Teoremario de Topología

Wilfredo Gallegos

1 de junio de 2023

1. Contenido

Definición 1.1. Sea $X \neq \emptyset$ una clase τ de subconjuntos de X es una Topología sobre X si cumple:

1. $\emptyset,\ X \in \tau$
2. La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ
3. La intersección de una clase finita de miembres de τ está en τ
   Los miembros de τ son los abiertos de X

Nota:

1. El par $(X,\ \tau)$ es un espacio topologíco
2. a los elementos de X se le llaman puntos

Nota: Un Espacio Metrizable es un espacio topológico X con la propiedad que existe una métrica que genera los abiertos de la topología dada.

prop: Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre X, entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X

Definición 1.2. Sea A un subconjunto no vacio del espacio topológico (X, τ). Considere la clase

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau \textit{ es abierto de } X\}$$

a τ_A se le llama topología relativa sobre A

Definición 1.3.

1. Sean X y Y espacios topológicos y f un mapeo entre X y Y. Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto G de Y
2. Se dice que el mapeo es abierto si para cada abierto G de X se cumple que f(G) es abierto de Y

Nota: Una Propiedad topológica es una propiedad que si la tiene el espacio X, la tiene tambien cualquier espacio homeomorfo a X.

Definición 1.4. Sea (X, τ) un esp. top. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado ssi $A^c \in \tau$

VER DEFINICIONES DEL 18/01/23

Definición 1.5.

1. un punto p de X es interior de $A \subseteq X$ si existe un abierto G $\ni p \in G \subset A$
2. El interior de A denotado como int(A) o A° es el conjunto de todos los puntos interiores de A

Definición 1.6. Un punto frontera de $A \subset X$ es un punto tal que cada vecindad del punto intersecta a A y a A^c

Definición 1.7. Una base abierta para el espacio topologico (X, τ) es una clase de abiertos de X talque cada abierto en τ puede escribirse como uniones de miembros de la clase

Teorema 1.1. Los enunciados siguientes so nequivalentes

1. Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico $(X,\ \tau)$ es una base para τ si cada abierto de τ es unión de miembros de β
2. $\beta \subset \tau$ es una base para τ, ssi $\forall G \in \tau,\ \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$

Teorema 1.2. Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacio X. Entonces β es una clase para una topología τ sobre X ssi se cumplen

1. X=$\cup_{b\in\beta} B$
2. $\forall B, B^* \in \beta$ se tiene que B$\cap B^*$ la unión de miembros de $\beta \Leftrightarrow$ si p$\in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*$

Definición 1.8. Sea (X,τ) un esp. top. Una subclase S de abiertos en τ es una subbase de la topología τ si las intersecciones finitas de miembros de S producen una base para τ

Teorema 1.3. Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitriaria de subconjuntos de X, Entonces S puede construirse en la subbase abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.

Lema 1.1. Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre X $\Rightarrow \tau = \tau^*$

Teorema 1.4. Sea X un subconjunto no vacio y sea S una clase de subconjuntos de X. La topología τ sobre X, generado por S, y la intersección de todoas las topologías sobre X que contienen a S.

Definición 1.9. Un espacio topológico que tiene una base contable es un segundo contable

Teorema 1.5. Lindelof Sea X un espacio segundo contable si un abierto no-vacio G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_1\}$ de abiertos de X $\Rightarrow$ G puede representarse como unión contable de los G_i

Definición 1.10. Espacios de Hausdorff Un espacio topológico X es de Hausdorff si dados $x, y \in X, x \neq y$, existen abiertos U,V de X $\ni x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$

Teorema 1.6. Todo espacio métrico es de Hausdorff(1.10)

Definición 1.11. Convergencia Sea (X_n) una sucesión en un espacio topológico X, se dice que (X_n) convege a un punto y de X, si para cada vecindad U de y $\exists N \in \mathbf{Z}^+ \ni$ si n$\geq N \Rightarrow x \in U$ En este caso y es limite de (X_n), y se denota $X_n \to y$

Teorema 1.7. Si X es un espacio de Hausdorff(1.10), entonces cada sucesión de puntos (X_n) en X converga a lo más a un punto de X.

Teorema 1.8. Cada subconjunto finito A$\subset$X en un Hausdorff(1.10) es cerrado

Continuidad

Definición 1.12. Sean (X,τ) y (X,τ^*) espacios top. El mapeo $f : X \to Y$ es continuo si para cada $G \in \tau^*$ se tiene que $f^{-1}(G) \in \tau$

Propiedad: Sea $f : X \to Y$ un mapeo entre espacios topológicos. Entonces f es continuo ssi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \forall A \subseteq X$

Teorema 1.9. Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo

Propiedad: Sea $\{\tau_i\}$ una colección de topologías sobre X. Si $f : X \to Y$ es continuo respecto a cada $\tau_i \Rightarrow$ f es continua respecto a $\tau = \cap_i \tau_i$ **Propiedad:** Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ un mapeo continuo. Si $A \subset X \Rightarrow\ f|_A : (A,\tau_A) \to (Y,\tau')$ es continua
Continuidad local

Definición 1.13. Sean (X,τ) un esp. top. y $x \in X$. Un subconjunto $U \subseteq X$ es vecindad de x si $\exists V \in \tau \ni x \in V \subset U$(x es interior de U)

Definición 1.14. La coleccion de todas las vecindades de un punto $x \in X$ se llama sistema de vencindades de x
Notacion: N_x

Propiedad: Nx es cerrado bajo intersecciones y extensiones

Propiedad: Sea A un subconjunto del esp. top. $(X, \tau) \ni \forall x \in A \exists G \in \tau \ni x \in G \subset A$. Entonces A es un abierto en τ

Propiedad: Un conjunto G es abierto ssi G es vecindad de cada uno de sus puntos

Definición 1.15. Un mapeo $f : X \to Y$ entre esp. top. es continuo en un punto $x \in X$ si para cada U $U \in N_f(x) \exists V \in N_x \ni f(V) \subset U$

Teorema 1.10. un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continuo ssi es continuo en cada punto de X.

Homeomorfismo

Definición 1.16. Los espacios topológicos (X, τ) y (Y, τ') son Homeomorfos si existe una función $f : X \to Y$ $\ni$(llamada homeomofismo)

1. f es biyectiva
2. f y f^{-1} son continuas

Teorema 1.11. Sea $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ una colección de mapeos definidos sobre un conjunto no vacío X sobre los espacios topológicos (Y_i, τ_i), sea

$$S = \cup_i \{f^{-1}(H) : H \in \tau_i\}$$

y definimos τ como la topología sobre X generada por S, entonces:

1. Todas las f_i son continuas con respecto a τ
2. Si τ^* es la intersección de todas las topologías sobre X con respecto a las cuales las f_i son continuas, entonces $\tau = \tau^*$
3. τ es la topología menos fina sobre X tales que las f_i son continuas
4. S es una subbase para τ

Topología producto

Definición 1.17. Sea X_α in conjunto $\forall \alpha \in I$. El producto cartesiano de las x_α es el conjunto:

$$\prod_{a \in I} x_\alpha := \{x : I \to \cup_{a \in I} X_\alpha \ni x(\alpha) \in X_\alpha \forall \alpha \in I\}$$

Definición 1.18. Se define la k-esima proyección π_k como el mapeo

$$\pi_k : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to x_\alpha$$

$$\pi_k(w \to w_k)$$

Compactos

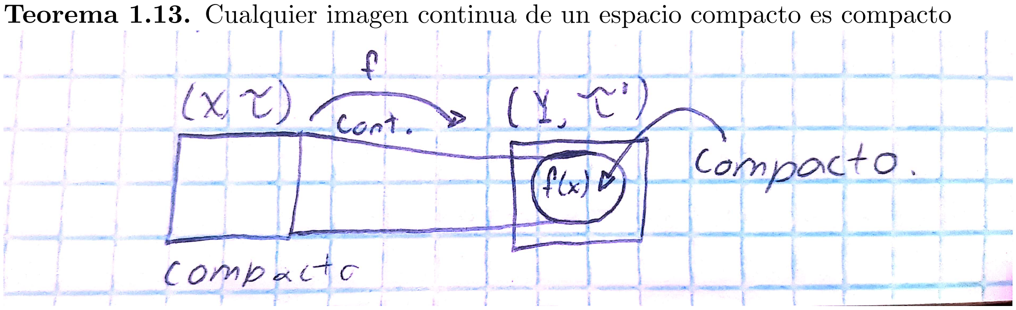
Definición 1.19. Sea (X, τ) un esp. top. Una clase $\{H_i\}$ de abiertos de X es una cubierta abierta de X ssi $\cup_i H_i = X$

Definición 1.20. Una subclase de una cubierta abierta de X que tambien es cubierta abierta es una subcubierta de la inicial

Definición 1.21. Un espacio compacto es un esp. top. en la que cada cubierta abierta tiene una subcubierta abierta finita

Teorema 1.12. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto

Teorema 1.13. Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto



Teorema 1.14. Los enunciados siguientes son equivalentes

1. X es un espacio compacto
2. Para cada clase $\{F_i\}$ de cerrados de X $\ni \cap_i F_i = \emptyset$, se cumple que $\{F_i\}$ contiene una subclase finita $\{F_{i_1}, ..., F_{i_m}\} \ni F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_m} = \emptyset$

En el teorema anterior, la contrapuesta de (2) es: Para toda clase de cerrados de X, $\{F_{i_1}\} \ni$ cada subclase finita tiene interseicción no vacia, entonces $\cap_i F_i \neq \emptyset$

Definición 1.22. Dada una clase de conjuntos $C = \{C_i\}$ se dice que C tiene la propiedad de intersección finita(PIF) si para cada $c_{i_k}, ..., c_{i_k}$ se cumple $\bigcap_{j=i} C_{ij} \neq \emptyset$

Teorema 1.15. X es un espacio compacto ssi cada clase de cerrados de X que tiene la Pif tiene intersección no vacía

Teorema 1.16. Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta básica tiene una subcubierta finita

Teorema 1.17. Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta subbásica tiene una subcuierta finita

Teorema 1.18. Sea X un espacio T_2, cualquier punto y un subespacio disjunto y compacto, pueden separarse por abiertos, en el sentido que tienen vecindades disjuntas
AGREGAR FIGURA

Teorema 1.19. Cada subespacio compacto de un T_2 es cerrado

Teorema 1.20. Un mapeo biyectivo y continuo de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff(1.10) es un homeomorfismo
AGREGAR FIGURA

Separación

Definición 1.23. Un espacio a X es T_1 si para $x, y \in X, x \neq y$ exosten vecindades G y H$\ni$

$$x \in G \ y \ y \notin G$$

$$y \in H \ y \ x \notin H$$

AGREGAR FIGURA

Teorema 1.21. Un esapcio topológico es T_1 ssi los unitarios son cerrados

Teorema 1.22. Cada subespacio de un T_1 es un T_1

Definición 1.24. Un espacio X es regular ssi satisface:
Si F es un cerrado de X y p$\in$ X $\ni$ p $\notin$ F, existen abiertos Gy H $\ni F \subset G$ y $\{p\} \subset H$ y $G \cap H = \emptyset$

Definición 1.25. Un esp. top. es T_3 si es regular y T_1

Teorema 1.23. Si X es $T_3 \Rightarrow$ X es T_2

Definición 1.26. Un espacio X es normal si para F_1 y F_2 cerrados disjuntos de X existen vecindades disjuntas G y H$\ni$

$$F_1 \subset G \ y \ F_2 \subset H$$

Definición 1.27. Un esp. top que es normal y T_1 es un T_4

Teorema 1.24. Los enunciados siguietnes son equivalentes

1. X es normal
2. Si H es un superconjunto abierto del cerrado F, entonces existe un abierto G, $\ni$

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H$$

Propiedad: Si X es $T_4 \Rightarrow$ X es un T_3

Teorema 1.25. Metrizaacion de Urysohn Si X es un espacio @do contable, normal y T_1, entonces X es Metrizable

Definición 1.28. Completamente regular X es completamente regular si dados F un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$, entonces $\exists$ una función continua $f : X \to [0,1] \ni$

$$f(F) = \{0\} \ y \ f(p) = 1$$

Teorema 1.26. Sea D el conjunto de fracciones diádicas en [0,1], entonces $\overline{D}$ =[0,1]

Lema 1.2. Urysohn Sean F_1 y F_2 cerrados disjuntos de un espacio normal X, entonces existe la función continua

$$f : X \to [0,1] \ni$$

$$f(F_1) = \{0\} \ y \ f(F_2) = \{1\}$$

Teorema 1.27. Un esapcio topológico e sT_1 ssi $\forall x \in X$ la sucesión x,x,x,... converga a x y solo a x

Teorema 1.28. Un espacio topológico es T_2 ssi cada sucesión convergente tiene límite único

Redes

Definición 1.29. Sea D un conjunto y $\leq$ una relación binaria definida sobre D que satisface las siguientes condiciones

1. $\leq$ es reflexiva. x$\leq$x $\forall x \in D$
2. $\leq$ es transitiva
3. $\leq$ es dirigida, si $x, y \in D \Rightarrow \exists z \in D \ni x \leq z \ y \ y \leq z$
   El par $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido

Definición 1.30. Una red es un conjunto X que es un mapeo

$$w : D \to X$$

donde $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido

Definición 1.31. Si (X, τ) es un esp. top. y $w : D \to X$ es una red, se dice que w converge a $x \in X$ si para cada abierto U que contiene a X¿existe $d \in D \ni T_d : \{w(e) : d \leq e \in D\} \subset U$

Notación: $w \to x$

Teorema 1.29. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ ssi existe una red w en A$\ni$ $w \to x$

Subredes

Nota: Un subconjunto D' de un ocnjunto dirigido D es cofinal so $\forall d \in D \exists e \in D' \ni d \leq e$

Definición 1.32. Sea $w : D \to X$ y $v : \xi \to X$ redes sobre X donde $(D, \leq), (\xi, \succeq)$ son conjuntos dirigidos. Se dice que v es una subred de w si existe una función $h : \xi \to D \ni$

1. h es monotona i.e. $\alpha \succeq \beta \Rightarrow h(\alpha) \succeq h(\beta)$
2. h es cofinal
3. $v(\alpha) = w(h\alpha) \forall a \in \xi$

Definición 1.33. Subsucesión una subsucesión de (X_n) es una sucesión de la forma (X_{n_k})

Filtros

Definición 1.34. Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un filtro sobre X si se satisface:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
3. Si $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Nota:

1. Cualquier colección $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ con la PIF genera un filtro que la contiene
2. Sea F(x) la colección de todos los filtros sobre X. Sea $\leq$ la relacion de contención. Entonces $(F(X), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado el cual no puede ser lineal

Teorema 1.30. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}_\alpha \in F(x),\ \alpha \in I$. Entonces $\cap_i \mathcal{F}_\alpha \in F(x)$

Teorema 1.31. Sea X un conjunto y U(x) ina colección de filtros sobre X. Si para cualquier $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in U(x)$ se tiene que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \Rightarrow \cup U(x)$ es filtro

Ultrafiltros

Definición 1.35. Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $a \in X$ y $A \subset X$. Se dice que a es un elemento maximal de A, si $a \in A$ y si $a \leq b \forall b \in A \Rightarrow a = b$

Definición 1.36. Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $C \subset X$. Se dice que C es cadena en X, si $\forall a, b \in C$ se cumple $a \leq b$ o $b \leq a$

Lema 1.3. Zorn So X es un conjunto no vacio y parcialmente ordenado $\ni$ cada cadena en X tiene cota superior, entonces X tiene un elemento maximal

Definición 1.37. Sea $X \neq \emptyset$ una familia $U \subset \mathcal{P}(X)$ es un ultrafiltro si se cumple

1. U es filtro
2. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X$\ni$ $U \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow U = \mathcal{F}$(U es maximal)

Teorema 1.32. Tarski Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces existe un ultrafiltro U sobre x $\ni \mathcal{F} \subset U$

Teorema 1.33. Sea X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces los enunciados soguietnes son equivalentes:

1. U es ultrafiltro
2. Par acualquier $E \subset U \ni E \cap F \neq \emptyset,\ \forall F \in U$ se tiene que $E \in U$
3. Si $E \subset X \Rightarrow E \in U$ o $X - E \in U$
4. Si $A, B \in$ X y $A \cap B \in U \Rightarrow A \in U$ o $B \in U$

Definición 1.38. Una subcolección $\beta \subset \mathcal{F}$ es una base del filtro $\mathcal{F}$ si $\forall F \in \mathcal{F} \exists B \in \beta \ni B \subset F$

Teorema 1.34. Una familia β de subconjuntos no vacios de X es base de algún filtro sobre X ssi $\forall B_1, B_2 \in \beta \exists B_3 \in \beta \ni B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Teorema 1.35. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces a familia $\beta = \{\overline{F} \ni F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtros

Nota: Al filtro generado por β se le llama $\overline{\mathcal{F}}$

Teorema 1.36. Sean X, Y espacios topológicos, $\overline{\mathcal{F}}$ un filtro sobre X y un mapeo $f : X \to Y$. Entonces $\beta_{f(\overline{\mathcal{F}})} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$

Teorema 1.37. Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre Y y un mapeo $f : X \to Y$. Si $\forall F \in \mathcal{F}$ se tiene que $f^{-1}(F) \neq \emptyset$, entonces $\beta = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$

Teorema 1.38. Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $E \subset X$. Si $B = \{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ y $B^{'} = \{F \cap (X - E) : F \in \mathcal{F}\}$ entonces

1. Si $F \cap E \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow \beta$ es base de filtro sobre X
2. Si$\exists F \in \mathcal{F} \ni F \cap E = \emptyset \Rightarrow$ B' es base de filtro sobre X

Definición 1.39. Sean $((X, \tau))$ un esp. top., $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, $x \in X$ entonces:

1. Se dice que $\mathcal{F}$ converge a x, $\mathcal{F} \to x$ si $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$IMPORTANTE
2. se dice que x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ si $\forall F \in \mathcal{F}$ y $\forall V \in N(x)$ se cumple que $F \cap V \neq \emptyset$
   Notación: $\mathcal{F} > x$

Teorema 1.39 (Teorema 32)**.** Sea X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces los enunciados siguietnes son equivalentes:

1. U es ultrafiltro
2. Par acualquier $E \subset U \ni E \cap F \neq \emptyset$, $\forall F \in U$ se tiene que $E \in U$
3. Si $E \subset X \Rightarrow E \in U$ o $X - E \in U$
4. Si $A, B \in$ X y $A \cap B \in U \Rightarrow A \in U$ o $B \in U$

Definición 1.40. Sea (X, τ) un esp. top. $\mathcal{F}$ es filtro sobre X y $x \in X$. Entonces $F \to x$ si $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$

Teorema 1.40. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}$ es filtro sobre X y $x \in$X. Entonces $F \to x$ s $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$

Teorema 1.41. Sea X un espacio topológico. $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \ni F \to x$. Si G es un filtro sobre $X \ni F \subset G \Rightarrow G \to x$

Definición 1.41. Se dice que una base de filtro β converge a un punto $x \in X$ si $\forall V \in N(x) \exists B \in \beta \ni B \subset V$ **Notación:** $\beta \to x$

Teorema 1.42. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, β una base de filtro para $\mathcal{F}$ y $x \in X$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ ssi $\beta \to x$

Propiedad: Sean X un esp. top. $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X$\ni \mathcal{F} \to x$. Si G es un filtro sobre x $\ni \mathcal{F} \subset G \Rightarrow G \to x$

Teorema 1.43. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. xes un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ i.e. $\mathcal{F} \succ x$
2. Existe un filtro G en x $\ni \mathcal{F} \subset G$ y $G \to x$
3. $x \in \overline{F}, \forall F \in \mathcal{F}$. Es decir, $x \in \cap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$

Teorema 1.44. Sea X un espacio topológico, U un ultrafiltro sobre x y $x \in X$ entonces $U \succ x$ ssi $U \to x$

Teorema 1.45. Sea X un espacio topológico $x \in X$ y $A \subset X$. Entonces, $x \in \overline{A}$ ssi existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X $\ni F \to x$ y $A \in \mathcal{F}$

Teorema 1.46. Sean X,Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en x ssi la base de filtros $B_{f(N(x))} = \{f(V) : V \in N(x)\}$ converge a f(x)

Propiedad: Sea (X, τ) un esp. top. entocnes X es Hausdorff(1.10) ssi todo filtro convergente en X converge a un punto único.

Teorema 1.47. Sea $I \neq \emptyset$ y $\{X_i, \tau_i\} \ni i \in I$ una colección de espacios topológicos. Sean $(\prod_{i \in I} x_i, \tau_p)$ el espacio producto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\prod_{i \in I} x_i$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ ssi $\prod_i(\mathcal{F}) \to \prod_i(x)$ en $(X_i, \tau_i) \forall i \in I$

Teorema 1.48. Sea X un espacio topológico. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. X es compacto
2. Toda colección **A** de conjuntos cerrados no vacios con la PIF, cumple que $\cap A \neq \emptyset$
3. Para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X $\exists x \in X \ni \mathcal{F} \succ x$
4. Todo ultrafiltro sobre X converge

Teorema 1.49. Tikonov Sea $I \neq \emptyset$ y $\{X_i, \tau_i\} \ni i \in I$ una colección de espacios topológicos. Entonces $(\prod_{i \in I} x_i, \tau_p)$ es compacto ssi x_i es compacto $\forall i \in I$

Lema 1.4. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ un mapeo y U un ultrafiltro sobre X. Entonces F(U) *Filtro generado por $\beta = \{f(F) : F \in U\}$* es un ultrafiltro sobre Y

Definición 1.42. Sea (Y_α, τ_α) una familia de esp. top. y sea F=$f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I$ una familia de mapeos. La topología inducida por F sobre X es la topología menos fina o mas debil que hace a las $f_{\alpha)}$ continuas

Notación: τ_F

Nota: (1) A esta topología también se le llama topología inicial topología límite, topología débil.

(2) Si existen τ_α que hacen a los f_α continuos, entonces

$$\tau_F = \bigcap_\alpha \tau_\alpha \quad \forall \alpha$$

Es una topología sobre X que hace continuas a los f_α.

Topología producto: top menos fina que hace continua a las proyecciones ⊥

(3) Por definición, la topología generada por f_α (τ_F) es la generada por la subbase

$$S_F = \bigcup_\alpha \{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) : V_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

(4) En el caso que se tiene un único espacio top. objetivo digamos $(Y, \tau) \Rightarrow S_F = \{f^{-1}(V) : V \in \tau\}$

Ej: Recordar la top. producto.

(Y, τ)

Topología Cociente

Definición 1.43. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ una colección de esp. top. Sea Y un conjunto y F=$\{f_\alpha : (Y_\alpha \to Y\}$ una familia de mapeos. La topología mas fuerte que hace a los f_α continuas se llama Topología co-inducida por F

Nota: Sea (X, τ) un esp. top. Sea Y un conjunto y $f : (X, \tau) \to Y$ un mapeo. La topología co-inducida por f sobre Y se llama topología cociente sobre Y

Definición 1.44. Sean X un esp. top. y Y un conjunto $\ni g : X \to Y$ es un mapeo sobreyectivo, entonces $\tau_y = \{G \subset Y \ni g^{-1}(G)$ es un abierto de X$\}$ es la topología cociente inducida por g para Y.

Teorema 1.50. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es un mapeo continuo sobreyectivo y abierto o cerrado, la topología τ de Y es la topología Cociente τ_f

Teorema 1.51. Sea Y un espacio topológico dotado de la topologia cociente, inducida por el mapeo $f : X \to Y$. Entonces un mapeo arbitrario $g : Y \to Z$ es continuo ssi $g \circ f : X \to Z$ es continuo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \quad \longleftarrow \text{top. Cociente} = \tau_f$$

Nota:

1. Sea G la partición deu n esp. top. X y sea $X/_G$ su conjunto cociente o descomposición
2. La función $p : X \to X/_G \ni p(x) = [x]$ se llama la función cociente o función canónica
3. $\mathcal{U} = \{U \subset X/_G \ni p^{-1}(U)$ es abierta de X $\}$

Teorema 1.52.

1. U es una topología para X/G
2. Si X/G tiene la topología cociente, entonces p es continua. $*p : X \to X/G \ni p(x) = [x]*$
3. Si V es una topología para $X/G \ni$ p es continua, entoncres $V \subset U$
4. Si X/G tiene la topología cociente y su $A \subset X/G \ni p^{-1}(A)$ es cerrado de X $\Rightarrow$ A es cerrado en X/G

Nota: Sean X y Y esp. top. y $f : X \to Y$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Definamos

$$G_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$$

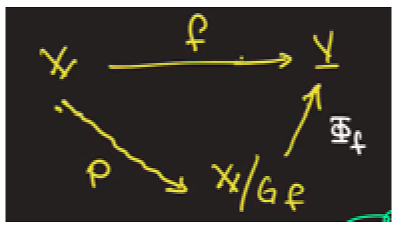
Entonces G_f es una partición de X **Nota:** En la función $p : X \to X\big/G_f$ se tiene que $\forall x \in X$, p(x)=[x]=$f^{-1}(f(x))$

Definición 1.45. Sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo y sobreyectivo
Se define:

$$\Phi_f : X\big/G_f \to Y \ni$$

$$\Phi_f([x]) := f(x)$$

es decir



Propiedad: Φ_f es biyectiva(se cumple: $\Phi_f([x]) = f(x)$)

Lema 1.5. $\forall A \subset Y$, $\Phi_f^{-1}(A) = p(f^{-1}(A))$

Lema 1.6. $\forall B \subset X\big/G_f$, $\Phi_f(B) = f(p^{-1}(B))$

Teorema 1.53. Sean $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva y $X\big/G_f$ dotado de la topología cociente. Entonces $\Phi_f : X\big/G_f \to Y$ es continua

Teorema 1.54. Suponga que $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada, entonces

$$\Phi\big/G_f \to Y$$

es un homeomorfismo

Teorema 1.55. Si X es compacto, el espacio Y es Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, $\Rightarrow \Phi_f : X\big/G_f \to Y$ es homeomorfismo

2. Teoremas-Lemas-Corolarios

Teorema 2.1. Los enunciados siguientes so nequivalentes

1. Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico $(X,\ \tau)$ es una base para τ si cada abierto de τ es unión de miembros de β

2. $\beta \subset \tau$ es una base para τ, ssi $\forall G \in \tau,\ \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$

Teorema 2.2. Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacio X. Entonces β es una clase para una topología τ sobre X ssi se cumplen

1. X=$\cup_{b\in\beta} B$

2. $\forall B, B^* \in \beta$ se tiene que B$\cap B^*$ la unión de miembros de $\beta \Leftrightarrow$ si p$\in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*$

Teorema 2.3. Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitriaria de subconjuntos de X, Entonces S puede construirse en la subbase abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.

Lema 2.1. Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre X $\Rightarrow \tau = \tau^*$

Teorema 2.4. Sea X un subconjunto no vacio y sea S una clase de subconjuntos de X. La topología τ sobre X, generado por S, y la intersección de todoas las topologías sobre X que contienen a S.

Teorema 2.5. Lindelof Sea X un espacio segundo contable si un abierto no-vacio G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_1\}$ de abiertos de X $\Rightarrow$ G puede representarse como unión contable de los G_i

Teorema 2.6. Todo espacio métrico es de Hausdorff

Teorema 2.7. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces cada sucesión de puntos (X_n) en X converga a lo más a un punto de X.

Teorema 2.8. Cada subconjunto finito A$\subset$X en un Hausdorff es cerrado

Teorema 2.9. Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo

Teorema 2.10. un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continuo ssi es continuo en cada punto de X.

Teorema 2.11. Sea $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ una colección de mapeos definidos sobre un conjunto no vacío X sobre los espacios topológicos (Y_i, τ_i), sea

$$S = \cup_i \{f^{-1}(H) : H \in \tau_i\}$$

y definimos τ como la topología sobre X generada por S, entonces:

1. Todas las f_i son continuas con respecto a τ

2. Si τ^* es la intersección de todas las topologías sobre X con respecto a las cuales las f_i son continuas, entonces $\tau = \tau^*$

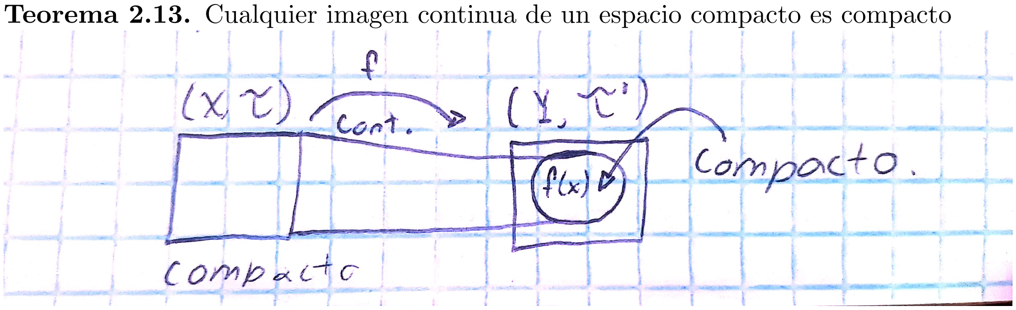
3. τ es la topología menos fina sobre X tales que las f_i son continuas

4. S es una subbase para τ

Compactos

Teorema 2.12. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto

Teorema 2.13. Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto



Teorema 2.14. Los enunciados siguientes son equivalentes

1. X es un espacio compacto
2. Para cada clase $\{F_i\}$ de cerrados de X $\ni \cap_i F_i = \emptyset$, se cumple que $\{F_i\}$ contiene una subclase finita $\{F_{i_1}, ..., F_{i_m}\} \ni F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_m} = \emptyset$

En el teorema anterior, la contrapuesta de (2) es: Para toda clase de cerrados de X, $\{F_{i_1}\} \ni$ cada subclase finita tiene interseicción no vacia, entonces $\cap_i F_i \neq \emptyset$

Teorema 2.15. X es un espacio compacto ssi cada clase de cerrados de X que tiene la Pif tiene intersección no vacía

Teorema 2.16. Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta básica tiene una subcubierta finita

Teorema 2.17. Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta subbásica tiene una subcuierta finita

Teorema 2.18. Sea X un espacio T_2, cualquier punto y un subespacio disjunto y compacto, pueden separarse por abiertos, en el sentido que tienen vecindades disjuntas
AGREGAR FIGURA

Teorema 2.19. Cada subespacio compacto de un T_2 es cerrado

Teorema 2.20. Un mapeo biyectivo y continuo de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo
AGREGAR FIGURA

Separación

Teorema 2.21. Un esapcio topológico es T_1 ssi los unitarios son cerrados

Teorema 2.22. Cada subespacio de un T_1 es un T_1

Teorema 2.23. Si X es $T_3 \Rightarrow$ X es T_2

Teorema 2.24. Los enunciados siguietnes son equivalentes

1. X es normal
2. Si H es un superconjunto abierto del cerrado F, entonces existe un abierto G, $\ni$

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H$$

Teorema 2.25. Metrizaacion de Urysohn Si X es un espacio @do contable, normal y T_1, entonces X es Metrizable

Teorema 2.26. Sea D el conjunto de fracciones diádicas en [0,1], entonces $\overline{D}$ =[0,1]

Lema 2.2. Urysohn Sean F_1 y F_2 cerrados disjuntos de un espacio normal X, entonces existe la función continua

$$f : X \to [0,1] \ni$$

$$f(F_1) = \{0\} \ y \ f(F_2) = \{1\}$$

Teorema 2.27. Un esapcio topológico e sT_1 ssi $\forall x \in X$ la sucesión x,x,x,... converga a x y solo a x

Teorema 2.28. Un espacio topológico es T_2 ssi cada sucesión convergente tiene límite único

Redes

Teorema 2.29. Sea (Y_i, τ_i) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ ssi existe una red w en A$\ni$ $w \to x$

Filtros

Teorema 2.30. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}_\alpha \in F(x),\ \alpha \in I$. Entonces $\cap_i \mathcal{F}_\alpha \in F(x)$

Teorema 2.31. Sea X un conjunto y U(x) ina colección de filtros sobre X. Si para cualquier $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in U(x)$ se tiene que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \Rightarrow \cup U(x)$ es filtro

Lema 2.3. Zorn So X es un conjunto no vacio y parcialmente ordenado $\ni$ cada cadena en X tiene cota superior, entonces X tiene un elemento maximal

Teorema 2.32. **Tarski** Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces existe un ultrafiltro U sobre x $\ni \mathcal{F} \subset U$

Teorema 2.33. Sea X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces los enunciados soguietnes son equivalentes:

1. U es ultrafiltro

2. Par acualquier $E \subset U \ni E \cap F \neq \emptyset,\ \forall F \in U$ se tiene que $E \in U$

3. Si $E \subset X \Rightarrow E \in U$ o $X - E \in U$

4. Si $A, B \in$ X y $A \cap B \in U \Rightarrow A \in U$ o $B \in U$

Teorema 2.34. Una familia β de subconjuntos no vacios de X es base de algún filtro sobre X ssi $\forall B_1, B_2 \in \beta \exists B_3 \in \beta \ni B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Teorema 2.35. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces a familia $\beta = \{\overline{F} \ni F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtros

Teorema 2.36. Sean X, Y espacios topológicos, $\overline{\mathcal{F}}$ un filtro sobre X y un mapeo $f : X \to Y$. Entonces $\beta_{f(\overline{\mathcal{F}})} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$

Teorema 2.37. Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre Y y un mapeo $f : X \to Y$. Si $\forall F \in \mathcal{F}$ se tiene que $f^{-1}(F) \neq \emptyset$, entonces $\beta = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$

Teorema 2.38. Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $E \subset X$. Si $B = \{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ y $B^{'} = \{F \cap (X - E) : F \in \mathcal{F}\}$ entonces

1. Si $F \cap E \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow \beta$ es base de filtro sobre X

2. Si$\exists F \in \mathcal{F} \ni F \cap E = \emptyset \Rightarrow$ B' es base de filtro sobre X

Teorema 2.39 (Teorema 32)**.** Sea X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces los enunciados siguietnes son equivalentes:

1. U es ultrafiltro

2. Par acualquier $E \subset U \ni E \cap F \neq \emptyset,\ \forall F \in U$ se tiene que $E \in U$

3. Si $E \subset X \Rightarrow E \in U$ o $X - E \in U$

4. Si $A, B \in$ X y $A \cap B \in U \Rightarrow A \in U$ o $B \in U$

Teorema 2.40. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}$ es filtro sobre X y $x \in$X. Entonces $F \to x$ s $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$

Teorema 2.41. Sea X un espacio topológico. $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \ni F \to x$. Si G es un filtro sobre $X \ni F \subset G \Rightarrow G \to x$
Notación: $\mathcal{F} \succ x$

Teorema 2.42. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, β una base de filtro para $\mathcal{F}$ y $x \in X$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ ssi $\beta \to x$

Teorema 2.43. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. xes un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ i.e. $\mathcal{F} \succ x$

2. Existe un filtro G en x $\ni \mathcal{F} \subset G$ y $G \to x$

3. $x \in \overline{F}, \forall F \in \mathcal{F}$. Es decir, $x \in \cap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$

Teorema 2.44. Sea X un espacio topológico, U un ultrafiltro sobre x y $x \in X$ entonces $U \succ x$ ssi $U \to x$

Teorema 2.45. Sea X un espacio topológico $x \in X$ y $A \subset X$. Entonces, $x \in \overline{A}$ ssi existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X $\ni F \to x$ y $A \in \mathcal{F}$

Teorema 2.46. Sean X,Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en x ssi la base de filtros $B_{f(N(x))} = \{f(V) : V \in N(x)\}$ converge a f(x)

Teorema 2.47. Sea $I \neq \emptyset$ y $\{X_i, \tau_i\} \ni i \in I$ una colección de espacios topológicos. Sean $(\prod_{i \in I} x_i, \tau_p)$ el espacio producto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\prod_{i \in I} x_i$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ ssi $\prod_i(\mathcal{F}) \to \prod_i(x)$ en $(X_i, \tau_i) \forall i \in I$

Teorema 2.48. Sea X un espacio topológico. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. X es compacto
2. Toda colección **A** de conjuntos cerrados no vacios con la PIF, cumple que $\cap A \neq \emptyset$
3. Para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X $\exists x \in X \ni \mathcal{F} \succ x$
4. Todo ultrafiltro sobre X converge

Teorema 2.49. Tikonov Sea $I \neq \emptyset$ y $\{X_i, \tau_i\} \ni i \in I$ una colección de espacios topológicos. Entonces $(\prod_{i \in I} x_i, \tau_p)$ es compacto ssi x_i es compacto $\forall i \in I$

Lema 2.4. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ un mapeo y U un ultrafiltro sobre X. Entonces F(U) *Filtro generado por $\beta = \{f(F) : F \in U\}$* es un ultrafiltro sobre Y

Teorema 2.50. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es un mapeo continuo sobre yectivo y abierto o cerrado, la topología τ de Y es la topología Cociente τ_f

Teorema 2.51. Sea Y un espacio topológico dotado de la topologia cociente, inducida por el mapeo $f : X \to Y$. Entonces un mapeo arbitrario $g : Y \to Z$ es continuo ssi $g \circ f : X \to Z$ es continuo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] & \text{top. cociente} = \tau_f \arrow[l] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.52.

1. U es una topología para X/G
2. Si X/G tiene la topología cociente, entonces p es continua. *$p : X \to X/G \ni p(x) = [x]$*
3. Si V es una topología para $X/G \ni$ p es continua, entoncres $V \subset U$
4. Si X/G tiene la topología cociente y su $A \subset X/G \ni p^{-1}(A)$ es cerrado de X $\Rightarrow$ A es cerrado en X/G

Clase virtual 26-05-23

Lema 2.5. $\forall A \subset Y$, $\Phi_f^{-1}(A) = p(f^{-1}(A))$

Lema 2.6. $\forall B \subset X \big/ G_f$, $\Phi_f(B) = f(p^{-1}(B))$

Teorema 2.53. Sean $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva y $X \big/ G_f$ dotado de la topología cociente. Entonces $\Phi_f : X \big/ G_f \to Y$ es continua

Teorema 2.54. Suponga que $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada, entonces

$$\Phi \big/ G_f \to Y$$

es un homeomorfismo

Teorema 2.55. Si X es compacto, el espacio Y es Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, $\Rightarrow \Phi_f : X \big/ G_f \to Y$ es homeomorfismo

Teorema 2.56. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. X es regular
2. Si U es un abierto de X y si $x \in U$ entonces existe un abierto V de $x \ni x \in V$ y $\overline{V} \subset U$
3. Cada $x \in X$ tiene una base de vecindades que consiste de cerrados