔，在小孔中塞进些铅，然后再封上，那一面向上的概率必然不相等。
- 由此可总结出一条基本原理：

•等概率性——在没有理由说明哪一事件出现概率更大些（或更小些）情况下，每一事件出现的概率都应相等。

（三）概率的基本性质

- （1）n 个互相排斥事件发生的总概率是每个事件发生概率之和，简称概率相加法则。
- 所谓n个互相排斥（简称互斥）的事件是指，出现事件1，就不可能同时出现事件2，3…n，同样对2，3…n事件也是如此。
- （2）同时或依次发生的，互不相关（或相互统计独立）的事件发生的概率等于各个事件概率之乘积，简称概率相乘法则。

- 什么是统计独立?
- 例如:把一个骰子连续掷两次，若骰子掷第二次出现的概率与第一次掷过否，第一次出现的哪一面向上都无关，
- 我们就说连续两次掷骰子是统计独立的。
- 若骰子是刚性的，且每一面向上的概率都是(1/6)，连续掷两次出现的花样为11，12，……65，66共36种花样。
- 显然这36种花样也是等概率的，故连续掷两次均出现 “1” 的概率是

$$P_{11}=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(1)\cdot P(1)$$

§ 2.2.3 平均值及其运算法则

- 统计分布的最直接的应用是求平均值。
- 以求平均年龄为例，N 个人的年龄平均值就是 N 个人的年龄之和除以总人数 N。
- 求年龄之和可以将人按年龄分组，设u_i为随机变量（例如年龄），其中出现（年龄）u_1值的次（或人）数为N_1，u_2值的次（或人）数为N_2……，则该随机变量（年龄）的平均值为

$$\overline{u} = \frac{N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots}{\sum_i N_i}$$

因为N_i / N 是出现 u_i 值的百分比，当$N\to\infty$ 时该百分比就是出现 u_i 值的概率 P_i，故

$$\bar{u} = \frac{N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots}{\sum_i N_i} = \frac{\sum_i N_i u_i}{N}$$

$$\bar{u} = P_1 u_1 + P_2 u_2 + \cdots = \sum_i P_i u_i$$

- 这两个式的不同是，上式是通过随机变量的和（即求和式）来求平均值的，
- 而下式是利用概率分布来求平均值的。
- 利用下式可把求平均值的方法推广到较为复杂的情况，从而得到如下的平均值的运算公式

$$\overline{f(u)} = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) P_i$$

平均值的性质：

- 设 f（u）是随机变量 u 的函数，则
- (1) $\overline{f(u)+g(u)}=\overline{f(u)}+\overline{g(u)}$

（2）若 c 为常数，则

$$\overline{cf(u)}=c\overline{f(u)}$$

(3) 若随机变量 u 和随机变量 v 相互统计独立。又 f（u）是 u 的某一函数，g（v）是 v 的另一函数，则

$$\overline{f(u)\cdot g(v)}=\overline{f(u)}\cdot\overline{g(v)}$$

应该注意到，以上讨论的各种概率都是归一化的，即

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

§2.2.4 均方偏差

随机变量会偏离平均值，即

$$\Delta u_i = u_i - \bar{u}$$

$$\overline{u - \bar{u}} = 0$$

其偏离值的平均值为零，

但均方偏差不为零。

$$\overline{(\Delta u)^2} = \overline{u^2 - 2u\bar{u} + (\bar{u})^2}$$

$$= \overline{u^2} - 2\bar{u} \cdot \bar{u} + (\bar{u})^2 = \overline{u^2} - (\bar{u})^2$$

$$\overline{(\Delta u)^2} \geq 0$$

$$\overline{u^2} \geq (\bar{u})^2$$

定义相对均方根偏差。

$$\left[\overline{\left(\frac{\Delta u}{\bar{u}}\right)^2}\right]^{1/2} = \frac{\left\{\overline{(\Delta u)^2}\right\}^{1/2}}{\bar{u}} = (\Delta u)_{\mathrm{rms}}$$

当 u_r 所有值都等于相同值时，

$$(\Delta u)_{\mathrm{rms}} = 0$$

可见相对均方根偏差表示了随机变量在平均值附近分散开的程度，

- 也称为涨落、散度或散差。

§2.2.5 概率分布函数

- 上面所讨论的随机变量只能取分立的，或称离散的数值。
- 实际上有很多变量是连续变化的，例如粒子的空间位置或粒子的速率。
- 在随机变量取连续值时，上述求平均值公式中 P_i 也是连续分布的。
- 但是因为测量仪器总有一定误差，在测量分子速率时，我们测不出分子速率恰好为100m/s的分子数是多少，

- 若仪器的误差范围为1m/s，则我们只能测出分子速率从99.5m/s到100.5m/s的分子数是多少。
- 我们也不能讲分子速率恰好处于100m/s的概率，而只能讲分子速率介于某一范围（例如99m/s到101m/s）内的概率。
- 为了对连续变量的概率分布了解得更清楚，下面举一个有关打靶试验的例子。

子弹沿靶板的分布实验：

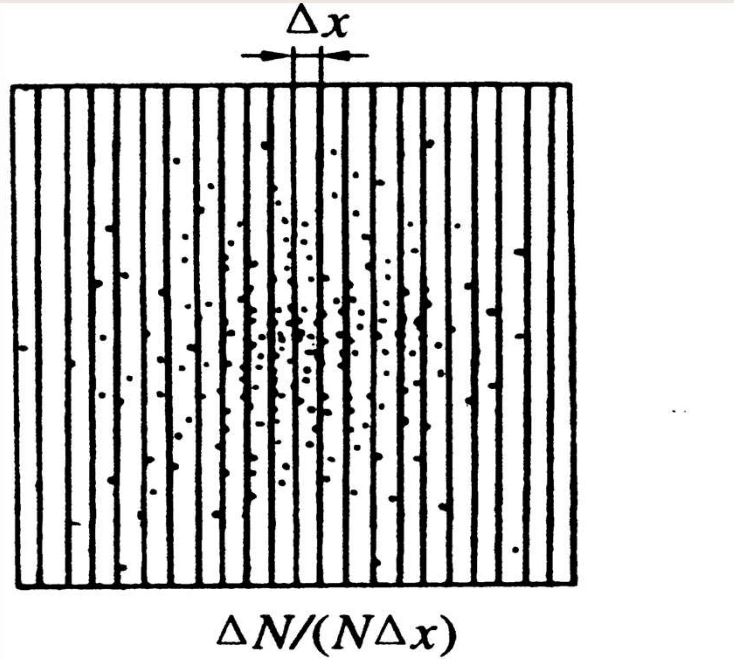
右图是用直角坐标表示靶板上靶点的分布。

把靶平面划分出很多宽为Δx的窄条，

Δx的宽度比黑点的大小要大得多。

数出在x 到$x+\Delta x$ 范围窄条内的黑点数ΔN，

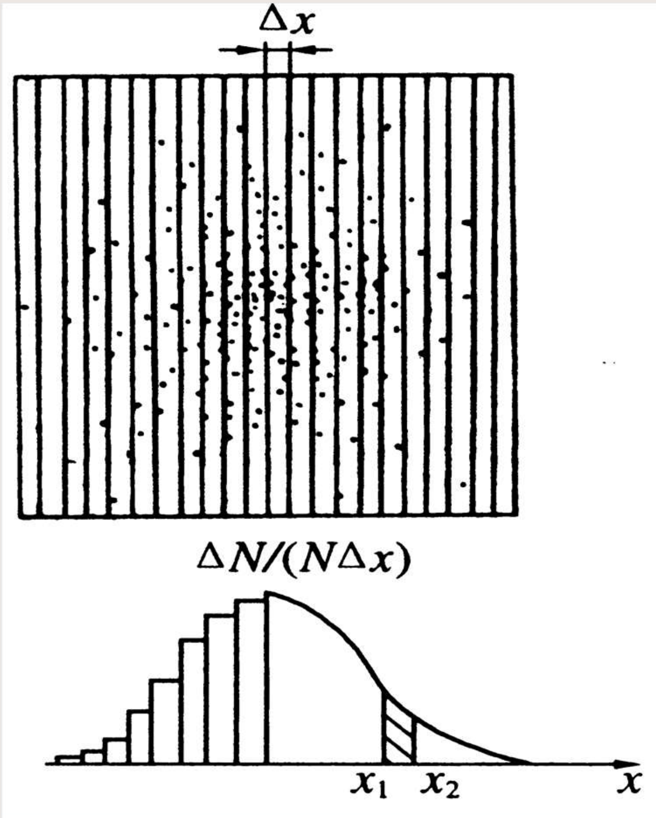
把它除以靶板上总的黑点数N。



则其百分比 $\Delta N / N$ 就是黑点处于x 到$x+\Delta x$ 范围内这一窄条的概率。

然后以$\Delta N / N\Delta x = f(x)$为纵坐标，以 x 为横坐标，画出一根根竖条，每根竖条的宽度为Δx。

- 竖条面积才是粒子数所占的百分比，即概率。
- 若令 $\Delta x \to 0$ ，就得到一条连续曲线，
- 这时的纵坐标$\Delta N / N\Delta x = f(x)$称为黑点沿 x 方向分布的概率密度，表示黑点沿x方向的相对密集程度



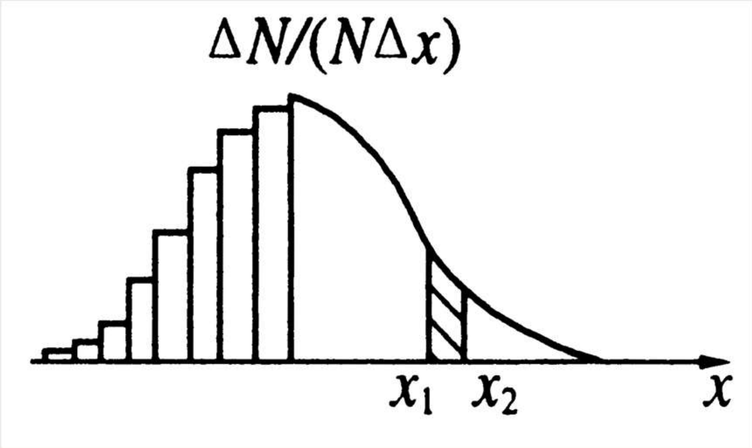
$f(x)\mathrm{d}x$表示黑点的位置处于x 到 $x+\mathrm{d}x$ 范围内的概率。

- 这就是曲线中x 到$x+\mathrm{d}x$ 微小线段下的面积。而黑点处于x_1到x_2范围内的概率为

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

如果把积分区域扩展为无穷大

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$



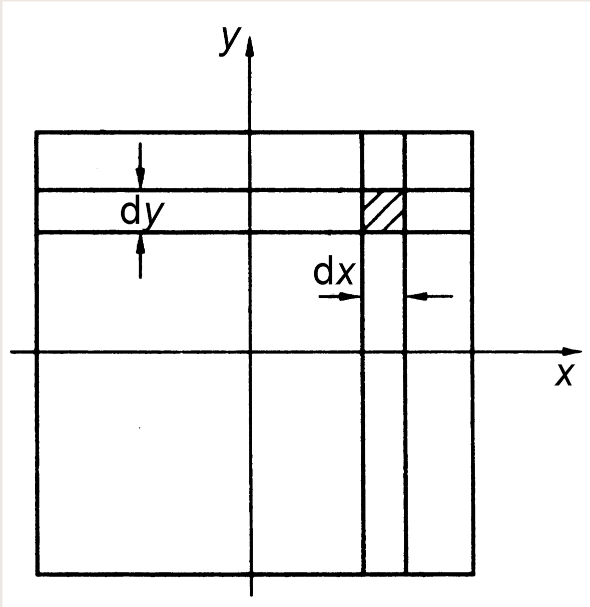
这称为归一化。

类似地可把靶板沿y方向划分为若干宽为Δy 的窄条，

数出每一窄条中的黑点数，求出

$$F(y) = \Delta N / N \Delta y。$$

并令$\Delta y \to 0$，可得到黑点处于y 到 $y + dy$ 范围内的概率 $f(y)\,dy$。



- 显然，黑点处于 x 到 $x+\mathrm{d}x$，同时处于 y 到 $y+\mathrm{d}y$ 范围内的概率就是图中打上斜线的范围内的黑点数与总黑点数之比。为什么?

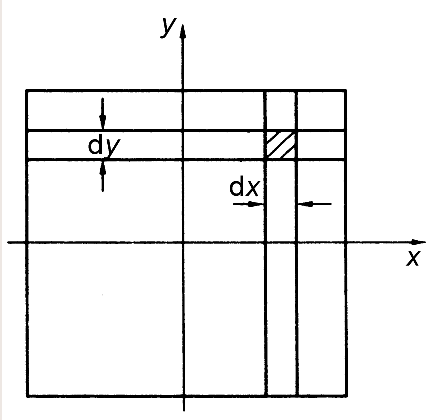
- 因为这样的黑点既要处于 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 范围内，又要处于 y 到 $y+\mathrm{d}y$ 范围内，这是同时事件。

又粒子处于x 坐标与y 坐标是彼此独立的。

按相互独立事件的概率相乘法则，粒子处于该面积上的概率为

$$f(x)\,\mathrm{d}x\cdot f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



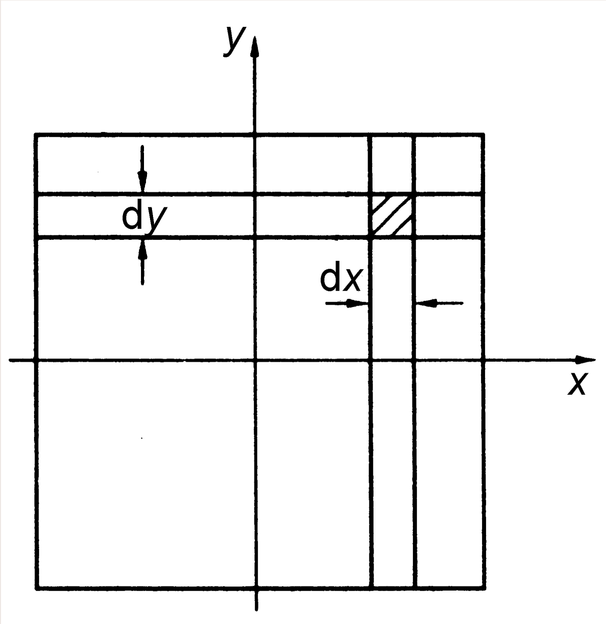
- $f(x, y)$ 称为黑点沿平面位置的概率密度分布函数，
- 它表示在这一区域内黑点相对密集的程度。

$f(x, y)\,dx\,dy$ 称为沿平面位置的概率分布函数。

如果要求出处于x_1到x_2、y_1 到y_2内的概率，只要对x，y

积分

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2} f(y)\mathrm{d}y \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$



- 有了概率分布函数就可求平均值。
- 例如，黑点的x 方向坐标的平均值为

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

X 的某一函数 F（x）的平均值为

$$\overline{F(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overline{g(x, y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$