Teoremario de Topología

Wilfredo Gallegos

30 de mayo de 2023

1. Contenido

Definición 1.1. Sea $X \neq \emptyset$ una clase τ de subconjuntos de X es una Topología sobre X si cumple:

1. $\emptyset, \ X \in \tau$
2. La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ
3. La intersección de una clase finita de miembres de τ está en τ
   Los miembros de τ son los abiertos de X

Nota:

1. El par $(X, \ \tau)$ es un espacio topologíco
2. a los elementos de X se le llaman puntos

Nota: Recordar: X es T_1 ssi $\forall x, y \in X, \ x \neq y \exists$ abiertos U y V $\ni$

$$x \in U \ y \ x \notin V$$

$$y \notin U \ y \ y \in V$$

2. Teoremas-Lemas-Corolarios

Teorema 1. Los enunciados siguientes so nequivalentes

1. Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico $(X, \ \tau)$ es una base para τ si cada abierto de τ es unión de miembros de β
2. $\beta \subset \tau$ es una base para τ, ssi $\forall G \in \tau, \ \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$

Teorema 2. Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacio X. Entonces β es una clase para una topología τ sobre X ssi se cumplen

1. X=$\cup_{b \in \beta} B$
2. $\forall B, B^* \in \beta$ se tiene que B$\cap B^*$ la unión de miembros de $\beta \Leftrightarrow$ si p$\in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*$

Teorema 3. Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitriaria de subconjuntos de X, Entonces S puede construirse en la subbase abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.

Lema 1. Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre X $\Rightarrow \tau = \tau^*$

Teorema 4. Sea X un subconjunto no vacio y sea S una clase de subconjuntos de X. La topología τ sobre X, generado por S, y la intersección de todoas las topologías sobre X que contienen a S.

Teorema 5. Lindelof Sea X un espacio segundo contable si un abierto no-vacio G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_1\}$ de abiertos de X $\Rightarrow$ G puede representarse como unión contable de los G_i

Teorema 6. Todo espacio m'etrico es de Hausdorff

Teorema 7. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces cada sucesión de puntos (X_n) en X converga a lo más a un punto de X.

Teorema 8. Cada subconjunto finito A⊂X en un Hausdorff es cerrado

Teorema 9. Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo

Teorema 10. un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continuo ssi es continuo en cada punto de X.

Teorema 11. Sea $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ una colección de mapeos definidos sobre un conjunto no vacío X sobre los espacios topológicos (Y_i, τ_i), sea

$$S = \cup_i \{f^{-1}(H) : H \in \tau_i\}$$

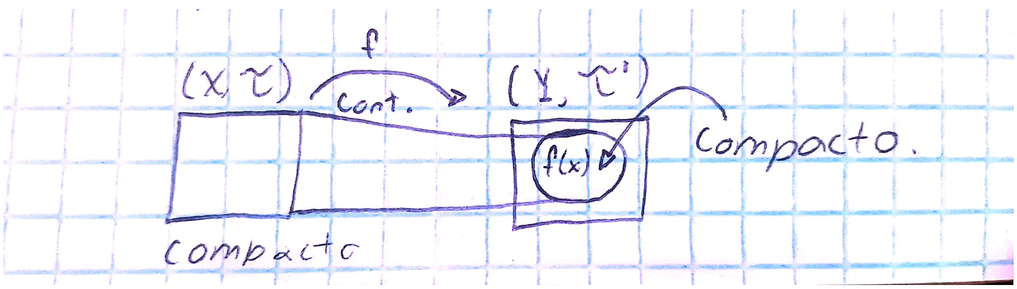
y definimos τ como la topología sobre X generada por S, entonces:

1. Todas las f_i son continuas con respecto a τ
2. Si τ^* es la intersección de todas las topologías sobre X con respecto a las cuales las f_i son continuas, entonces $\tau = \tau^*$
3. τ es la topología menos fina sobre X tales que las f_i son continuas
4. S es una subbase para τ

Compactos

Teorema 12. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto

Teorema 13. Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto



Teorema 14. Los enunciados siguientes son equivalentes

1. X es un espacio compacto
2. Para cada clase $\{F_i\}$ de cerrados de X $\ni \cap_i F_i = \emptyset$, se cumple que $\{F_i\}$ contiene una subclase finita $\{F_{i_1}, ..., F_{i_m}\} \ni F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_m} = \emptyset$

En el teorema anterior, la contrapuesta de (2) es: Para toda clase de cerrados de X, $\{F_{i_1}\} \ni$ cada subclase finita tiene interseicci'on no vacia, entonces $\cap_i F_i \neq \emptyset$

Teorema 15. X es un espacio compacto ssi cada clase de cerrados de X que tiene la Pif tiene intersecci'on no vac'ia

Teorema 16. Un espacio topol'ogico es compacto si cada cubierta abierta b'asica tiene una subcubierta finita

Teorema 17. Un espacio topol'ogico es compacto si cada cubierta abierta subb'asica tiene una subcuierta finita

Teorema 18. Sea X un espacio T_2, cualquier punto y un subespacio disjunto y compacto, pueden separarse por abiertos, en el sentido que tienen vecindades disjuntas
AGREGAR FIGURA

Teorema 19. Cada subespacio compacto de un T_2 es cerrado

Teorema 20. Un mapeo biyectivo y continuo de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo
AGREGAR FIGURA

Separaci'on

Teorema 21. Un esapcio topol'ogico es T_1 ssi los unitarios son cerrados

Teorema 22. Cada subespacio de un T_1 es un T_1

Teorema 23. Si X es $T_3 \Rightarrow$ X es T_2

Teorema 24. Los enunciados siguietnes son equivalentes

1. X es normal
2. Si H es un superconjunto abierto del cerrado F, entonces existe un abierto G, $\ni$

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H$$

Teorema 25. Metrizaacion de Urysohn Si X es un espacio @do contable, normal y T_1, entonces X es Metrizable

Teorema 26. Sea D el conjunto de fracciones di'adicas en [0,1], entonces $\overline{D}$ =[0,1]

Lema 2. Urysohn Sean F_1 y F_2 cerrados disjuntos de un espacio normal X, entonces existe la funci'on continua

$$f : X \to [0, 1] \ni$$

$$f(F_1) - \{0\}\ y\ f(F_2) = \{1\}$$

Teorema 27. Un esapcio topol'ogico e sT_1 ssi $\forall x \in X$ la sucesi'on x,x,x,... converga a x y solo a x

Teorema 28. Un espacio topol'ogico es T_2 ssi cada sucesi'on convergente tiene l'imite 'unico

Redes

Teorema 29. Sea (Y_i, τ_i) un espacio topol'ogico y sea $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ ssi existe una red w en A$\ni$ $w \to x$

Filtros

Teorema 30. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}_\alpha \in F(x),\ \alpha \in I$. Entonces $\cap_i \mathcal{F}_\alpha \in F(x)$

Teorema 31. Sea X un conjunto y U(x) ina colecci'on de filtros sobre X. Si para cualquier $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in U(x)$ se tiene que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \Rightarrow \cup U(x)$ es filtro

Lema 3. Zorn So X es un conjunto no vacio y parcialmente ordenado $\ni$ cada cadena en X tiene cota superior, entonces X tiene un elemento maximal

Teorema 32. Tarski Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces existe un ultrafiltro U sobre x $\ni \mathcal{F} \subset U$

Teorema 33. Sea X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces los enunciados soguietnes son equivalentes:

1. U es ultrafiltro
2. Par acualquier $E \subset U \ni E \cap F \neq \emptyset,\ \forall F \in U$ se tiene que $E \in U$
3. Si $E \subset X \Rightarrow E \in U$ o $X - E \in U$
4. Si $A, B \in$ X y $A \cap B \in U \Rightarrow A \in U$ o $B \in U$

Teorema 34. Una familia β de subconjuntos no vacios de X es base de alg'un filtro sobre X ssi $\forall B_1, B_2 \in \beta \exists B_3 \in \beta \ni B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Teorema 35. Sean X un espacio topol'ogico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces a familia $\beta = \{\overline{F} \ni F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtros

Teorema 36. Sean X, Y espacios topol'ogicos, $\overline{\mathcal{F}}$ un filtro sobre X y un mapeo $f : X \to Y$. Entonces $\beta_{f(\overline{\mathcal{F}})} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$

Teorema 37. Sean X, Y espacios topol'ogicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre Y y un mapeo $f : X \to Y$. Si $\forall F \in \mathcal{F}$ se tiene que $f^{-1}(F) \neq \emptyset$, entonces $\beta = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$

Teorema 38. Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $E \subset X$. Si $B = \{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ y $B' = \{F \cap (X - E) : F \in \mathcal{F}\}$ entonces

1. Si $F \cap E \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow \beta$ es base de filtro sobre X
2. Si$\exists F \in \mathcal{F} \ni F \cap E = \emptyset \Rightarrow$ B' es base de filtro sobre X

Teorema 39 (Teorema 32)**.** Sea X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces los enunciados siguietnes son equivalentes:

1. U es ultrafiltro
2. Par acualquier $E \subset U \ni E \cap F \neq \emptyset,\ \forall F \in U$ se tiene que $E \in U$
3. Si $E \subset X \Rightarrow E \in U$ o $X - E \in U$
4. Si $A, B \in$ X y $A \cap B \in U \Rightarrow A \in U$ o $B \in U$

Teorema 40. Sean (Y_i, τ) un espacio topol'ogico, $\mathcal{F}$ es filtro sobre X y $x \in$X. Entonces $F \to x$ s $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$

Teorema 41. Sea X un espacio topol'ogico. $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \ni F \to x$. Si G es un filtro sobre $X \ni F \subset G \Rightarrow G \to x$
Notaci'on: $\mathcal{F} \succ x$

Teorema 42. Sean X un espacio topol'ogico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, β una base de filtro para $\mathcal{F}$ y $x \in X$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ ssi $\beta \to x$

Teorema 43. Sean X un espacio topol'ogico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. xes un punto de acumulaci'on de $\mathcal{F}$ i.e. $\mathcal{F} \succ x$
2. Existe un filtro G en x $\ni \mathcal{F} \subset G$ y $G \to x$
3. $x \in \overline{F}, \forall F \in \mathcal{F}$. Es decir, $x \in \cap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$

Teorema 44. Sea X un espacio topol'ogico, U un ultrafiltro sobre x y $x \in X$ entonces $U \succ x$ ssi $U \to x$

Teorema 45. Sea X un espacio topol'ogico $x \in X$ y $A \subset X$. Entonces, $x \in \overline{A}$ ssi existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X $\ni F \to x$ y $A \in \mathcal{F}$

Referencias