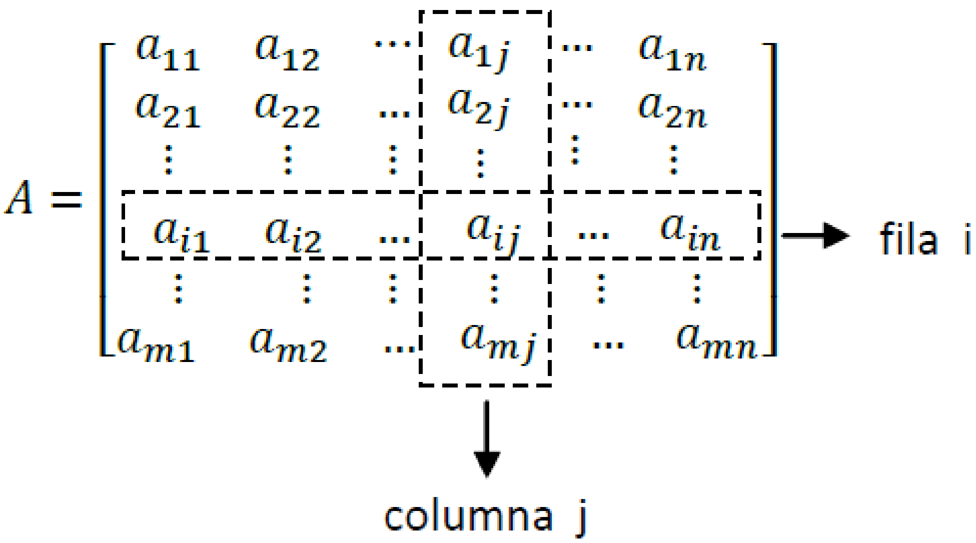
MATRICES

Introducción

Las matrices son herramientas útiles para la sistematización de cálculos pues proveen de una notación compacta para almacenar información y describir relaciones complicadas.

Definición de matriz

Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular ordenado de m.n números complejos dispuestos en m filas o renglones y n columnas (mϵ IN,n ϵ IN). Los números en el arreglo se llaman **elementos, componentes, registros o entradas.**



Nota: Suele utilizarse en lugar del paréntesis, corchete.

En general las matrices se indican mediante letras mayúsculas. El tamaño u orden de una matriz estáespecificado por el número de filas y columnas que contiene. La componente genérica o elemento genéricoij-ésimo de la matriz A se denota por "a_{ij}".

A veces la matriz A se escribe:

A=(a_{ij}) o bien A=$[a_{ij}]$

Si A es una matriz de mxn con m=n, entonces A recibe el nombre de **matriz cuadrada**deorden n y los elementos $a_{11,}a_{22},\ldots\ldots\ldots.,a_{nn}$ están en la **diagonal principal** de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{diagonal principal}$$

Una matriz de mxn en la que todos sus elementos son 0, se llama **matriz cero**de mxn.

<u>Ejemplos</u>

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ es matriz cuadrada de 2 filas por 2 columnas (2x2), el elemento a_{11} es 1;$a_{22} = -3,$;ambos componen la diagonal principal.

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3i \\ 4 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz cuadrada de orden 3. Se observa que

$$b_{12} = -2, \qquad b_{22} = 2 + 3i, b_{31} = b_{32} = b_{33} = 0$$

3) $C = (1 \quad -2 \quad \sqrt{7} \quad 0 \quad 8)$ Matriz fila de orden 1x5; la componente $c_{13} = \sqrt{7}$.

Una **matriz fila**es una matriz de 1xn para cualquier n ϵ IN. Las matrices de esta clase se llaman **vector fila de n componentes.**

4) $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1+2i \\ 3i \end{pmatrix}$ Matriz columna de 4x1; $d_{41} = 3i$.

Una **matriz columna** es una matriz de mx1, m ϵ IN. Estas matrices se llaman **vectores columna de m componentes.**

5) $D = [5]$ Matriz cuadrada de 1x1, se conviene en escribir sólo elemento (sin paréntesis ni corchetes), es decir E=5.

6) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz nula o matriz cero de 3x2; se conviene en escribir “O”.

7) $G = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ Matriz rectangular de tamaño 2x3. La componente de la fila 2, columna 3 es f.

Clasificación a las matrices cuadradas

Matriz triangular inferior (MTI).

Una MTI “L” de nxn satisface:

$$l_{ij} = 0 \quad sii < j \quad ; \quad 1 \leq i \leq ny \quad 1 \leq j \leq n$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & \dots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}_{2x2} ; \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}_{3x3} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} ; \begin{bmatrix} 2+i & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} ; \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Matriz triangular superior (MTS)

Una MTS “U” de nxn satisface:

$$u_{ij} = 0 \, sii > j \quad ; \quad 1 \leq i \leq ny \quad 1 \leq j \leq n$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & \dots & u_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}_{5x5} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3x3} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

Matriz Diagonal (MD)

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada cuyos elementos que no están en la diagonal principal son iguales a 0. Es decir:

D es MD si y sólo si $d_{ij} = 0 \;\; sii \neq j$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix}_{2x2} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} ; \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4x4}$$

Las dos últimas matrices se llaman **matrices escalares**pues todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Las MD son MTI y MTS.

Caso particular: Matriz Identidad

La matriz identidad nxn o la matriz identidad de orden n es una matriz nxn tal que cada componente o elemento (i,i) es igual a 1 y el resto es 0. Esta matriz se denota por “I” o por “I_n” si se quiere especificar el tamaño.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

Otra forma de expresar a I_n es usando la delta de Kronecker "δ_{ij}" de la siguiente manera:

$$I_n = d_{ij} = \begin{cases} d\mathrm{ij} = 1 & \mathrm{si\ i = j} \\ d\mathrm{ij} = 0 & sii \neq j \end{cases}$$

Observación: I_n es MTI, MTS, MD y matriz escalar.

<u>Nota histórica:</u> *El término "matriz" fue empleado por primera vez por el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) con el propósito de distinguir entre matrices y determinantes. El significado usual no técnico de ese término es "lugar donde algo se crea o produce o desarrolla". La idea era que "matriz" significase "madre de los determinantes".*

<u>Matrices iguales</u>

Veamos los siguientes ejemplos:

1) Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, se dice:

$$A \neq B puesa_{11} \neq b_{11}\, ya_{12} \neq b_{12}$$

2) $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4x1}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1x4}$ son matrices o vectores distintos pues C es de orden 4x1 y D es de 1x4.

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & i & 5 \end{bmatrix}_{2x3} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & i & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$

<u>Definición:</u>Dos matrices $A = (a_{ij}) y B = (b_{ij})$ son **iguales** si:

a) Tienen el mismo tamaño.

b) Los elementos correspondientes son iguales $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -2 & i & 1 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} 3+1 & -5+5 & -7+2 \\ -1-1 & \sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Operaciones con matrices

Estudiaremos la suma de matrices, resta, multiplicación por un escalar, multiplicación de matrices, potencia de una matriz y transposición.

Suma de matrices

Definición: Si A=(a_{ij}) y B=(b_{ij}) son dos matrices que tienen el mismo tamaño mxn, entonces la suma A+B es la matriz C=(c_{ij}) que se obtiene al sumar los elementos correspondientes en las dos matrices.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ ; \quad 1 \le i \le my \quad 1 \le j \le n$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

$$A + B = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Importante: No se pueden sumar matrices con diferentes tamaños

La diferencia "A-B" de A y B se define prácticamente en la misma forma que la adiciónsustituyendo los signos de adición (+) por los de sustracción (-).

A – B= A+(-B)

Ejemplos:

1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 2+i \end{pmatrix}_{3x2} + \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 7+3i \\ 1 & 4i \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 2+i & 2 \\ 4 & 12+3i \\ 7 & 2+5i \end{pmatrix}_{3x2}$$

2)

$$[2 \quad 3 \quad 4]_{1x3} + [-2 \quad -3 \quad -4]_{1x3} = [0 \quad 0 \quad 0]_{1x3}$$

3)

$$\begin{bmatrix} 7 & 4-i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}_{2x2} - \begin{bmatrix} 3i & -2-i \\ -3i & 4 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 7-3i & 6 \\ 5i & -4 \end{bmatrix}_{2*2}$$

4)

Si $\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & z \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ¿Qué valor tienen las variables x, y, z, w ?

$$\begin{cases} x+2=1 \Rightarrow x=-1 \\ 3+z=0 \Rightarrow z=-3 \\ y+0=0 \Rightarrow y=0 \\ w-1=1 \Rightarrow w=2 \end{cases}$$

5) Calcular la matriz X

a) $\begin{bmatrix} -1 & 3+i \\ 0 & 8i \end{bmatrix}_{2x2} + X = \begin{bmatrix} -1 & 3+i \\ 0 & 8i \end{bmatrix}_{2*2}$; $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6) Completar

a) La suma de MD es…………………………………………

b) La suma de MTI es…………………………………………

c) La suma de MTS es…………………………………………

Propiedades de la adición de matrices

- Propiedad Conmutativa: A+B=B+A
- Propiedad Asociativa: (A+B)+C=A+(B+C)
- Elemento neutro: A+O=O+A=A
- Elemento inverso u opuesto aditivo: A+(-A)=(-A)+A=O

Multiplicación de una matriz por un escalar

Definición: Sean A=(a_{ij}) y k un escalar (k ϵ **IC**), el producto k·A del escalar k y de la matriz A es la matriz B=(b_{ij}) del mismo tamaño que A que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por k, es decir:

$$b_{ij}= k\cdot a_{ij}; \quad 1 \le i \le m y \quad 1 \le j \le n$$

$$k.A = k.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

$$k\cdot A= k.(a_{ij})=(k.a_{ij})$$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces:

$2A = \begin{bmatrix} 4i & 6 & 8 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$; (-1).A= $\begin{bmatrix} -2i & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$0.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = O;i.A= $\begin{bmatrix} -2 & 3i & 4i \\ 0 & -i & 3i \end{bmatrix}$

Observar que todos los productos tienen el mismo tamaño que A.

Propiedades de la multiplicación de un escalar por una matriz.

Sean A y B matrices de orden mxn, k y s escalares.

- Propiedad distributiva de la suma de matrices respecto de la multiplicación por un escalar.
  k.(A+B)=k.A +k.B
- Propiedad distributiva de la suma de escalares respecto de la multiplicación por una matriz
  (k+s).A=k.A +s.A
- Asociatividad mixta
  (k.s).A=k.(s.A)=s.(k.A)
- Elemento neutro
  1.A=A

Multiplicación de matrices

Definición:Sea A=(a_{ij}) de mxp y B=(b_{ij}) de pxn, el producto A.B es la matriz C=(c_{ij}) de mxn tal que el elemento genérico c_{ij}se obtiene sumando los productos de los elementos de la fila i de A por los elementos de la columna j de B.

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ ... \ + a_{ip.}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}\ 1 \leq i \leq my \quad 1 \leq j \leq n$$

Ejemplos

1)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2x3} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3x2} = \begin{bmatrix} 2.2 + 3.1 + 4.(-1) & 2.0 + 3.4 + 4.2 \\ 5.2 + 6.1 + 7.(-1) & 5.0 + 6.4 + 7.2 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 9 & 38 \end{bmatrix}_{2X2}$$

2)

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3x2} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} 2.2 + 0.5 & 2.3 + 0.6 & 2.4 + 0.7 \\ 1.2 + 4.5 & 1.3 + 4.6 & 1.4 + 4.7 \\ -1.2 + 2.5 & -1.3 + 2.6 & -1.4 + 2.7 \end{bmatrix}_{3X3}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 22 & 27 & 32 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Conclusión importante: De 1) y 2): A.B ≠ B.A

EL PRODUCTO DE MATRICES NO ES CONMUTATIVO

3)

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3x1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & i & 4 & 8 \end{bmatrix}_{1x4} = \begin{bmatrix} 1.(-1) & 1.i & 1.4 & 1.8 \\ 2.(-1) & 2.i & 2.4 & 2.8 \\ 3.(-1) & 3.i & 3.4 & 3.8 \end{bmatrix}_{3x4}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & 1i & 4 & 8 \\ -2 & 2i & 8 & 16 \\ -3 & 3i & 12 & 24 \end{bmatrix}_{3x4}$$

El producto B.A no está definido:

$$\boldsymbol{B_{1x4} \cdot A_{3x1}}$$

4 y 3 son distintos, por lo tanto no hay compatibilidad.

4)

$$L.U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 18 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

MTI MTS

El producto de matrices triangules inferiores y superiores no necesariamente es una matriz triangular.

5)

$$L_1 \,.\, L_2 = \underset{\text{MTI}}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \,.\, \underset{\text{MTI}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{MTI}}{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}$$

El producto de dos matrices triangulares inferiores MTI (ó MTS) es otra MTI (ó MTS).

6)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2+2i \end{bmatrix}$$

Observar que el producto de matrices diagonales es otra MD cuyos elementos son el producto de los elementos correspondientes a las diagonales de las matrices; en este caso, el producto es conmutativo.

7)

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ A}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \,.\, \underset{\substack{\Downarrow \\ B}}{\begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2+i \end{bmatrix}$$

8)

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ B}}{\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} \,.\, \underset{\substack{\Downarrow \\ A}}{\begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & 1+2i \end{bmatrix}$$

Si una matriz A tiene una fila (o columna) de ceros, y B es una matriz tal que A.B (óB.A) está definida, entonces A.B (ó B.A) también tiene una línea de ceros (ejemplo 7 y 8).

9)

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El producto de dos matrices puede dar la matriz nula sin que ninguna de ellas sea nula.

10)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}i & 7\\3 & 4\end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}$$

11)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}-2 & 5i\\3 & 4\end{bmatrix}}_{C} = \begin{bmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}$$

En los ejemplos 10 y 11 se observa que A . B = A . C, sin embargo $B \neq C$. De 10) y 11) se tiene:La ley cancelativa no es válida, en general, para matrices.

12)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}_{3x3}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & i\\2 & 3\\-1 & -1\end{bmatrix}_{3x2}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & -i\\4 & 6\\-3 & -3\end{bmatrix}_{3x2}}_{D\,.\,A}$$

El producto de una matriz diagonal "D = (d_{ii})" de nxn por una matriz A de nxm es una matriz de nxm que se obtiene multiplicando cada fila de A por d_{ii} para todo i. En este caso se dice que D premultiplica o multiplica a izquierda a A.

13)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\i & 1 & -1\end{bmatrix}_{2x3}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -i & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3x3}}_{D} = \underbrace{\begin{bmatrix}4 & 3i & 4\\2i & -i & -1\end{bmatrix}_{2x3}}_{A\,.\,D}$$

El producto de una matriz A de nxm por una matriz diagonal d_{ii} de mxm, es otra matriz de nxm que se obtiene multiplicando cada columna de A por d_{ii}.

Propiedades de la multiplicación de matrices

Sean A, B y C matrices y k un escalar

- Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices.

$(A.B) . C = A. (B.C)$

- Propiedad distributiva de la multiplicación de matrices respecto de la adición

  $A . (B + C) = A . B + A . C$ $\qquad$ $A . (B - C) = A . B - A . C$

  $(B + C) . A = B . A + C . A$ $\qquad$ $(B - C) . A = B . A - C . A$

- Elemento neutro

  $A . I = I . A = A$, $\quad$ A de nxn

- Elemento absorbente

  $A . O = O . A = O$

- Propiedad

  $k (A. B) = (k . A) . B = A (k . B)$

Observación importante: el conjunto de todas las matrices de mxn con elementos reales, junto con la adición y la multiplicación por un escalar real, tiene estructura de Espacio Vectorial y se denota (IR^{mxn} ,+, IR,·)

Por ejemplo, la base canónica de (IR^{2x2}, +, IR, ·) es:

$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ (4 vectores canónicos)

Una base de IR^{mxn}tienem·n vectores canónicos.

<u>Potencia de una matriz cuadrada</u>

<u>Definición</u>: La potencia enésima (o n – ésima) de una matriz cuadrada A se anota "A^n" y se define de la siguiente forma:

Si n = 0 : $\quad A^0 = I$

Si n = 1 : $\quad A^1 = A$

Si n ≥2 : $A^n = A . A^{n-1}$

<u>Ejemplos</u>

Sea A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, entonces:

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 42 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}$

1) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ pues:

   $(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + A.B + B.A + B^2$.

   Distintos

2) $(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$ pues $AB \neq BA$

Propiedades de la potencia

Sea A cuadrada, $n \epsilon IN_0$, $m \epsilon IN_0$:

- $A^n . A^m = A^{n+m}$
- $(A^n)^m = A^{n.m}$

La demostración de la primera propiedad es muy sencilla, pues:

- $A^n \cdot A^m = \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{A \ldots A}_{m \text{ veces}} = \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{m+n \text{ veces}} = A^{n+m}$

Matriz transpuesta y transpuestahermitiana

Definición: Sea A = (a_{ij}) una matriz mxn

a) La *traspuesta* A^T de A, es una matriz de nxm que se obtiene intercambiando las filas y las columnas de A.

   $a^T_{ij} = a_{ji}$ para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$

b) La traspuesta hermitiana A^H de A es la matriz de nxm que se obtiene tomando el complejo conjugado de sus elementos en A^T

   $a^H_{ij} = \bar{a}_{ji}$ para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$

Ejemplos

Sean A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{2x3}$ y B = $\begin{bmatrix} 1-3i \\ 7 \end{bmatrix}_{2x1}$

Entonces

A^T= $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}_{3x2}$ y B^T = $[1{-}3i \quad 7]_{1x2}$

A^H= $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}_{3x2}$ (igual aA^T) y B^H = $[1+3i \quad 7]$ ($\neq B^T$)

<u>Propiedades para las matrices traspuestas</u>

a) $(A^T)^T = A$
b) $(A + B)^T = A^T + B^T$
c) $(A - B)^T = A^T - B^T$
d) $(kA)^T = k\,A^T; k \in$ IC
e) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (observe el orden invertido)
f) $(A^n)^T = (A^T)^n$; $n \in$ IN

<u>Ejercicio</u>

Utilizando las propiedades del Álgebra matricial, calcular X:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ - X = 2I – k.O ; $k \in$ IC

b) $(3. \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix})^T$ – 2i I + 3X = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & i \end{bmatrix}^2$ – I

<u>Matriz simétrica</u>

<u>Definición:</u> Una matriz cuadrada A = (a_{ij}) es *simétrica* si y sólo si A^T = A; esto es:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{para todo i, j}$$

<u>Ejemplos</u>

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{3x3}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & 3i & 6-i & 4 \\ 3i & 0 & 8 & 3 \\ 6-i & 8 & i & 7 \\ 4 & 3 & 7 & 3i \end{bmatrix}_{4x4}$

Observar la simetría respecto de la diagonal principal.

Propiedades

1) La suma de matrices simétricas, es simétrica.
2) El producto de matrices simétricas no es, en general, simétrica.
3) Toda matriz diagonal es simétrica.
4) Si A es simétrica, A_n es simétrica ($n \in IN_0$)
5) Si A es una matriz simétrica de mxm y B es una matriz de mxn, entonces $B^T \cdot A \cdot B$ es simétrica.
6) Si A y B son simétricas de nxn y A.B es simétrica entonces A.B = B.A
7) El producto de una matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.
8) La suma de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es simétrica.

Matriz antisimétrica.

Definición: se dice que una matriz $A = (a_{ij})$ es *antisimétrica*si $A^T = - A$; esto es:

$$a^T_{ij} = - a_{ji} \quad \text{para todo i, j}$$

Ejemplo

$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$ es antisimétrica, pues:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -i \\ -3 & i & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$A^T = - A$$

$$- A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -i \\ -3 & i & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Propiedades

1) Toda matriz antisimétrica debe ser cuadrada y los elementos de la diagonal deben ser ceros.
2) Sea A de nxn, entonces:
   a) $A – A^T$ es antisimétrica.
   b) $A + A^T$es simétrica.

3) Toda matriz cuadrada puede ser escrita en forma única como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

   A = $\frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$

Inversa de una matriz

Definición:

a) Si A es una matriz cuadrada y existe una matriz B tal que A·B = B·A = I, entonces se dice que A es ***inversible*** o ***no singular*** o ***regular*** y B se llama matriz ***inversa*** de A y se denota: B = $\boldsymbol{A^{-1}}$
b) Una matriz ***singular*** es una matriz cuadrada que ***NO*** tiene inversa.

Ejemplo: Si

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, pues:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

No es necesario que una matriz cuadrada tenga una inversa multiplicativa. Por ejemplo,

Si $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Su inversa multiplicativa es $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Como A·X tiene que ser igual a la matriz I, debe cumplirse que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 1 \text{ !!!} \end{cases}$$

Como no es posible satisfacer esta última ecuación, no existe *a, b, c* y *d* tales que A·X = I. Por lo tanto, algunas matrices tienen inversas multiplicativas y otras no.

Nota importante: Toda matriz cuadrada con una línea de ceros NO es INVERSIBLE pues si se la multiplica por cualquier otra, da una matriz con una línea de ceros que no coincide con la I.

Unicidad de la inversa

Si A_{nxn} tiene una inversa multiplicativa, la inversa es única.

Demostración:

Se mostrará que si dos matrices son inversas de A, en realidad son la misma matriz.

Supóngase que B y C son inversas de A, de manera que AB = BA = I y AC = CA = I(1)

Sea	A.B = I
Pre multiplicar por C:	C.(A.B) = C.I
Asociatividad y elemento neutro	(C.A). B = C
Por (1)	I. B = C
Elemento neutro	***B = C***

Por lo tanto, la inversa de A es única.

Propiedades de matrices inversas

Si A y B son matrices inversibles o no singulares del mismo tamaño, entonces:

a) AB es inversible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (la inversa del producto de matrices es igual al producto de las inversas en orden invertido).

b) A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$

c) Para todo escalar $k \neq 0$, k.A es inversible y

$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$$

d) A^n es inversible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, $n \in IN_0$

e) A^T y A^H son inversibles con $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ y $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

Traza de una matriz

La traza de una matriz A_{nxn}, se denota por "tr(A)" y es la suma de los elementos de la diagonal principal de A.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = 1 + (-2) = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} i & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3+i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{tr}(B) = i + 0 + 3 + i = 3 + 2i$$

En general:

$$\text{Si } A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{nxn} \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = \underbrace{a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}}_{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Propiedades de la traza:

1) tr(A + B) = tr(A) + tr(B)

2) $\mathrm{tr}(I_{nxn}) = n$

3) tr(A·B) = tr(B·A)

4) $\mathrm{tr}(B^{-1} \cdot A \cdot B) = \mathrm{tr}(A)$ si B es no singular

<u>Operaciones Elementales en las líneas de una matriz</u>

Existen 3 tipos de operaciones:

- Intercambiar o permutar dos líneas (filas o columnas) paralelas entre sí.
- Multiplicar una línea por una constante no nula.
- Sumar un múltiplo de una línea a otra paralela a ella.

<u>Nota</u>: En general trabajaremos con operaciones elementales en las *filas* de una matriz.

<u>Matriz Elemental</u>

<u>Definición:</u> Se dice que una matriz de nxn es una matriz elemental si es posible obtenerla a partir de la matriz identidad I_{nxn}, mediante una sola operación elemental en las filas.

<u>Ejemplos:</u>

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (se obtuvo multiplicando la $\underbrace{\text{fila 2}}_{F_2}$ de I_{2x2} por (-3))

$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (se obtuvo intercambiando F_1 y F_3 de I_{3x3})

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (se obtuvo sumando 4 veces F_3 a F_1 en I_{3x3})

<u>Propiedades de las matrices elementales</u>

1) La *pre multiplicación* de una matriz elemental por una matriz cualquiera A, da por resultado una matriz B que tiene la misma operación elemental de *filas* que la elemental.

   <u>Ejemplo</u>:

   Sean

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrices elementales, entonces:}$$

$$E_1.A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & i\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & i\\ 2 & -3\end{bmatrix}}_{B}$$

$$E_2.A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & i\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 1 & i\end{bmatrix}}_{B}$$

$$E_3.A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -3+3i\\ 1 & i\end{bmatrix}$$

2) La *post multiplicación* de una matriz elemental por una matriz cualquiera A, da por resultado una matriz B que tiene la misma operación elemental de *columnas* que la elemental.

   Ejemplo:

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3i\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3i & 0\end{bmatrix}$$

   En general, trabajaremos con la propiedad 1).

Observación: Si se aplica una operación elemental a las filas de I para producir una matriz elemental E, entonces hay otra operación en las filas de E que permite obtener a I. Por ejemplo:

$$I_{3x3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow (-3).F_2\ resulta\ E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow -\frac{1}{3}F_2\ resulta\ I_{3x3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

En el siguiente cuadro se enumeran las posibilidades:

Operación en las filas de I que produce a E	**Operación en las filas de E que reproduce a I**
Multiplicar la fila “i” por $c \neq 0$	Multiplicar la fila “i” por 1/c
Intercambiar las filas “i” y “j”	Intercambiar las filas “i” y “j”
Sumar **c** veces la fila “i” a la fila “j”	Sumar **(– c)**veces la fila “i” a la fila “j”

Las operaciones realizadas en la columna derecha de la tabla se llaman _operaciones inversas_ de las operaciones correspondientes a la izquierda.

3) Toda matriz elemental es inversible, y su inversa también es una matriz elemental.

Matrices Equivalentes

Si una matriz B se puede obtener a partir de una matriz A mediante una sucesión finita de operaciones elementales en las filas, entonces se dice que B es **equivalente por filas** a A.

Notación: “B~A”

Como también A~B, se dice que"A y B son matrices equivalentes"”

Ejemplo:

	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	Se intercambian F_1 por F_2
$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$E_1.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$(-2).F_1 + F_2 \rightarrow F_2$`
$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$	$E_2.(E_1.A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	$1/5.F_2 \rightarrow F`_2$
$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$E_3.(E_2.(E_1.A)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$F_1 + F_2 \rightarrow F`_1$
$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_4.(E_3.(E_2.(E_1.A))) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$	

Se observa que: $E_4.E_3.E_2.E_1.A = I$, es decir:

"A~I"

En la práctica, se trabaja omitiendo la matriz elemental, solo se escribe la matriz equivalente encontrada al aplicar una operación elemental, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\sim}_{F_1 \to F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\sim}_{(-2)F_1 + F_2 \to F`_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \underbrace{\sim}_{\frac{1}{5}F_2 \to F`_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\sim}_{F_1 + F_2 \to F`_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\boldsymbol{A \sim I}$$

<u>Matriz escalonada y matriz escalonada reducida o forma reducida de Gauss.</u>

Se dice que una matriz es <u>escalonada</u>, si satisface los siguientes requisitos:

a) Si una fila no consta exclusivamente de ceros, entonces el primer elemento diferente de cero en la fila es 1.
b) Si hay filas que constan exclusivamente de ceros, entonces están agrupados en la parte inferior de la matriz.
c) Si las filas "i" e "i+1" son dos filas sucesivas cualesquiera que no constan exclusivamente de ceros, entonces, el primer número no nulo en la fila "i + 1" debe estar a la derecha del primer número no nulo en la fila "i".

Se dice que una matriz está en la <u>forma escalonada reducida</u>, si además de a), b) y c) anteriores, satisface:

d) Todas las columnas que contienen el primer elemento diferente de cero de alguna fila, tienen ceros en todas las posiciones restantes.

Ejemplos de matrices escalonadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos: No son matrices escalonadas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedad de las matrices escalonadas reducidas o forma reducida de Gauss

El número *k* de filas diferentes de cero y el número de columnas que contiene el primer elemento (leyendo de izquierda a derecha) diferente de cero en esa fila es el mismo en cualquier matriz escalonada reducida producida a partir de una matriz A dada, mediante operaciones elementales de fila, sin interesar la secuencia de operaciones realizadas.

Rango de una matriz

Es el número de filas diferentes de cero en cualquier matriz escalonada reducida A\` obtenida a partir de A mediante operaciones elementales de fila.

Notación: "ρ(A)" se lee "rango de la matriz A"

Nota: Algunos autores se refieren al rango como “rango fila” ya que su definición depende del número de *filas* no nulas. Un concepto similar de “rango columna” puede introducirse considerando operaciones de *columna* y contando el número de columnas no nulas en una forma reducida. Como el rango fila y el rango columna siempre son iguales, se usa el término *"RANGO"*.

Obtención o cálculo del rango de una matriz

1) Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, se deben realizar operaciones elementales en las filas de A hasta obtener alguna forma escalonada reducida o escalonada simplemente.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_1 \rightarrow F_2}{\approx} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{2F_1+F_2 \rightarrow F`_2}{\approx} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{3}F_2 \rightarrow F`_2}{\approx} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{(-1)F_1 \rightarrow F`_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La última matriz encontrada, equivalente a A por filas tiene 2 filas no nulas, entonces $\underline{\underline{\rho(A)=2}}$.

2)

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \underset{F_1+F_2 \rightarrow F`_2}{\approx} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \underset{-2F_1+F_3 \rightarrow F_3}{\approx} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{5}F_2 \rightarrow F`_2}{\approx} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{(-1)F_1 \rightarrow F`_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La última matriz encontrada, equivalente a B por filas tiene 2 filas no nulas, entonces $\underline{\underline{\rho(B)=2}}$.

3) $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{F_1+F_3 \rightarrow F`_3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{-3F_1+F_2 \rightarrow F`_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\substack{-\frac{1}{6}F_2 \rightarrow F`_2 \\ \frac{1}{3}F_3 \rightarrow F`_3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_3-F_2 \rightarrow F`_3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{bmatrix} \underset{\frac{3}{5}F_3 \rightarrow F`_3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La última matriz encontrada, equivalente a C por filas tiene 3 filas no nulas, entonces $\underline{\underline{\rho(C)=3}}$.

4)$\rho(O) = 0$, para cualquier orden de la matriz nula.

5)$\rho(I_{nxn}) = n,\ \forall n \in \mathbf{IN}$.

Observación importante:

Si A_{nxm} y n < m, entonces $\rho(A) \leq n$.

Si A_{nxm} y m < n, entonces $\rho(A) \leq m$.

Método para encontrar la matriz inversa

Propiedad: Si A_{nxn} es equivalente por filas a la I_{nxn}, entonces A es inversible, y, recíprocamente.

Demostración:

Supongamos que A es equivalente por filas a I_{nxn}, es decir existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que:

$E_k \ldots E_2.E_1.A = I_{nxn}$ (1)

Por la propiedad 3 de matrices elementales, $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son inversibles, por lo tanto:

$$\underbrace{E_k^{-1}.E_k}_{I} \ldots E_2.E_1.A = E_k^{-1}.I_{nxn}$$

$$\underbrace{E_2^{-1}.E_2}_{I}..E_1.A = E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}.I_{nxn}$$

$$\underbrace{E_1^{-1}.E_1}_{I}.A = E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}.I_{nxn}$$

$$\underline{\underline{A}} = E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}.I_{nxn} = \underline{\underline{E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}}}$$

La matriz A está expresada como un producto de matrices inversibles, luego *A es inversible*.

Método para determinar la inversa de una matriz inversible

Es una aplicación del teorema anterior:

Si $A = E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}.I_{nxn}$,

$$A^{-1} = \left(E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_k^{-1}.I_{nxn}\right)^{-1},$$

$$A^{-1} = I..(E_k^{-1})^{-1}\ldots\left(E_2^{-1}\right)^{-1}.\left(E_1^{-1}\right)^{-1}$$

$$A^{-1} = E_k\ldots E_2.E_1$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = E_k\ldots E_2.E_1.I_{nxn}}} \quad (2)$$

Lo que indica que A^{-1} se puede obtener pre multiplicando I_{nxn}, en forma sucesiva por las matrices elementales E_1, E_2,….E_k. Como cada pre multiplicación por una de estas matrices elementales equivale a ejecutar una operación en filas, se sigue, comparando (1) y (2) que <u>la misma sucesión de operaciones en las filas que transforma a A en I_{nxn}, transforma a I_{nxn} en A^{-1}</u>.

Se quiere transformar a A en la matriz I mediante operaciones en filas, y al mismo tiempo, aplicar estas operaciones a I para obtener A^{-1}. Esto se puede lograr escribiendo la matriz identidad a la derecha de A y aplicando operaciones en las filas de las dos matrices hasta que el lado izquierdo se haya transformado en la matriz I.

$$[A \vdots I] \underset{\substack{\text{operaciones}\\ \text{elementales}}}{\rightarrow} [I \vdots A]$$

<u>Ejemplo:</u> Determinar, si existe, la matriz inversa de:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

<u>*Solución*</u>

a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_3+(-1)F_1 \to F`_3}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_3+F_2 \to F`_3}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{F_1+(-1)F_2 \to F_1`}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Luego, $\underline{\underline{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$

b)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\frac{1}{2}F_1 \to F'_1} \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right]_{F_2 + (-4)F_1 \to F'_2} \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Aquí basta observar que en la matriz de la izquierda hay una fila de ceros, lo que implica que no es posible obtener la matriz identidad y en consecuencia la matriz B no es inversible, es decir no existe la matriz inversa de B.

Propiedad Importante

A_{nxn} es inversible si y sólo si $\rho(A) = n$

Ejercicio

Determinar, a simple vista, el rango de las matrices siguientes e indicar si son inversibles.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$; $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución

$\rho(A) = 1$ ya que $F_2 = 2F_1$, luego no existe A^{-1}.

$\rho(B) = 1$ ya que $F_2 = (-1).F_1$, luego no existe B^{-1}.

$\rho(C) = 1$, luego no existe C^{-1}.

$\rho(D) = 1$ puesto que $F_2 = (-2).F_1$ y $F_3 = 3F_1$, luego no existe D^{-1}.

$\rho(E) = 2$ ya que $F_3 = F_1 + F_2$, no existe E^{-1}.

ρ(F) = 4, por lo tanto, existe F^{-1} y $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Método de GaussJordan para determinar el rango de una matriz

Este método permite determinar el rango de una matriz mediante un número finito de operaciones elementales sobre las filas y se hace extensivo a la determinación de la inversa de una matriz no singular y a la resolución de sistemas lineales.

Se trata, esencialmente, de formar el número máximo posible de vectores canónicos linealmente independientes, este número es, justamente, el rango de la matriz.

La mecánica del procedimiento es:

1) Se elige como pivote cualquier elemento no nulo de la matriz dada, y se divide por él la fila correspondiente.
2) Los restantes elementos de la columna del pivote se transforman en ceros.
3) El transformado de todo elemento que no figure en la fila ni en la columna del pivote se determina siguiendo la regla del "rectángulo", es decir, es igual a su diferencia con el producto de los elementos de la *contra diagonal* dividido por el pivote. Por ejemplo, si "a" es el pivote elegido

$$\begin{bmatrix} a & b & c & \cdots\cdots \\ d & e & f & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

el transformado de "e" es: $e - \dfrac{b.d}{a}$

(b.d es el producto contra diagonal).

4) Se reitera el mecanismo eligiendo como pivote un elemento no nulo que no pertenezca ni a las filas ni a las columnas de los pivotes anteriores.

5) El número de vectores canónicos linealmente independientes es el rango de la matriz.

Ejemplo:

Mediante el método de Gauss-Jordan, obtener el rango de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

El pivote puede ser cualquier elemento no nulo, se prefiere utilizar como pivote al 1 para simplificar cálculos. En este caso, para comenzar se considera a $a_{11} = 1$ como pivote. Así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El transformado de a_{24}=0 es $0 - \frac{1.3}{1} = -3$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \end{matrix}$$

El transformado de a_{33}=1 es $1 - \frac{0.2}{1} = 1$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{matrix}$$

El transformado de a_{14}=6 es $6 - \frac{0.(-2)}{1} = 6$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{matrix}$$

Se multiplica la F_4.(-1/9)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

El rango de A es el número de vectores canónicos, o sea 4, $\rho_{(A)} = 4$

Inversión de matrices por Gauss-Jordan

Como en general no se sabe de antemano si la matriz A es inversible, igualmente el método se puede usar, si A no tiene inversa no es posible obtener la matriz I_n por ser el rango menor que n. Por lo tanto, con el método de Gauss-Jordan se determina la existencia de la inversa o no y en caso afirmativo se la obtiene.

Ejemplo

Determinar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si existe.

Solución

1	−1	0	1	0	0
0	1	−1	0	1	0
−1	0	1	0	0	1
1	−1	0	1	0	0
0	1	−1	0	1	0
0	−1	1	1	0	1
1	0	−1	1	1	0
0	1	−1	0	1	0
0	0	0	1	1	1

No existe A^{-1}, (observar que el $\rho_{(A)} = 2$)