Estadística matemática

Wilfredo Gallegos

12 de julio de 2023

Jueves 6 de julio

1. Contenido

5.1

Definición 1.1. Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias discretas. La función de probabilidad conjunta para Y_1 y Y_2 es P$(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1)$ $-$ínf $< y2 <$ ínf)

martes 11 de julio

Definición 1.2. Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias discretas conjuntas con funcion de probabilidad conjunta $P(y_1, y_2)(P[Y_1 = y_1] \cap [Y_2 = y_2])$ y función marginal $P_1(y_1)(P[Y_1 = y_1])$ y $P_2(y_2)(P[Y_2 = y_2])$

$$\Rightarrow p(y_1|y_2) = P([Y_1 = y_1]|[Y_1 = y_1]) = \frac{P([Y_1 = y_1] \cap [Y_2 = y_2])}{P([Y_2 = y_2]} = \frac{P(y_1, y_2)}{P_2(y_2)}, \quad \textit{Siempre que } P_2(y_2) > 0$$

Nota:

$$p(y_2|y_1) = \frac{P(y_1, y_2)}{P_1(y_1)} \geq 0 \ y \ \sum p(y_1|y_1) = 1$$

5.7 ej. 5.5

Encontrar la distrubución condicional de Y_1 dado $Y_2 = 1$

$$\begin{aligned} Y_1 &: \ \textit{\# de republicanos en el comite de 2 personas} \\ Y_2 &: \ \textit{\# de demócratas en el comite de 2 personas} \end{aligned}$$

$$p(Y_2 = 0|Y_2 = 1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} \Big/ \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{2/15}{8/15} = \frac{1}{4}$$

$$p(Y_2 = 1|Y_2 = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} \Big/ \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{6/15}{8/15} = \frac{3}{4}$$

5.6

Definición 1.3. Si Y_1 y Y_2 son variales aleatorias continuas con función densidad conjunta $f(y_1, y_2) \Rightarrow$ la función de distribución acumulada condicional de Y_1, dado $Y_2 = y_2$ es $F(y_1|y_2) = P(Y_1 \leq y_1|Y_2 = y_2)$

5.7

Definición 1.4. Sean Y_1 y Y_2 son variales aleatorias contunuas con funsion densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_1(y_1)$ y $f_2(y_2)$. Para cualquier y_2 tal que $f_2(y_2) > 0$, la densidad condiciona de Y_1, dado $Y_1 = Y_2$ es

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)}$$

y para cualquier $y_1 \ni f_1(y_1) > 0$, la densidad condicional de Y_2 dada $Y_1 = y_1$ es

$$f(y_2|y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_1(y_1)}$$

5.8 ej.

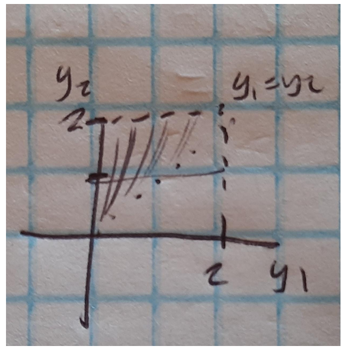
$$\begin{aligned} Y_2 &: \ \textit{existencia de bebidas al inicio de un dia determinado} \\ Y_1 &: \ \textit{despacho durante el dia} \\ & \ Y_1 \leq Y_2 \end{aligned}$$

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 2 \\ 0, & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Encontrar la densidad condicional de Y_1 dad o$Y_2 = y_2$ y calcular la probabilidad de que se venda menos o igual a 1/2 galón, dado que la maquina contiene 1.5 galones al empezar el dia.

Sol:

$$f_2(y_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = \int_0^{y_2} \frac{1}{2} dy_1 = \frac{1}{2} y_1 \Big|_0^{y_2} = \frac{1}{2} y_2 & , \quad 0 \leq y_2 \leq 2 \\ 0 & , \quad \textit{Cualquier otro caso} \end{cases}$$



Note que $f_2(y_2) > 0$ en $0 < y_1 \leq 2$
$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1,y_2)}{f_2(y_2)} \frac{1/2}{1/2y_2} = \frac{1}{y_2}, 0 < y_1 \leq y_2 \leq 2$
Además, $f(y_1|y_2)$ es indefinida si $y_2 \leq 0$ 0 $y_2 > 2$
5.8 ej.

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq 1/2 | Y_2 = 1{,}5) = & \int_{-\infty}^{1/2} f(y_1|y_2 = 1{,}5) dy_1 \\ = & \int_{-\infty}^{1/2} \frac{1}{1{,}5} dy_1 = \frac{1}{1{,}5} y1 \Big|_0^{1/2} = \frac{1/2}{1{,}5} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

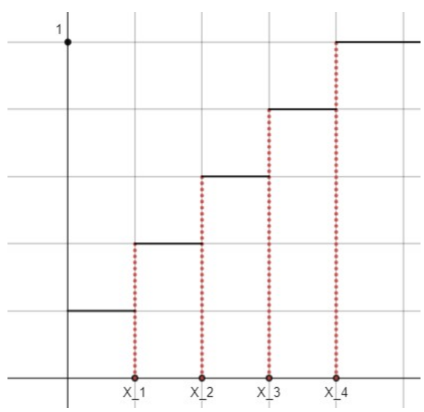
$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

5.7 Varaibles aleatorias independientes
5.8

Definición 1.5. Sean Y_1 con una función distribución acumulada $F_1(y_1)$ y Y_2 con función de distribución acumulada $F_1(y_1)$ y $F(y_1, y_2)$ es la función de distribución acumulada conjunta de Y_1 y Y_2, entonces Y_1 y Y_2 son independientes ssi $F(y_1, y_2)$=$F_1(y_1)F_2(y_2) \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ Si Y_1 y Y_2 no son independientes son dependientes

Teorema 1.1. Dado una variable aleatoria $X \Rightarrow P([X = a]) = \lim_{n \to 0} P([a - n < x \leq a])$

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$
Como $\lim_{n \to 0} a - n = a \left(\lim_{n \to \infty} a - \frac{1}{h} \right) = a$



Tomese una sucesión

$$\underset{a-1}{t_1} < \underset{a-\frac{1}{2}}{t_2} < ... < \underset{a-\frac{1}{n}}{t_n} < a$$

tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ y $A_n = [t_n < t \leq a]$

$$\begin{aligned}
A_1 = &\ [a-1 < t \leq a]\\
A_2 = &\ [a-1/2 < t \leq a], A_2 \subseteq A_1\\
&.\\
&.\\
&.\\
A_n = &\ [a-1/n < t \leq a], A_n \subseteq A_{n-1}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to 0} P([a-n < x \leq a]) = &\ \lim_{n\to\infty} P([t_n < x \leq a])\\
= &\ \lim_{n\to\infty} P([x \leq a]) - P([x \leq t_n]) = P([x \leq a]) - \underbrace{\lim_{n\to\infty} P([X \leq t_n])}_{P([X<a])}\\
= &\ P([X \leq a]) - P([X < a]) = P([X = a])
\end{aligned}$$

□

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
C_1 = &\ [x \leq t_1]\\
C_2 = &\ [x \leq t_2], C_1 \subseteq C_2\\
&.\\
&.\\
&.\\
C_n = &\ [x \leq t_n], C_{n-1} \subseteq C_n
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} [x \leq t_n] = \ \bigcup_{i=1}^{\infty} [x \leq t_i] = [x < a]$$

Luego

$$\begin{aligned}
B_1 = &\ [x \leq t_1]\\
B_2 = &\ [x \leq t_2] \setminus [x \leq t_1]\\
&.\\
&.\\
&.\\
B_n = &\ [x \leq t_n] \setminus [x \leq t_{n-1}]
\end{aligned}$$

Notese que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\cup_{i=1}^{n} B_i = \cup_{i=1}^{n} [x \leq t_{i-1}]$
entonces

$$\begin{aligned}
P\left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) = &\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\\
\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = &\ \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=2}^{n} P([x \leq t_i] \setminus [x \leq t_{i-1}]) + P([x \leq t_i])\\
= &\ \textstyle\sum_{i=2}^{n} [P([x \leq t_i]) - P([x \leq t_{i-1}])] + P([x \leq t_i])\\
= &\ \lim_{n\to\infty} P([x \leq t_n])
\end{aligned}$$

Teorema 1.2. [a)]

1. Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $P[y_1, y_2]$ y funciones marginales $P_1(y_1)$ y $P_2(y_2)$, entonces Y_1 y Y_2 son independientes ssi $P(y_1, y_2) = P_1(y_1)P_2(y_2), \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

2. Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas con función densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y funciones densidades marginales $P_1(y_1)$ y $P_2(y_2)$, entonces Y_1 y Y_2 son independientes ssi $f(y_1, y_2) = f(y_1)f(y_2), \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$