北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

第 3 章 复变函数级数

1:复数项级数

2:幂级数

3:泰勒级数展开

4:洛朗级数展开

5:孤立奇点的分类

复级数

每一项都是复数的无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

其中

$$\alpha_n = a_n + ib_n$$

复数项无穷级数的收敛性问题归结为两个实数项级数的收敛性问题：

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{和} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

柯西收敛判据

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+ib_n)$ 收敛的柯西充要条件

对 任意$\varepsilon>0$,存在n, 使得对任意正整数 P ，有

$$\left|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}\right|<\varepsilon$$

绝对收敛

若级数各项的模组成的级数收敛

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n| = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

绝对收敛的级数必是收敛的。

绝对收敛的复数项级数的性质：

（1）可以任意加括号，组成新的项。

（2）可以任意改变次序。

如：$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\cdots$

（3）可以拆成几个子级数，每个子级数仍绝对收敛。

如：$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}$

（4）两个绝对收敛的级数之积仍然绝对收敛

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + u_0 v_3 + \cdots$$

$$+ u_1 v_0 + u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_1 v_3 + \cdots$$

$$+ u_2 v_0 + u_2 v_1 + u_2 v_2 + u_2 v_3 + \cdots$$

$$+ u_3 v_0 + u_3 v_1 + u_3 v_2 + u_3 v_3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} u_l v_{n-l} \right)$$

说明：这里的乘积是一个二重级数。
二重级数的和与求和方式有关。
绝对收敛级数的和与求和方式无关。

复变函数项级数

一、复变项级数及其收敛性

每一项都是复变函数的级数$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$称为复变项级数。

若对$\forall\varepsilon$ ，必有$N(z)$存在，使当$n>N(z)$时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)\right|<\varepsilon$$，式中 p 为任意整数。

若 N 跟 z 无关，则称级数在区域 B 上一致收敛。

一致收敛级数的性质

1. 和函数的连续性

在 B 上一致收敛的级数的每一项 $w_k(z)$ 在 B 内连续，则级数的和 $w(z)$ 也是 B 上的连续函数。

2. 逐项求积分

在 l 上一致收敛的级数每一项 $w_k(z)$ 都是 l 上的连续函数，则级数的和 $w(z)$ 也是 l 上的连续函数，而且级数可以沿 l 逐项积分

$$\int_l w(z)\,dz = \int_l \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_l w_k(z)\,dz$$

3. 逐项求导

设 $w_k(z)$ 是 B 内的解析函数，且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 一致收敛，则和函数也是 B 内的解析函数，且可逐项求导。

$$w^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$$

且最后的级数 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$ 在 $\bar{B}$ 内的任意一个闭区域中一致收敛。

幂级数

一、定义：每一项都是幂函数的复级数称为**幂级数**.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

其中 $z_0, a_0, a_1, a_2, \cdots$ 都是复常数。

二、幂级数的收敛半径

考虑模组成的正项级数

$$|a_0| + |a_1||z-z_0| + |a_2||z-z_0|^2 + \cdots + |a_k||z-z_0|^k + \cdots.$$

达朗贝尔判别法： $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| |z-z_0| < 1$

正项级数收敛，原级数绝对收敛

定义：
$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$$

从：
$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\left|z-z_0\right|<1$$

得到： $\left|z-z_0\right|<R$ —— 该区域内原级数绝对收敛

在该区域外：$\left|z-z_0\right|>R$

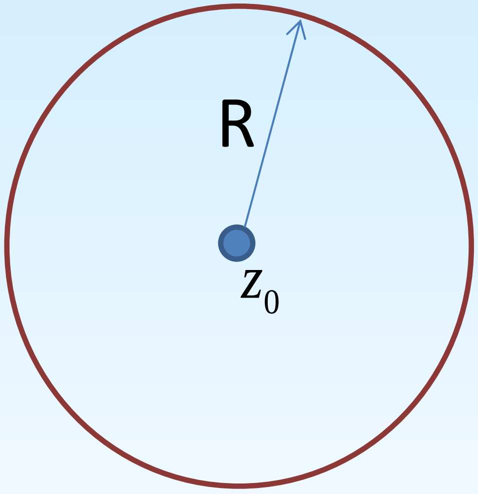
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|a_{k+1}\right|\left|z-z_0\right|^{k+1}}{\left|a_k\right|\left|z-z_0\right|^k}>\lim_{k\to\infty}\frac{\left|a_{k+1}\right|}{\left|a_k\right|}R=1.$$

原级数发散

$|z-z_0|<R$ 表示圆内部区域，

该圆为幂级数的收敛圆

该圆的半径R为收敛半径



圆周上各点，不能确定幂级数收敛还是发散！

例如，以下级数：R 均为1，收敛圆周 $|z|=1$

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ⟶ 收敛圆周上无收敛点；

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ⟶ 在点 $z=1$ 发散，在 $z=-1$ 收敛；

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ⟶ 在收敛圆周上处处绝对收敛。

对于交错级数，有莱布尼兹判别法：如果级数符号交替且通项绝对值递减，则级数收敛

高斯判据：h>1 收敛；h<=1 发散 $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}$

收敛半径的计算

方法1：基于比值法 $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$

方法2：基于根值法 $R=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}.$

幂级数的根植判别法：

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}<1$ $\longrightarrow$ 绝对收敛

得到区域： $|z-z_0|<R=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$

例1　求幂级数 $1+t+t^2+\cdots+t^k+\cdots$ 的收敛圆，t 为复变数。

例2　求幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots$ 的收敛圆，z 为复变数。

例3　已知幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 及 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$的收敛半径分别是 R_1 及 R_2。

$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k$　收敛半径？

解：原式 $= \sum_{k=0}^{\infty}(a_k)z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$

已知$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为R_1，$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ 的收敛半径为R_2. 所以$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)z^k$ 的收敛半径为 R_1 与 R_2 的交集($R_1 \cap R_2$)，$|z|$ 的收敛圆即存在于 R_1 和 R_2. 因此，其 R_1 和 R_2 中较小的即满足其条件.

三、幂级数的运算和性质

1. 幂级数有理运算的收敛半径

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, R=r_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, R=r_2.$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,|z|<R,R=\min(r_1,r_2)$$

$$f(z)\cdot g(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n)z^n,|z|<R,R=\min(r_1,r_2)$$

2. 复变幂级数在收敛圆内的性质

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为R，则

（1） 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是收敛圆

$|z-a|<R$ 内的解析函数。

（2）$f(z)$ 在收敛圆 $|z-a|<R$ 内的导数，可将

其幂级数逐项求导得到，即 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$.

(3) $f(z)$ 在收敛圆内可以逐项积分

即 $$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_c (z-a)^n\mathrm{d}z,\quad c\in|z-a|<R$$

或 $$\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

简言之：在收敛圆内，幂级数的和函数解析；幂级数可逐项求导，逐项积分。
（常用于求和函数）

幂级数的和可以表为连续函数的回路积分：

$$\mathrm{w}(\mathrm{z})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{w(\zeta)}{\zeta-\mathrm{z}}\mathrm{d}\zeta$$

$$=a_0+a_1\left(z-z_0\right)+a_2\left(z-z_0\right)^2+\cdots$$

已知：在收敛圆内, 幂级数的和函数解析。

问题:函数解析能否展开为幂级数?

解析函数的局域性展开

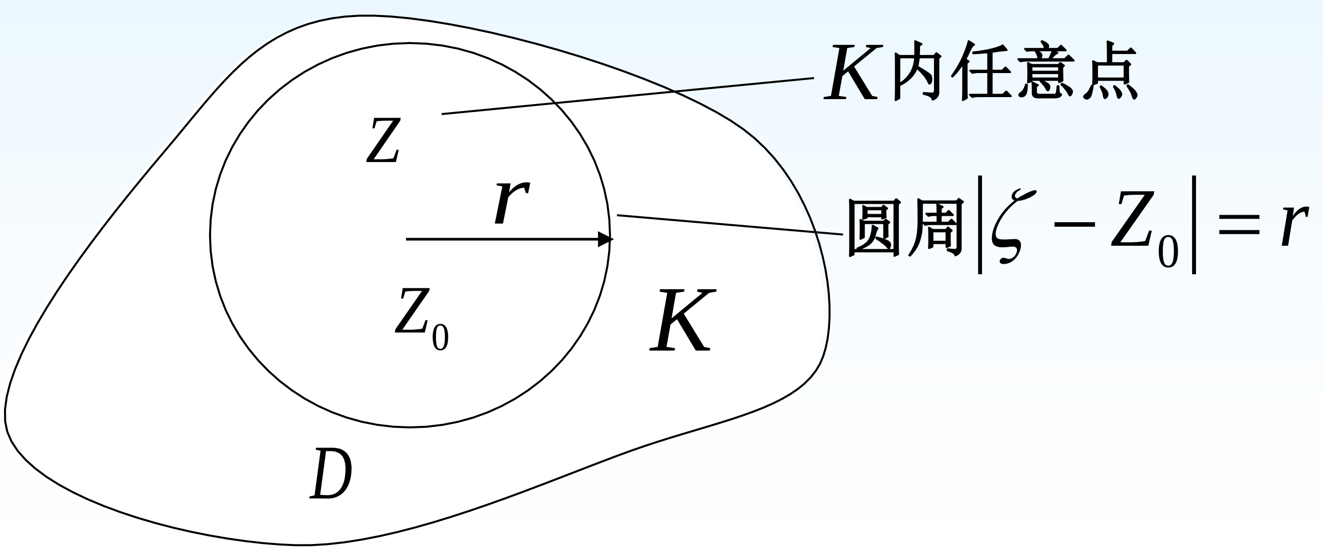
- 一、解析函数的泰勒展开
- 二、解析函数的洛朗展开

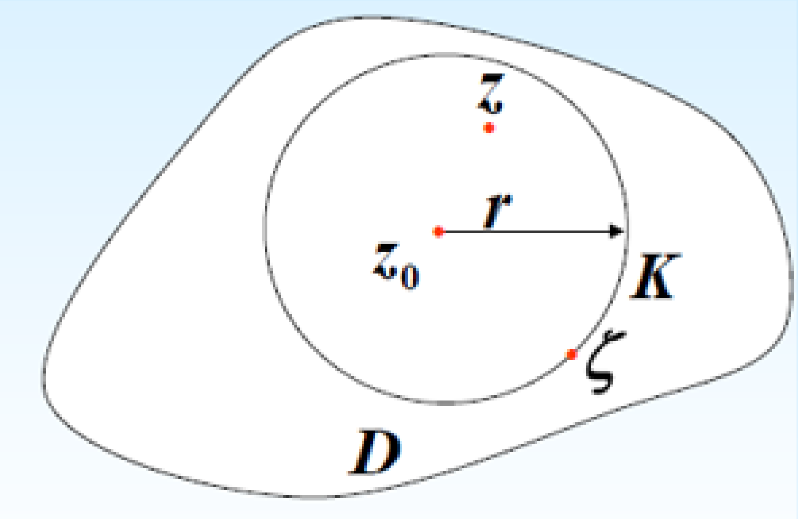
解析函数的Taylor展开

将任一个解析函数用幂级数来表达

设区域 $f(z)$ 在区域 D 内解析，圆周 $K:\left|\zeta - Z_0\right| = r$

为 D 内绕 Z_0 正向一周的闭合曲线。如图。





由柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \to \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$$

积分变量 ζ 在圆周 K 上，点 z 内，因而 $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$

所以 $\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\cdots\right]$$

$$\therefore\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\right]\mathrm{d}\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right]$$

由高阶导数公式, 上式又可写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

从而在 K 内 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

泰勒级数

$f(z)$ 在 z_0 的**泰勒展开式**。 圆周 K 的半径可以任意增大,只要 K 在 D 内即可。

泰勒定理:

设 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆 C_R 内解析，　则对圆内任一点 z ，可展开为泰勒级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$$

其中 $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(z_0\right), n=0,1,2,\cdots$

展开中心或展开点：　z_0

C_R也可以是圆环域内绕z_0正向一周的任意一条简单闭曲线C。

如果是有限远点，则积分方向是沿着曲线C的正方向，即逆时针方向；

如果是无限远点(即$z=\infty$)，积分方向沿着曲线C的反方向，即顺时针方向。

说明:

1.复变函数展开为泰勒级数的条件要比实函数时弱得多；

因为 $f(z)$ 解析，可以保证无限次可微和各阶导数的连续性；所以复变函数展为泰勒级数的实用范围就要比实变函数广阔得多.

2. 当 $z_0=0$时, 级数称为麦克劳林级数。

3.利用泰勒级数可以将解析函数展开为幂级数，展开式是唯一的。

麦克劳林级数(Maclaurin series)是函数在x=0处的泰勒级数，它是牛顿(I.Newton)的学生麦克劳林(C.Maclaurin)于1742年给出的，用来证明局部极值的充分条件，他自己说明这是泰勒级数的特例，但后人却加了麦克劳林级数这个名称。

例1 求e^{z}在 $z=0$的泰勒展开式.

例2 可得 $\sin z$ 与 $\cos z$ 在 $z_0 = 0$ 的泰勒展开式.

例3 将 $f(z)=\ln z$ 在 $Z_0=1$ 的邻域上展开.

例4 将 $f(z)=(1+z)^m$ 在$Z_0=0$ 的邻域上展开.

附：常见函数的泰勒展开式

$$1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

$$2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, (|z| < 1)$$

$$4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, (|z| < \infty)$$

$$5)\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, (|z| < \infty)$$

$$6)\ln(1+z) = \ln 1 + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$= \ln 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{z}^{n+1}}{n+1}, (|z| < 1)$$

$$7)(1+z)^\alpha = 1^\alpha \left[1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots \right] = 1^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad (|z| < 1)$$

解析函数的洛朗（Laurent）展开

问题：

函数 $f(z)$ 能否在其奇点附近展开成幂级数？

1. 双边幂级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂项部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{正幂项部分}}$$

收敛

负幂项部分
主要部分
（无限部分）

正幂项部分
解析部分
（正则部分）

同时收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\text{令 } \zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

收敛半径 R_2

收敛域

$$|z-z_0| < R_2$$

收敛半径 R

$|\zeta| < R$ 时，收敛

收敛域

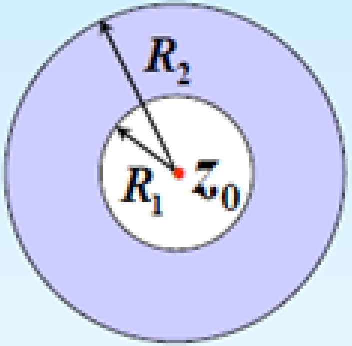
$$|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

若（1） $R_1 > R_2$ ：两收敛域无公共部分，

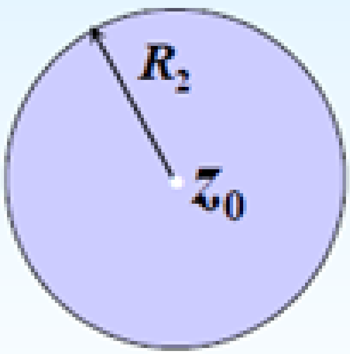
（2） $R_1 < R_2$ ：两收敛域有公共部分 $R_1 < |z-z_0| < R_2$

结论： 双边幂级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛区域为

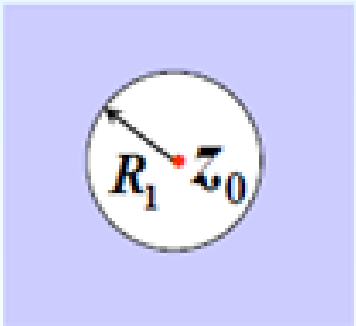
圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$



常见的特殊特殊圆环域：



$0 < |z-z_0| < R_2$



$R_1 < |z-z_0| < \infty$

$0 < |z-z_0| < \infty$

2. 在圆环域内解析的函数能否展成幂级数？

一、洛朗定理

在环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内解析的函数 $f(z)$ 必可展开成洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$ 洛朗展开式

其中 $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$ 洛朗系数

$$(n=0,\pm 1,\cdots)$$

C为环域内绕 Z_0的任一正向简单闭曲线

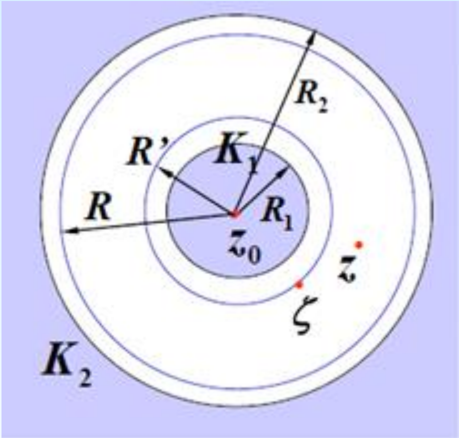
展开中心（或展开点）：Z_0

证明：对点 Z，可做包含 Z的环域：$R' < |z - z_0| < R$

$(R_1 < R', \ R < R_2)$，在此闭域上 $f(z)$ 解析

由复同区域柯西公式有：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right]$$



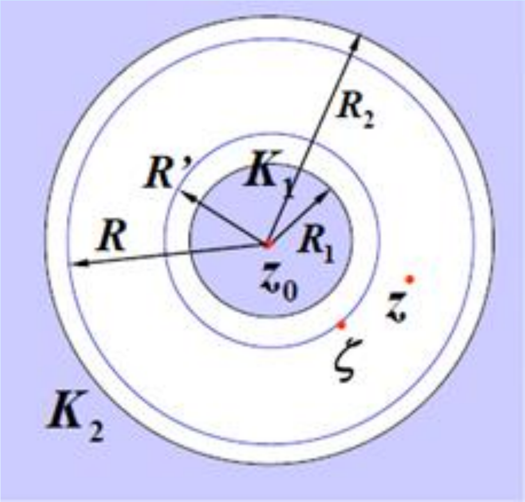
对 K_2上的积分，类似于泰勒定理

的证明过程，即可得到：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

对于第二个积分：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$



$$\because \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)-(z - z_0)}$$

$$= \frac{-1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \qquad \left(\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1\right)$$

$$= -\frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \overset{令 n+1=-k}{=} -\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k$$

$$\overset{令 k=n}{=} -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

$$\therefore -\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$$

故：
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$$

如果C为在圆环域内绕 z_0的任何一条正向简单闭曲线，那么

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

【证闭】

说明：

1） $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

展开系数 $c_n=\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

给出了将环域内解析函数展为洛朗级数的一般方法。

2）环域内解析函数 $f(z)$ 展开的洛朗级数是唯一的。

3）展开中心 z_0 是展开式中负幂项的奇异点，但不一定是函数 $f(z)$ 的奇 点，$f(z)$ 在 z_0 可能解析。

例1 在$z_0 = 0$的邻域上将$\sin z / z$展开。

例2 在$1<|z|<\infty$的环域上将函数$f(z)=1/(z^2-1)$展开为洛朗级数。

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例3 在z_0=1的邻域上将函数$f(z)=1/(z^2-1)$展开为洛朗级数。

例4 在$z_0=0$的邻域上将$e^{1/z}$展开。

例5 在$z_0=0$的邻域上将$e^{\frac{1}{2}x(z-1/z)}$展开。

思考题

洛朗级数与泰勒级数有何种关系？

思考题答案

是一般与特殊的关系。

洛朗级数是一个双边幂级数，其解析部分是一个普通幂级数；

洛朗级数的收敛域是圆环域：$r<|z-z_0|<R$

当 $r=0, c_{-n}=0$ 时，洛朗级数就退化为泰勒级数了。

3.6 孤立奇点的分类

一、孤立奇点的概念

定义： 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不可导，但在 z_0 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 处处可导，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**孤立奇点**。

例如： $z=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}$, $\dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点。

$z=-1$ 是函数 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点。

若在 $z=z_0$ 的不论多小邻域内，总有除 $z=z_0$ 以外的奇点存在，则称 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的**非孤立奇点**。

例 指出函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\frac{1}{z}}$ 的奇点特性。

解 函数的奇点为

$$z=0, z=\frac{1}{k\pi} \quad (k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

$z=\dfrac{1}{k\pi}$ 为孤立奇点;

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k\pi}=0$，即在 $z=0$ 的不论怎样小的去心邻域内, 总有 $f(z)$的奇点存在,所以 $z=0$是非孤立奇点.

孤立奇点的分类:

依据 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内的洛朗级数的情况分为三类:

可去奇点; 极点; 本性奇点.

1. 可去奇点

1) 定义 如果洛朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项,

那么孤立奇点 z_0 称为$f(z)$可去奇点.

2）函数在可去奇点出的状态

z_0 若是 $f(z)$ 的可去奇点，则有

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots \quad (0<|z-z_0|<\delta)$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$$ 此级数在 z_0 点收敛

若补充定义： $$F(z)=\begin{cases} f(z), & z\neq z_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z), & z=z_0 \end{cases}$$

则函数 $F(z)$在 z_0点连续，解析。（可去奇点的由来）

3) 可去奇点的判定

(1) 由定义判断：如果 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗级数无负幂项, 则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) 判断极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$: 若极限存在且为有限值, 则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

例5　证明 $z=0$ **为** $\dfrac{e^z-1}{z}$ **的可去奇点**

证　$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots-1\right)$$

$$=\underline{1+\frac{1}{2!}z+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n-1}+\cdots},\quad 0<|z|<+\infty$$

无负幂项

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

另解　因为 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}e^z=1$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

2. 极点

1）定义 如果洛朗级数中只有有限多个 $z-z_0$ 的负幂项，其中关于负幂项的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$，即

$$f(z)=c_{-m}\left(z-z_0\right)^{-m}+\cdots+c_{-2}\left(z-z_0\right)^{-2}+c_{-1}\left(z-z_0\right)^{-1}$$

$$+c_0+c_1\left(z-z_0\right)+\cdots \quad \left(m\geq 1, c_{-m}\neq 0\right)$$

或写成 $f(z)=\dfrac{1}{\left(z-z_0\right)^m}g(z), g(z)$ 解析

那么孤立奇点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的 m 阶奇点

说明:

$$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots$$

特点: 1. $g(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内是解析函数

2. $g(z_0)\neq 0$

一阶极点简称单级点。

2）函数在极点处的状态

如果 z_0 为函数 $f(z)$ 的极点，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

3)极点的判定方法 (1) 由定义判别

$f(z)$ 的洛朗展开式中 $|z-z_0|<\delta$ 的负幂项为有限个

(2) 由定义的等价形式判别

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

在点 z_0 的某去心邻域内

其中 $g(z)$ 在 z_0 的邻域内解析, 且 $g(z_0)\neq 0$

(3) 由极限判别： $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

3.本性奇点

如果洛朗级数中含有无穷多个 $z-z_0$ 的负幂项

那么孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的本性奇点

例如，$e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \cdots$

含有无穷多个Z的负幂项 $(0 < |z| < \infty)$

所以 $z=0$ 为本性奇点，同时 $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在

函数在本性奇点处的行为：

在本性奇点 z_0 处，$\lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在（无定值）

孤立奇点小结

孤立奇点	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	有限值
m阶奇点	最高负幂项：$(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	无穷多负幂项	无定值

本章作业

P37-2、3（4）、（5），4（4）

P41-（3）、（4）、（7）、（8）

P47-（2）、（8）、（9）、（10）、（14）；

P50-（1）、（2）、（3）