Estadística matemática

Wilfredo Gallegos

27 de julio de 2023

Jueves 6 de julio

1. Contenido

5.1

Definición 1.1. Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias discretas. La función de probabilidad conjunta para Y_1 y Y_2 es $\mathrm{P}(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1) - \text{ínf} < y2 < \text{ínf})$

martes 11 de julio

Definición 1.2. Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias discretas conjuntas con funcion de probabilidad conjunta $P(y_1, y_2)(P[Y_1 = y_1] \cap [Y_2 = y_2])$ y función marginal $P_1(y_1)(P[Y_1 = y_1])$ y $P_2(y_2)(P[Y_2 = y_2])$

$$\Rightarrow p(y_1|y_2) = P([Y_1 = y_1]|[Y_1 = y_1]) = \frac{P([Y_1 = y_1] \cap [Y_2 = y_2])}{P([Y_2 = y_2]} = \frac{P(y_1, y_2)}{P_2(y_2)}, \quad \textit{Siempre que } P_2(y_2) > 0$$

Nota:

$$p(y_2|y_1) = \frac{P(y_1, y_2)}{P_1(y_1)} \geq 0 \ y \ \sum p(y_1|y_1) = 1$$

5.7 ej. 5.5
Encontrar la distrubución condicional de Y_1 dado $Y_2 = 1$

$$\begin{aligned} Y_1 &: \ \textit{\# de republicanos en el comite de 2 personas} \\ Y_2 &: \ \textit{\# de demócratas en el comite de 2 personas} \end{aligned}$$

$$p(Y_2 = 0|Y_2 = 1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} \Bigg/ \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{2/15}{8/15} = \frac{1}{4}$$

$$p(Y_2 = 1|Y_2 = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} \Bigg/ \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{6/15}{8/15} = \frac{3}{4}$$

5.6

Definición 1.3. Si Y_1 y Y_2 son variales aleatorias continuas con función densidad conjunta $f(y_1, y_2) \Rightarrow$ la función de distribución acumulada condicional de Y_1, dado $Y_2 = y_2$ es $F(y_1|y_2) = P(Y_1 \leq y_1|Y_2 = y_2)$

5.7

Definición 1.4. Sean Y_1 y Y_2 son variales aleatorias contunuas con funsion densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_1(y_1)$ y $f_2(y_2)$. Para cualquier y_2 tal que $f_2(y_2) > 0$, la densidad condiciona de Y_1, dado $Y_1 = Y_2$ es

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)}$$

y para cualquier $y_1 \ni f_1(y_1) > 0$, la densidad condicional de Y_2 dada $Y_1 = y_1$ es

$$f(y_2|y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_1(y_1)}$$

5.8 ej.

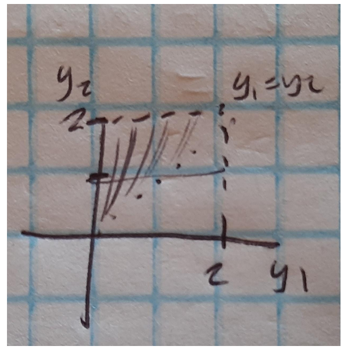
$$\begin{aligned} Y_2 &: \ \textit{existencia de bebidas al inicio de un dia determinado} \\ Y_1 &: \ \textit{despacho durante el dia} \\ & \ \ Y_1 \leq Y_2 \end{aligned}$$

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 2 \\ 0, & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Encontrar la densidad condicional de Y_1 dad o$Y_2 = y_2$ y calcular la probabilidad de que se venda menos o igual a 1/2 galón, dado que la maquina contiene 1.5 galones al empezar el dia.

Sol:

$$f_2(y_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = \int_0^{y_2} \frac{1}{2} dy_1 = \frac{1}{2} y_1 \Big|_0^{y_2} = \frac{1}{2} y_2 & , \quad 0 \leq y_2 \leq 2 \\ 0 & , \quad \textit{Cualquier otro caso} \end{cases}$$



Note que $f_2(y_2) > 0$ en $0 < y_1 \leq 2$
$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1,y_2)}{f_2(y_2)} \frac{1/2}{1/2 y_2} = \frac{1}{y_2}, 0 < y_1 \leq y_2 \leq 2$
Además, $f(y_1|y_2)$ es indefinida si $y_2 \leq 0$ 0 $y_2 > 2$
5.8 ej.

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq 1/2 | Y_2 = 1{,}5) = & \int_{-\infty}^{1/2} f(y_1|y_2 = 1{,}5) dy_1 \\ = & \int_{-\infty}^{1/2} \frac{1}{1{,}5} dy_1 = \frac{1}{1{,}5} y1 \Big|_0^{1/2} = \frac{1/2}{1{,}5} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

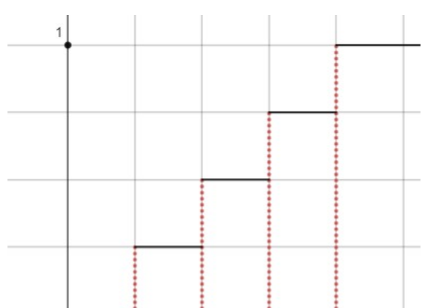
$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

5.7 Varaibles aleatorias independientes
5.8

Definición 1.5. Sean Y_1 con una función distribución acumulada $F_1(y_1)$ y Y_2 con función de distribución acumulada $F_1(y_1)$ y $F(y_1, y_2)$ es la función de distribución acumulada conjunta de Y_1 y Y_2, entonces Y_1 y Y_2 son independientes ssi $F(y_1, y_2)$=$F_1(y_1) F_2(y_2) \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ Si Y_1 y Y_2 no son independientes son dependientes

Teorema 1.1. Dado una variable aleatoria $X \Rightarrow P([X = a]) = \lim_{n \to 0} P([a - n < x \leq a])$

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$
Como $\lim_{n \to 0} a - n = a \left(\lim_{n \to \infty} a - \frac{1}{h} \right) = a$



Tomese una sucesión

$$\underset{a-1}{t_1} < \underset{a-\frac{1}{2}}{t_2} < \ldots < \underset{a-\frac{1}{n}}{t_n} < a$$

tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ y $A_n = [t_n < t \leq a]$

$$\begin{aligned}
A_1 = &\quad [a-1 < t \leq a] \\
A_2 = &\quad [a-1/2 < t \leq a], A_2 \subseteq A_1 \\
&\vdots \\
A_n = &\quad [a-1/n < t \leq a], A_n \subseteq A_{n-1}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to 0} P([a-n < x \leq a]) = &\quad \lim_{n\to\infty} P([t_n < x \leq a]) \\
= &\quad \lim_{n\to\infty} P([x \leq a]) - P([x \leq t_n]) = P([x \leq a]) - \underbrace{\lim_{n\to\infty} P([X \leq t_n])}_{P([X<a])} \\
= &\quad P([X \leq a]) - P([X < a]) = P([X = a])
\end{aligned}$$

$\square$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
C_1 = &\quad [x \leq t_1] \\
C_2 = &\quad [x \leq t_2], C_1 \subseteq C_2 \\
&\vdots \\
C_n = &\quad [x \leq t_n], C_{n-1} \subseteq C_n
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} [x \leq t_n] = \quad \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} [x \leq t_i] = [x < a]$$

Luego

$$\begin{aligned}
B_1 = &\quad [x \leq t_1] \\
B_2 = &\quad [x \leq t_2] \setminus [x \leq t_1] \\
&\vdots \\
B_n = &\quad [x \leq t_n] \setminus [x \leq t_{n-1}]
\end{aligned}$$

Notese que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\cup_{i=1}^{n} B_i = \cup_{i=1}^{n} [x \leq t_{i-1}]$
entonces

$$\begin{aligned}
P\left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) = &\quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\
\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = &\quad \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=2}^{n} P([x \leq t_i] \setminus [x \leq t_{i-1}]) + P([x \leq t_i]) \\
= &\quad \textstyle\sum_{i=2}^{n} [P([x \leq t_i]) - P([x \leq t_{i-1}])] + P([x \leq t_i]) \\
= &\quad \lim_{n\to\infty} P([x \leq t_n])
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.

1. Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $P[y_1, y_2]$ y funciones marginales $P_1(y_1)$ y $P_2(y_2)$, entonces Y_1 y Y_2 son independientes ssi $P(y_1, y_2) = P_1(y_1)P_2(y_2), \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

2. Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas con función densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y funciones densidades marginales $P_1(y_1)$ y $P_2(y_2)$, entonces Y_1 y Y_2 son independientes ssi $f(y_1, y_2) = f(y_1)f(y_2), \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

martes 18 de julio

Ej.

Sea X y Y variables aleatorias contincuas con funci'on densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x}e^{-3y}, & 0 < x, y < \infty \\ 0, & \textit{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

¿X y Y son variables aleatorias independientes?

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x, y < \infty \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \infty \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

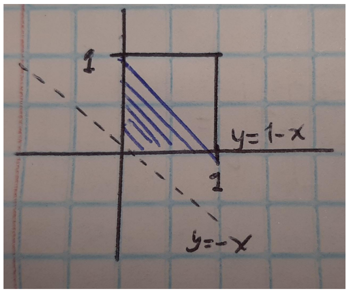
$$\begin{aligned} f(x,y) = \;& 6e^{-2x}e^{-3y} \cdot I(x,y) = (2e^{-2x} \cdot I(x)) \cdot (3e^{-3y} \cdot I(y)) = \\ = \;& f_x(x) f_y(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por el teorema 5.8, X y Y son variables aleatorias independientes.

Ej.

Sea X y Y variables aleatorias con funci'on densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 < x, y < 1; 0 < x + y < 1 \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



Claramente no se puede factorizar en 2 partes que de x y otro que depende de y. Por lo tanto, X y Y son variables aleatorias dependientes.

5.9 Teorema

Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias independientes y sean $g(Y_1)$ y $h(Y_2)$ funciones solo de Y_1 y Y_2. Entonces $E(g(Y_1) \cdot h(Y_2)) = E(g(Y_1)) \cdot E(h(Y_2))$ siempre que existan los valores esperados.

Ej.

En el ej. 5.19

$$\begin{aligned} Y_2 : &\quad \textit{Proporci'on de impurezas en la muestra} \\ Y_1 : &\quad \textit{dProporci'on de impurezas de tipo I entre todas las impurezas encontradas} \end{aligned}$$

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2(1 - y_1), 0 < y_1, y_2 < 1 \\ \qquad\qquad\qquad 0, \quad \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Encontrar $E(y_1, y_2) = E(y_1) \cdot E(y_2)$ si Y_1 y Y_2 son independientes.

$$\begin{aligned}
E(y_1, y_2) = & \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{y_1 \cdot y_2}_{funciones} \cdot \underbrace{2(1-y_1)}_{\substack{\text{densidad}\\ \text{conjunta}}} dy_2 dy_1 \\
= & \; 2\int_0^1 y_1(1-y_1) \left.\frac{y_2^2}{2}\right|_0^1 dy_1 \\
= & \; 2\int_0^1 y_1(1-y_1)\left(\frac{1}{2}\right) dy_1 \\
= & \; 2\int_0^1 \frac{y_1}{2} - \frac{y_1^2}{2} dy_1 = \left[\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{6}\right] \cdot 2\Big|_0^1 = \\
= & \; 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Marginales

$$f(y_1) = \begin{cases} \int_0^1 2(1-y_1)dy_2 = 2(1-y_1), & 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$f(y?2) = \begin{cases} \int_0^1 2(1-y_1)dy_1 = 2y_1 - y_1^2\big|_0^1 = 1, & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Valores ESperados

$$\begin{aligned}
E(Y_1) = & \int_0^1 y_1(2)(1-y_1)dy_1 = \int_0^1 2y_1 - 2y_1^2 dy_1 = y_!^2 - \frac{2}{3}y_1^3\big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\
E(Y_2) = & \int_0^1 y_2(1)dy_2 = \left.\frac{y_2^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Valores esperados y varianzas de funciones lineales de variables aleatorias

5.8) Teorema: Sean $Y_1, .., Y_n$ y $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias con $E(Y_i) - \mu_i$ y $E(X_j) = \xi_j$. Se define $U_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i Y_i$ y $U_2 = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j X_j$ para $a_1, .., a_n, b_1, .., b_m \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. $E(U) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E(Y_i)$
2. $Var(U_1) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 Var(Y_i) + 2 \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n}^{n} a_i a_j Cov(Y_i Y_j)$
   - $Cov(X, Y) = E(x, y) - (E(x))(E(y))$
3. *a*) $Cov(U_1, U_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_i a_j Cov(Y_i X_j)$

   b) $Cov(X, Y) = (E(x - E(x)))(E(y - E(y)))$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} E(U_1) = & E(\sum_i^n a_i Y_i) = \sum_i^n E(a_i Y_i) = (\textit{Por teorema 5.8}) = \\ & \sum_i^n a_i E(Y_i) = \sum_i^n a_i \mu_i (\leftarrow \textit{Por teorema 5.7}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Var(U_1) = & E((U_1 - E(U_1))^2)(\leftarrow \textit{Por def. de varianza}) \\ = & E([\sum_i^n a_i Y_i - \sum_i^n a_i \mu_i]^2) = E([\sum_i^n a_i (Y_i - \mu_i)]^2) \\ = & E(\sum_i^n \sum_j^m a_i (y_i - \mu_i) a_j (Y_j - \mu_j)) \\ = & E(\sum_i^n a_i^2 (Y_i - \mu_i)^2 + \underbrace{\sum_i^n \sum_j^m}_{i \neq j} a_i a_j (Y_i - \mu_i)(Y_j - \mu_j)) \\ = & \sum_i^n a_i^2 E((Y_i - \mu_i)^2) + \sum_i^n \sum_j^m a_i a_j E((Y_i - \mu_i)(Y_j - \mu_j)) \\ = & \sum_i^n a_i^2 Var()Y_i) + \sum_i^n \sum_j^m a_i a_j Cov(Y_i, Y_j) \\ = & \sum_i^n a_i^2 Var(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j Cov(Y_i, Y_j) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} Cov(U_{1,2}) = & E((U_1 - E(u_1)))(U_2 - E(U_2))) \\ = & E((\sum_i^n a_i Y - i - \sum_i^n a_i \mu_i)(\sum_j^m b_j X_j - \sum_j^m b_j \xi_j)) \\ = & E((\sum_i^n (Y_i - \mu_i) a_i)(\sum_j^m b_j (X_j - \xi_j))) \\ = & E(\sum_i^n \sum_j^m a_i b_j (Y_i - \mu_i)(X_j - \xi_j)) \\ = & \sum_i^n \sum_j^m a_i b_j E((Y_i - \mu_i)(x_j \xi_j)) \\ = & \sum_i^n \sum_j^m a_i b_j Cov(Y_i, X_j) \end{aligned}$$

□

5.25 Ej.

Sean Y_1, Y_2, Y_3 cariables aleatorias, donde $E(Y_1) = 1, E(Y_2) = 2, E(Y_3) = -1, Var(Y_1) = 1, Var(Y_2) = 3, Var(Y_3) = 5, Cov(Y_1, Y_2) = -0{,}4, Cov(Y_1, Y_3) = \frac{1}{2}$ y $Cov(Y_1, Y_2) = 2$. Encontrar $E(U)$ y $Var(U)$ donde $U = Y_1 - 2Y_2 + Y_3$.

Si $w = 3Y_1 + Y_2$, encontrar $Cov(U, W)$

Sol.

$$\begin{aligned} E(U) = & E(Y_1 - 2Y_2 + Y_3) = E(Y_1) - 2E(Y_2) + E(Y_3) \\ = & 1 - 2(2) + (-1) = -4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(U) &= Var(Y_1 - 2Y_2 + Y_3) \\
&= Var(Y_1) + 4Var(Y_2) + Var(Y_3) + 2[-2Cov(Y_1, Y_2) + Cov(Y_1, Y_3) - 2Cov(Y_2, Y_3)] \\
&= 1 + 4(3) + 5 + 2[-2(-0{,}4) + \tfrac{1}{2} - 2(2)] = 9{,}4
\end{aligned}
$$