# 线性代数的几何解释摘要

Ricky Lee

Feb 4th, 2018

## 目录



## 1 引论

本系列文章以「3blue1brown」系列视频为基础整理出的 note，适于看视频前后对照理解。3blue1brown 是一个视频账号，主要利用几何化视频直观、简介地介绍数学的一些理论。目前已出包括线性代数的几何理解，微积分理解，机器学习，神经网络等。

原主页为 http://www.3blue1brown.com，看视频需要科学上网。

中国官方主页为 https://space.bilibili.com/88461692#/

本文依据「线性代数」系列视频整理而成，对比国内大部分的线性代数教学，3blue1brown 系列提供了别开生面的几何解释，以点乘、叉乘公式理解为首，延伸至换底公式、特征根等。笔者国内教材阅读邱维声老师的《高等代数》，再看此视频，仍大有所获。

# 2 向量、矩阵、行列式

## 2.1 向量

- 物理：v($\theta$,l) 空间中指向一点的向量，有两个参数长度与角度
- 计算机：(2,3,4) 有特定顺序的一列数字，队列 list 的一种特殊形式

  ex. 造房子的两个参数，面积与钱 ($1m^2$，￥$10^{10}$)
- 数学：(x,y,z) 抽象而广泛，线性代数中可以理解为从原点指出的一个向量。其中每个数字代表向量在坐标轴依次的分量

在用数学中几何的方式理解向量后，向量的加减和数乘就是自然的了。前者可以理解为先在在 x 轴走 $x_1+x_2$ 个单位，再在 y 轴走 $y_1+y_2$ 个单位。数乘可以理解为若干个向量本身相加。

- 向量也可以理解为单位向量的线性变换。在向量 (x,y) 中，可以理解为将单位向量 ($\hat{i},\hat{j}$）中的 $\hat{i}$、$\hat{j}$ 分别拉伸 x、y 倍。

## 2.2 矩阵作为线性变换

一个矩阵可以看作是对原线性空间的一个线性变换。其中，将 $(\hat{i},\hat{j})^T$ 变为 $(\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2})^T$。因此，一个矩阵与向量的乘法等于经过一个线性变换后的该向量。

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

矩阵与矩阵的乘法，$[B][A]$ 可看作将 $(\hat{i},\hat{j})$ 经过 A 变换，再经过 B 变换。因此，很自然地，一般情况下 AB 没有交换性，但有结合性。

$$A(BC) = (AB)C \tag{2.2}$$

这是因为他们都是 C、B、A 依次变换后得到的结果。

### 2.3 行列式

在不同的线性变换中，一个特点是空间的压缩与拉伸。因此我们希望出现一个可以计算空间拉伸比例的量，也就是单位面积在转换前后的变化。这个量就是行列式。

如果将矩阵看作由向量组成的，则行列式在二维空间中代表着向量 $p_1, p_2$ 的面积，在三维空间中代表着 $p_1, p_2, p_3$ 形成的体积。行列式为负代表空间的反转。例如左手到右手系的变化。当行列式为零时，两个向量在同一条线上，二维空间被压为一维空间。

如何计算行列式？一个“直观”的想法是首先考虑 (a,0) 与 (0,d) 张成的面积，显然是 $a \cdot d - 0 \cdot 0$, 即使当其中一个变为 (b,d) 时，也只是将长方形变为平行四边形。

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot 0 \tag{2.3}$$

在二维几何空间中，可以通过分割法数值证明行列式的计算方式。三维亦然，可以查看视频 05 节最后给出的公示。

$$det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a+b)(c+d) - ac - bd - 2bc = ad - bc \tag{2.4}$$

### 2.4 逆矩阵与秩

逆矩阵可以理解为一个“反演”的线性变换。而有些矩阵没有逆矩阵，是因为他们降秩了，将三维的空间变为二维平面，或将二维平面压缩为一维的线、甚至是点。此时，如果存在反演线性变换，则要求将一维数轴上的一个点变为平面内的无穷多个点，而我们已知线性变换的特点是将空间中每一个向量 (点) 平行且均匀地变到另一个向量 (点) 上去。因此所有非满秩矩阵都是没有逆矩阵的。

## 3 点乘、换基、特征根

### 3.1 点乘与对偶向量

点乘 $v \cdot w$ 的数值解释是，两个维数相同的向量对应的坐标乘积之和 $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$。其几何解释是，向量 v 乘以向量 w 在 v 投影上的

分量。

有趣的是，点乘的计算是对称可交换的，但几何解释中两向量的地位是不对称的。“v 乘以 w 在 v 上的投影”和“w 乘以 v 在 w 上的投影”看起来是完全不同的事物。为了证明二者等价，可以首先取两向量的单位向量，此时两向量互相投影对称；第二步对 v 与 w 分别进行数值乘法，w 的数值乘法不会影响 v 在 w 上的投影。因此得证（此处画图有助于理解）。

为什么点乘的数值解释和几何解释可以对应呢？3b1b 将其称为数学中的对偶性 (duality)。

在线性空间中，线性变换的一个要求就是，原本的等距分布在变换之后仍然是等距分布。设经过一个线性变换后，$\hat{\imath}$ $\hat{\jmath}$ 分别变为 1 和-2，那么向量 (4,3) 在同样的线性变换下，就会变为 $4 \times 3 - 3 \times (-2) = 2$

$$[1, -2]\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = -2 \tag{3.1}$$

这和点乘的形式不是一样的吗?

$$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = -2 \tag{3.2}$$

区别仅仅是 (1,-2) 在 (3.1.1) 中作为转换矩阵 [1,-2]，而在 (3.1.2) 中作为向量 $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$，这在数值计算中可能区别不大，但是两个公式相似性说明，将二维平面投影为一条线，对应着唯一一个对偶向量。向量转置后变为转换矩阵，将这个转换矩阵与某个向量 v 相乘，在数学上都等价于将 p 与 v 做点乘。

换言之，点乘将二维向量（同时也是二维空间）投影到数轴上。

为了证明 (3.1) 与 (3.2) 的等价性，我们考虑空间中过原点的的一个数轴，设其单位向量为 $\hat{u}$。于是，任一二维向量都可以投影到数轴上，得出它在数轴上的分量。于是我们构造了一个将二维向量投影到数轴上的函数，它对应了一个 $1 \times 2$ 的矩阵 $[\hat{\imath}', \hat{\jmath}']$，其分量是 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 投影在数轴上的分量，即投影在 $\hat{u}$ 上的分量。

此刻，我们注意：由于 $\hat{u}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 都是单位向量，因此 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 在 $\hat{u}$ 上的分量，就是 $\hat{u}$ 在 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 上的分量，也就是 $\hat{u}$ 的两个坐标！

$$\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}v_x\\y_x\end{bmatrix} = [u_x, u_y]^T \begin{bmatrix}p_x\\p_y\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

因此也就证明了，$\hat{u}$ 乘以向量 p 在 $\hat{u}$ 上的分量 = 对应坐标相乘。

## 3.2 叉乘

两个向量叉乘 $|a||b|\sin\alpha$ 等于他们之间形成的面积 S，也因此等于行列式 |M|。然而，叉乘的真实意义是一个垂直于 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的向量，而它的数值等于面积 S, 也符合以下公式（注意在行列式的计算中，$\hat{i}, \hat{j}$ 保持他们的向量属性）：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = det\left(\begin{bmatrix} \hat{i} & x_1 & x_2 \\ \hat{j} & y_1 & y_2 \\ \hat{k} & z_1 & z_2 \end{bmatrix}\right) \tag{3.4}$$

如何来理解这个方程呢？我们可以进行以下操作：

1. 根据 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 定义一个从三维到一维的线性变换
2. 找到线性变换的对偶向量，这个向量就是 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$

首先从之前的例子我们可以看出，二维中两向量的叉乘等于他们张成的面积，因此也等于其行列式。

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right) \tag{3.5}$$

类似于3，叉积可以看做一个函数，接收两个向量，生成一个数, 这是左式。如何凑出右式 det 的形式呢? 将 (x,y,z) 看作变量，我们可以计算 (x,y,z) 与已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的行列式，也就是它与 $\vec{a}, \vec{b}$ 张成的体积。

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{bmatrix}\right) \tag{3.6}$$

当你理解这个函数是线性的，就可以设想一个 $1 \times 3$ 的矩阵代表从三维到一维的线性变换，其对偶向量 $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)^T$ 在三维空间中满足点乘等价于取体积这一性质。($\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$)

$$[p_1, p_2, p_3]^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = det\left(\begin{bmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{bmatrix}\right) \tag{3.7}$$

所以我们有，

$$p_1x + p_2y + p_3z = (y_1z_2 - y_2z_1)x + (z_1x_2 - z_2x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)z \quad (3.8)$$

$$p_1 = y_1z_2 - y_2z_1,\ p_2 = z_1x_2 - z_2x_1,\ p_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \quad (3.9)$$

3.2这一形式与将 $p_1, p_2, p_3$ 放入3.2矩阵第一列计算 det 是等价的。

实际上，从几何角度，点乘等于一个向量向另一向量的投影，右式等于 (x,y,z) 在垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$ 的方向上的投影乘以 $p_1, p_2$ 的面积，所以等于长度为 $\vec{a}, \vec{b}$ 的面积且垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$ 的向量，投影在 (x,y,z) 上（叉乘的真实数学含义）。

这就是3.2小节中叉乘公式成立的原因。

# 4 换基公式，特征根

tbc.