Teoremario de Topología

Wilfredo Gallegos

30 de mayo de 2023

1. Contenido

Definición 1.1 *Sea $X \neq \emptyset$ una clase τ de subconjuntos de X es una Topología sobre X si cumple:*

1. $\emptyset,\ X \in \tau$
2. *La uni'on de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ*
3. *La intersecci'on de una clase finita de miembres de τ está en τ*
   Los miembros de τ son los abiertos de X

Nota:

1. El par $(X,\ \tau)$ es un espacio topologíco
2. a los elementos de X se le llaman puntos

2. Teoremas-Lemas-Corolarios

Teorema 1 *Los enunciados siguientes so nequivalentes*

1. *Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico $(X,\ \tau)$ es una base para τ si cada abierto de τ es unión de miembros de β*
2. $\beta \subset \tau$ *es una base para* τ*, ssi* $\forall G \in \tau,\ \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$

Teorema 2 *Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacio X. Entonces β es una clase para una topología τ sobre X ssi se cumplen*

1. $X{=}\cup_{b\in\beta} B$
2. $\forall B, B^* \in \beta$ *se tiene que* $B{\cap}B^*$ *la unión de miembros de* $\beta \Leftrightarrow$ *si* $p{\in} B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*$

Teorema 3 *Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitriaria de subconjuntos de X, Entonces S puede construirse en la subbase abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.*

Lema 1 *Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre $X \Rightarrow \tau = \tau^*$*

Teorema 4 *Sea X un subconjunto no vacio y sea S una clase de subconjuntos de X. La topología τ sobre X, generado por S, y la intersección de todoas las topologías sobre X que contienen a S.*

Teorema 5 *Lindelof Sea X un espacio segundo contable si un abierto no-vacio G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_1\}$ de abiertos de $X \Rightarrow G$ puede representarse como unión contable de los G_i*

Teorema 6 *Todo espacio m'etrico es de Hausdorff*

Teorema 7 *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces cada sucesión de puntos (X_n) en X converga a lo más a un punto de X.*

Teorema 8 *Cada subconjunto finito $A{\subset}X$ en un Hausdorff es cerrado*

Teorema 9 *Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo*

Teorema 10 *un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continuo ssi es continuo en cada punto de X.*

Teorema 11 *Sea $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ una colección de mapeos definidos sobre un conjunto no vacío X sobre los espacios topológicos (Y_i, τ_i), sea*

$$S = \cup_i \{f^{-1}(H) : H \in \tau_i\}$$

y definimos τ como la topología sobre X generada por S, entonces:

1. *Todas las f_i son continuas con respecto a τ*
2. *Si τ^* es la intersección de todas las topologías sobre X con respecto a las cuales las f_i son continuas, entonces $\tau = \tau^*$*
3. *τ es la topología menos fina sobre X tales que las f_i son continuas*
4. *S es una subbase para τ*

Compactos

Teorema 12 *Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto*

Teorema 13 *Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto*

Referencias