Teoremario de Topología

Wilfredo Gallegos

30 de mayo de 2023

1. Contenido

Definición 1.1. Sea $X \neq \emptyset$ una clase τ de subconjuntos de X es una Topología sobre X si cumple:

1. $\emptyset,\ X \in \tau$
2. La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ
3. La intersección de una clase finita de miembres de τ está en τ
   Los miembros de τ son los abiertos de X

Nota:

1. El par $(X,\ \tau)$ es un espacio topologíco
2. a los elementos de X se le llaman puntos

Nota: Un Espacio Metrizable es un espacio topol'ogico X con la propiedad que existe una m'etrica que genera los abiertos de la topolog'ia dada.

prop: Si τ_1 y τ_2 son topolog'ias sobre X, entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topolog'ia sobre X

Definición 1.2. Sea A un subconjunto no vacio del espacio topol'ogico (X, τ). Considere la clase

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau esabiertodeX\}$$

a τ_A se le llama topolog'ia relativa sobre A

Definición 1.3.

1. Sean X y Y espacios topol'ogicos y f un mapeo entre X y Y. Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto G de Y
2. Se dice que el mapeo es abierto si para cada abierto G de X se cumple que f(G) es abierto de Y

Nota: Una Propiedad topol'ogica es una propiedad que si la tiene el espacio X, la tiene tambien cualquier espacio homeomorfo a X.

Definición 1.4. Sea (X, τ) un esp. top. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado ssi $A^c \in \tau$

VER DEFINICIONES DEL 18/01/23

Definición 1.5.

1. un punto p de X es interior de $A \subseteq X$ si existe un abierto G $\ni p \in G \subset A$
2. El interior de A denotado como int(A) o A° es el conjunto de todos los puntos interiores de A

Definición 1.6. Un punto forntera de $A \subset X$ es un punto tal que cada vecindad del punto intersecta a A y a A^c

Definición 1.7. Una base abierta para el espacio topologico (X, τ) es una clase de abiertos de X talque cada abierto en τ puede escribirse como uniones de miembros de la clase

Teorema 1.1. Los enunciados siguientes so nequivalentes

1. Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico $(X,\ \tau)$ es una base para τ si cada abierto de τ es unión de miembros de β

2. $\beta \subset \tau$ es una base para τ, ssi $\forall G \in \tau,\ \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$

Nota: Recordar: X es T_1 ssi $\forall x, y \in X,\ x \neq y \exists$ abiertos U y V $\ni$

$$x \in U \ y \ x \notin V$$

$$y \notin U \ y \ y \in V$$

2. Teoremas-Lemas-Corolarios

Teorema 2.1. Los enunciados siguientes so nequivalentes

1. Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico $(X,\ \tau)$ es una base para τ si cada abierto de τ es unión de miembros de β
2. $\beta \subset \tau$ es una base para τ, ssi $\forall G \in \tau,\ \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$

Teorema 2.2. Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacio X. Entonces β es una clase para una topología τ sobre X ssi se cumplen

1. X=$\cup_{b\in\beta} B$
2. $\forall B, B^* \in \beta$ se tiene que B$\cap B^*$ la unión de miembros de $\beta \Leftrightarrow$ si p$\in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*$

Teorema 2.3. Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitriaria de subconjuntos de X, Entonces S puede construirse en la subbase abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.

Lema 2.1. Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre X $\Rightarrow \tau = \tau^*$

Teorema 2.4. Sea X un subconjunto no vacio y sea S una clase de subconjuntos de X. La topología τ sobre X, generado por S, y la intersección de todoas las topologías sobre X que contienen a S.

Teorema 2.5. Lindelof Sea X un espacio segundo contable si un abierto no-vacio G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_1\}$ de abiertos de X $\Rightarrow$ G puede representarse como unión contable de los G_i

Teorema 2.6. Todo espacio m'etrico es de Hausdorff

Teorema 2.7. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces cada sucesión de puntos (X_n) en X converga a lo más a un punto de X.

Teorema 2.8. Cada subconjunto finito A$\subset$X en un Hausdorff es cerrado

Teorema 2.9. Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo

Teorema 2.10. un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continuo ssi es continuo en cada punto de X.

Teorema 2.11. Sea $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ una colección de mapeos definidos sobre un conjunto no vacío X sobre los espacios topológicos (Y_i, τ_i), sea

$$S = \cup_i \{f^{-1}(H) : H \in \tau_i\}$$

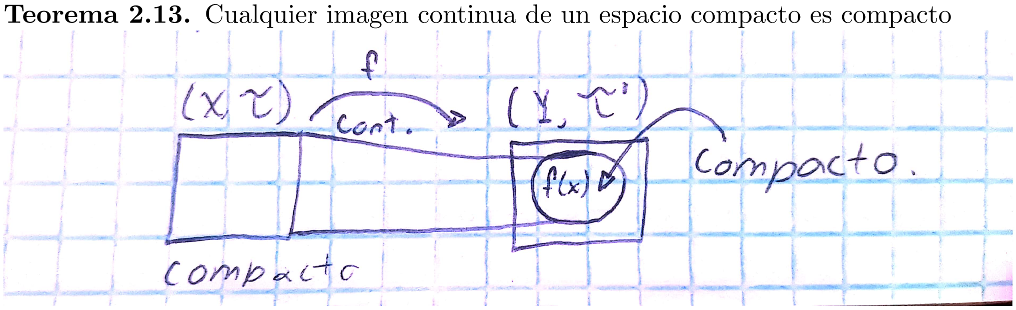
y definimos τ como la topología sobre X generada por S, entonces:

1. Todas las f_i son continuas con respecto a τ
2. Si τ^* es la intersección de todas las topologías sobre X con respecto a las cuales las f_i son continuas, entonces $\tau = \tau^*$
3. τ es la topología menos fina sobre X tales que las f_i son continuas
4. S es una subbase para τ

Compactos

Teorema 2.12. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto

Teorema 2.13. Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto



Teorema 2.14. Los enunciados siguientes son equivalentes

1. X es un espacio compacto
2. Para cada clase $\{F_i\}$ de cerrados de X $\ni \cap_i F_i = \emptyset$, se cumple que $\{F_i\}$ contiene una subclase finita $\{F_{i_1}, ..., F_{i_m}\} \ni F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_m} = \emptyset$

En el teorema anterior, la contrapuesta de (2) es: Para toda clase de cerrados de X, $\{F_{i_1}\} \ni$ cada subclase finita tiene interseicción no vacia, entonces $\cap_i F_i \neq \emptyset$

Teorema 2.15. X es un espacio compacto ssi cada clase de cerrados de X que tiene la Pif tiene intersección no vacía

Teorema 2.16. Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta básica tiene una subcubierta finita

Teorema 2.17. Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta subbásica tiene una subcuierta finita

Teorema 2.18. Sea X un espacio T_2, cualquier punto y un subespacio disjunto y compacto, pueden separarse por abiertos, en el sentido que tienen vecindades disjuntas
AGREGAR FIGURA

Teorema 2.19. Cada subespacio compacto de un T_2 es cerrado

Teorema 2.20. Un mapeo biyectivo y continuo de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo
AGREGAR FIGURA

Separación

Teorema 2.21. Un esapcio topológico es T_1 ssi los unitarios son cerrados

Teorema 2.22. Cada subespacio de un T_1 es un T_1

Teorema 2.23. Si X es $T_3 \Rightarrow$ X es T_2

Teorema 2.24. Los enunciados siguietnes son equivalentes

1. X es normal
2. Si H es un superconjunto abierto del cerrado F, entonces existe un abierto G, $\ni$

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H$$

Teorema 2.25. Metrizaacion de Urysohn Si X es un espacio @do contable, normal y T_1, entonces X es Metrizable

Teorema 2.26. Sea D el conjunto de fracciones diádicas en [0,1], entonces $\overline{D}$ =[0,1]

Lema 2.2. Urysohn Sean F_1 y F_2 cerrados disjuntos de un espacio normal X, entonces existe la función continua

$$f : X \to [0, 1] \ni$$

$$f(F_1) - \{0\} \ y \ f(F_2) = \{1\}$$

Teorema 2.27. Un esapcio topológico e sT_1 ssi $\forall x \in X$ la sucesión x,x,x,... converga a x y solo a x

Teorema 2.28. Un espacio topológico es T_2 ssi cada sucesión convergente tiene límite único

Redes

Teorema 2.29. Sea (Y_i, τ_i) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ ssi existe una red w en A$\ni$ $w \to x$

Filtros

Teorema 2.30. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}_\alpha \in F(x),\ \alpha \in I$. Entonces $\cap_i \mathcal{F}_\alpha \in F(x)$

Teorema 2.31. Sea X un conjunto y U(x) ina colección de filtros sobre X. Si para cualquier $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in U(x)$ se tiene que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \Rightarrow \cup U(x)$ es filtro

Lema 2.3. Zorn So X es un conjunto no vacio y parcialmente ordenado $\ni$ cada cadena en X tiene cota superior, entonces X tiene un elemento maximal

Teorema 2.32. **Tarski** Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces existe un ultrafiltro U sobre x $\ni \mathcal{F} \subset U$

Teorema 2.33. Sea X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces los enunciados soguietnes son equivalentes:

1. U es ultrafiltro
2. Par acualquier $E \subset U \ni E \cap F \neq \emptyset$, $\forall F \in U$ se tiene que $E \in U$
3. Si $E \subset X \Rightarrow E \in U$ o $X - E \in U$
4. Si $A, B \in$ X y $A \cap B \in U \Rightarrow A \in U$ o $B \in U$

Teorema 2.34. Una familia β de subconjuntos no vacios de X es base de algún filtro sobre X ssi $\forall B_1, B_2 \in \beta \exists B_3 \in \beta \ni B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Teorema 2.35. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces a familia $\beta = \{\overline{F} \ni F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtros

Teorema 2.36. Sean X, Y espacios topológicos, $\overline{\mathcal{F}}$ un filtro sobre X y un mapeo $f : X \to Y$. Entonces $\beta_{f(\overline{\mathcal{F}})} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$

Teorema 2.37. Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre Y y un mapeo $f : X \to Y$. Si $\forall F \in \mathcal{F}$ se tiene que $f^{-1}(F) \neq \emptyset$, entonces $\beta = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$

Teorema 2.38. Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $E \subset X$. Si $B = \{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ y $B^{'} = \{F \cap (X - E) : F \in \mathcal{F}\}$ entonces

1. Si $F \cap E \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow \beta$ es base de filtro sobre X
2. Si$\exists F \in \mathcal{F} \ni F \cap E = \emptyset \Rightarrow$ B' es base de filtro sobre X

Teorema 2.39 (Teorema 32)**.** Sea X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces los enunciados siguietnes son equivalentes:

1. U es ultrafiltro
2. Par acualquier $E \subset U \ni E \cap F \neq \emptyset$, $\forall F \in U$ se tiene que $E \in U$
3. Si $E \subset X \Rightarrow E \in U$ o $X - E \in U$
4. Si $A, B \in$ X y $A \cap B \in U \Rightarrow A \in U$ o $B \in U$

Teorema 2.40. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}$ es filtro sobre X y $x \in$X. Entonces $F \to x$ s $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$

Teorema 2.41. Sea X un espacio topológico. $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \ni F \to x$. Si G es un filtro sobre $X \ni F \subset G \Rightarrow G \to x$
Notación: $\mathcal{F} \succ x$

Teorema 2.42. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, β una base de filtro para $\mathcal{F}$ y $x \in X$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ ssi $\beta \to x$

Teorema 2.43. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. xes un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ i.e. $\mathcal{F} \succ x$
2. Existe un filtro G en x $\ni \mathcal{F} \subset G$ y $G \to x$
3. $x \in \overline{F}, \forall F \in \mathcal{F}$. Es decir, $x \in \cap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$

Teorema 2.44. Sea X un espacio topológico, U un ultrafiltro sobre x y $x \in X$ entonces $U \succ x$ ssi $U \to x$

Teorema 2.45. Sea X un espacio topológico $x \in X$ y $A \subset X$. Entonces, $x \in \overline{A}$ ssi existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X $\ni F \to x$ y $A \in \mathcal{F}$

Teorema 2.46. Sean X,Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en x ssi la base de filtros $B_{f(N(x))} = \{f(V) : V \in N(x)\}$ converge a f(x)

Teorema 2.47. Sea $I \neq \emptyset$ y $\{X_i, \tau_i\} \ni i \in I$ una colección de espacios topológicos. Sean $(\prod_{i \in I} x_i, \tau_p)$ el espacio producto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\prod_{i \in I} x_i$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ ssi $\prod_i(\mathcal{F}) \to \prod_i(x)$ en $(X_i, \tau_i) \forall i \in I$

Teorema 2.48. Sea X un espacio topológico. Los enunciados siguientes son equivalentes:

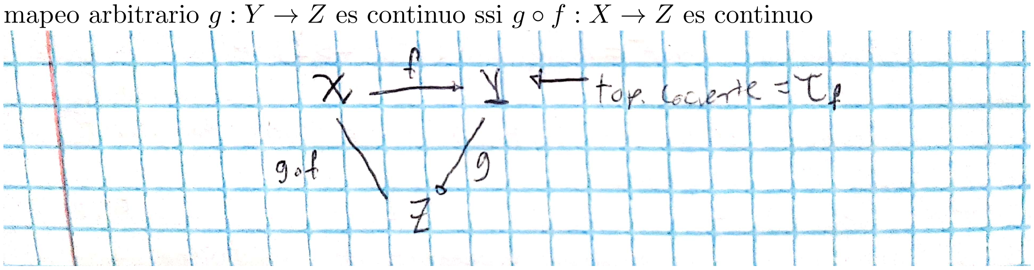
1. X es compacto
2. Toda colección **A** de conjuntos cerrados no vacios con la PIF, cumple que $\cap A \neq \emptyset$
3. Para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X $\exists x \in X \ni \mathcal{F} \succ x$
4. Todo ultrafiltro sobre X converge

Teorema 2.49. Tikonov Sea $I \neq \emptyset$ y $\{X_i, \tau_i\} \ni i \in I$ una colección de espacios topológicos. Entonces $(\prod_{i\in I} x_i, \tau_p)$ es compacto ssi x_i es compacto $\forall i \in I$

Lema 2.4. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ un mapeo y U un ultrafiltro sobre X. Entonces F(U) *Filtro generado por $\beta = \{f(F) : F \in U\}$* es un ultrafiltro sobre Y

Teorema 2.50. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es un mapeo continuo sobre yectivo y abierto o cerrado, la topología τ de Y es la topología Cociente τ_f

Teorema 2.51. Sea Y un espacio topológico dotado de la topologia cociente, inducida por el mapeo $f : X \to Y$. Entonces un mapeo arbitrario $g : Y \to Z$ es continuo ssi $g \circ f : X \to Z$ es continuo



Teorema 2.52. 1. U es una topología para X/G

2. Si X/G tiene la topología cociente, entonces p es continua. *$p : X \to X/G \ni p(x) = [x]$*
3. Si V es una topología para $X/G \ni$ p es continua, entoncres $V \subset U$
4. Si X/G tiene la topología cociente y su $A \subset X/G \ni p^{-1}(A)$ es cerrado de X $\Rightarrow$ A es cerrado en X/G

Clase virtual 26-05-23

Lema 2.5. $\forall A \subset Y$, $\Phi_f^{-1}(A) = p(f^{-1}(A))$

Lema 2.6. $\forall B \subset X/G_f$, $\Phi_f(B) = f(p^{-1}(B))$

Teorema 2.53. Sean $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva y X/G_f dotado de la topología cociente. Entonces $\Phi_f : X/G_f \to Y$ es continua

Teorema 2.54. Suponga que $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada, entonces

$$\Phi/G_f \to Y$$

es un homeomorfismo

Teorema 2.55. Si X es compacto, el espacio Y es Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, $\Rightarrow \Phi_f : X/G_f \to Y$ es homeomorfismo

Teorema 2.56. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. X es regular
2. Si U es un abierto de X y si $x \in U$ entonces existe un abierto V de $x \ni x \in V$ y $\overline{V} \subset U$
3. Cada $x \in X$ tiene una base de vecindades que consiste de cerrados