

Méthodologie Traitement d'images : Reconstruction du Fond Diffus Cosmologique à partir des cartes Planck

Massonneau Warren, Mercier Wilfried

28 février 2019

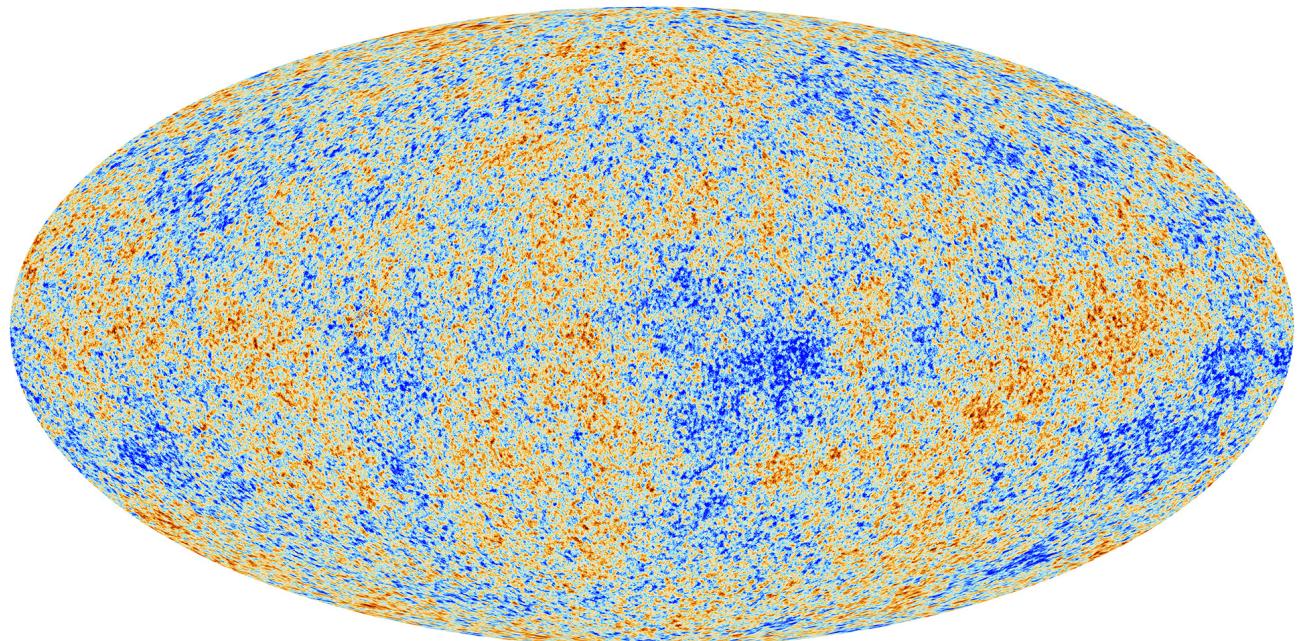


FIGURE 1 – Carte du Fond Diffus Cosmologique [Planck 2013]

1 Introduction

La mission Planck a été lancée en 2009 et a communiqué ses premiers résultats en 2013. Son principal objectif était de mesurer avec une plus grande précision le fond diffus cosmologique (CMB) dans le domaine spectral des micro-ondes (de l'ordre de 10²GHz) reflétant la structure de l'Univers primordial. Les données transmises par le satellite étaient donc fournies en plusieurs plages de fréquences (cartes HFI centrées à 100, 143, 217, 353, 545 et 857GHz). Ces fréquences ont été choisies entre autre pour pouvoir isoler les composantes supplémentaires qui viennent s'ajouter au CMB. En effet, les données brutes ne nous permettent malheureusement pas de voir ce fameux rayonnement fossile. Des sources supplémentaires comme les poussières dans la galaxies (qui émettent dans l'infrarouge lointain et donc dominent dans les cartes aux plus grandes fréquences) ou les sources SZ (diffusion Compton inverse des photons par le gaz chaud des amas de galaxies traversés).

Pour pouvoir obtenir et analyser une carte avec seulement du CMB, il faut donc avoir recours à des méthodes qui vont identifier le signal CMB dans les différentes cartes et éliminer le reste. C'est ce que nous avons entrepris durant cette méthodologie en utilisant une méthode de Combinaison Linéaire Interne (ILC) sur les cartes Planck HFI^a qui va se charger de trouver la meilleure combinaison linéaire entre les cartes de fréquence en minimisant la variance de notre carte.

En Section 2, nous décrivons les modifications apportées aux cartes avant leur traitement. En Sections 3 et 4, nous décrivons les deux méthodes d'ILC utilisées, puis nous comparons brièvement leurs résultats. Une description théorique de l'analyse du spectre de puissance effectué lors de ce projet ainsi que le spectre de puissance final sont donnés en Sections 5 et 6. Nous comparons notre spectre de puissance avec celui obtenu par Planck et les paramètres du meilleur fit obtenu avec le code *Classy* en Section 7. Enfin nous concluons brièvement sur le travail effectué pendant ce projet et les possibles ouvertures.

2 Traitement des cartes Planck

2.1 Uniformisation des unités

Les cartes Planck utilisées pour ce travail ne sont pas toutes dans la même unité du fait des deux calibrations différentes utilisées (cf. [7], Section 3.2). Les cartes dans l'intervalle [100 – 353]GHz ont été calibrées sur le dipôle du CMB et sont données en unité K_{CMB} (unité Kelvin normalisée par la contribution moyenne de la carte à 2.725K), tandis que les cartes à 545 et 857GHz ont été calibrées sur l'émission de certaines sources galactiques et planétaires et sont données en MJy.sr⁻¹.

La première étape à réaliser pour pouvoir travailler sur les cartes a été de les convertir toutes dans la même unité. On a choisi, pour faciliter l'analyse qui suit, de convertir les cartes aux deux fréquences les plus élevées en unité K_{CMB} ^b

2.2 Gestion du beam smearing et de la pixellisation

Les six cartes Planck HFI ont subit lors de leurs mesures un étalement des informations contenues dans des échelles en dessous d'une certaine taille à cause de la PSF (*Point Spread Function*) de l'instrument. Cependant celle-ci n'est pas la même à toutes les fréquences, et il est donc important de corriger de cet effet avant de pouvoir travailler sur les cartes. Si l'on note D_i la carte Planck à la fréquence i et ψ la PSF due à la résolution finie de l'instrument, alors on peut modéliser l'effet de cette dernière sur les cartes par une convolution $D_i * \psi$.

A cela il faut ajouter l'effet équivalent mais à des échelles encore plus faibles de la pixellisation de la carte qui va moyenner l'information contenue dans chaque pixel (cf. [8], Annexe F pour plus de détails). En notant P cet effet, les cartes Planck s'écrivent alors

$$M_i = D_i * \psi * P \quad (1)$$

La PSF de l'instrument peut être modélisée en première approximation par une gaussienne (cf. [8], Annexe B) de moyenne nulle dont la FWHM (largeur à mi-hauteur) ou de manière équivalente la variance va changer selon la fréquence. Les valeurs de la FWHM pour chaque fréquence sont fournies en Table 3 de [8].

Toutes les informations contenues dans des échelles inférieures à la FWHM étant lissées, les informations les plus pertinentes physiquement seront contenues dans les échelles supérieures à $FWHM_{\max} = \max(FWHM)$. Il faut donc corriger les autres cartes dont la FWHM est plus faible afin que

$$FWHM \rightarrow FWHM_{\max} \quad (2)$$

Toutes les PSF étant approximées par des gaussiennes comme dit plus haut, cela se traduit par

a. Nous avons utilisé à la fois les cartes de la mission complète (*fullmission*) et celles de mi-mission (*halmission 1-2*)

b. Il est recommandé dans [7] d'effectuer la conversion inverse car celle utilisée va donner plus de poids à la partie basse fréquence des filtres à 545 et 857GHz (cf. Fig. 14), ce qui peut amplifier des erreurs déjà présente.

$$FWHM_{\max}^2 = FWHM^2 + FWHM_{\text{corr}}^2 \quad (3)$$

où $FWHM_{\text{corr}}$ est la correction à apporter afin que Eq.2 soit respectée. La FWHM la plus élevée ($9.66'$) étant pour la carte à 100GHz, il faut donc convoluer les autres cartes par une gaussienne $\mathcal{G}(0, FWHM_{\text{corr}}^2 = (9.66')^2 - FWHM^2)$.

3 Reconstruction du Fond Diffus Cosmologique par ILC

3.1 Méthode pour l'ILC

La méthode pour une ILC standard nous dit que toutes les cartes disponibles (il y en a $N_{\text{obs}} = 6$, toutes indexées par i dans Eq. 4) peuvent être écrites pour les p pixels des cartes comme

$$x_i(p) = a_i s(p) + n_i(p) \quad (4)$$

que l'on peut ré-écrire en

$$\mathbf{x}(p) = \mathbf{a}s(p) + \mathbf{n}(p) \quad (5)$$

où $\mathbf{x}(p)$ et $\mathbf{n}(p)$ sont les vecteurs de l'émission totale et du bruit respectivement, pour toutes les N_{obs} fréquences. La matrice \mathbf{a} correspond à une matrice de mélange qui fait intervenir les paramètres de dépendance spectrale pour chaque composante astrophysique (CMB, SZ (Sunyaev-Zel'dovich)) ainsi que la réponse spectrale de la i^{eme} fréquence. Enfin $s(p)$ est la carte qui va nous intéresser, c'est-à-dire la composante du CMB.

L'objectif est donc de trouver un estimateur \hat{s}_{ILC} (équivalent à une nouvelle carte) dont la variance sera minimisée. On l'obtient en faisant une combinaison linéaire entre les poids \mathbf{w}^t et notre carte d'émission totale $\mathbf{x}(p)$ afin de ne garder que la composante du CMB [1]. Les poids \mathbf{w}^t sont calculables analytiquement [3] et on peut obtenir la nouvelle carte \hat{s}_{ILC} avec

$$\hat{s}_{\text{ILC}} = \frac{\mathbf{a}^t \mathcal{C}_s^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{a}^t \mathcal{C}_s^{-1} \mathbf{a}} \quad (6)$$

où \mathcal{C}_s est la matrice de covariance de toutes les cartes.

3.2 ILC à une composante

Pour une seule composante, qui est le CMB, on prend $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$. On obtient notre premier CMB, tiré des 6 cartes de fréquences.

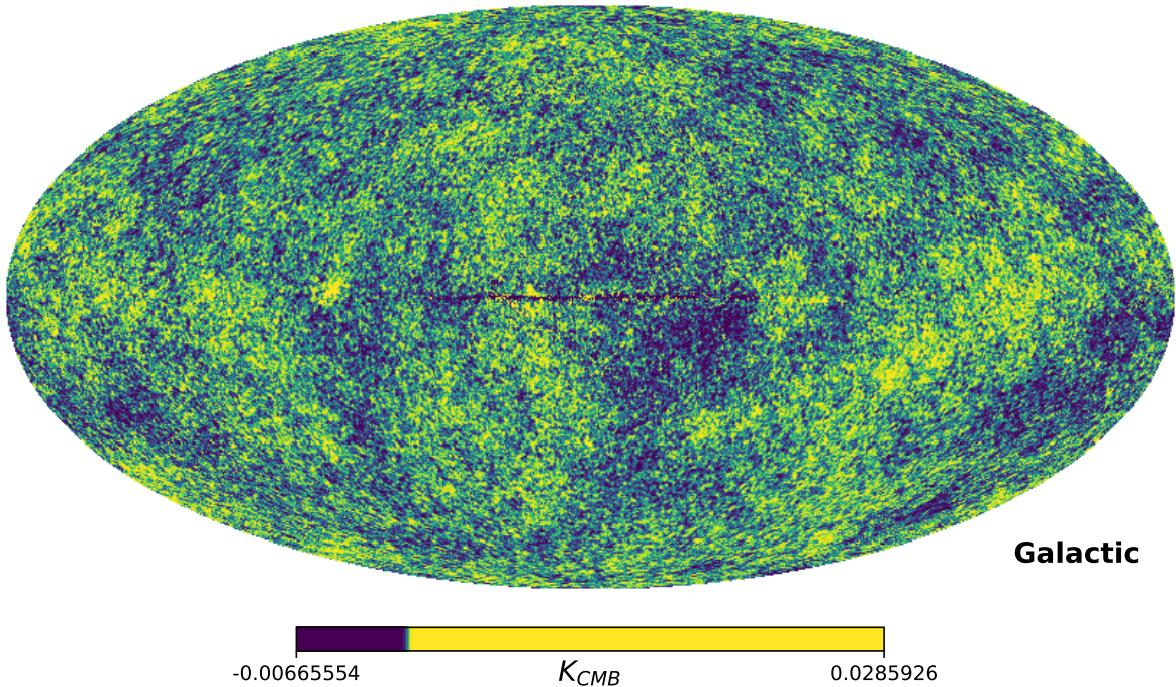


FIGURE 2 – CMB obtenu avec une ILC à une composante

On remarque que la carte possède une bande fine au niveau du plan galactique. Ceci est un résidu que l'ILC n'a pas pu enlever, dû à la forte présence de la galaxie aux hautes fréquences. De meilleurs résultats arriveront dans la section 4.1.

Fréquence (en GHz)	100	143	217	353	545	857
Poids	-0.79	1.09	0.93	-0.24	$5.58 \cdot 10^{-3}$	$-3.62 \cdot 10^{-6}$

TABLE 1 – Table des poids obtenus pour une ILC à une composante.

Pour avoir une idée de si notre carte correspond bien à un signal CMB, on va comparer nos poids (donnés dans la Table 1) avec ceux fournis par PLANCK Collaboration, mais comme ces derniers n'étaient pas disponibles, on les interprète de la façon suivante : le plan galactique est dominé par la poussière, présente surtout aux hautes fréquences (sur les cartes 545 et 857 GHz, et un peu à 353GHz). Elles s'ajoutent à la composante de SZ, qui est principalement présente à 143 et 353 GHz. Le CMB, qui est là sur toutes les cartes de fréquence, est donc peu visible sur les cartes à haute fréquence. On doit donc avoir des poids qui doivent diminuer l'impact de ces cartes.

En comparant avec la Table 1, on voit bien que les poids pour les basses fréquences ont (en valeur absolue) une valeur proche de l'unité alors que les hautes fréquences disparaissent avec des poids proche de 0.

3.3 ILC à deux composantes

Faire une ILC à une seule composante est insuffisant au sens que rien n'empêche les autres composantes comme le sZ de disparaître de la carte finale. De plus, il est possible d'éliminer une autre composante (on prendra le SZ) analytiquement en utilisant un nouvel estimateur et donc de nouveaux poids plus adaptés (Eq. 8). En effet, en décomposant de la même manière notre signal

$$\mathbf{x}(p) = \mathbf{a}s(p) + \mathbf{b}y(p) + \mathbf{n}(p) \quad (7)$$

et en forçant la composante thermique SZ ($y(p)$) à être nulle (ce qui revient à $\mathbf{w}^t \mathbf{b} = 0$), on obtient les poids suivants (voir [9])

$$\mathbf{w}^t = \frac{(\mathbf{b}^t \mathcal{C}_{s,r}^{-1} \mathbf{b}) \mathbf{a}^t \mathcal{C}_{s,r}^{-1} - (\mathbf{a}^t \mathcal{C}_{s,r}^{-1} \mathbf{b}) \mathbf{b}^t \mathcal{C}_{s,r}^{-1}}{(\mathbf{a}^t \mathcal{C}_{s,r}^{-1} \mathbf{a})(\mathbf{b}^t \mathcal{C}_{s,r}^{-1} \mathbf{b}) - (\mathbf{a}^t \mathcal{C}_{s,r}^{-1} \mathbf{b})^2} \quad (8)$$

A nouveau, on obtient la carte, cette fois-ci avec une contrainte sur le SZ.

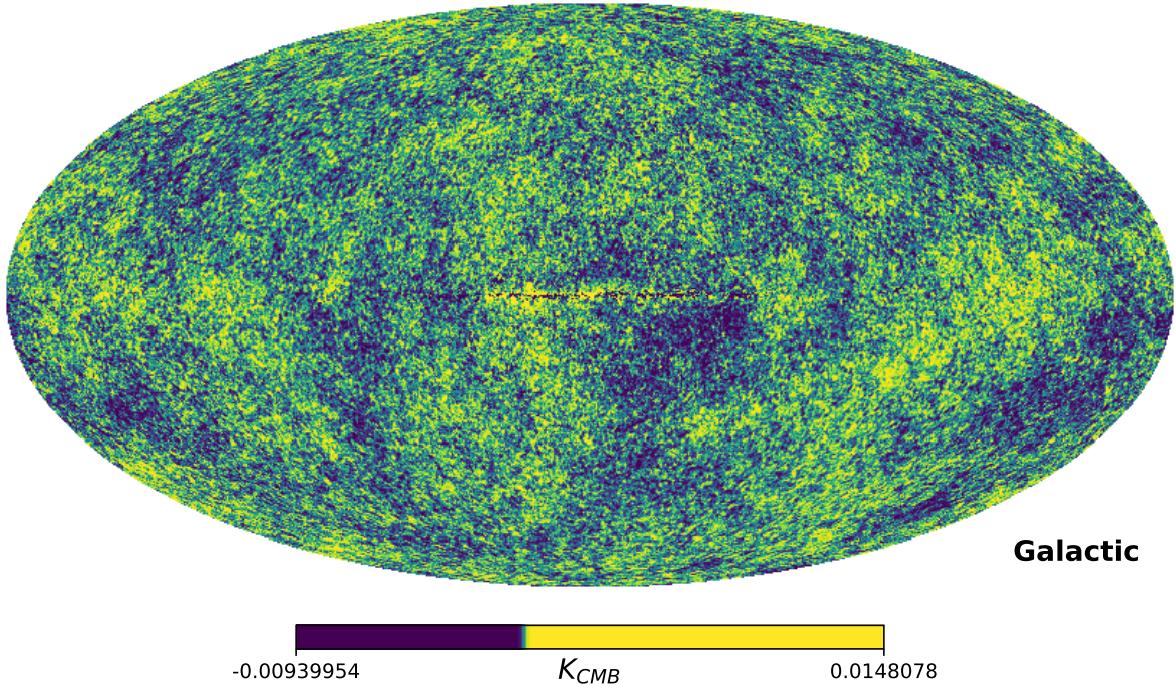


FIGURE 3 – CMB avec ILC à deux composantes (donc SZ contraint).

Fréquence (en GHz)	100	143	217	353	545	857
Poids	-0.98	1.03	1.17	-0.22	$4.59 \cdot 10^{-4}$	$2.52 \cdot 10^{-5}$

TABLE 2 – Table des poids obtenus pour une ILC à une composante.

On peut remarquer que les poids donnés dans Table 2 sont similaires à ceux de Table 1, il ne nous servent donc pas pour comparer les deux méthodes (ILC non contraint et ILC contraint) et savoir laquelle est la meilleure.

En effet, à première vue, hormis la bande galactique plus atténuee dans l'ILC contraint, on remarque difficilement une différence entre les figures 2 et 3.

Pour savoir si l'ILC à deux composantes nous retourne un meilleure résultat, on cherche des endroits où le signal SZ est présent dans la première méthode mais pas dans la seconde : les amas de galaxies. A l'aide des élèves du groupe P3, qui travaillent sur des patchs de ciel n'ayant que du signal SZ, ils nous ont indiqué des coordonnées de Coma et Abell 2162. Avec cela, lorsque l'on effectue le résidu des cartes (différence entre les deux sur la zone d'intérêt), il devrait y avoir apparition desdits amas si la méthode contrainte a correctement fonctionnée. C'est bien ce que l'on observe sur la Figure 4.

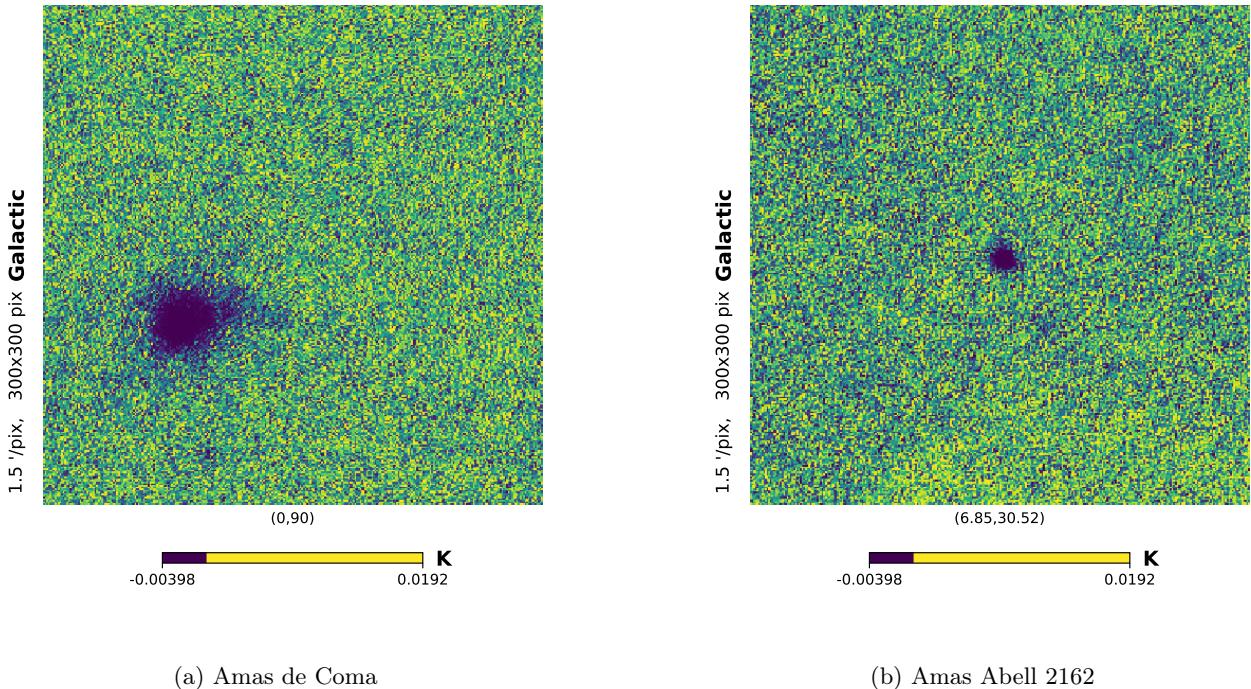


FIGURE 4 – Apparition de deux amas de galaxies en effectuant la différence des deux méthodes d'ILC.

On peut donc en conclure que les deux méthodes d'ILC se sont bien déroulées, mais cela ne nous aide en rien à conclure sur laquelle des deux méthodes est la plus juste. Pour pouvoir déterminer si le signal de notre carte est bien du CMB, il nous faut regarder le spectre de puissance de notre carte. Ceci est effectué en Section 5.

Par la suite, nous nous sommes concentrés sur la méthode à une composante par manque de temps.

4 Amélioration de l'ILC

4.1 Cartes masquées

Afin de ne pas trop prendre en compte le plan galactique dominé à hautes fréquences par les poussières et dont on a vu qu'il n'était pas complètement éliminé par l'ILC, on a décidé de travailler avec des masques.

L'objectif va être alors de cacher une partie du ciel de chaque carte (préférentiellement la bande galactique) en posant arbitrairement une température maximale au-delà de laquelle on décide de cacher les pixels. On ajuste cette valeur maximale par rapport à la température typique du plan galactique (celui-ci étant la zone la plus chaude de la carte à 857GHz et on la fait varier suivant la proportion du plan galactique que l'on souhaite cacher).

Le masque ainsi calculé à 857GHz restera constant d'une carte à l'autre, de telle sorte que lors des calculs de l'ILC, il n'y ait pas de problèmes.

On a donc travaillé sur l'ILC à une composante en cachant entre 10% et 45% du ciel, à intervalle de 5% (Fig. 6). Les résultats nous montrent qu'il est préférable, comparé au CMB théorique (cf. Fig. 8), d'utiliser des masques entre 15 et 20%.

Pour la suite des calculs, on choisit donc de toujours utiliser un masque cachant environ 20% du plan galactique et dont un exemple est donné en Fig. 5.

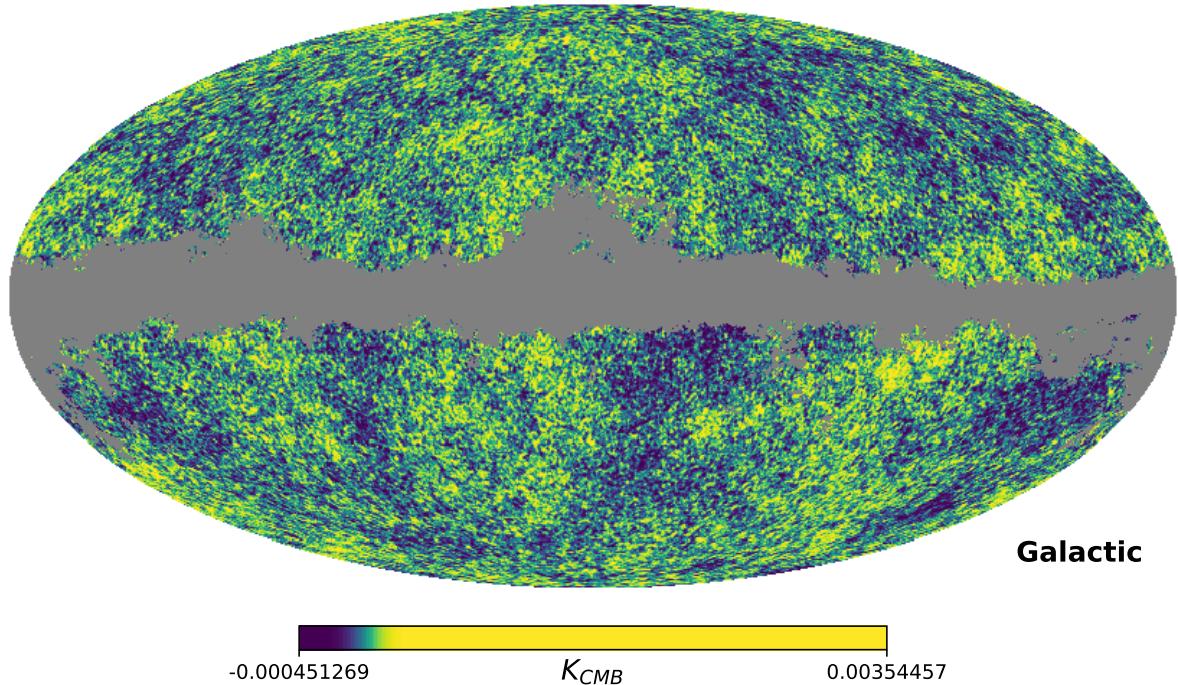


FIGURE 5 – Exemple de masque qui cache environ 20% du ciel. L'ILC à une composante a été effectuée sur les zones non-masquées pour réduire l'impact des poussières galactiques dans le spectre de puissance final.

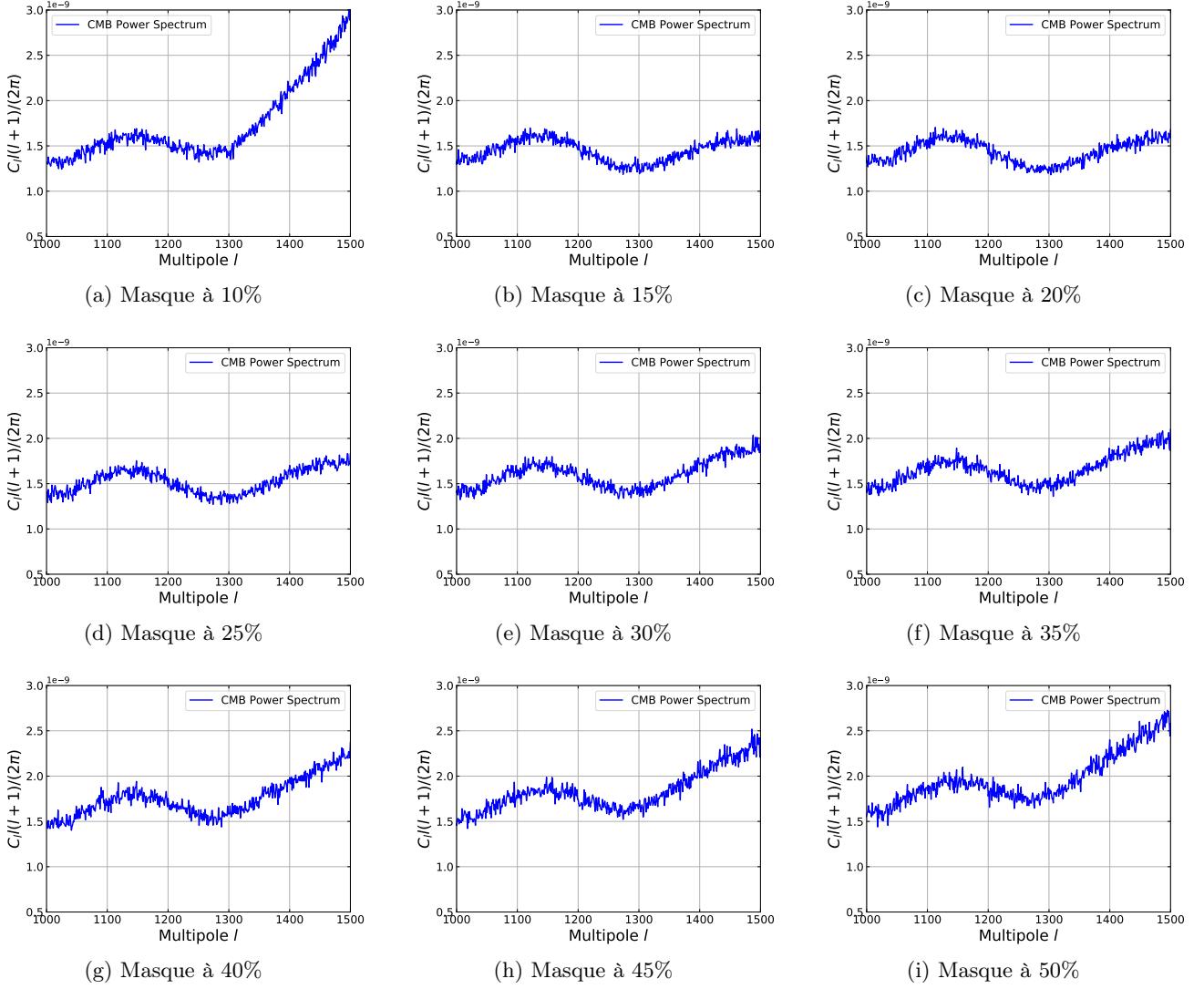


FIGURE 6 – Zoom sur les 4^{ème} et 5^{ème} pics du spectre de puissance de l’ILC non-contraint (unité K_{CMB}^2). On s’attend à ce que le spectre décroît à de telles valeurs de moment multipolaire. Les meilleurs résultats sont les graphes (b) et (c).

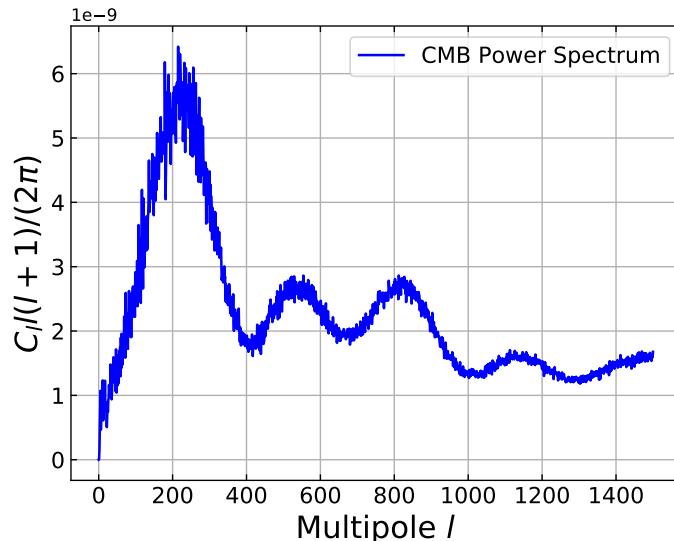


FIGURE 7 – Spectre de puissance (unité K_{CMB}^2) obtenu après ILC à une composante avec un masque de 20%.

5 Construction du spectre de puissance

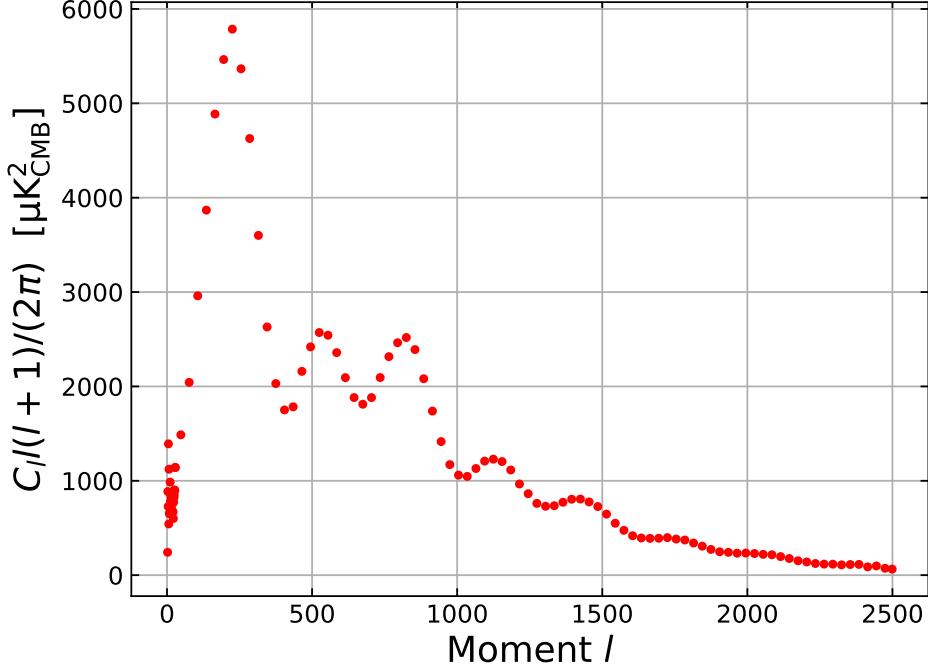


FIGURE 8 – Spectre de puissance binné obtenu par Planck Collaboration

5.1 Estimateur du spectre de puissance

Une manière de vérifier que la carte CMB obtenue par ILC est correcte est de comparer le spectre de puissance obtenu avec celui de Planck. En effet, si l'on suppose les fluctuations gaussiennes, on peut chercher à caractériser la variance de notre CMB (la moyenne étant nulle). Ceci peut être fait en calculant la fonction de corrélation à 2 points (espace réel) ou le spectre de puissance (espace des harmoniques sphériques) qui caractérise la variance des anisotropies du CMB aux différentes échelles.

En partant de la fonction de corrélation à deux points (aussi appelée auto-corrélation) définie comme

$$\xi_{cc}(\Delta\theta) = \langle T(\mathbf{n}_1)T((\mathbf{n}_2)\rangle \quad (9)$$

qui décrit la corrélation entre deux points $\mathbf{n}_1 = (\theta_1, \phi_1)$, $\mathbf{n}_2 = (\theta_2, \phi_2)$ sur le ciel séparés d'un angle $\Delta\theta$, on peut obtenir un spectre de puissance $P(\Delta\theta)$ dont on peut montrer qu'il correspond à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points, $\xi_{cc} \xrightarrow{\text{FT}} P$.

De la même manière que l'on peut décomposer une fonction 1D sur un espace de Fourier, on peut décomposer (voir [6] et [1]) les variations de températures sur le ciel (i.e. 2D) sur l'espace des harmoniques sphériques Y_l^m comme

$$T(\mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} Y_l^m(\mathbf{n}) \quad (10)$$

où les $a_{l,m} \in \mathbb{C}$ sont des coefficients^c et $Y_l^m = e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$, avec P_l^m les fonctions de Legendre.

On peut remarquer que Eq.9 peut se réécrire d'après Eq.10 comme

$$\xi_{cc}(\Delta\theta) = \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} \langle a_{l_1, m_1}^* a_{l_2, m_2} \rangle Y_{l_1}^{m_1}(\mathbf{n}_1) Y_{l_2}^{m_2}(\mathbf{n}_2) \quad (11)$$

On montre alors en décomposant les $a_{l,m}$ sur la sphère (transformé de Fourier sur la sphère 2D) que le spectre de Puissance $P(l)$ s'écrit

$$P(l) = \langle a_{l_1, m_1}^* a_{l_2, m_2} \rangle \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2} = \langle |a_{l,m}|^2 \rangle \quad (12)$$

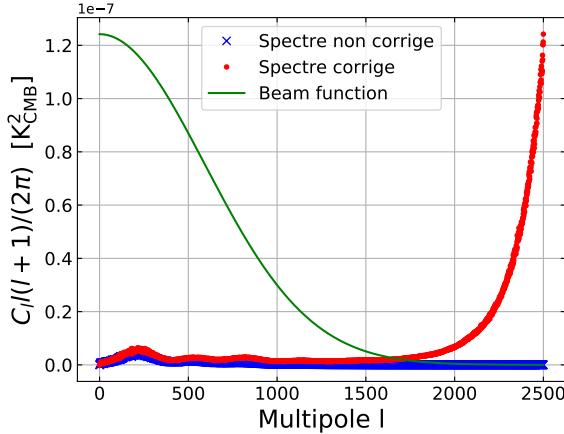
c. En inversant Eq.10 on trouve $a_{l,m} = \int_{4\pi} T(\mathbf{n}) Y_l^{m*}(\mathbf{n}) d\mathbf{n}$ (cf. [2])

où les moyennes dans Eq. 9 et Eq. 12 sont sur plusieurs réalisations du CMB (i.e. plusieurs Univers).

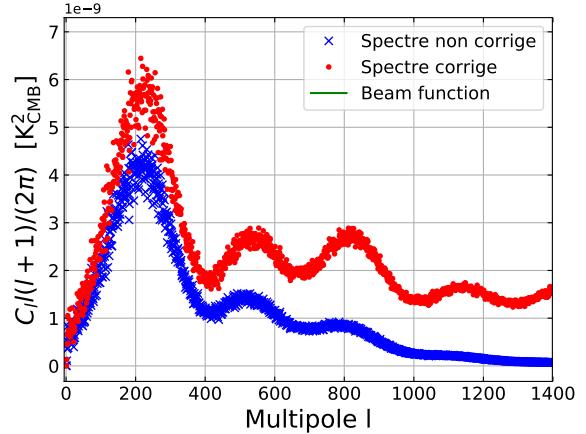
Les fluctuations étant supposées gaussiennes, cela signifie qu'en moyenne les $a_{l,m}$ sont censées être indépendantes de m . De fait, comme $2l+1$ $a_{l,m}$ sont disponibles à l fixé, on peut construire un estimateur de $P(l)$, noté C_l , en moyennant les $a_{l,m}$ de notre carte pour chaque valeur de l , i.e.

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{l,m}|^2 = \langle |a_{l,m}|^2 \rangle_m \quad (13)$$

où on est censé avoir $C_l \stackrel{l \gg 1}{\approx} P(l)$.



(a) Comparaison spectre avant et après correction.



(b) Zoom sur les pics acoustiques des deux spectres.

FIGURE 9 – Les spectres sans et avec les corrections listées en Sec. 2.2 sont affichés sur les figures (a) et (b). Le spectre non corrigé possède bien les trois premiers pics mais les amplitudes sont trop faibles. Celui corrigé a bien les trois premiers pics acoustiques mais augmente exponentiellement aux grande échelles à cause de la *beam function*. L'amplitude de cette dernière dans le graphe (a) a été fixée arbitrairement pour des questions de lisibilité.

5.2 Spectre de puissance : effet du masque

On cherche à déterminer les valeurs C_l données par Eq. 13. Cependant, cette formule n'est pas valable directement car notre carte obtenue par ILC est affectée par plusieurs effets, parmi lesquels le bruit, la pixellisation, la PSF et les masques utilisés pour cacher le plan galactique dominé par la poussière (cf. Section 4.1).

On notera ainsi \tilde{C}_l et $\tilde{a}_{l,m}$ les coefficients affectés des effets cités ci-dessus et C_l , $a_{l,m}$ ceux du CMB que l'on cherche à déterminer.

On modélise alors notre carte finale selon la prescription donnée en Eq. 1 à laquelle il faut ajouter l'effet du masque sur les cartes. En le notant W , la température sur la carte va être modifiée comme

$$T(\mathbf{n}) \rightarrow T(\mathbf{n})W(\mathbf{n}) \quad (14)$$

On peut alors réécrire les coefficients $\tilde{a}_{l,m}$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{l,m} &= \int_{4\pi} T(\mathbf{n})W(\mathbf{n})Y_l^{m*}(\mathbf{n})d\mathbf{n} \\ &= \sum_{l_1, m_1} \alpha(l, m, l_1, m_1) a_{l_1, m_1} \end{aligned} \quad (15)$$

où $\alpha(l, m, l_1, m_1) = \int_{4\pi} W(\mathbf{n})Y_{l_1}^{m_1}(\mathbf{n})Y_l^{m*}(\mathbf{n})d\mathbf{n}$ sont des coefficients de mélange. Le masque a donc pour effet de corréler entre eux les $a_{l,m}$, ce qui implique que la forme en Eq. 13 n'est plus valide.

Pour simplifier nous considérerons que le masque peut être simplement modélisé par un facteur constant $W(\mathbf{n}) = \sqrt{f}$ correspondant à la fraction du ciel masqué, tel que les $a_{l,m}$ restent décorrélés. Eq. 13 peut ainsi se réécrire comme

$$T(\mathbf{n}) \rightarrow \sqrt{f}T(\mathbf{n}) \quad (16)$$

5.3 Prise en compte du bruit

Hormis les effets du masque (Section 5.2), de la pixellisation et de la PSF (Section 2.2), un dernier effet sur les \tilde{C}_l provient du bruit $N(\mathbf{n})$. Celui-ci est présent dès la mesure (bruit statistique et bruit instrumental) et est donc soumis aux mêmes effets de PSF et du masque. On a donc

$$N(\mathbf{n}) \rightarrow \sqrt{f} N(\mathbf{n}) * \psi \quad (17)$$

5.4 Autocorrélation (*auto-spectrum*)

A présent que tous les effets sont pris en compte, on peut regarder comment ceux-ci se répercutent dans les coefficients $a_{l,m}$. En passant dans l'espace des harmoniques sphériques (SH), on a

$$T \xrightarrow{\text{SH}} a_{l,m} \quad N \xrightarrow{\text{SH}} a_{l,m}^N \quad M \xrightarrow{\text{SH}} \sqrt{f} \quad \psi \xrightarrow{\text{SH}} B_l \quad P \xrightarrow{\text{SH}} P_W \quad (18)$$

où B_l est l'équivalent de la PSF dans l'espace des harmoniques (*beam function*) et P_W de même pour la pixellisation (*pixel window function*). Un exemple de la *beam function* utilisée (amplitude en unité arbitraire) est donné sur la Fig. 9a. Comme la PSF est modélisée par une Gaussienne, par transformation de Fourier on retrouve une Gaussienne dans l'espace des harmoniques sphériques.

Les convolutions se transformant comme des produits on obtient la relation suivante entre les $\tilde{a}_{l,m}$ mesurés et les $a_{l,m}$ du CMB

$$\tilde{a}_{l,m} = \sqrt{f} B_l (a_{l,m} P_W + a_{l,m}^N) \quad (19)$$

En injectant cette équation dans Eq. 13, on trouve

$$\tilde{C}_l = B_l^2 f \left(P_W^2 C_l + 2P_W \langle a_{l,m}^N a_{l,m}^* \rangle_m + C_l^N \right) \quad (20)$$

où $C_l^N = \langle |a_{l,m}^N|^2 \rangle_m$. Le CMB et le bruit étant en principe décorrélés, le terme de cross-corrélation $\langle a_{l,m}^N a_{l,m}^* \rangle_m$ est nul. Connaissant les coefficients C_l^N du bruit on est en mesure de reconstruire les coefficients du CMB

$$C_l = \frac{1}{P_W^2} \left(\frac{\tilde{C}_l}{B_l^2 f} - C_l^N \right) \quad (21)$$

5.5 Coefficients liés au bruit

Pour pouvoir reconstituer le spectre du CMB à partir de Eq. 21 il nous faut déterminer les coefficients correspondant au bruit C_l^N . Pour cela on utilise les jeux de cartes *halfmission-1* et *halfmission-2* (cf. Sec 1).

On modélise le bruit par un bruit blanc $b_k \sim W(0, \sigma)$, c'est-à-dire dont les propriétés statistiques sont les suivantes

$$\mathbb{E}(b_k) = 0 \quad \text{Cov}(b_j, b_k) = \sigma^2 \delta_{jk} \quad (22)$$

Si l'on effectue la différence b_{diff} de deux réalisations $b_1, b_2 \sim W(0, \sigma)$ alors on a

$$\mathbb{E}(b_{\text{diff}}) = 0 \quad (23)$$

$$\text{Var}(b_{\text{diff}}) = \mathbb{E}((b_1 - b_2)^2) = 2\sigma^2 \quad (24)$$

$$\mathbb{E}(b_{\text{diff},1}, b_{\text{diff},2}) = \mathbb{E}((b_1 - b_2)(b_3 - b_4)) = 0 \quad (25)$$

d'où on en déduit que $(b_1 - b_2)/2 \sim W(0, \sigma)$. Cette propriété va nous être utile pour calculer les C_l^N . En effet les deux cartes *halfmission* M_1^h, M_2^h s'écrivent comme la somme des composantes CMB, sZ, etc. notée D (convoluée par la pixellisation et la PSF) et du bruit b convolué par la PSF. Si l'on effectue la moitié de la différence des deux, on obtient alors une carte contenant une nouvelle réalisation du bruit notée b (à une convolution près)

$$\frac{M_1^h - M_2^h}{2} = \frac{(b_1 - b_2)}{2} * \psi = b * \psi \quad (26)$$

Si l'on note m_l les coefficients C_l de notre nouvelle carte $(M_1^h - M_2^h)/2$, alors on peut construire un estimateur des C_l^N comme

$$\hat{C}_l^N = \frac{m_l}{B_l^2} \quad (27)$$

et on peut reconstruire le spectre de puissance du CMB en faisant le changement $C_l^N \rightarrow \hat{C}_l^N$ dans Eq. 21.

On peut se demander si l'ensemble des corrections sus-citées apportent réellement un gain dans le spectre de puissance final. Pour y répondre on peut évidemment comparer le spectre de puissance obtenu avec l'ensemble des corrections avec celui sans corrections (cf. Fig. 9).

En principe, on s'attend à ce que le spectre du CMB seul décroît aux grandes valeurs de l assez rapidement. Au contraire le spectre du bruit doit rester constant avec l en conséquence de l'hypothèse de bruit blanc. Etant donné que dans Eq. 13 et Eq. 27, les C_l du CMB et du bruit sont divisés par la *beam function*, et que celle-ci est modélisée par une gaussienne ($B_l \xrightarrow{l \gg 1} 0$), on s'attend à ce que le bruit explose aux trop grands l .

Dans la pratique c'est ce que l'on observe, et malgré les corrections apportées vis-à-vis du bruit, on a toujours nos C_l qui divergent à grand l , signe que nos méthodes de calcul, y compris le cross-spectrum (cf. Section 6), peuvent encore être améliorées.

6 Amélioration du spectre de puissance : *cross-spectrum*

La procédure précédente pour corriger des effets du bruit est un peu laborieuse et on est en droit de se demander s'il n'y a pas plus simple. C'est ce qui nous amène à utiliser dans la suite le *cross-spectrum* plutôt que la correction par autocorrélation.

Pour le construire, on repart de Eq. 13 mais on définit notre estimateur des C_l différemment

$$C_l^{\text{CP}} = \sum_m \left\langle a_{l,m}^{h_1} a_{l,m}^{h_2 *} \right\rangle \quad (28)$$

où $a_{l,m}^{h_i}$ sont les coefficients de la carte *halfmission* numéro i . Sans noter les effets de masque, pixellisation et PSF qu'il faudra évidemment prendre en compte à la fin, si on écrit les $a_{l,m}$ comme somme de ceux du CMB avec ceux du bruit (notés $a_{l,m}^{N_i}$) alors on a

$$\begin{aligned} C_l^{\text{CP}} &= \sum_m \left(\left\langle a_{l,m} a_{l,m}^* \right\rangle + \left\langle a_{l,m} a_{l,m}^{N_2 *} \right\rangle + \left\langle a_{l,m}^{N_1} a_{l,m}^* \right\rangle + \left\langle a_{l,m}^{N_1} a_{l,m}^{N_2 *} \right\rangle \right) \\ &= \sum_m (\left\langle a_{l,m} a_{l,m}^* \right\rangle) \end{aligned} \quad (29)$$

Comme on considère du bruit blanc, les deux réalisations sont donc non corrélées. De même, le CMB est aussi décorrélé du bruit, et seul le premier terme survit. On se retrouve donc avec un estimateur qui n'est plus affecté par le bruit.

Le spectre de puissance obtenu par *cross-spectrum* avec un masque à 20% est montré en Fig. 7. On retrouve les mêmes caractéristiques que pour le spectre par autocorrélation en Fig. 9b, à savoir les 3 premiers pics acoustiques et le tout début de la zone d'amortissement du spectre. L'amortissement est cependant un peu meilleur, bien que toujours trop élevé par rapport au spectre du CMB. Globalement, les spectres par *autospectrum* ou *cross-spectrum* donnent des résultats identiques.

7 Comparaison au spectre théorique

7.1 Principe général

Notre but, à présent que l'on a un spectre ressemblant à celui obtenu par Planck (représenté en Fig. 8), est de trouver le meilleur fit théorique représentant le mieux notre spectre de puissance afin de pouvoir en déduire un certains nombre de paramètres cosmologiques.

Pour ce faire nous avons utilisé un portage du code de type Boltzmann *CLASS* en Python nommé *Classy* (cf. [4] et [5]). Celui-ci permet de tracer des spectres de puissance du CMB à partir d'un jeu de paramètres cosmologiques (et inflationnaires) parmi lesquels nous faisons varier

- A , un paramètre d'amplitude
- Ω_b , le paramètre de densité des baryons
- Ω_{CDM} , le paramètre de densité de matière noire

Le spectre théorique peut donc être modélisé comme

$$g(l; A, \Omega_b, \Omega_{CDM}) = Af(l; \Omega_b, \Omega_{CDM}) \quad (30)$$

avec f une fonction quelconque indépendante du paramètre d'amplitude et g le spectre théorique final.

7.2 Méthode de détermination de A

La méthode la plus simple à mettre en place pour déterminer les paramètres cosmologiques est de fixer en premier lieu les valeurs de densité de baryons aux valeurs obtenues par Planck, $(\Omega_b h^2, \Omega_{CDM} h^2) = (0.022, 0.119)$ puis de chercher le paramètre d'amplitude qui nous donne un spectre théorique le plus proche possible.

Pour des questions de temps, nous n'avons pas pu mettre en place de procédure de minimisation fonctionnelle. Nous nous sommes donc contenté, en première approximation, de prendre le maximum de notre spectre et de faire varier la valeur de l'amplitude jusqu'à ce que le maximum du spectre théorique soit suffisamment proche du notre.

Après avoir binné (moyenne par bin de 10 points) notre spectre, de telle sorte à enlever le "bruit", visible sur Fig. 7 et cherché la meilleure valeur du paramètre d'amplitude, on obtient le spectre final ainsi qu'une valeur de $A = 1.70 \cdot 10^{-8} K_{CMB}^2$. Le résultat est présenté sur la Fig. 10.

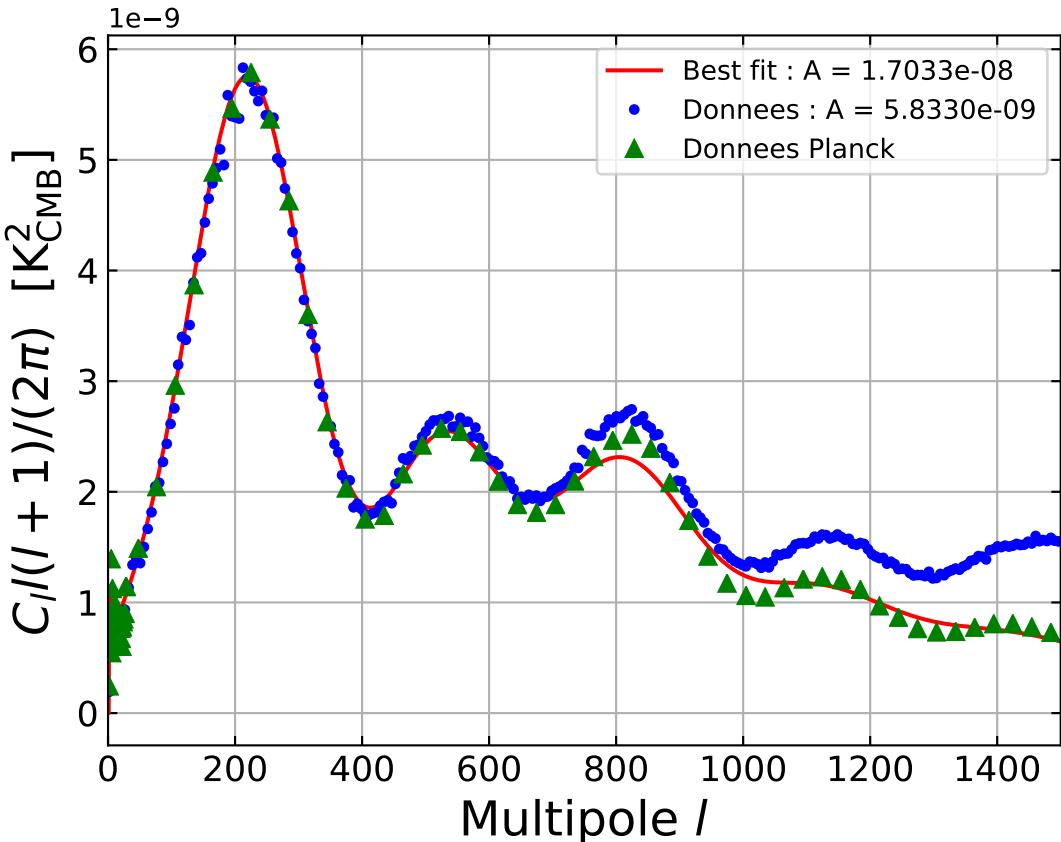


FIGURE 10 – Meilleur fit pour la variable A avec les autres paramètres fixés aux valeurs de Planck. Les données fournies par Planck (Fig 8) sont aussi tracées pour comparer avec le fit. La valeur de A pour les données est différente de l'amplitude du fit et correspond au maximum du premier pic acoustique.

On peut clairement voir que la courbe rouge, qui représente donc la courbe théorique ayant le même maximum que la courbe obtenue après l'ILC (bleue), suit bien la courbe verte, qui est celle obtenue par Planck. Il est plausible que les paramètres cosmologiques de notre spectre de puissance seraient différents de Planck si l'on effectuait des calculs plus poussés, comme par exemple avec des méthodes de minimisation. Néanmoins, si l'on se concentre sur les trois premiers pics acoustiques (jusqu'à $l \sim 1000$) on peut tout de même s'attendre à obtenir des valeurs assez proches. Il reste évidemment encore un peu de travail pour connaître le modèle cosmologique auquel notre courbe de puissance correspondrait.

7.3 Pistes à poursuivre

Plusieurs pistes sont ensuite à envisager. On peut tout d'abord vérifier que la valeur obtenue avec la méthode décrite dans la sous-section précédente correspond bien à la meilleure possible. Pour cela, on peut faire un test de moindre carrés

$$\chi^2(A, \Omega_b, \Omega_{\text{CDM}}) = \sum_l \left(\frac{y_i - g(l; \Omega_b, \Omega_{\text{CDM}})}{\sigma_n} \right)^2 \quad (31)$$

où \mathbf{y} est notre spectre de puissance et \mathbf{g} le spectre théorique.

En théorie, avec la décomposition faite en Eq 30 on ne devrait avoir que Ω_b , Ω_{CDM} comme paramètres libres et le paramètre d'amplitude A devrait être fixé par ces deux valeurs. Par exemple, à Ω_b , Ω_{CDM} fixés, le meilleur paramètre A sera celui qui minimise χ^2

$$\frac{d\chi^2}{dA} = -2 \sum_l \frac{f(l)}{\sigma_n} \left(\frac{y_i - A f(l)}{\sigma_n} \right) = 0 \quad (32)$$

Ce qui devrait poser une contrainte sur A . Il faut cependant faire attention aux amplitudes car bien que l'on ait fixé la valeur de A , les paramètres restants peuvent changer en amplitude et en largeur la taille de nos pics. On devrait donc sous-évaluer A pour prendre en compte ces problèmes.

8 Conclusion

Nous avons utilisé dans ce projet une méthode de séparation des composantes (ILC) du fond diffus cosmologique, une sans contrainte et l'autre en contraignant le signal SZ. Nous avons appliqué plusieurs masques afin d'améliorer notre carte de CMB et nous en avons conclu que celui à 20% du ciel donne le meilleur résultat. Dans le but de s'assurer que nous retrouvons bien du CMB dans notre carte, nous avons construit son spectre de puissance. Deux méthodes ont été utilisées, l'une par autocorrélation et l'autre par *cross-spectrum*. Les deux donnent les caractéristiques typiques du spectre de puissance du CMB, comme par exemple les trois premiers pics acoustiques avec la bonne amplitude, jusqu'à un moment multipolaire $l \approx 1500$. Enfin, pour comparer le spectre obtenu après ILC à celui obtenu par le consortium Planck Collaboration, nous avons cherché à tracer un spectre théorique représentant au mieux nos données. Nous trouvons que notre spectre est cohérent avec une cosmogonie Λ CDM de courbure nulle et avec $(\Omega_b h^2, \Omega_{\text{CDM}} h^2) = (0.022, 0.119)$. Cependant, une méthode plus avancée que l'ILC utilisée dans ce travail est nécessaire pour obtenir un spectre à de plus grands moments multipolaires (petites échelles angulaires).

Références

- [1] C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Preliminary Maps and Basic Results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 148 :1–27, Sep 2003.
- [2] E. Hivon and S. Galli. Cmb angular power spectra and their likelihoods :in theory and in (planck) practice. <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~cosmo/EC2017/Presentations/Hivon-1.pdf>. Accessed : 2019-02-22.
- [3] G. Hurier, J. F. Macías-Pérez, and S. Hildebrandt. MILCA, a modified internal linear combination algorithm to extract astrophysical emissions from multifrequency sky maps. , 558 :A118, Oct 2013.
- [4] Lesgourg. CLASS code webpage. <http://class-code.net/>.
- [5] Lesgourg. Classy GitHub webpage. https://github.com/lesgourg/class_public/wiki/Python-wrapper.
- [6] Cole Miller. Astr 422, cosmology lecture 21. <https://www.astro.umd.edu/~miller/teaching/astr422/lecture21.pdf>. Accessed : 2019-02-22.
- [7] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, et al. Planck 2013 results. IX. HFI spectral response. , 571 :A9, Nov 2014.
- [8] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, et al. Planck 2013 results. VII. HFI time response and beams. , 571 :A7, Nov 2014.
- [9] Mathieu Remazeilles, Jacques Delabrouille, and Jean-François Cardoso. CMB and SZ effect separation with constrained Internal Linear Combinations. , 410 :2481–2487, Feb 2011.